GROUPE DE TRAVAIL
D'ANALYSE ULTRAMÉTRIQUE

JEAN-PAUL BEZIVIN

Interpolation de fonctions analytiques bornées

Groupe de travail d'analyse ultramétrique, tome 1 (1973-1974), exp. nº 15, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=GAU_1973-1974__1__A11_0>

20 mai 1974

INTERPOLATION DE FONCTIONS ANALYTIQUES BORNÉES

par Jean-Paul BEZIVIN

Introduction et notations.

Cet exposé consiste surtout dans le développement d'un travail de M. van der PUT [4] sur l'interpolation des fonctions analytiques bornées sur le disque unité "ouvert" d'un corps K valué complet ultramétrique. On étudie ensuite, comme application, les sous-espaces fermés de $c_0(\underset{\sim}{N} \to K)$ (suites d'éléments de K convergeant vers zéro) stables par l'opérateur anti-schift

$$T : (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \to (a_1, \ldots, a_n, \ldots) .$$

On notera Δ le disque unité "ouvert" $\{x \in K ; |x| < 1\}$.

$K\langle X\rangle$ sera l'algèbre de Banach des fonctions analytiques bornées sur Δ munie de la norme habituelle ; $\mathfrak{A}(K)$ sera l'ensemble des fonctions analytiques sur Δ. $b(\underset{\sim}{N} \to K)$, $c(\underset{\sim}{N} \to K)$, $c_0(\underset{\sim}{N} \to K)$ seront les espaces de Banach des suites bornées, convergentes, convergeant vers zéro respectivement, munis des normes habituelles.

Soit $P \in K[X]$. P sera dit μ-extrémal si chaque zéro de P, dans une clôture algébrique de K, est de valeur absolue μ.

On appellera <u>diviseur</u> une expression formelle $D = \prod_1^\infty P_i$, P_i étant un polynôme de $K[X]$, μ_i-extrémal, avec $0 \leq \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_r < \ldots < 1$. D sera dit <u>normalisé</u> si $(\mu_i > 0) \Rightarrow (P_i(0) = 1)$, et si $(\mu_1 = 0) \Rightarrow (P_1(X) = X^d$, $d \in \underset{\sim}{N})$ [2].

Si $f \in \mathfrak{A}(K)$, on notera (f) son diviseur.

1. Généralisation d'un résultat de M. LAZARD [2].

1.1. LEMME. - *Soient* $f \in \mathfrak{A}(K)$, *et* $(f) = \prod P_i$ *son diviseur. Soit* c *tel que* $c^{-1} = (fP_1^{-1})(0)$. *Soit* $K \subset L$ *une extension valuée complète de* K. *Pour tout* $\lambda \in L$, $|\lambda| < 1$, *on a*

$$|f(\lambda)| = |c| \prod |P_i(\lambda)| ,$$

et donc, $\forall \rho$, $0 < \rho < 1$,

$$\|f\|_\rho = |c| \prod \|P_i\|_\rho .$$

<u>Définition</u>. - Pour un diviseur $D = \prod P_i$, défini sur K, et si $\rho \in \underset{\sim}{R}^{+*}$, $0 < \rho \leq 1$, on pose

$$\|D\|_\rho = \prod \|P_i\|_\rho ,$$

expression qui est finie si $\rho < 1$, et peut être infinie si $\rho = 1$.

COROLLAIRE. - <u>Un élément</u> $f \in \mathfrak{A}(K)$ <u>appartient à</u> $K\langle X\rangle$ <u>si, et seulement si,</u> $\|(f)\|_1 < +\infty$.

1.2. THÉORÈME. - <u>Soit</u> D <u>un diviseur sur</u> K . <u>Pour tout</u> ε <u>strictement positif, il existe</u> $f \in \mathfrak{A}(K)$, <u>normalisé par</u> $f(X) = X^d\, g(X)$, $g(0) = 1$, <u>tel que</u> $(f) \geq D$. <u>De plus, pour tout</u> ρ , $0 < \rho \leq 1$,

$$\|D\|_\rho \leq \|f\|_\rho \leq (1+\varepsilon)\|D\|_\rho \ .$$

<u>Si</u> $L \supset K$ <u>est une extension maximalement complète de</u> K , <u>il existe</u> $g \in \mathfrak{A}(L)$ <u>telle que</u> $(g) = D$.

<u>Démonstration</u>. - On pose

$$P_1 \dots P_n(X) = \sum a_{n,i}\, X^i \ ,$$

$$P_1 \dots \hat{P}_j \dots P_n = \sum a_{n,i}^{(j)}\, X^i \ .$$

On voit facilement que, $\forall\, \rho$, $0 < \rho < 1$,

$$|a_{n,i}|\rho^i \leq \|D\|_\rho \ , \quad |a_{n,i}^{(j)}|\rho^i \leq \|D\|_\rho \ , \quad \forall\, i \ , \quad \forall\, j \in \underset{\sim}{N} \ .$$

Soit

$$A_i = (a_{n,i})_{n=1}^{n=\infty} \ , \quad A_i^{(j)} = (a_{n,i}^{(j)})_{n=1}^{n=\infty} \ ;$$

ce sont des suites de $b(\underset{\sim}{N} \to K)$. On considère l'espace de Banach E , engendré par tous les A_i , $\underset{\sim}{A_i^{(j)}}$, et $c(\underset{\sim}{N} \to K)$; E est de type dénombrable, donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une application linéaire $\Phi : E \to K$, prolongeant "lim" de $c(\underset{\sim}{N} \to K) \to K$, et de norme $\|\Phi\| \leq 1 + \varepsilon$.

On pose alors

$$f = \sum \Phi(A_i)\, X^i \ , \quad f^{(j)} = \sum \Phi(A_i^{(j)})\, X^i \ .$$

Comme $\|A_i\| \leq \|D\|_\rho/\rho^i$, $|\Phi(A_i)| \leq (1+\varepsilon)\|D\|_\rho/\rho^i$, donc $f \in \mathfrak{A}(K)$, il en est de même pour $f^{(j)}$; de plus, $\|f\|_\rho \leq (1+\varepsilon)\|D\|_\rho$ si $\rho < 1$.

On vérifie que $f(0) = 1$, et $P_j\, f^{(j)} = f$, d'où la première assertion.

Si L est maximalement complet, il existe un prolongement Φ de "lim"

$$c(\underset{\sim}{N} \to L) \to L$$

à $E \hat{\otimes}_K L$ avec $\|\Phi\| = 1$. En appliquant la méthode précédente, on trouve $g \in \mathfrak{A}(L)$ telle que $\|g\|_\rho = \|D\|_\rho$, $\forall\, \rho$, et $(g) \geq D$. Il est alors facile de voir que $(g) = D$.

2. Interpolation.

Pour la théorie complexe, on se reporte à [1] .

On va démontrer le théorème suivant.

2.1. THÉORÈME. - Soit $(P_i)_1^\infty$ une suite de polynômes premiers entre eux, normalisés par $\|P_i\| = 1$, P_i n'ayant que des zéros de valeurs absolues < 1, $\forall\ i$. On note $O_{i,n}$ l'unique polynôme de degré inférieur à $\deg(P_i) = s_0$ tel que

$$O_{i,n}\, P_1 \ldots P_i \ldots P_n \equiv 1\ [P_i]\ ,\quad A = \mathrm{Sup}_{n,i}\|O_{i,n}\|\ ,$$

et soit τ l'application canonique $K\langle X\rangle \to \prod^\infty K\langle X\rangle/(P_i)$, alors :

(i) (τ est surjective) $\Longleftrightarrow$ $(A < +\infty)$,

(ii) Si τ est surjective, son inverse

$$\tau^* : K\langle X\rangle/\mathrm{Ker}\ \tau \to \prod_1^\infty K\langle X\rangle/(P_i)$$

a pour norme A,

(iii) Si D est un diviseur de décomposition $\prod(P_i)$, alors $\|D\|_1 \leq A \leq \|D\|_1^2$, et $\tau_D : K\langle X\rangle \to \prod K\langle X\rangle/P_i$ est surjective si, et seulement si, $\|D\|_L < +\infty$.

On va d'abord démontrer un lemme :

2.2. LEMME. - Soit $P \in K[X]$ un polynôme, tel que $\|P\| = 1$, et n'ayant que des racines de valeurs absolues < 1 ; soient τ l'application $K\langle X\rangle \xrightarrow{\tau} K\langle X\rangle/(P)$, et $\alpha : K\langle X\rangle \to (c_0(\underset{\sim}{N} \to K))'$ (dual de $c_0(\underset{\sim}{N} \to K)$) l'isométrie bijective donnée par

$$\alpha\left(\textstyle\sum_0^\infty a_n X^n\right)(b_0, \ldots, b_n, \ldots) = \textstyle\sum_0^\infty a_n b_n\ ,$$

où $\sum a_n X^n \in K\langle X\rangle$ et $(b_0, \ldots, b_n, \ldots) \in c_0(\underset{\sim}{N} \to K)$; soit enfin β l'isométrie bijective canonique de $K\langle X\rangle/(P) \to (K\langle X\rangle/(P))''$. Alors il existe une unique application K-linéaire $\mu : (K\langle X\rangle/(P))' \to c_0(\underset{\sim}{N} \to K)$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} K\langle X\rangle & \xrightarrow{\tau} & K\langle X\rangle/(P) \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ (c_0(N \to K))' & \xrightarrow{\mu'} & (K\langle X\rangle/(P))'' \end{array}$$

de plus, μ est isométrique.

Démonstration. - Soient $\overline{1}, \overline{X}, \ldots, \overline{X}^{s-1}$ les images dans $K\langle X\rangle/(P)$ de $1, X, \ldots, X^{s-1}$, où $s = \deg^o(P)$. Si $F \in K\langle X\rangle$, on pose

$$\tau(F) = \textstyle\sum_{i=0}^{i=s-1} a_i(F)\, \overline{X}^i\ .$$

On vérifie alors que l'application

$$\mu : \ell \in (K\langle X\rangle/(P))' \to \mu(\ell) = \left(\ell\left(\textstyle\sum_0^{s-1} a_i(X^n)\, \overline{X}^i\right)\right)_{n=0}^{n=\infty} \in c_0(\underset{\sim}{N} \to K)$$

vérifie les propriétés du lemme.

Démonstration du lemme 2.1. - On note τ_i l'application canonique

$$K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/(P_i)\ ,$$

β_i l'application canonique $K\langle X\rangle/(P_i) \to (K\langle X\rangle/(P_i))''$, et μ_i l'application de $(K\langle X\rangle/(P_i))' \to c_0(\underset{\sim}{N} \to K)$, donnée par le lemme 2.2, alors $\tau = \prod \tau_i$; soient

$\mu_1 = \sum \mu_i$ de $\Sigma(K\langle X\rangle/(P_i))' \to c_0(\underset{\sim}{N} \to K)$, et $\beta = \prod \beta_i$ de

$$\prod K\langle X\rangle/(P_i) \to (\prod K\langle X\rangle/(P_i))'' .$$

On a encore $\beta \circ \tau = \mu' \circ \alpha$, et β , α sont bijectives et isométriques. On peut donc considérer μ' à la place de τ .

En utilisant le théorème de Hahn-Banach, valable ici car les espaces sont de type dénombrable, on voit que (μ' est surjective) $\Leftrightarrow$ ($c > 0$) si

$$c = \inf\{\|\mu(\ell)\|/\|\ell\| \ ; \ \ell \in \Sigma(K\langle X\rangle/(P_i))' \ , \ \ell \neq 0\} .$$

De plus, si $c > 0$, alors $\|\tau^{*-1}\| = c^{-1}$.

Il reste donc à calculer c . On voit facilement que

$$\|\mu(\ell)\| = \operatorname{Sup}\{\frac{\|\alpha(F)\ \mu(\ell)\|}{\|F\|} \ ; \ F \in K\langle X\rangle \ , \ F \neq 0\} .$$

Si $\ell = \sum \ell_i$, $\alpha(F)\ \mu(\ell) = \sum \ell_i(\tau_i(F))$, et pour calculer c , il suffit de considérer des sommes finies $\sum_1^N \ell_i$.

Supposons $A < +\infty$. Soit $b_0 + b_1 \overline{X} + \dots + b_{s_i-1} \overline{X}^{s_i-1} \in K\langle X\rangle/(P_i)$ telle que

$$|\ell_i(b_0 + b_1 \overline{X} + \dots + b_{s_i-1} \overline{X}^{s_i-1})| = \|\ell_i\| \ \|b_0 + b_1 \overline{X} + \dots + b_{s_i-1} X^{s_i-1}\| .$$

Soit $F = 0_{i,N} P_1 \dots \hat{P}_i \dots P_N$. On a alors :

$$|\alpha(F)\ \mu(\ell)| \geq A^{-1} \|F\| \ \|\ell_i\| ,$$

d'où

$$\|\mu(\ell)\| \geq A^{-1} \|\ell\| \ , \ \forall\ \ell \neq 0 ,$$

et $c \geq A^{-1} > 0$, donc τ est surjective.

Si maintenant τ est surjective, l'inverse de l'application ρ

$$K\langle X\rangle/(P_1 \dots P_n) \xrightarrow{\rho} \prod_1^n K\langle X\rangle/(P_i)$$

a pour norme $\|\rho^{-1}\| \leq \|\tau^{*-1}\|$, or $\rho^{-1}(0 , 0 \dots 1 , 0 \dots 0)$ peut s'écrire $0_{i,n} P_1 \dots \hat{P}_i \dots P_n$, et donc $\|0_{i,n}\| \leq \|\tau^{*-1}\|$, $\forall\ i$, $\forall\ n$, et $A \leq \|\tau^{*-1}\| < +\infty$.

(ii) est une conséquence de (i), (iii) résulte d'une inégalité sur les idéaux de $V[X]$, où V est l'anneau de valuation de K ; si I est un idéal de $V[X]$ tel que $I_n V \neq \{0\}$, et si l'on pose $\alpha(I) = \sup\{|\alpha| \ ; \ \alpha \in I_n V\}$ et

$$S(I) = \inf_{\lambda \in V}\{\sup_{f \in I} |f(\lambda)|\} ,$$

on a la relation suivante, si I est de type fini : $S(I)^2 \leq \alpha(I) \leq S(I)$. On considère, dans ce cas particulier, l'idéal $I = (P_i , P_1 \ \dots \ \hat{P}_i \ \dots \ P_n)$.

2.3. COROLLAIRE. - <u>Une suite</u> $(\lambda_n)_{n=1}^{n=\infty}$ <u>est appelée suite d'interpolation si l'application</u> τ : $K\langle X\rangle \to b(\underset{\sim}{N} \to K)$, <u>donnée par</u>

$$f \in K\langle X\rangle \to \tau(f) = (f(\lambda_n))_1^\infty \in b(\underset{\sim}{N} \to K) ,$$

<u>est surjective</u>.

Soit $c = \inf_i \prod_{n=1, n\neq i}^{n=\infty} |\lambda_i - \lambda_n|$, alors

$$((\lambda_n)_1^\infty \text{ est une suite d'interpolation}) \Leftrightarrow (c > 0) .$$

Démonstration. - On applique le théorème 2.1 avec $P_n(X) = X - \lambda_n$.

2.4. COROLLAIRE. - Soit $(\lambda_n)_1^\infty$ une suite d'interpolation, et soit I :

$$I \subset K\langle X\rangle \text{ l'idéal } \{f \in K\langle X\rangle \ ; \ f(\lambda_i) = 0 \ , \ \forall\, i\} \ ;$$

alors les idéaux maximaux M : $I \subset M$ sont en bijection avec les ultrafiltres $\mathcal{U}$ sur $\underset{\sim}{N}$ par l'application :

$$\mathcal{U} \longrightarrow \{f \in K\langle X\rangle \ ; \ \lim_{\mathcal{U}} f(\lambda_n) = 0\} .$$

Démonstration. - Comme $K\langle X\rangle/I \simeq b(\underset{\sim}{N} \longrightarrow K)$, ceci résulte d'un résultat classique [3].

3. Application aux sous-espaces invariants par l'opérateur anti-shift.

T est donné par $T(e_0) = 0$, $T(e_i) = e_{i-1}$, $i \geq 1$, si (e_i) est la base orthonormale de $c_0(\underset{\sim}{N} \longrightarrow K)$: $e_i = (0 , 0 \dots 1 , 0 \dots 0 \dots)$. On a une application ρ : $K\langle X\rangle \longrightarrow \mathcal{L}(E)$, $E = c_0(\underset{\sim}{N} \longrightarrow K)$ pour $\rho(\sum a_n X^n)(e_i) = \sum a_n T^n(e_i)$, ρ est isométrique. On note π_n l'application $E \longrightarrow K$: $\pi_n(e_i) = \delta_i^n$ (symbole de Kronecker). On vérifie que $\pi_0 \circ \rho = \alpha$, où α est l'application considérée dans le lemme 2.2.

3.1. LEMME. - Soit $F \subset E$ un sous-espace fermé invariant par T , alors :

(i) $\forall\, f \in K\langle X\rangle$, $\rho(f)(F) \subset F$.

(ii) Soit $id(F) = \{f \in K\langle X\rangle \ ; \ \rho(f)F = 0\}$; $id(F)$ est un idéal fermé de $K\langle X\rangle$, qui est aussi le noyau de l'application composée

$$K\langle X\rangle \xrightarrow{\pi_0 \circ \rho} E' \xrightarrow{r} F' ,$$

où r est la restriction. De plus, on a $K\langle X\rangle/id(F) \simeq F'$;

(iii) Si $F_1 \subsetneq F_2$ sont deux sous-espaces fermés invariants, on a :

$$id(F_2) \subsetneq id(F_1) \ ;$$

(iv) Soit I un idéal de $K\langle X\rangle$. On pose $n(I) = \bigcap_{f\in I} \operatorname{Ker} \rho(f)$, alors $n(I)$ est un sous-espace fermé invariant de E . De plus, on a : $n(id(F)) = F$.

La démonstration du lemme est immédiate.

3.2. LEMME. - Soit $P \in K\langle X\rangle$ un polynôme de degré s , dont toutes les racines sont de valeur absolue < 1 . On considère l'application μ du lemme 2.2, alors μ est un isomorphisme de $K\langle X\rangle/(P)'$ sur $n(PK\langle X\rangle)$. De plus :

(a) $id[n(PK\langle X\rangle)] = PK\langle X\rangle$;

(b) Pour tout sous-espace fermé invariant de E , de dimension $s \in \underset{\sim}{N}$, il existe un polynôme $P \in K\langle X\rangle$ de degré s ayant uniquement des racines de valeurs absolues < 1 tel que $F = n(PK\langle X\rangle)$.

Démonstration. - On montre d'abord facilement que l'on a $\lim n(PK\langle X\rangle) = s$. Pour montrer que $\mathrm{Im}(\mu) = n(PK\langle X\rangle)$, il suffit alors de montrer que $\mathrm{Im}(\mu) \subset n(PK\langle X\rangle)$, car μ est isométrique. Soit $\ell \in (K\langle X\rangle/(P))'$, alors

$$\forall\, n \geq 0 \,,\quad \alpha(X^n P)\,\mu(\ell) = \mu' \circ \alpha(X^n P)(\ell) = \beta \circ \tau(X^n P)(\ell) = 0 \,,$$

donc comme $\alpha(X^n P) = \pi_n \circ \rho(P)$, $\forall\, n \geq 0$, on a $\rho(P)\,\mu(\ell) = 0$, soit

$$\mathrm{Im}(\mu) \subset n(PK\langle X\rangle) \,.$$

(a) se démontre facilement en écrivant $\mathrm{id}[n(PK\langle X\rangle)] = QK\langle X\rangle$ avec $Q|P$, et en appliquant "n" encore une fois (lemme 3.1, (iv)).

Pour (b), on utilise le polynôme caractéristique de la restriction T^* de T à F .

3.3. LEMME. - Soit D un diviseur sur K , tel que $\|D\|_1 < +\infty$. Soit $D = \prod P_i$; on considère le diagramme de la proposition 2.1 :

$$\begin{array}{ccc} K\langle X\rangle & \xrightarrow{\ \tau\ } & \prod K\langle X\rangle/(P_i) \\ {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} \\ (c_0(\underset{\sim}{N}_a \to K))' & \xrightarrow{\ \mu'\ } & [\Sigma(K\langle X\rangle/(P_i))']' \end{array}$$

On note I_D l'idéal fermé $\{f \in K\langle X\rangle \;;\; (f) \geq D\}$, alors I_D est le noyau de τ , et $\mathrm{Im}(\mu) = n(I_D)$.

De plus, les espaces $\mu([K\langle X\rangle/(P_i)]') = n(P_i\, K\langle X\rangle)$ sont $\|D\|_1^{-2}$-orthogonaux, et leur somme fermée $\Sigma\, n(P_i\, K\langle X\rangle)$ est égale à $\mathrm{Im}\,\mu$. En outre, $\mathrm{id}[\mathrm{Im}\,\mu] = I_D$.

Démonstration. - Le fait que les espaces $n(P_i\, K\langle X\rangle)$ soient $\|D\|_1^{-2}$-orthogonaux provient du théorème 2.1, (iii) ; leur somme fermée est alors égale à $\mathrm{Im}(\mu)$. On a

$$I_D = \mathrm{Ker}(\tau) = \mathrm{Ker}(\beta \circ \tau) = \mathrm{Ker}(\mu' \circ \alpha) \,,$$

donc,

$$(f \in I_D) \Longleftrightarrow (\alpha(X^n f)(\mathrm{Im}\,\mu) = 0) \,,\quad \forall\, n \geq 0 \;;$$

comme $\alpha(X^n f) = \pi_n \circ \rho(f)$,

$$(f \in I_D) \Longleftrightarrow (\rho(f)(\mathrm{Im}\,\mu) = 0) \,,$$

d'où $\mathrm{id}[\mathrm{Im}\,\mu] = I_D$.

On peut maintenant énoncer le théorème suivant.

3.4. THÉORÈME. - Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des diviseurs rationnels sur K , tels que $\|D\|_1 < +\infty$, l'application

$$\Phi : \mathcal{D} \longrightarrow \{\text{ensemble des sous-espaces fermés de } E \text{ invariants par } T\} \,,$$

donnée par $\Phi(D) = n(I_D)$ est bijective ; de plus, $\mathrm{Id}[\Phi(D)] = I_D$.

Démonstration. - Il suffit maintenant de montrer que Φ est surjective. Soit F un sous-espace fermé invariant de $\mathbf{E}$. Soit $f \in K\langle X\rangle$, $f \neq 0$, $f \in \mathrm{Id}(F)$. Posons $(f) = \prod P_i$, on a alors :

$$n(fK\langle X\rangle) = \overline{\sum n(P_i \; K\langle X\rangle)} \supset F ,$$

et l'ensemble des sous-espaces $n(P_i \; K\langle X\rangle)$ est $\|(f)\|_1^{-2}$-orthogonal. On montre alors que $F = \overline{\sum F \cap n(P_i \; K\langle X\rangle)}$, somme $\|(f)\|_1^{-2}$-orthogonale.

Chaque $F \cap n(P_i \; K\langle X\rangle)$ est de dimension finie, et s'écrit donc $n(P_i^* \; K\langle X\rangle)$ avec P_i^* divisant P_i . Soit $D = \prod P_i^*$. On a alors $F = n(I_D)$, ce qui termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HOFFMANN (Kenneth). - Banach spaces of analytic functions. - Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1962 (Prentice-Hall Series in modern Analysis).

[2] LAZARD (Michel). - Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet. - Paris, Presses universitaires de France, 1962 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Public. math., 14, p. 223-251).

[3] PUT (Marius van der). - Algèbres de fonctions continues p-adiques, Indagationes Math., Amsterdam, t. 30, 1968, p. 401-420.

[4] PUT (Marius van der). - The non-archimedian corona problem (à paraître).

(Texte reçu le 10 juin 1974)

Jean-Paul BEZIVIN
163 rue de Charonne
75011 PARIS