DIAGRAMMES VOLUME 69+70 , 2013

Forme des connexes de Farey et construction du complexe de Farey

Saab Abou-Jaoudé
ancien professeur de mathématiques spéciales
docteur d'état en mathématique
abouanpi@gmail.com

A.M.S. Sub. Class : 05 A 04 , 52 A 02 , 52 C 04

Résumé :

L'objectif de ce texte est de démontrer que les composantes connexes du complexe de Farey plan, que nous appelons connexes de Farey, sont des triangles ou des quadrilatères. Pour le faire nous faisons un retour sur les polygones convexes plan à bord orienté en démontrant que si deux vecteurs côtés consécutifs du bord d'un tel polygone ne sont jamais dans le même quadrant, alors ce polygone est un triangle ou un quadrilatère. Ce résultat est, à notre connaissance, inédit. Nous appliquons ce résultat aux connexes de Farey en démontrant que les polygônes qui les déterminent le vérifient.

Mots clé :

Complexe de Farey, Connexe de Farey, Polygone convexe, Convexe polygonal direct, Droite orientée, Demi-plan.

I Introduction

La conjecture de Tajine-Daurat trouve sa source en géométrie discrète au laboratoire du professeur Tajine à Strasbourg. Elle s'énonce de la manière suivante :

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. On considère l'ensemble $D_{m,n}$ des droites rencontrant le carré unité $CU = [0, 1]^2$ et d'équation $ux + vy - w = 0$ dont les coefficients u, v, w sont des <u>entiers relatifs</u> et vérifient les conditions :

$$|u| \leqslant m,\ |v| \leqslant n,\ (u, v) \neq (0, 0),\ w \in \mathbb{Z}.$$

On considère l'ensemble A, complémentaire dans le plan de l'union des droites de $D_{m,n}$. Alors les composantes connexes bornées de A contenues dans le carré unité CU sont des triangles ou des quadrilatères. Nous donnons une condition pour qu'une telle composante connexe K soit un triangle. En particulier si l'un des sommets de K a pour coordonnée $(p/q, p'/q')$, avec $0 < q \leqslant m$ ou $0 < q' \leqslant n$, alors K est un triangle.

Pour faire cette étude nous aurons besoin de faire un long détour passant par les polygones convexes et les convexes polygonaux direct, car nous nous sommes aperçu que la propriété ci-dessus est un cas particulier d'un théorème plus général concernant les polygones convexes et qui, à notre connaissance, est à ce jour inédit.

Nous commençons par rappeler, dans la section II, les définitions des objets géométriques utilisés. Dans la section III, nous donnons les définitions des notions de polygone convexe et de convexe polygonal direct et nous rappelons le théorème classique de dualité entre ces deux notions. Nous introduisons également la notion de réduction d'un convexe polygonal direct. Dans la section IV, nous démontrons le théorème principal concernant les polygones convexes. Nous définissons dans la section V l'ensemble des droites $D_{m,n}$ et le complexe de Farey $CF(m,n)$ et nous démontrons le théorème de structure des composantes connexes de $CF(m,n)$. Nous en profitons pour énoncer la conjecture forte de Tajine-Daurat. Dans la section VI, nous établissons une procédure de construction de $CF(m+1,n)$ à partir de $CF(m,n)$ en produisant une suite $(CF_k(m,n))_{0\leqslant k\leqslant p}$ de complexes tels que $CF_0(m,n)=CF(m,n)$, $CF_p(m,n)=CF(m+1,n)$ et tels que, pour tout entier $k\in[1,p-1]$, les composantes connexes de $CF_k(m,n)$ sont des triangles ou des quadrilatères.

II Rappel des définitions utiles.

On est dans le plan affine réel orienté E, muni d'un repère (O,i,j) [1] direct. On le suppose muni de sa topologie usuelle. La donnée du repère (O,i,j) nous permet de repérer un point M du plan par les coordonnées (x,y) du vecteur $OM=xi+yj$. Les coordonnées d'un point M seront notés (x_M,y_M), lorsque plusieurs points sont en jeu. On note $\det(V,W)$ le déterminant dans la base (i,j) des vecteurs $V=ai+bj$ et $W=ci+dj$. On a donc :

$$\det(V,W)=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}=ad-bc.$$

Les droites (O,i) et (O,j) définissent dans le plan privé de O quatre quadrants :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\},\ Q_2=\{(x,y)\mid x\leqslant 0,\ y\geqslant 0\},\\ Q_3 &= \{(x,y)\mid x\leqslant 0,\ y\leqslant 0\},\ Q_4=\{(x,y)\mid x\geqslant 0,\ y\leqslant 0\}.\end{aligned}$$

On peut ainsi dire si un point M appartient à l'un ou l'autre de ces quadrants (d'origine O) en disant que le vecteur OM lui appartient. Si A est un point du plan, on définit de manière analogue les quadrants d'origine A. Notons déjà qu'un point peut appartenir à deux quadrants

1. On notera les vecteurs sans flèche au dessus pour des raisons de commodités, sauf nécessité.

s'il est situé sur l'un des axes de coordonnées et qu'il est distinct de O. On se permettra d'étendre cette notion aux vecteurs V du plan vectoriel.

Nous aurons besoin de la notion de droite orientée décrite par un couple (A, B) de points. La notation (A, B) désignera l'unique droite du plan contenant les points A et B lorsque ces deux points sont distincts. La droite (A, B) admet des équations de la forme $ux+vy-w=0$, mais elles sont toutes proportionnelles. Parmi ces équations nous en distinguons une que nous qualifierons de canonique. Son premier membre sera :

$$f(M) = \det(AB, AM) = (x_B - x_A)(y_M - y_A) - (y_B - y_A)(y_M - y_A),$$

de sorte que :

$$M \in (A, B) \Leftrightarrow f(M) = 0.$$

La fonction f est clairement une fonction affine de M.

Cette définition canonique nous permet de définir des régions dans le plan à l'aide du signe de $f(M)$. Si $R \in \{\leqslant, \geqslant, <, >\}$, on notera de manière générale $(A, B)^{R0}$ l'ensemble $\{M \mid f(M)\, R\, 0\}$. Ainsi $(A, B)^{>0}$ (resp. $(A, B)^{<0}$, resp. $(A, B)^{\geqslant 0}$, resp. $(A, B)^{\leqslant 0}$) sera le côté strictement positif (resp. strictement négatif, resp. positif, resp. négatif) de la droite (A, B).

Les trois ensembles (A, B), $(A, B)^{>0}$, $(A, B)^{<0}$ forment de façon évidente une partition du plan en trois parties toutes convexes, la première étant fermée, les deux autres étant ouvertes. La frontière de $(A, B)^{>0}$ ainsi que celle de $(A, B)^{\geqslant 0}$, $(A, B)^{<0}$ et $(A, B)^{\leqslant 0}$ est la droite (A, B). Notons enfin que $(B, A)^{>0} = (A, B)^{<0}$ (de même $(B, A)^{\geqslant 0} = (A, B)^{\leqslant 0}$).

Nous aurons besoin de la notion de segment associé à une couple de points (A, B) qu'on notera $[A, B]$. Cet ensemble est défini par la formule :

$$[A, B] = \{(1-t)A + tB \mid t \in [0, 1]\}.$$

Quand $A = B$, Le segment $[A, B]$ est réduit à un point. Dans la suite nous ferons l'abus d'appeler "segment" un segment non réduit à un point. Cela nous évitera des lourdeurs.

Voici une remarque importante concernant ces deux notions. Si la droite (A, B) traverse le segment $[C, D]$ (i.e. le coupe en un point

$M \notin \{C, D\}$), alors C appartient à l'un des demi-plans ouvert $(A, B)^{>0}$ ou $(A, B)^{<0}$ et D appartient à l'autre. On dira alors que C et D sont de part et d'autre de la droite (A, B).

Réciproquement, si $f(M) = 0$ est une équation de la droite (A, B) et si C et D sont deux points du plan qui vérifient $f(C) > 0$, $f(D) \leqslant 0$, alors, par le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $t \to f((1-t)C + tD))$, la droite (A, B) rencontre le segment $[C, D]$ en un point différent de C. Si la condition $f(D) \leqslant 0$ est remplacée par la condition $f(D) < 0$, alors la droite (A, B) traverse le segment $[C, D]$. Cette remarque nous servira dans la démonstration du théorème 2

III Polygone convexe et convexe polygonal direct.

1. Définition d'un polygone convexe (PC).

On dit qu'un partie $K \subset E$ est un PC (Polygone Convexe) s'il existe un ensemble fini X de demi-plans fermés tels que :

1. $K = \bigcap\limits_{P \in X} P$.
2. K est borné.
3. L'intérieur de K est non vide.

On dira que X est un générateur de K.

On note $Fr(K)$ la frontière de K. Elle est contenue dans l'union des droites frontières des $P \in X$. Parmi les générateurs de K, il y en a un X_0 qui est de cardinal minimum. Ce cardinal sera le nombre de côtés de K. On le note $NC(K)$ (Nombre de Côtés). On remarquera (et cela n'est pas évident) que $P \in X_0$ implique que $K \cap Fr(P)$ est un segment (sinon cela contredit la minimalité du cardinal de X_0, la suppression de P de l'ensemble X_0 ne modifiant pas K).

Soit P un élément de X. La frontière de P est une droite orientée D. On peut supposer, quite à changer l'orientation de D par changement du signe de son équation, que $P = D^{\geqslant 0}$. On peut ainsi remplacer la donnée d'un ensemble fini de demi-plans fermés X par la donnée d'un ensemble fini X' de droites orientés telles que :

$$K = \bigcap_{D \in X'} D^{\geqslant 0}.$$

Un vrai triangle T est l'exemple type d'un polygone convexe et $NC(T) = 3$.

2. Définition d'un convexe polygonal direct à n côtés (CPD).

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\mathcal{A} = (A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ une famille de points de E indexée par $\mathbb{Z}$. On dit que $\mathcal{A}$ est un CPD (Convexe Polygonal Direct) à n sommets si les conditions suivantes sont réalisées :

1. La suite $\mathcal{A}$ est n-périodique (i.e. $\forall p \in \mathbb{Z},\ A_{p+n} = A_p$)
2. $\forall p \in [0..n-1],\ \forall q \in [1..n-1] \backslash \{p, p+1\},\ \det(\overrightarrow{A_p A_{p+1}}, \overrightarrow{A_p A_q}) > 0.$

Cette dernière condition implique que, $\forall (p,q) \in [1..n-1]^2,\ p \neq q \Rightarrow A_p \neq A_q$. L'entier naturel n est donc la période principale de $\mathcal{A}$. Il suffira de se donner les points de $\mathcal{A}$ d'indice k tel que $0 \leqslant k < n$ pour décrire le CPD. Nous utiliserons cette liberté en parlant du CPD $(A_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$,
A un CPD $\mathcal{A} = (A_k)_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$, on associe $LP(\mathcal{A}) = \bigcup_{0 \leqslant k \leqslant n-1} [A_k, A_{k+1}]$ qui est la ligne polygonale associée à $\mathcal{A}$. On lui associe également la suite des droites orientées $((A_k, A_{k+1}))_{0 \leqslant k \leqslant n-1}$.
Les trois sommets d'un vrai triangle numérotés dans le sens convenable est l'exemple type d'un CPD.

3. Relation entre PC (Polygone Convexe) et CPD (Convexe polygonal Direct).

Entre ces deux notions, il existe une relation bien connue, énoncée dans le théorème suivant qui permet de remplacer l'une des notions par l'autre :

Théorème 1

- Soit K un PC. Alors il existe un CPD noté $\mathcal{A}$ tel que $Fr(K) = LP(\mathcal{A})$.
- Soit $\mathcal{A}$ un CPD. Alors il existe un PC noté K tel que $LP(\mathcal{A}) = Fr(K)$.

Ce théorème est bien connu des géomètres. En l'absence de référence, nous en avons fait une démonstration fondée sur l'existence d'un générateur minimal de K, mais Monsieur François Rideau nous a signalé la présence d'une formulation équivalente dans le célébre livre de géométrie de Marcel Berger [1], un grand classique.

Pourquoi tout cela ? parce que nous aurons besoin de réduire un CPD par suppression d'un point et que ce qui reste soit encore un CPD. Comme c'est un point clé de notre raisonnement, nous en donnons une démonstration dans le paragraphe qui suit.

4. Réduction d'un CPD.

Soit $\mathcal{A} = (A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un CPD à n sommets, avec $n \geqslant 4$. On définit une suite $(B_k)_{0\leqslant k\leqslant n-2}$ Par la formule $B_k = A_{k+1}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Cette suite (B_k) est prolongée à $\mathbb{Z}$ par $(n-1)$-périodicité.

Théorème 2

La suite $(B_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie ci-dessus est un CPD

Démonstration : Notons K le polygone convexe associé à $\mathcal{A}$. Pour démontrer ce théorème, il nous suffit d'établir que tous les sommets $(A_k)_{2\leqslant k\leqslant n-2}$ sont dans le demi-plan ouvert $P = (A_{n-1}, A_1)^{>0}$. Notons $A = A_0$, $B = A_1$, $C = A_{n-1}$ et plaçons-nous dans le repère direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Ce repère est bien direct car :

$$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \det(\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_{n-1}}) > 0.$$

Il est facile de voir que $P = (A_{n-1}, A_1)^{>0} = \{\ (x,y) \mid x+y-1>0\ \}$ [2].

Notons (a_k, b_k) les coordonnées du point A_k, $2 \leqslant k \leqslant n-2$. Les hypothèses $\det(A_0A_1, A_0A_k) = \begin{vmatrix} 1 & a_k \\ 0 & b_k \end{vmatrix} > 0$ et $\det(\overrightarrow{A_{n-1}A_0}, \overrightarrow{A_{n-1}A_k}) = \begin{vmatrix} 0 & a_k \\ -1 & b_k-1 \end{vmatrix} > 0$ montrent que $b_k > 0$ et $a_k > 0$.L'hypothèse $\det(\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_{n-1}}) > 0$ montre que :

$$\begin{vmatrix} a_2-1 & -1 \\ b_2 & 1 \end{vmatrix} = a_2 - 1 + b_2 > 0,$$

2. En effet, $\det(\overrightarrow{A_{n-1}A_1}, \overrightarrow{A_{n-1}M}) = \begin{vmatrix} 1 & x \\ -1 & y-1 \end{vmatrix} = y - 1 + x$.

ce qui montre que $A_2 \in P$. Supposons l'existence d'un entier $k \in [\![2, n-2]\!]$ tel que $a_k + b_k - 1 \leqslant 0$ et soit p le plus petit d'entre eux. On a $p \geqslant 3$ et $p-1$ est tel que $a_{p-1} + b_{p-1} - 1 > 0$. Puisque, par définition de l'entier p, $a_p + b_p - 1 \leqslant 0$, le segment $[A_{p-1}, A_p]$ rencontre la droite (B, C), dont l'équation est $f(x, y) = x + y - 1 = 0$, en un point M de coordonnées (x_M, y_M) strictement positives puisque celles de A_{p-1} et celles de A_p le sont. De plus, comme $x_M + y_M = 1$, on a $M \neq A_{p-1}$, donc le vecteur $\overrightarrow{A_{p-1}M}$ est un vecteur directeur de la droite orientée (A_{p-1}, A_p). Le point M, étant un point de la droite (B, C) à coordonnées strictement positives, est un point du segment $[B, C]$ distinct de B et de C. Dans ces conditions les deux déterminants $\det(\overrightarrow{A_{p-1}M}, \overrightarrow{MB})$ et $\det(\overrightarrow{A_{p-1}M}, \overrightarrow{MC})$ sont non nuls et de signe contraire. Les points B et C sont ainsi de part et d'autre du côté (A_{p-1}, A_p) de $\mathcal{A}$, ce qui contredit la convexité de K.

Nous avons accessoirement démontré ce que nous appelons le lemme des diagonales :

Lemme 3 (des diagonales)

Pour $2 \leqslant k \leqslant n-2$, les segments $[A_0, A_k]$ et $[A_{n-1}, A_1]$ se traversent.

Cette opération de réduction par suppression de A_0 peut se faire par suppression de n'importe quel point A_p en remarquant que si $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est un CPD, alors $(A_{n+p})_{n \in \mathbb{Z}}$ en est un également.

IV Une propriété des CPD.

Soit $\mathcal{A} = (A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un CPD à n sommets, avec $n > 4$. Tant que $n > 4$, si deux côtés consécutifs sont dans le même quadrant, on peut les remplacer, en appliquant l'opération de réduction ci-dessus, par un seul en supprimant leur point commun. Cet algorithme se termine si $n = 4$ et dans ce cas, le CPD peut avoir deux côtés consécutifs dans le même quadrant, ou si $n > 4$ et le CPD est tel que deux côtés consécutifs ne sont jamais dans le même quadrant.

Nous allons démontrer que cette dernière situation est contradictoire.

Soit donc n un entier > 4 et $\mathcal{A} = (A_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un CPD à n sommets tel que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ et $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ ne sont jamais dans le même quadrant. Voici la première clé : Puisque le nombre de côtés est supérieur ou égal à cinq et qu'il n'y a que quatre quadrants, il y a forcément deux vecteurs distincts $\overrightarrow{A_pA_{p+1}}$ et $\overrightarrow{A_qA_{q+1}}$ dans le même quadrant qu'on peut supposer être le premier sans perte de généralité. On peut supposer, quite à renuméroter le CPD, que $p = 0$ et $1 \leqslant q \leqslant n-1$. Mais la valeur $q = 1$ est impossible puisqu'alors A_0A_1 et A_qA_{q+1} seraient deux côtés consécutifs. De même $q = n - 1$ est impossible puisqu'alors $A_{q+1} = A_n = A_0$ et A_qA_{q+1} et A_0A_1 seraient deux côtés consécutifs. Ainsi l'entier q vérifie la condition $2 \leqslant q \leqslant n - 2$.

Le lemme suivant constitue la seconde clé. Nous en avions fait une démonstration géométrique. La démonstration analytique plus simple que nous donnons nous a été inspiré par François Moulin.

Lemme 4

Avec les notations qui précédent, les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{A_1A_q}$. ne sont pas dans le même quadrant.

Démonstration : Nous supposons comme ci-dessus que $\overrightarrow{A_0A_1}$ est dans le premier quadrant. Nous allons utiliser la méthode analytique qui nous a déjà réussi. Soit donc (x, y) les coordonnées de $\overrightarrow{A_0A_1}$, celles de $\overrightarrow{A_1A_2}$ étant (x', y'). On sait déjà que ce dernier vecteur n'est pas dans le premier quadrant, donc que l'une de ses deux coordonnées est strictement négative.
Par hypothèse det($\overrightarrow{A_0A_1}$,$\overrightarrow{A_1A_2}$) $= xy' - x'y > 0$. Si $x' \geqslant 0$, alors $y' < 0$ et $xy' - x'y \leqslant 0$, ce qui est impossible, donc $x' < 0$ et on sait déjà que $x \geqslant 0$.
Plaçons-nous maintenant dans le repère direct $(A_1, \overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_0})$. On sait (démonstration du théorème 2) que les coordonnées (a, b) de A_q dans ce repère sont strictement positives. Exprimons le vecteur $\overrightarrow{A_1A_q}$ dans la base (i, j). On a :

$$\overrightarrow{A_1A_q} = a\overrightarrow{A_1A_2} + b\overrightarrow{A_1A_0} = a(x'i + y'j) + b(-xi - yj) = (ax' - bx)i + (ay' - by)j.$$

L'abscisse $ax' - bx$ de ce vecteur est clairement strictement négative. Ce vecteur ne peut donc être dans le premier quadrant, ce qui termine la démonstration du lemme.

En considérant les deux vecteurs $\overrightarrow{A_qA_{q+1}}$ et $\overrightarrow{A_nA_{n+1}} = \overrightarrow{A_pA_{p+1}}$ et en renumérotant le CPD à partir de q, on a également démontré que le vecteur $\overrightarrow{A_{q+1}A_p}$ n'est pas dans le premier quadrant.

Vu ce lemme, si $n > 4$, on peut faire des réductions successives par suppression des sommets différents de $A_p, A_{p+1,} A_q, A_{q+1}$ et arriver au CPD $(A_pA_{p+1}A_qA_{q+1})$ qui a quatre sommets et qui vérifie la condition : les deux vecteurs $\overrightarrow{A_pA_{p+1}}$ et $\overrightarrow{A_qA_{q+1}}$ sont dans le même quadrant tandis que les deux autres vecteurs $\overrightarrow{A_{p+1}A_q}$ et $\overrightarrow{A_{q+1}A_p}$ n'y sont pas.

Le lemme suivant qui constitue la troisième clé établit l'impossibilité d'une telle situation :

Lemme 5

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un convexe polygonal direct à quatre sommets tel que deux vecteurs consécutifs $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ et $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ ne sont jamais dans le même quadrant. Alors les vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}$ (resp. $\overrightarrow{A_1A_2}$) et $\overrightarrow{A_2A_3}$ (resp. $\overrightarrow{A_3A_4}$) ne sont jamais dans le même quadrant.

Démonstration : Notons (A, B, C, D) les quatres sommets (A_0, A_1, A_2, A_3) du quadrilatère et raisonnons par l'absurde en supposant que les vecteurs $AB = (x, y)$ et $CD = (x'', y'')$ sont dans le 1er quadrant (i.e. $x, x'', y, y'' \geqslant 0$). notons $BC = (x', y')$ et cherchons à le localiser. On sait déjà qu'il ne peut être dans le 1er ou le 4eme quadrant. Il ne peut être dans le 2eme quadrant (i.e. $x' \leqslant 0,\ y' \geqslant 0$) car dans ce cas on aurait :

$$\det(BC, CD) = x'y'' - x''y' \leqslant 0.$$

On a donc $y' < 0$ et BC est strictement dans le 3eme quadrant ($x' < 0$ et $y' < 0$).
Le même raisonnement appliqué au vecteur CD montre que DA est aussi strictement dans le 3eme quadrant. CB et AD sont ainsi dans le 1er quadrant.
On a ainsi établi que les vecteurs AB, AD, CB, CD sont dans le 1er quadrant. Les points B et D sont donc dans le 1er quadrant d'origine C et aussi dans le 1er quadrant d'origine A. Dans ces conditions, le point A ne peut être dans le 2eme 3eme ou 4eme quadrant d'origine C sinon les deux segments $[A, C]$ et $[B, D]$ ne peuvent se couper qu'aux points C, B, D ou A, ce qu'interdit le lemme des diagonales. Le point A est donc dans le 1er quadrant d'origine C. Mais alors, C est dans le 3eme quadrant d'origine A et on retombe sur le même interdit. Dans tous les cas, l'appartenance de AB et CD au même quadrant est contradictoire.

Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

Théorème 6

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ un convexe polygonal direct à n sommets. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les vecteurs $\overrightarrow{A_{k-1}A_k}$ et $\overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ ne sont jamais dans le même quadrant. Alors $n \leqslant 4$.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer ce théorème à un ensemble de polygones convexes produits à partir d'une famille finie de droites que nous allons définir.

V Définition et étude de $D_{m,n}$ et de $CF(m, n)$

Soit $(m, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. On considère l'ensemble $D_{m,n}$ des droites rencontrant le carré unité $CU = [0, 1]^2$ et d'équation $\boxed{ux + vy - w = 0}$ dont les coefficients u, v, w sont des <u>entiers relatifs</u> et vérifient les conditions :

$$-m \leqslant u \leqslant m,\ -n \leqslant v \leqslant n,\ (u, v) \neq (0, 0),\ w \in \mathbb{Z}.$$

Les droites d'équation $x = 0, x = 1, y = 0$ et $y = 1$ appartiennent bien évidemment à $D_{m,n}$, ainsi que les droites d'équation $-x + y = 0$ et

$x+y-1=0$. Notons que l'ensemble $D_{m,n}$ ainsi défini est constitué d'un nombre fini de droites. En effet, si la droite D d'équation $ux+vy-w=0$ est dans $D_{m,n}$ elle contient un point M de coordonnées $(a,b) \in CU$. Ceci montre que l'entier w satisfait l'inégalité :

$$|w| \leqslant |u|\,a + |v|\,b \leqslant m+n.$$

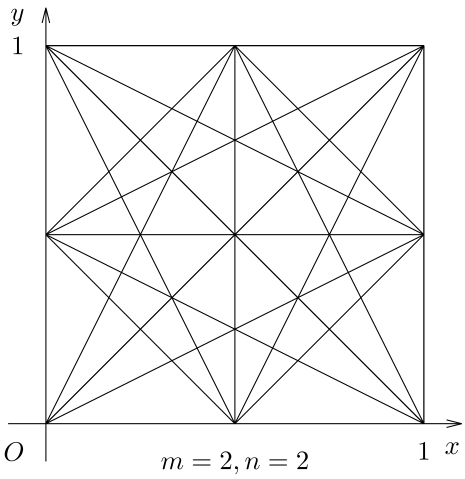
Pour un couple (u,v) donné, il n'y a donc qu'un nombre fini de valeurs de w qui conviennent. Il suffit alors de remarquer que les couples (u,v) admissibles sont en nombre fini. On obtient accessoirement une majoration du cardinal de $D_{m,n}$ par $(2m+1)(2n+1)(2m+2n+1)$. On peut s'intéresser au cardinal de $D_{m,n}$ et le calculer, mais c'est une autre histoire.

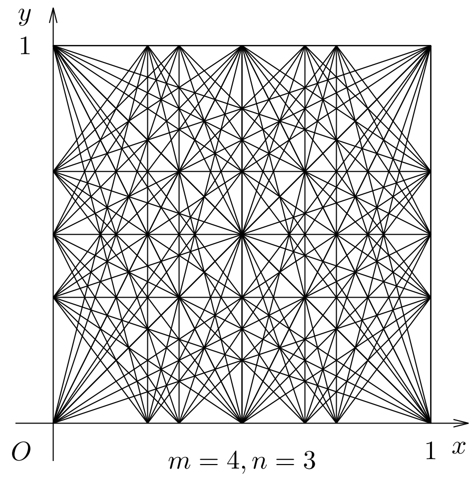
Définition 1 (Complexe de Farey)

On appelle complexe de Farey d'ordre (m,n) le complémentaire de $\bigcup D_{m,n}$ dans le carré unité CU. On le note $CF(m,n)$;

L'ensemble $CF(m,n)$ est un ouvert du plan. Soit K l'une de ses composantes connexes. Par définition elle est non vide bornée et aucune des droites de $D_{m,n}$ ne peut rencontrer K, si bien que K est toujours contenu dans l'un des deux demi-plans ouverts déterminé par chacune des droites de $D_{m,n}$. C'est ainsi que K est contenu dans l'intersection H d'une famille finie de demi-plans ouverts qui sont, on le sait, convexes. H est ainsi une partie convexe de $CF(m,n)$, donc connexe. On a donc, par maximalité de K, $K=H$. L'adhérence de K est donc un polygone convexe. Il existe donc un CPD $\mathcal{A}=(A_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ à p côtés tel que $LP(\mathcal{A})=Fr(K)$. On rappelle que $LP(\mathcal{A})$ est la réunion des segments $[A_k,A_{k+1}]$ et que $Fr(K)$ est la frontière de K.

Lorsqu'on fait une simulation graphique en dessinant les $D_{m,n}$ pour les petites valeurs de m et n, (voir la figure ci-dessous), on s'aperçoit que les $Fr(K)$ sont des triangles ou des quadrilatères. Le calcul, pour ces mêmes petites valeurs, le confirme. Nous nous proposons de démontrer que $p\in\{3,4\}$, c'est-à-dire que $Fr(K)$ est toujours un triangle ou un quadrilatère. Cela nous donnera l'occasion d'en démontrer un peu plus sur ces triangles et quadrilatères.





Notons d'abord que l'ensemble $D_{m,n}$ est invariant par les deux symétries σ_x et σ_y par rapport aux droites $y = 1/2$ et $x = 1/2$. En effet si $D \in D_{m,n}$ a pour équation $ux + vy - w = 0$, $\sigma_x(D)$ a pour équation $ux + v(1-y) - w = ux - vy + v - w = 0$ et $\sigma_y(D)$ a pour équation $u(1-x) + vy - w = -ux + vy + u - w = 0$, et ces deux droites appartiennent à $D_{m,n}$.

Soit maintenant A, B deux points distincts de CU tels que le vecteur $AB = (a, b)$ soit dans le 2eme quadrant ($a \leqslant 0,\ b \geqslant 0$). Alors le vecteur $\sigma_y(A)\sigma_y(B)$ de coordonnées $(-a, b)$ appartient au 1er quadrant. De même si ce vecteur appartient au 4eme quadrant ($a \geqslant 0, b \leqslant 0$), le vecteur $\sigma_x(A)\sigma_x(B)$ de coordonnées $(a, -b)$ appartient au 1er quadrant. Enfin, s'il appartient au 3eme quadrant ($a \leqslant 0, b \leqslant 0$), le vecteur $\sigma_y \circ \sigma_x(A)\sigma_y \circ \sigma_x(B)$ de coordonnées $(-a, -b)$ appartient au 1er quadrant. Ces invariants vont nous permettre une simplification dans la démonstration du lemme suivant qui constitue la quatrième clé de notre démonstration :

Lemme 7 (des trois points)

Soient A, B, C trois points distincts non alignés du carré unité CU. On suppose que :

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont dans le même quadrant.
2. Les droites (A, B) et (B, C) sont dans $D_{m,n}$

Alors il existe une droite $D \in D_{m,n}$ d'équation $\varphi(M) = 0$ qui passe par le point B et qui traverse le segment AC (i.e. $\varphi(A)\varphi(C) < 0$).

Démonstration : Nous supposerons que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont dans le premier quadrant, les autres cas s'y ramenant par les symétries invoquées ci-dessus. Nous allons trouver φ comme différence d'une équation de (A, B) et d'une équation de (B, C) bien choisies.

Notons (x_M, y_M) les coordonnées d'un point M du plan. Les coordonnées des points A, B et C, vue la première hypothèse, vérifient les inégalités :

$$x_A \leqslant x_B \leqslant x_C \quad \text{et} \quad y_A \leqslant y_B \leqslant y_C$$

Les droites (A, B) et (B, C) admettent respectivement des équations de la forme $f(M) = ux + vy - w = 0$ et $f'(M) = u'x + v'y - w' = 0$ où $M = (x, y)$ est un point générique du plan. Ces droites étant dans $D_{m,n}$, leurs coefficients peuvent être choisies comme des entiers vérifiant les inégalités :

$$|u| \leqslant m,\ |u'| \leqslant m,\ |v| \leqslant n,\ |v'| \leqslant n.$$

Les entiers u et v ne sont jamais simultanément nuls. Il en est de même des entiers u' et v'.

La droite (A,B) admet également pour équation :

$$\begin{aligned} g(M) &= \det(AB, AM) \\ &= (x_B - x_A)(y - y_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) \\ &= \alpha x + \beta y - \gamma = 0. \end{aligned}$$

On a $\beta = (x_B - x_A) \geqslant 0$ et $\alpha = -(y_B - y_A) \leqslant 0$. De plus ces deux réels α et β ne sont pas nuls simultanément car $A \neq B$. f et g, équations de la même droite (A,B) sont donc proportionnels, avec un coefficient de proportionnalité non nul. En changeant éventuellement f en $-f$ on peut supposer que ce coefficient est strictement positif. Ainsi on aura $u \leqslant 0$ et $v \geqslant 0$.

On peut faire de même avec f' en posant $g'(M) = \det(BC, BM)$ et faire en sorte que $u' \leqslant 0$ et $v' \geqslant 0$.

Etudions maintenant le signe de $g(C)$ et celui de $g'(A)$ qui ne sont jamais nuls puisque, par hypothèse A, B, C ne sont pas alignés. On a :

$$\begin{aligned} g(C) &= \det(AB, AC) = \det(AB, AB + BC) = \det(AB, BC) \\ g'(A) &= \det(BC, BA) = -\det(BA, BC) = \det(-BA, BC) = \det(AB, BC). \end{aligned}$$

Ces déterminants (égaux et non nuls) sont donc de même signe. Ainsi $f(C)$ et $f'(A)$ sont de même signe (et non nuls tous les deux). Posons :

$$\varphi(M) = f(M) - f'(M) = (u - u')x + (v - v')y - (w - w').$$

Vu les signes de u, u' et ceux de v, v', et la stabilité de $\mathbb{Z}$ par soustraction, φ est l'équation d'une droite de $D_{m,n}$ qui passe par le point B. On a de plus :

$$\varphi(A) = -f'(A) \quad \text{et} \quad \varphi(C) = f(C) \quad \text{donc} \quad \varphi(A)\varphi(C) < 0.$$

La droite D d'équation $\varphi(M) = 0$ est une solution au problème posé CQFD.

La conclusion de ce lemme peut se formuler autrement : le point A est dans l'un des demi-plans ouverts déterminés par la droite D et le point C est dans l'autre. Ce lemme nous permet de donner le théorème suivant qui est la propriété essentielle de $Fr(K)$.

Théorème 8

Soit K une composante connexe de $CF(m,n)$ et soit A, B, C trois sommets consécutifs de $Fr(K)$ (qui est un convexe polygonal direct). Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ne sont jamais dans le même quadrant.

Démonstration : Raisonnons par l'absurde et supposons que AB et BC sont dans le même quadrant. Alors d'après le lemme précédent, il existe une droite $D \in D_{m,n}$ passant par B, d'équation φ, et telle que $\varphi(A)\varphi(C) < 0$. On peut, en changeant éventuellement φ en $-\varphi$, supposer que $\varphi(A) > 0$ et $\varphi(C) < 0$. les points A et C étant sur la frontière de K et φ étant continue, il existe un point A' de K tel que $\varphi(A') > \varphi(A)/2$ et un point C' de K tel que $\varphi(C') < \varphi(C)/2$.

Notons P_+ le demi-plan ouvert $\{M \mid \varphi(M) > 0\}$ et P_- le demi-plan ouvert $\{M \mid \varphi(M) < 0\}$. Comme , par définition de K, $D \cap K = \varnothing$, on a

$$K = (P_+ \cap K) \cup (P_- \cap K)$$

Ces deux ouverts sont non vides (le premier contient A', le second contient C') et disjoints. K est donc non connexe, ce qui est une contradiction.

1. Les composantes connexes de $CF(m,n)$.

Rappelons que $CF(m,n)$, contenu dans le carré unité, est borné. Soit K l'une de ses composantes connexes (qui est donc bornée). Le théorème précédent nous apprend que $Fr(K)$ est un $LP(\mathcal{A})$ d'un LPC $\mathcal{A}$ qui vérifie la propriété : deux côtés consécutifs ne sont pas dans le même quadrant. Nous avons démontré plus haut qu'un tel LPC ne pouvait avoir plus de quatre côtés. Comme l'adhérence de K est un polygone convexe, $\mathcal{A}$ a trois côtés au moins. Nous avons ainsi démontré le théorème suivant :

Théorème 9 (Tajine-Daurat)

L'adhérence de toute composante connexe du complexe de Farey $CF(m,n)$ est un triangle ou un quadrilatère.

Nous pouvons améliorer le résultat de ce théorème en précisant la nature de $Fr(K)$ selon la position des côtés consécutifs. On est dans l'une des deux configurations suivantes.

- Si $Fr(K)$, en tant que CPD, est tel que deux côtés consécutifs sont dans deux quadrants opposés (i.e. Q_1 et Q_3 ou Q_2 ou Q_4), alors $Fr(K)$ est un triangle.

- Sinon $Fr(K)$ est un quadrilatère. Si on en prend un représentant convexe polygonal direct $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ alors il existe un entier p tel que, pour $i \in [1..4]$, $\overrightarrow{A_{p+i-1}A_{p+i}}$ est dans le quadrant Q_i.

La démonstration de ces deux résultats est analogue à celle du lemme 3. Elle repose sur le fait simple suivant :

Lemme 10

Si $Fr(K)$ est un quadrilatère représenté par le convexe polygonal direct $ABCD$, alors la condition "$AB \in Q_1$ et $BC \in Q_3$" est contradictoire.

Démonstration : En effet CD ne peut appartenir à Q_2 pour une raison d'orientation. Par le lemme 3, il ne peut appartenir à Q_1. Par le théorème 8, il ne peut appartenir à Q_3. Il appartient donc à Q_4. Pour des raisons analogues DA appartient à Q_2.
Ceci montre que B et D sont dans le demi-plan $x \geqslant 0$ d'origine A et aussi dans le demi-plan $x \geqslant 0$ d'origine C, ce qui démontre que les diagonales AC et BD ne peuvent se traverser, contredisant le lemme des diagonales.

Nous conjecturons que les composantes connexes bornées du complémentaire de $\bigcup D_{m,n}$ dans le plan sont des triangles ou des quadrilatères. Cette propriété peut-elle être étendue aux composantes connexes non bornées et quel sens cette extension aurait-elle ?

VI De $CF(m,n)$ à $CF(m+1,n)$.

Le but de cette section est de démontrer un théorème dont la conséquence est un algorithme efficace pour calculer les composantes connexes d'un complexe de Farey d'ordre $(m+1,n)$ à partir de celles d'ordre (m,n).

D'abord quelques rappels. On est dans le plan réel affine muni d'un repère (O,i,j). :

- Une droite de Farey d'ordre (m,n) a une équation de la forme : $ux+vy = w$, avec u,v,w entiers, $|u| \leqslant m$, $|v| \leqslant n$.

- On note $D_{m,n}$ l'ensemble des droites de Farey d'ordre (m,n) qui rencontrent le carré unité.

- On note $CF(m,n)$ le complémentaire de $D_{m,n}$ dans le carré unité et on l'appelle le complexe de Farey d'ordre (m,n). Ses composantes connexes seront appelées facettes. On se conforme ainsi à la nomenclature introduite par la théorie des graphes planaires.

- On appelle sommet d'ordre (m,n) (de Farey) tout point d'intersection de deux droites de Farey situé dans le carré unité.

- On appelle segment de Farey ou arête tout segment dont les extrémités sont deux sommets consécutifs d'une droite de Farey

- On qualifiera de négative (resp. de positive) une droite de pente < 0 (resp. > 0). On dira qu'elle est de type N (resp. de type P)

- Le qualificatif horizontale (resp. verticale) est attribué à une droite dont une équation est de la forme $vy = w$ (resp. $ux = w$). On dira qu'elle est de type H (resp. de V).

- On dira qu'une droite est oblique si elle est soit positive soit négative.

Enfin, on se permettra de typer une arête par le type de la droite de Farey qui la contient.

Ceci posé, nous avons déjà mis en évidence la forme des composantes connexes de $CF(m,n)$. Elles vérifient la propriété suivante :

Soit K une telle composante connexe, qu'on appellera "facette" pour faire court. Alors $Fr(K)$ est un triangle ou un quadrilatère. Si c'est un triangle, ses trois côtés ne peuvent être du même type. Si c'est un quadrilatère on peut nommer ses sommets A, B, C, D de sorte que les deux segments opposés AB et DC soient de type P (positives), les deux autres AD et BC étant de type N (négatives).

Nous savons de plus que si K a l'un des côtés de sa frontière de type H (horizontal) ou de type V (vertical), alors c'est un triangle et les deux autres côtés sont obliques et de type opposés (N puis P ou P puis N).

Encore quelques notations : l'ensemble $D_{m+1,n} \backslash D_{m,n}$ des droites d'équation $(m+1)x + vy = w$ sera noté DD, le sous-ensemble des droites négatives (resp. positives, resp. verticales) de DD sera noté DN (resp. DP, resp. DV). Notons qu'il n'y a pas dans DD de droites horizontales.

Faisons d'abord quelques remarques qui vont guider notre réflexion :

1- Soit D une droite de DD d'équation $(m+1)x + vy = w$ qui rencontre une droite oblique ou verticale $D' \in D_{m+1,n}$ d'équation $u'x + v'y = w'$ avec $0 < u' \leqslant m+1$, $|v'| \leqslant n$ en un point M. Alors le point M appartient également à la droite D'' d'équation

$$(m+1-u')x + (v-v')y = w - w'.$$

Si v et v' sont de même signe, alors $D'' \in D_{m,n}$ et M est un sommet d'ordre (m,n). En particulier, si D est une verticale ($D \in DV$ et $v = 0$) et si elle rencontre une oblique de $D_{m,n}$ en un point M, alors M est un sommet d'ordre (m,n). Si D est une oblique ($v \neq 0$) et qu'elle rencontre une verticale de DD d'équation $(m+1)x = w'$ en un point M du carré unité, ce point est situé également sur l'horizontale de $D(m,n)$ d'équation $vy = w - w'$

Il en résulte que si D traverse un segment de Farey AB d'ordre (m,n) en un point $M \notin \{A, B\}$:

Si $D \in DV$, alors AB est horizontal.

Si $D \in DN$ (resp. $D \in DP$), alors AB est de type P ou H (resp. de N ou H). Dans tous les cas, AB ne peut être de type V. On résume en disant que D et AB sont d'oblicité opposée, ou bien AB est horizontale.

C'est dans ce dernier cas qu'il peut y avoir un problème.

2- Toute facette d'ordre (m,n) est située entre deux horizontales et deux verticales consécutives de $D_{m,n}$. En particulier si elle est traversée par une droite de DV, cette dernière est unique, deux droites distinctes de DV étant séparées par une verticale de $D_{m,n}$ (propriété des nombres de Farey).

3- Nous allons typer les facettes par la liste des types de leurs arêtes successives, parcourues dans le sens direct. Modulo le choix de l'arête de départ, les facettes de $CF(m,n)$, ainsi que celles de $CF(m+1,n)$, sont ainsi :

soit des quadrilatères et elles sont du type $PNPN$.

soit des triangles et elles sont de l'un des types : VPN, HNP, NNP, PPN.

On numérote les droites de DD, de 1 jusqu'à $p = card(DD)$ en numérotant d'abord les droites de DV, puis celles de DN, puis celles de DP. On va construire une suite de complexes $CF_k(m,n)$

avec $CF_0(m,n) = CF(m,n)$. ayant construit $CF_k(m,n)$, pour $k < p$, on construit $CF_{k+1}(m,n)$ en coupant, quand cela est possible, les facettes de $CF_k(m,n)$ par la droite de DD de numéro $k+1$. On obtient, une fois épuisées les droites de DD, $CF_p(m,n) = CF(m+1,n)$.

Nous nous proposons de démontrer, par récurrence sur k, que les composantes connexes de chaque complexe $CF_k(m,n)$ sont des triangles ou des quadrilatères.

Déroulons donc les droites de DD dans l'ordre indiqué :

1- Coupons par une droite verticale $D \in DV$. Soit K une facette traversée par D.

- Si K est un quadrilatère D ne peut que passer par deux sommets opposées de K et le transformer en deux triangles de type VPN.
- Si K est un triangle, il ne peut être que de type HNP, et D passe par le sommet commun de l'arête de type N et de l'arête de type P. K est alors transformée en un triangle de type VPH et un triangle de type HNV.

Après coupure par toutes les verticales, La structure des quadrilatères est conservée, tandis que la structure des triangles s'enrichit de deux types nouveaux VPH et HNV.

2- Coupons maintenant par $D \in DN$. Soit K une facette traversée par la droite D. Cette dernière ne peut traverser une arête de K de type N. Donc :

- Si c'est un quadrilatère :
  ... Soit elle traverse les deux arêtes opposées de type P et coupe donc K suivant deux quadrilatères de même type que K,
  ... Soit elle traverse une arête de type P et elle passe par l'un ou l'autre des sommets de l'arête opposée. Elle découpe donc K en un quadrilatère de même type et un triangle de type NNP.
  ... Soit elle passe par deux sommets opposées de la frontière de K et elle découpe K en deux triangles encore de type NNP.
- Si c'est un triangle, la liste des types est VPN, HNP, NNP, PPN, VPH, HNV, NNH, le dernier n'étant pas encore apparu. La droite D traverse certainement un côté et traverse un autre côté ou passe par le sommet opposé. D'autre part elle ne peut traverser une arête de type V ou de type N. Donc :
  ... Si le type de K est dans l'ensemble $\{VPN, NNP, HNV, NNH\}$ la droite D la coupe en deux facettes triangulaires dont les types sont dans le même ensemble (faire un dessin).
  ... Si le type de K est dans l'ensemble $\{HNP, PPN, VPH\}$; dans le cas où la droite D passe par un sommet, on voit assez facilement qu'elle coupe la facette K suivant deux triangles de type déjà énuméré ; dans le cas où elle traverse deux côtés, elle coupe K en un triangle d'un type déjà énuméré et un quadrilatère de type $HNPN$, $PNPN$ ou $VPNH$.

Il apparait donc de nouveaux types de quadrilatère, $HNPN$ ou $VPNH$. Mais le raisonnement portant sur le cas $PNPN$ s'applique pour les mêmes raisons.

On a donc obtenu, après le tracé des droites de DN, un complexe dont les composantes connexes sont :

- des quadrilatères de type $HNPN$, $PNPN$ ou $VPNH$.

- des triangles de type VPN, HNP, NNP, PPN, VPH, HNV ou NNH.

3- Coupons enfin par les droites de DP. Une telle droite $D \in DP$ ne peut traverser une arête de type V ou P pour des raisons analogues à celles invoquées pour les droites de DN. Le seul problème qui peut se poser est la traversée d'une arête horizontale AB en un point M. Un tel point M est déjà présent comme sommet. En effet, cette arête AB est contenue dans une droite dont l'équation est de la forme $py = q$ et la doite D a une équation de la forme $(n+1)x - vy = w$, si bien qu'il existe un entier k tel que la droite d'équation $(n+1)x + (kp-v)y = kq + w$, qui passe par le même point M, soit dans DN. La situation douteuse est donc impossible car, dans les cas litigieux de quadrilatères de type $HNPN$ ou $VPNH$, le point d'intersection avec l'horizontale a déjà été produit par une droite de DN.

Nous avons donc démontré le théorème de complexité spatiale suivant :

Théorème 11

Si on construit progressivement $CF(m+1,n)$ à partir de $CF(m,n)$ en coupant par les droites de DV, puis par celles de DN et enfin par celles de DP, la configuration du complexe obtenu à chaque étape n'admet pour composantes connexes que des triangles ou des quadrilatères.

Références :

[1] Saab Abou-Jaoudé, Forme des connexes de Farey. /arxiv.org/pdf/1312.4306.pdf (2013)

[2] Saab Abou-Jaoudé, Dénombrement de triplets d'entiers NDN.PDF (2014) diffusé sur Whaller.com et Ãă l'université de Strasbourg.

[3] Malcolm Douglas McIlroy. A note on discrete representation of lines. ATT Technical Journal, 64(2) :481-490, 2984.

[4] Alain Daurat, Mohamed Tajine, Mahdi Zouaoui. About the frequencies of some patterns in digital planes. application to area estimators. Computer Graphics, 2008.