PHILIPPE ROBBA

Croissance des solutions d'une équation différentielle homogène

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. nº 1, p. 1-15
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A1_0>

Groupe de Travail d'Analyse ultramétrique
(Y. AMICE, A. ESCASSUT, P. ROBBA)
1973/74, n° 1, 15 p.

5 et 12 novembre 1973

CROISSANCE DES SOLUTIONS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE HOMOGÈNE

par Philippe ROBBA

(d'après B. DWORK)

0. Mode d'emploi.

Dans cet exposé, on démontre un résultat sur la croissance des solutions d'une équation différentielle linéaire, homogène, à coefficients fractions rationnelles (Théorème 2.2).

On met en évidence une factorisation de l'opérateur différentiel L, liée à l'étude des solutions bornée de $Lu = 0$ dans le disque générique (Théorème 5.8).

On compare la dimension du noyau de L dans $D(0, 1^-)$ avec celle du noyau de L dans $D(a, 1^-)$, $|a| = 1$ (Proposition 3.1, §3.2, Corollaire 6.7, Proposition 6.9).

On compare la dimension du noyau borné de L (solutions analytique bornées de $Lu = 0$) dans $D(0, 1^-)$ avec celle du noyau borné de L dans le disque générique (Théorème 6.4).

On propose des problèmes à résoudre, et on indique des conjectures aux paragraphes 3.2, 5.12, 5.13, 6.1. On donne un exemple au paragraphe 4.6. Ces résultats sont exposés par DWORK dans [2] et [3].

Dans [4], DWORK expose ses motivations, et indique quelques conjectures. L'exemple du paragraphe 4.6 est traité en détail dans [1], où l'on trouvera par ailleurs l'arrière-plan de géométrie algébrique qui motive ces recherches. La présentation du paragraphe 5 est due à ROBBA [5].

1. Définitions.

1.1. Soit K un corps de caractéristique zéro, complet pour une valuation ultramétrique. Soit Ω un corps algébriquement clos, complet pour une valuation, extension de la valuation sur K. Supposons que Ω possède un élément t de module 1, dont l'image dans le corps résiduel de Ω est transcendant au-dessus du corps résiduel de K. Le point t sera appelé le point générique.

1. 2. Comme d'habitude, on pose pour $a \in \Omega$, r réel positif

$$D(a, r^-) = \{x \in \Omega ; \ |x - a| < r\} ,$$

$$D(a, r^+) = \{x \in \Omega ; \ |x - a| \leqslant r\} .$$

Le disque $D(t, 1^-)$ sera appelé le disque générique.

Pour $f \in \Omega[[X-a]]$, $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (X-a)^\nu$, analytique dans $D(a, r^-)$, on pose, pour $\rho < r$,

$$|f|_a(\rho) = \sup_\nu |b_\nu| \rho^\nu .$$

Pour une fonction méromorphe dans $D(a, r^-)$, on posera

$$|f|_a(\rho) = |g|_a(\rho)/|h|_a(\rho) ,$$

si $f = g/h$, g et h étant analytiques dans $D(a, r^-)$.

1.3. Soit $E_0 = K(X)$ le corps des fractions rationnelles à coefficients dans K . Soit E la complétion de E_0 muni de la norme de Gauss

$$f \longmapsto |f|_0(1) = f .$$

On voit sans peine que l'opérateur d/dx , défini sur E_0 , se prolonge sur E . De plus, à cause du choix de t , on voit que si $f \in E_0$, f n'a pas de pôles dans le disque générique $D(t, 1^-)$ et donc la norme de Gauss sur E_0 coïncide avec la norme de la convergence uniforme sur $D(t, 1^-)$ (d'après l'inégalité de Cauchy). Les éléments de E peuvent donc être identifiés avec des éléments analytiques sur $D(t, 1^-)$. De plus les éléments de E_0 n'ont pas de zéros dans $D(t, 1^-)$ et ont un module constant dans $D(t, 1^-)$, il en est donc de même pour les éléments de E .

1.4. On notera $\mathcal{D} = E[D]$ l'anneau enclidien non commutatif des opérateurs différentiels $\sum_{\text{finie}} c_m D^m$, $c_m \in E$. On notera $\mathcal{D}_0$ le sous-anneau $E_0[D]$.

1.5. On dira que $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (X-a)^\nu$, analytique dans $D(a, r^-)$, a <u>une croissance logarithmique d'ordre</u> α dans ce disque si

$$|f|_a(\rho) = O(1/[\log(r/\rho)]^\alpha) , \quad \rho < r .$$

L'espace vectoriel des fonctions analytiques de croissance logarithmique d'ordre α dans le disque $D(a, r^-)$ sera noté $W_a^{r,\alpha}$, et pour simplifier W_a^α si $r = 1$.

On notera que cet espace ne dépend que de $D(a, r^-)$ et non de a .

On obtient la caractérisation suivante de $W_a^{r,\alpha}$.

1.6. LEMME. - <u>Soit</u> $f = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (X-a)^\nu$. <u>Alors</u> $f \in W_a^{r,\alpha}$ <u>si, et seulement si,</u>

$$|b_\nu| = O\left(\frac{\nu^\alpha}{r^\nu}\right) .$$

On démontre le "si" en maximisant $\nu^\alpha (\frac{\rho}{r})^\nu$ par rapport à ν (on trouve

$$\sup_\nu \nu^\alpha (\rho/r)^\nu \leqslant C/[\log(r/\rho)]^\alpha \text{)}$$

et le "seulement si" en maximisant $b_\nu \rho^\nu [\log(r/\rho)]^\alpha$ par rapport à ρ .

1.7. On notera $\mathcal{A}_a^r$ l'espace des fonctions analytiques dans le disque $D(a, r^-)$, et pour simplifier on écrira $\mathcal{A}_a$ si $r = 1$.

Si $a \in \Omega$ et $L \in \mathcal{D}_0$ (ou $L \in \mathcal{D}$ si $a = t$), on notera $\operatorname{Ker}_a L$ l'espace des germes de fonctions analytiques en a annihilées par L .

2. Le théorème de croissance.

2.1. Soit $L \in \mathcal{Q}_0$. On veut étudier le comportement des solutions de l'équation

$$Lu = 0$$

analytiques dans le disque $D(a , r^-)$. Par translation et homothétie, on peut toujours se ramener au cas $a = 0$, $r = 1$, ce que nous ferons.

D'autre part, si

$$L = c_n D^n + c_{n-1} D^{n-1} + \dots + c_0 ,$$

et si l'on pose

$$L' = D^n + \frac{c_{n-1}}{c_n} D^{n-1} + \dots + \frac{c_0}{c_n} ,$$

les solutions de $Lu = 0$ sont les mêmes que les solutions de $L' u = 0$.

On supposera donc désormais que L est unitaire. Dans ce cas, on dira que a est une singularité de L si a est un pôle pour l'un des coefficients

$$c_0 , \dots , c_{n-1} .$$

On démontre (plus facilement que dans le cas classique) que si a n'est pas une singularité de L , $\mathrm{Ker}_a L$ a dimension n (où n est le degré de L).

2.2. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathcal{Q}_0$, de degré n . Si l'équation $Lu = 0$ a n solutions linéairement indépendantes analytiques dans $D(0 , 1^-)$, alors les solutions de $Lu = 0$, analytiques dans $D(0 , 1^-)$, ont une croissance logarithmique d'ordre $n - 1$.

2.3. Nous prouverons ce théorème en démontrant les implications suivantes (Notons que nous pouvons supposer que 0 n'est pas une singularité pour L).

(a) $L \in \mathcal{Q}_0$, $\mathrm{Ker}_0 L \subset \mathcal{A}_0$ implique $\mathrm{Ker}_t \subset \mathcal{A}_t$ (proposition 3.1) ;

(b) $L \in \mathcal{Q}$, $\mathrm{Ker}_t L \subset \mathcal{A}_t$ implique $\mathrm{Ker}_t L \subset W_t^{n-1}$ (n = degré de L), (proposition 4.2) ;

(c) $L \in \mathcal{Q}_0$, $\mathrm{Ker}_0 L \subset \mathcal{A}_0$ et $\mathrm{Ker}_t L \subset W_t^{\alpha}$ impliquent $\mathrm{Ker}_0 L \subset W_0^{\alpha}$ (proposition 4.1).

2.4. Originellement, B. DWORK a prouvé le théorème 2.4 sous l'hypothèse additionnelle que L n'a pas de singularités dans $D(0 , 1^-)$.

3. Comparaison du nombre de solutions de $Lu = 0$ dans les différentes classes résiduelles.

3.1. PROPOSITION. - Soient $a \in D(0 , 1^+)$, $L \in \mathcal{Q}_0$ de degré n , et supposons que L n'a pas de singularités dans $D(a , 1^-)$. Alors si L a n solutions, analytiques dans $D(0 , 1^-)$, linéairement indépendantes, on a $\mathrm{Ker}_a L \subset \mathfrak{A}_a$.

Démonstration. - Soit $L = D^n + c_{n-1} D^{n-1} + \dots + c_0$. Soit

(3.1.1) $$\frac{D^m}{m!} \equiv \sum_{i=0}^{n-1} b_m^i D^i \mod \mathfrak{D}_0 L .$$

Les b_m^i sont des éléments de E_0 définis par les relations de récurrence

(3.1.2) $$\begin{cases} b_m^i = \delta_m^i \text{ pour } 0 \leqslant m \leqslant n-1 \text{ et } 0 \leqslant i \leqslant n-1 \\ (m+1)b_{m+1}^i = b_m^i + b_m^{i-1} - c_i\, b_m^{n-1} . \end{cases}$$

On voit donc que b_m^i est une fraction rationnelle de la forme $(Q_m^i)/(P)^m$, où P est le p. p. c. m. des dénominateurs de $c_0 \dots c_{n-1}$, et le degré de Q_m^i est inférieur à σm où σ est une constante.

On aura donc, pour $r < 1$,

(3.1.3) $$|b_m^i|_0(r) \geq |b_m^i|_0(1).r^{\sigma m} .$$

Si $u_1 , \dots , u_n$ sont des solutions linéairement indépendantes de $Lu = 0$, on a

(3.1.4) $$\frac{u^{(m)}}{m!} = \sum_{i=0}^{n-1} b_m^i\, u^{(i)} .$$

Résolvons ce système par les formules de Cramer. On obtient

(3.1.5) $$b_m^i = \frac{\det(u_j , \dots , u_j^{(m)}/m! , \dots , u_j^{(n-1)})}{W} , \quad 1 \leqslant j \leqslant n$$

où W est le Wronskien, et le numérateur s'obtient en remplaçant la i-ième colonne du Wronskien par la colonne $u_j^{(m)}/m!$.

Comme, pour $u \in \mathfrak{A}_0$, on a $|u^{(m)}/m!|_0(r) \leqslant |u|_0(r)/r^m$, on obtient

(3.1.6) $$|b_m^i|_0(r) \leqslant g(r)/r^m ,$$

où $g(r) = \prod_{j=1}^n |u_j|_0(r)/r^{(n(n-1))/2}\, |W|_0(r)$ ne dépend pas de m .

On déduit de (3.1.3) et de (3.1.6)

(3.1.7) $$|b_m^i|_0(1) \leqslant \frac{g(r)}{r^{m(\sigma+1)}} .$$

Choisissons $\sigma' > \sigma + 1$. On a alors, pour tout $r < 1$,

(3.1.8) $$|b_m^i|_0(1)\, r^{\sigma' m} \leqslant g(r).r^{(\sigma'-\sigma-1)m} .$$

Donc quand $m \longrightarrow \infty$, $|b_m^i|_0(1)\, r^{\sigma' m} \longrightarrow 0$.

En prenant $\rho = r^{\sigma'}$, on voit que, pour tout $\rho < 1$, $|b_m^i|_0(1)\, \rho^m \longrightarrow 0$ quand $m \longrightarrow +\infty$.

Comme L n'a pas de singularités dans $D(a , 1^-)$, b_m^i n'a pas de pôles dans $D(a , 1^-)$, et par suite

(3.1.9) $$|b_m^i(a)| \leqslant |b_m^i|_a(1) = |b_m^i|_0(1) .$$

Si $u \in \mathrm{Ker}_a\, L$, $u = \sum_{m\geq 0} \frac{u^{(m)}(a)}{m!} (X - a)^m$, avec $\frac{u^{(m)}(a)}{m!} = \sum_{i=0}^{n-1} b_m^i(a)\, u^{(i)}(a)$.

D'après (3.1.9) et d'après ce qu'on vient de voir, on a donc $(u^m(a))/m!\ \rho^m \to 0$ quand $m \to \infty$ et ce, pour tout $\rho < 1$, ce qui montre que $u \in \mathcal{A}_a$.

C. Q. F. D.

3.2. Problème. - Supposons maintenant que L n'a de singularités ni dans $D(0\ ,\ 1^-)$, ni dans $D(a\ ,\ 1^-)$. On a montré que si $\dim \mathrm{Ker}_0\, L \cap \mathcal{A}_0 = n = \deg L$, alors $\dim \mathrm{Ker}_a\, L \cap \mathcal{A}_a = n$, et réciproquement.

Plus généralement, a-t-on $\dim \mathrm{Ker}_0\, L \cap \mathcal{A}_0 = \dim \mathrm{Ker}_a\, L \cap \mathcal{A}_a$? (On verra au paragraphe 6.8 que la conjecture 5.12 implique que, pour toutes les classes résiduelles sauf un nombre fini, $\dim \mathrm{Ker}_a\, L \cap \mathcal{A}_a$ est constante).

En particulier, a-t-on $\dim \mathrm{Ker}_0\, L \cap \mathcal{A}_0 = 0$ implique $\dim \mathrm{Ker}_a\, L \cap \mathcal{A}_a = 0$? On verra (§6.7) que si $a = t$ est le point générique, alors $\dim \mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{A}_t = 0$ implique $\dim \mathrm{Ker}_0\, L \cap \mathcal{A}_0 = 0$.

3.3. Remarquons que c'est seulement dans la démonstration de la proposition 3.1 que l'on utilise l'hypothèse que les coefficients de L appartiennent à E_0 . Dans tout ce qui suit, on pourrait aussi bien supposer que les coefficients de L sont des éléments analytiques sur $D(0\ ,\ 1^-)$.

4. La situation dans le disque générique.

4.1. PROPOSITION. - *Soit $L \in \mathcal{O}_0$, de degré n . Si, dans $D(0\ ,\ 1^-)$, $Lu = 0$ a n solutions analytiques linéairement indépendantes, et si $\mathrm{Ker}_t\, L \subset W_t^{\alpha}$, alors dans $D(0\ ,\ 1^-)$ les solutions de $Lu = 0$ ont aussi une croissance logarithmique d'ordre α .*

Démonstration. - Soit $(u_1\ ,\ \ldots\ ,\ u_n)$ une base de $\mathrm{Ker}_t\, L$. En spécialisant la formule (3.1.5) au point générique t , et en utilisant le lemme 1.6, on voit que

$$|b_m^i(t)| = O(m^{\alpha}) \ . \tag{4.1.1}$$

D'autre part, la formule (3.1.5), appliquée aux solutions v_j de $Lu = 0$ dans $D(0\ ,\ 1^-)$, montre que les pôles des b_m^i sont des zéros de W et donc des pôles de L . Mais cette formule montre aussi que les ordres de ces pôles sont bornés indépendamment de m . Il existe donc un polynôme fixe $c(X)$ tel que les fonctions rationnelles $c(X)\ b_m^i(X)$ n'ont pas de pôles dans $D(0\ ,\ 1^-)$.

On peut supposer, sans restreindre la généralité, que 0 n'est pas un zéro de $c(x)$. On a donc

$$|c(0)|\,|b_m^i(0)| \leq |c|_0(1)\ |b_m^i|_0(1) = |b_m^i|_t(1) = |b_m^i(t)| \tag{4.1.2}$$

et donc, d'après (4.1.1),

(4.1.3) $$|b_m^i(0)| = O(m^\alpha) .$$

Par suite, si $u \in \mathrm{Ker}_0\, L$, $(u^{(m)})/m! = O(m^\alpha)$, et donc $u \in W_0^\alpha$.

4.2. PROPOSITION. - Soit $L \in \mathcal{D}$, L de degré n. Si $\mathrm{Ker}_t\, L \subset \mathcal{A}_t$, alors $\mathrm{Ker}_t\, L \subset W_t^{n-1}$.

4.3. PROPOSITION. - Soit $L \in \mathcal{D}$. Si $\mathrm{Ker}_t\, L \cap \mathcal{A}_t \neq \{0\}$ et si $\mathrm{Ker}_t\, L$ n'est pas contenu dans W_t^0, L est réductible dans $\mathcal{D}$.

4.4. La proposition 4.3 implique la proposition 4.2.

La proposition 4.2 se démontre par récurrence sur le degré n de L. Soit donc L de degré n avec $\mathrm{Ker}_t\, L \subset \mathcal{A}_t$.

Si $\mathrm{Ker}_t\, L \subset W_t^0$, il n'y a rien à démontrer.

Sinon, L est réductible, et l'on a $L = L_2 \circ L_1$ et l'on peut supposer que L_1 est irréductible.

Soit $s > 0$ le degré de L_1. Comme on a alors

$$\mathrm{Ker}_t\, L_1 \subset \mathcal{A}_t \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}_t\, L_2 \subset \mathcal{A}_t ,$$

on a, d'après la proposition 4.3, $\mathrm{Ker}_t\, L_1 \subset W_t^0$ et, d'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Ker}_t\, L_2 \subset W_t^{n-s-1}$.

Soit $u \in \mathrm{Ker}_t\, L$. On a $L_2(L_1 u) = 0$, ce qui montre que $v = L_1 u$ appartient à $\mathrm{Ker}_t\, L_2$, et donc appartient à W_t^{n-s-1}.

Soit $(u_1, \ldots, u_s)$ une base de $\mathrm{Ker}_t\, L_1$. On résout $v = L_1 u$ par la méthode de variation des constantes. On cherche u sous la forme $u = w_1 u_1 + \ldots + w_s u_s$ avec

$$0 = w_1' u_1^{(j)} + \ldots + w_s' u_s^{(j)} , \quad 0 \leq j \leq s-1 .$$

On a donc

$$v = w_1' u_1^{(s-1)} + \ldots + w_s' u_s^{(s-1)} .$$

Par suite

$$w_j' = \frac{v \times \text{Polynôme en } u_i^{(k)}}{W} , \quad 0 \leq k \leq s-1 , \quad 1 \leq i \leq s ,$$

où W, wronskien de $u_1, \ldots, u_s$, est une fonction analytique dans $D(t, 1^-)$ qui ne s'annule jamais dans ce disque (car L n'a pas de singularités dans ce disque). Les fonctions $1/W$ et $u_i^{(k)}$ sont bornées dans $D(t, 1^-)$, donc w_j' a une croissance logarithmique d'ordre $n-s-1$ comme v, et donc $w_j \in W^{n-s}$ pour tout j, donc u a une croissance logarithmique d'ordre $n-s \leq n-1$.

4.5. La proposition 4.3 sera démontrée au prochain paragraphe. Ce sera une conséquence du théorème 5.8 et de la proposition 5.10 (cf. §5.11).

4.6. Observons que même si $L \in \mathcal{D}_0$ et les hypothèses de la proposition 4.3

sont satisfaites, L n'est pas nécessairement réductible dans $\mathcal{Q}_0$. L'introduction de $\mathcal{Q}$ est donc absolument essentielle.

Exemple [1] : Soient $K = \hat{\Omega}_p$, et L l'opérateur différentiel définissant les fonctions hypergéométriques

$$L = x(1-x)\, D^2 + (1-2x)D - \frac{1}{4} .$$

Dans le corps résiduel $\overline{K}$, la fonction

$$g(\overline{x}) = \sum_{j=0}^{(p-1)/2} ((\tfrac{1}{2})_j/j!)^2\, \overline{x}^j , \text{ avec } (\theta)_j = \begin{cases} 1 & \text{pour } j = 0 \\ \prod_{n=0}^{j-1}(\theta+n) & \text{pour } j > 0 \end{cases} ,$$

est solution de $Lg = 0$.

On dit que le disque $D(a\,,\,1^-)$, $|a| \leq 1$, est supersingulier si $g(\overline{a}) = 0$.

Dans les disques non supersinguliers, l'équation $Lu = 0$ possède une solution bornée et une solution de croissance logarithmique 1. Dans les disques supersinguliers, toutes les solutions de $Lu = 0$ sont une croissance logarithmique d'ordre $\frac{1}{2}$.

L est réductible dans $\mathcal{Q}$ d'après la proposition 4.3. Soit $L = QR$. Alors les coefficients de R, qui appartiennent à E, sont en fait des éléments analytiques sur le quasi-connexe A réunion des disques non supersinguliers,

$$A = \bigcup_{g(\overline{a})\neq 0} D(a\,,\,1^-) .$$

Ceci signifie que, bien que la solution bornée u_a de $Lu = 0$ ne se prolonge pas d'un disque non supersingulier, $D(a\,,\,1^-)$, dans un autre, la fonction $(u'_a)/(u_a)$, elle, se prolonge analytiquement.

Les coefficients de R ne peuvent pas se prolonger analytiquement dans les disques supersinguliers car, si c'était le cas, il existerait une solution bornée dans ces disques.

5. Le théorème de factorisation.

5.1. Munissons l'espace W_t^0 de la norme de la convergence uniforme. Cela en fait un espace de Banach ultramétrique.

$\mathcal{Q}$ s'identifie à un sous-espace de l'espace $L(W_t^0\,,\,W_t^0)$ des opérateurs linéaires continus de W_t^0 dans lui-même. On munit $\mathcal{Q}$ de la norme d'opérateur. Pour P et Q dans $\mathcal{Q}$, on aura

(5.1.1) $$\|P+Q\| \leq \max(\|P\|\,,\,\|Q\|) ,$$

(5.1.2) $$\|PQ\| \leq \|P\|\|Q\| .$$

De plus, on vérifie que, si $P = \sum c_m\, D^m/m!$, on a

(5.1.3) $$\|P\| = \sup_m |c_m| .$$

5.2. Soit alors $L \in \mathbb{D}$. La fermeture $\overline{\mathbb{D}L}$, dans $\mathbb{D}$, de l'idéal à gauche $\mathbb{D}L$, est aussi un idéal à gauche de $\mathbb{D}$. Comme $\mathbb{D}$ est un anneau euclidien, il existe un générateur unitaire R de $\overline{\mathbb{D}L}$ qui est l'opérateur unitaire de plus petit degré de $\overline{\mathbb{D}L}$.

Nous allons montrer que

$$\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^0 .$$

Le sous-espace $\mathrm{Ker}_a\, L \cap W_a^0$ sera aussi appelé noyau borné de L au point a, et noté $\mathrm{Ker\,born}_a\, L$.

5.3. <u>Définitions</u>.

(i) Soit $L \in \mathbb{D}$. Une <u>suite approximante</u> (de $\mathbb{D}L$) de longueur $i \geq 0$ est une suite (R_n) d'éléments de $\mathbb{D}$ telle que

(5.3.1) R_n est unitaire de degré i,

(5.3.2) $d(R_n, \mathbb{D}L) = \inf_{Q \in \mathbb{D}L} \|R_n - Q\| \to 0$ quand $n \to \infty$,

(ii) Une suite approximante est dite <u>minimale</u> s'il n'existe aucune suite approximante plus courte.

5.4. On voit que la condition (5.3.2) équivaut à la décomposition $R_n = P_n L + Q_n$ avec $\|Q_n\| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

5.5. LEMME. - <u>Une suite approximante minimale converge dans</u> $\mathbb{D}$.

<u>Démonstration</u>. - Soit R_n une telle suite avec

(5.5.1) $$R_n = \sum_{j=0}^{i} c_n^j D^j , \quad c_n^i = 1 .$$

On posera : $\delta_{n,m}^j = c_n^j - c_m^j$, $0 \leq j \leq i$, n et m entiers.

Supposons que R_n ne converge pas. $\mathbf{E}$ est complet et comme le degré de R_n borné, la suite R_n n'est pas de Cauchy. Il résulte de (5.3.1) que, pour un k, la suite (c_n^k) n'est pas de Cauchy. Choisissons k maximal avec cette propriété. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que, pour tout $N > 0$, il existe $n = n(N)$ et $m = m(N)$ plus grands que N tels que

(5.5.2) $$|\delta_{n,m}^k| \geq \alpha .$$

On a, de plus, pour $j > k$,

(5.5.3) $$\delta_{m,n}^j \to 0 \quad \text{quand} \quad N \to +\infty .$$

Posons

$$\gamma_N^j = \delta_{n,m}^j / \delta_{n,m}^k , \quad 0 \leq j \leq i ,$$

$$P_N = \sum_{j=1}^{k} \gamma_N^j D^j , \quad Q_N = \sum_{j=k+1}^{i} \gamma_N^j D^j .$$

P_N est unitaire de degré $k < i$. De plus,

$$P_N = (R_n - R_m)/(\delta_{n,m}^k) - Q_N .$$

Il résulte de (5.5.3) que $\|Q_N\| \to 0$ quand $N \to +\infty$, et donc

$$d(P_N , \mathcal{Q}L) \leqslant \max(\frac{1}{\alpha} d(R_n , \mathcal{Q}L) ; \frac{1}{\alpha} d(R_m , \mathcal{Q}L) ; \|Q_N\|)$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. (P_N) est donc une suite approximante de longueur $k < i$, ce qui contredit la minimalité de la suite (R_n).

5.6. LEMME. - Toute suite approximante minimale de $\mathcal{Q}L$ converge vers R, générateur unitaire de $\overline{\mathcal{Q}L}$.

Démonstration. - La limite R d'une telle suite est unitaire et appartient à $\overline{\mathcal{Q}L}$. De plus, R est de degré minimal dans $\overline{\mathcal{Q}L}$, car s'il existait $Q \in \overline{\mathcal{Q}L}$, unitaire, avec degré $Q <$ degré R, la suite $Q_n = Q$ serait une suite approximante plus courte que la suite R.

5.7. LEMME. - Soit $Q \in \mathcal{Q}$, degré $Q = i$. Si $\mathrm{Ker}_t\, Q$ n'est pas contenu dans W_t^0, il existe une suite approximante de $\mathcal{Q}Q$ de longueur plus petite que i.

Démonstration. - Pour m entier, écrivons

$$D^m/m! \equiv \sum_{j=0}^{i-1} b_m^j D^j \mod \mathcal{Q}Q .$$

Par hypothèse, il existe u analytique dans un voisinage de t, avec $Lu = 0$, et $u \notin W_t^0$. La suite

$$|u^{(m)}(t)/m!| = |\sum_{j=0}^{i-1} b_m^j(t)\, u^{(j)}(t)|$$

n'est donc pas bornée quand $m \to +\infty$. Il existe donc $k < i$ tel que la suite $|b_m^k(t)| = |b_m^k|$ soit non bornée. Choisissons k maximal avec cette propriété. Posons $\beta_m^j = b_m^j/b_m^k$, $0 \leqslant j \leqslant i$.

Pour tout entier n, il existe donc $m(n) = m$ tel que

$$\begin{cases} |b_m^k| \geqslant n \\ \|\beta_m^j D^j/j!\| \leqslant \frac{1}{n}, \quad k+1 \leqslant j \leqslant i-1 . \end{cases}$$

Posons

$$R_n = \sum_{j=0}^{k} \beta_m^j D^j , \quad P_n = \sum_{j=k+1}^{i-1} \beta_m^j D^j .$$

R_n est unitaire de degré k. De plus,

$$R_n = \frac{1}{b_m^k} D^m/m! + P_n \mod \mathcal{Q}Q ;$$

il résulte donc de (5.1.1) et (5.1.3) que

$$d(R_n , \mathcal{Q}Q) \leqslant \max(\frac{1}{|b_m^k|} , \|P_n\|) < \frac{1}{n}$$

ce qui montre que R_n est une suite approximante de longueur $k < i$.

5.8. THÉORÈME. - Soit $L \in \mathcal{Q}$; soit R le générateur unitaire de $\overline{\mathcal{Q}L}$. On a

$$\mathrm{Ker}_t\, R = \mathrm{Ker}_t\, L \cap W_t^0 .$$

Démonstration.

(i) Il est évident que, pour tout $Q \in \overline{\mathcal{Q}L}$,

$$\mathrm{Ker}_t\ Q \cap W_t^0 \supset \mathrm{Ker}_t\ L \cap W_t^0 .$$

Comme, de plus, R divise L à droite,

$$\mathrm{Ker}_t\ R \subset \mathrm{Ker}_t\ L ,$$

et donc

$$\mathrm{Ker}_t\ R \cap W_t^0 = \mathrm{Ker}_t\ L \cap W_t^0 .$$

(ii) Si $\mathrm{Ker}_t\ R \cap W_t^0 \neq \mathrm{Ker}_t\ R$, d'après le lemme 5.7, il existe une suite approximante de $\mathcal{Q}R$, de longueur plus petite que i = degré de R . Il existe donc une suite approximante minimale de $\mathcal{Q}L$ de longueur plus petite que i , ce qui contredit le lemme 5.6.

5.9. Pour u méromorphe dans $D(t , 1^-)$, c'est-à-dire quotient de deux fonctions holomorphes dans $D(t , 1^-)$, on pose

(5.9.1) $$\|u\| = \limsup_{r\uparrow 1} |u|_t(r) .$$

Si $L \in \mathcal{Q}$, il découle immédiatement de la formule (5.1.3) que

(5.9.2) $$\|u^{-1}\ Lu\| \leq \|L\| .$$

5.10. PROPOSITION. - Si l'équation $Lu = 0$ possède une solution analytique dans $D(t , 1^-)$, elle possède une solution analytique et bornée dans $D(t , 1^-)$.

Autrement dit : si $\mathrm{Ker}_t\ L \cap \mathfrak{A}_t \neq \{0\}$, alors $\mathrm{Ker}_t\ L \cap W_t^0 \neq \{0\}$.

Démonstration. - En vertu du théorème 5.8, il faut démontrer que l'opérateur R , défini dans ce théorème, ne peut être l'identité. Si ce n'est pas le cas, il existe $Q_n \in \mathcal{Q}$ tel que

$$1 \equiv Q_n \mod \mathcal{Q}L$$

et

$$\|Q_n\| \leq \frac{1}{n} .$$

Soit u tel que $Lu = 0$, alors $u = Q_n u$, et donc

$$1 = \|u^{-1}\ Q_n\ u\| \leq \|Q_n\| \leq \frac{1}{n} .$$

Cette contradiction termine la démonstration.

5.11. Démonstration de la proposition 4.3. - Si $\mathrm{Ker}_t\ L \cap \mathfrak{A}_t \neq \{0\}$, d'après la proposition 5.10, on a $R \neq 1$ (R générateur unitaire de $\overline{\mathcal{Q}L}$), et si

$$\mathrm{Ker}_t\ L \cap W_t^0 \neq \mathrm{Ker}_t\ L ,$$

on a $R \neq L$ d'après le théorème 5.8. Comme R divise L à droite (car $L \in \overline{\mathcal{Q}L}$), la proposition 4.3 est démontrée.

5.12. Comme le montre l'exemple 4.6, même si $L \in \mathcal{Q}_0$, il peut arriver que l'opérateur R , générateur unitaire de $\overline{\mathcal{Q}L}$, n'appartienne pas à $\mathcal{Q}_0$. On peut néanmoins espérer, comme dans l'exemple 4.6, que les résultats vrais dans le disque générique s'étendent à toutes les classes résiduelles du disque unité, sauf un nombre fini.

Conjecture. - Si $L \in \mathcal{Q}_0$, les coefficients de l'opérateur R , générateur de $\mathcal{Q}L$, se prolongent analytiquement dans $D(0\ ,\ 1^-)$ sauf en un nombre fini de classes résiduelles.

Notons qu'une conséquence immédiate de cette conjecture est que, dans toutes les classes résiduelles, sauf un nombre fini, on a

$$\dim \operatorname{Ker}_a L \cap W_a^0 = \dim \operatorname{Ker}_t L \cap W_t^0 .$$

5.13. Par application répétée des théorèmes 5.7 et 5.9, on obtient une factorisation de L .

(5.13.1) $$L = QR_s \dots R_1 ,$$

avec $\operatorname{Ker}_t Q \cap \mathcal{A}_t = \{0\}$ et $\operatorname{Ker}_t R_j \subset W_t^0$, $1 \leq j \leq s$.

Soit, en posant $P = R_s \dots R_1$,

(5.13.2) $$L = QP \text{ , avec } \operatorname{Ker}_t L \cap \mathcal{A}_t = \operatorname{Ker}_t P .$$

Si $L \in \mathcal{Q}_0$ peut-on espérer cette fois que P aussi appartient à $\mathcal{Q}_0$?

La réponse est non, ainsi que le montre le contre-exemple de MANIN :

Si $L = pxD + (1 - x)D - a$, avec $a \in \underset{\sim}{Z}_p$, l'équation $Lu = 0$ a, dans le disque générique, une solution de rayon de convergence 1 et une solution de rayon de convergence $p^{-p/(p-1)}$. Néanmoins L n'admet pas de factorisation dans $\mathcal{Q}_0$. On montre cependant que, dans ce cas, P est de la forme

$$P = D + \frac{a}{x - 1} - \frac{v'}{v} ,$$

où v est un élément analytique dans le complémentaire d'un disque $D(1\ ,\ r)$ avec $r < 1$. D'où la conjecture suivante.

Conjecture. - Si $L \in \mathcal{Q}_0$, il existe un opérateur différentiel P , dont les coefficients sont des éléments analytiques dans le complémentaire de l'union d'un nombre fini de disques, dont aucun ne contient toute une classe résiduelle, tel que

$$\operatorname{Ker}_t L \cap \mathcal{A}_t = \operatorname{Ker}_t P .$$

6. Dimension du noyau borné.

6.1. Supposons maintenant que $L \in \mathcal{Q}_0$. Nous voulons comparer de façon plus précise que par la proposition 4.1, la croissance des solutions dans le disque générique et dans les autres disques $D(a\ ,\ 1^-)$, $|a| \leq 1$. Nous supposerons que L n'a pas de singularités dans $D(a\ ,\ 1^-)$, et que $Lu = 0$ a n solutions analytiques dans $D(a\ ,\ 1^-)$ linéairement indépendantes. Pour $\alpha \geq 0$, considérons l'application

$$\alpha \longmapsto \dim(\mathrm{Ker}_a\, L \cap W_a^{\alpha}) .$$

Soient $\alpha_0 , \dots , \alpha_k$ les points de discontinuité de cette fonction et $s_0 , \dots , s_k$ les sauts en ces points. Considérons le polygone dont les côtés successifs ont une projection sur Ox égale à s_i et une pente α_i . Autrement dit, les sommets du polygone sont les points de coordonnées $\sum_{i=0}^{j} s_i$, $\sum_{i=0}^{j} \alpha_i\, s_i$, $0 \leq j \leq k$. Il résulte, de la factorisation (5.13.1) et de la démonstration de la proposition 4.2, que dans le disque générique le polygone de L se trouve en dessous du polygone correspondant au cas $\alpha_i = i$, $s_i = 1$, $0 \leq i \leq n-1$ (fig. 1).

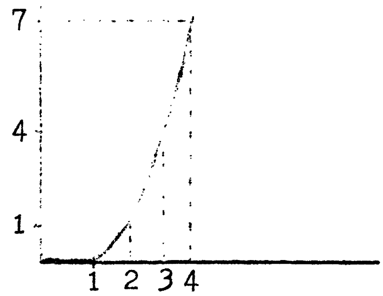
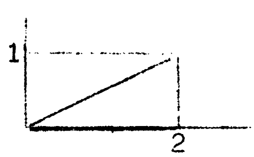


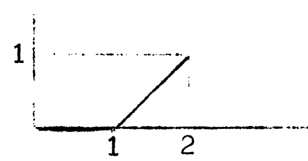
fig. 1

Conjecture. - Le polygone de L relatif au disque $D(a\ ,\ 1^-)$ se trouve au-dessus du polygone de L relatif au disque générique.

Exemple. - Pour l'opérateur considéré en 4.6, on a



dans les disques supersinguliers



dans les disques non supersinguliers

Le théorème 6.4 démontrera la conjecture pour le premier côté du polygone, à savoir le côté de pente 0 , qui existe toujours dans le disque générique d'après la proposition 5.10.

6.2. Avant d'aller plus loin, remarquons que l'opérateur R , générateur unitaire de $\overline{\mathcal{D}L}$, a ses coefficients dans E , donc ceux-ci ne sont pas des fonctions définies dans $D(a\ ,\ 1^-)$. On ne peut donc pas tester R sur les fonctions de $\mathcal{A}_a$. Pour tourner cette difficulté, nous allons approcher R par des éléments de $\mathcal{D}_0$.

6.3. LEMME. - Soit $L \in \mathcal{D}_0$, et soit R le générateur unitaire de $\overline{\mathcal{D}L}$. Quel que soit $n > 0$, il existe $R_n \in \mathcal{D}_0$ et $Q_n \in \mathcal{D}_0$ tels que

$$\text{degré } R_n = \text{degré } R ,$$

$$\|R - R_n\| < 1/n ,$$
$$\|Q_n\| < 1/n ,$$
$$R_n \equiv Q_n \mod \mathcal{Q}_0 \, L .$$

Démonstration. - Comme E_0 est dense dans E, l'existence de R_n ne pose aucun problème. D'autre part, il existe $P \in \mathcal{Q}$ tel que

$$\|R - PL\| < 1/n .$$

Choisissons alors $P_n \in \mathcal{Q}_0$ tel que $\|P - P_n\| < 1/n \, \|L\|$, alors $Q_n = R_n - P_n L$ satisfait aux conditions du lemme.

6.3. Comme en 5.9, on pose pour u méromorphe dans $D(a , 1^-)$

(6.3.1) $$\|u\|_a = \lim \sup_{r \uparrow 1} |u|_a(r) .$$

Si $L \in \mathcal{Q}_0$, on a encore

(6.3.2) $$\|u^{-1} Lu\|_a \leq \|L\|_a$$

et de plus

(6.3.3) $$\|Lu\|_a \leq \|L\| \|u\|_a .$$

On notera $\mathcal{M}_a$ l'espace des fonctions méromorphes dans $D(a , 1^-)$ quotient de deux fonctions analytiques bornées dans $D(a , 1^-)$. Sur $\mathcal{M}_a$, $\| \ \|_a$ définit une norme.

Pour simplifier les notations, on supposera que a n'est pas une singularité de L, mais L peut avoir des singularités dans $D(a , 1^-)$.

6.4. THEORÈME. - Soit $L \in \mathcal{Q}_0$, $|a| \leq 1$. On a

$$\dim \operatorname{Ker}_a L \cap \mathcal{M}_a \leq \dim \operatorname{Ker}_t L \cap W_t^0$$

(et en particulier $\dim \operatorname{Ker}_a L \cap W_a^0 \leq \dim \operatorname{Ker}_t L \cap W_t^0$).

Démonstration. - Si l'assertion est fausse, il existe $u_1 , \ldots , u_{k+1}$ éléments linéairement indépendants de $\operatorname{Ker}_a L \cap \mathcal{M}_a$, où k est la dimension de $\operatorname{Ker}_t L \cap W_t^0$ ou encore le degré de R, générateur unitaire de $\overline{\mathcal{Q}L}$. On peut supposer $\|u_j\|_a = 1$ $1 \leq j \leq k+1$.

Choisissons R_n et Q_n comme dans le lemme 6.2. Comme $Lu_j = 0$, on a

(6.4.1) $$R_n u_j = Q_n u_j = \psi_{j,n} , \quad 1 \leq j \leq k+1$$

avec

(6.4.2) $$\|\psi_{j,n}\|_a \leq 1/n .$$

Regardons (6.4.1) comme un système d'équations linéaires pour les coefficients de R_n. Résolvons ce système pour 1, coefficient de D^k dans R_n. On trouve

$$W(u_1 , \ldots , u_{k+1}) = \det(\psi_{i,n} , u_i^{(k-1)} , \ldots , u_i) , \quad 1 \leq i \leq k+1$$

où W désigne le wronskien de $u_1 , \dots , u_{k+1}$.

On en déduit $\|W\|_a < 1/n$. Ceci étant vrai pour tout n , $\|W\|_a = 0$. Comme $\| \|_a$ est une norme sur $\mathfrak{M}_a$, $W = 0$, ce qui contredit l'hypothèse que $u_1 ,\dots, u_{k+1}$ sont linéairement indépendants.

6.5. On peut généraliser les résultats de la proposition 5.10.

PROPOSITION. – <u>Si l'équation</u> $Lu = 0$ <u>possède une solution méromorphe dans</u> $D(a , 1^-)$, $|a| \leq 1$, <u>elle possède une solution analytique bornée dans</u> $D(t , 1^-)$.

La démonstration est la même qu'en 5.10.

6.7. COROLLAIRE. – <u>Soit</u> $L \in \mathcal{D}_0$, <u>alors</u> $\dim \operatorname{Ker}_t L \cap \mathcal{A}_t = 0$ <u>implique</u> $\dim \operatorname{Ker}_a L \cap \mathcal{A}_a = 0$, $|a| \leq 1$.

C'est le résultat annoncé en 3.2.

6.8. PROPOSITION. – <u>Supposons la conjecture</u> 5.12 <u>démontrée</u>. <u>Alors</u>, <u>pour presque toutes les classes résiduelles</u>, <u>on a</u>

$$\dim \operatorname{Ker}_a L \cap \mathcal{A}_a = \dim \operatorname{Ker}_t L \cap \mathcal{A}_t .$$

<u>Démonstration</u>. – Ainsi qu'on l'a observé en 5.13, on a une factorisation de L dans $\mathcal{D}$: $L = QP$, avec $\operatorname{Ker}_t \cap \mathcal{A}_t = \operatorname{Ker}_t P$ et donc $\operatorname{Ker}_t Q \cap \mathcal{A}_t = \{0\}$. Si la conjecture 5.12 est vraie, les coefficients de P et Q sont des éléments analytiques dans presque toutes les classes résiduelles. Alors, dans l'une des classes, soit le disque $D(a , 1^-)$, on a

$$\operatorname{Ker}_a Q \cap \mathcal{A}_a = \{0\} , \tag{6.8.1}$$

d'après la proposition 6.5 (ainsi qu'on l'a noté, hormis la proposition 3.1, tous les résultats sont valables pour des opérateurs à coefficients éléments analytiques dans une classe résiduelle).

De plus, si L n'a pas de singularités dans ce disque, $\operatorname{Ker}_t P \subset \mathcal{A}_t$ implique

$$\operatorname{Ker}_a P \subset \mathcal{A}_a . \tag{6.8.2}$$

En effet, la proposition 3.1 est valable pour les opérateurs à coefficients éléments analytiques si l'on part du disque générique (car les fonctions b_m^i sont constantes en module dans le disque générique). Il peut arriver aussi que P ait des singularités dans le disque $D(a , 1^-)$ même si L n'en a pas, mais alors ces singularités sont artificielles, c'est-à-dire qu'au voisinage de ces points $Lu=0$ a une famille complète de solutions ; on montre alors que, dans ces conditions, les résultats de 3.1 subsistent (cf. lemme 4.25 de [5]).

Il résulte alors de (6.8.1) et (6.8.2) que

$$\operatorname{Ker}_a P = \operatorname{Ker}_a L \cap \mathcal{A}_a$$

ce qui montre que $\dim \operatorname{Ker}_a L \cap \mathcal{A}_a = \dim \operatorname{Ker}_t L \cap \mathcal{A}_t$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] DWORK (B.). - p-adic cycles. - Paris. Presses universitaires de France, 1969 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 37, p. 27-115).

[2] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, II, Annals of Math., t. 98, 1973, p. 366-376.

[3] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, III, Inventiones Math., Berlin (à paraître).

[4] DWORK (B.). - On p-adic differential equations, I, "Table ronde d'analyse ultramétrique, 1973", Bull. Soc. math. France, Mémoire, t. 39-40, 1974.

[5] ROBBA (P.). - On the index of p-adic differential operators, I, Ann. of Math. (à paraître).

(Texte reçu le 14 mai 1974)

Philippe ROBBA
Université de Paris VI
Mathématiques, Tour 46
4 place Jussieu
75230 PARIS CEDEX 05