DIAGRAMMES VOLUME 69+70 , 2013

Nombre de sommets du complexe de Farey

Saab Abou-Jaoudé
ancien professeur de mathématiques spéciales
docteur d'état en mathématiques
abouanpi@gmail.com

A.M.S. Sub. Class : 05 A 04 , 52 A 02 , 52 C 04

Résumé :

Nous nous intéressons à l'ordre de grandeur du nombre de sommets du complexe de Farey. Nous établissons un résultat partiel qui est une minoration du nombre de sommets du complexe $CF(n,n)$ qui est de la forme kn^6 où K est une constante indépendante de n. Pour obtenir ce résultat nous calculons l'ordre du sommet $A = (\frac{p}{sq}, \frac{p'}{sq'})$ de $CF(m,n)$, avec p (resp. p') premier avec sq (resp. sq') et q premier avec q'. Nous obtenons la majoration optimale $\frac{4mn}{sqq'}$. Nous utilisons cette majoration pour minorer le nombre de sommets de $CF(n,n)$.

Mots clé :

Complexe de Farey, Connexe de Farey, Droite de Farey. Sommet de Farey. Segment de Farey. Graphe planaire.

I Rappels des notations

On appelle **carré unité** le carré $C = [0,1]^2$ de $\mathbb{R}^2$.
Soit m et n deux entiers naturels non nuls. On considère l'ensemble D des droites d'équations $\boxed{ux + vy = w}$ où :

$$(u,v,w) \in \mathbb{Z}^3,\ -m \leqslant u \leqslant m,\ -n \leqslant v \leqslant n,\ (u,v) \neq (0,0)$$

On n'a pas unicité de l'équation d'une telle droite, mais si on impose aux coefficients (u,v,w) d'être premiers entre eux et de respecter la condition :

$$u > 0 \quad \text{ou} \quad (u = 0 \text{ et } v > 0)$$

l'équation devient unique. Nous dirons que c'est l'**équation réduite** de la droite D.

On appelle **droite de Farey** d'ordre (m,n) toute droite de l'ensemble D qui rencontre C suivant un segment **non réduit à un point**. L'ensemble des droites de Farey d'ordre (m,n) sera noté $D_{m,n}$. On partitionne cet ensemble en quatre parties qu'on note :

- $DH_{m,n} = \{D \in D_{m,n} \mid u = 0\}$ (Droites de Farey Horizontales)

- $DV_{m,n} = \{D \in D_{m,n} \mid v = 0\}$ (Droites de Farey Verticales)

- $DN_{m,n} = \{D \in D_{m,n} \mid u > 0, v > 0\}$ (Droites de Farey de pente Négative)

- $DP_{m,n} = \{D \in D_{m,n} \mid u > 0, v < 0\}$ (Droites de Farey de pente Positive).

On appelle **sommet de Farey** tout élément de l'ensemble $SF_{m,n} = \{d_1 \cap d_2 \cap C \mid (d_1, d_2) \in D^2_{m,n}, d_1 \neq d_2\}$. En d'autres termes un sommet de Farey est un point du carré unité, intersection de deux droites de Farey distinctes. Notons qu'un tel point peut appartenir à plus de deux droites de Farey.

II Une propriété des sommets de Farey

Soit $A \in SF$. On définit les ensembles de droites de Farey suivants :

- $DN(A) = \{D \in DN_{m,n} \mid A \in D\}$ (ensemble des Droites Négatives passant par A)

- $DP(A) = \{D \in DP_{m,n} \mid A \in D\}$ (ensemble des Droites Positives passant par A)

- $DH(A) = \{D \in DH_{m,n} \mid A \in D\}$ (ensemble des Droites Horizontales passant par A)

- $DV(A) = \{D \in DV_{m,n} \mid A \in D\}$ (ensemble des Droites Verticales passant par A)

Avec ces notations, on a :

Proposition 1

Soit $A = (x, y)$ un sommet de Farey intérieur au carré unité. Alors :

$$\exists (d_1, d_2) \in DN_{m,n} \times DP_{m,n} : A = d_1 \cap d_2$$

Démonstration : On dispose de deux droites de Farey d'équations réduites φ_1 et φ_2 qui se coupent en A.
- Si aucune des deux n'est dans $DN(A) \cup DP(A)$, comme deux droites de $DH(A)$ ne se coupent pas (affinement parlant), pas plus que deux droites de $DV(A)$, l'une des deux est dans $DH(A)$ et l'autre est dans $DV(A)$. Les deux droites d'équation $\varphi_1 + \varphi_2$ et $\varphi_1 - \varphi_2$ sont une solution au problème.
- Sinon, On peut supposer, modulo la symétrie par rapport à la droite $y = 1/2$, que l'une des droites est dans

$DN(A)$. Nous allons démontrer que l'hypothèse $DP(A) = \varnothing$ est contradictoire.
Considérons pour cela les équations réduites des droites de $DN(A)$. Elles sont de la forme $ux + vy - w$, avec $u > 0$, $v > 0$, et elles sont en nombre fini. Soit $d_0 \in D(A)$ d'équation réduite $\varphi_0 = u_0 x + v_0 y - w_0$ de coefficient u_0 minimum. On a $u_0 > 0$, $v_0 > 0$. Soit $d \neq d_0$ une autre droite de $D(A)$ d'équation réduite $\psi = ux + vy - w$. Il en existe puisque $A \in SF$.
- Supposons cette droite dans $DH(A)$. On a alors deux droites de $D(A)$ d'équations respectives :

$$\begin{aligned} \varphi_0(x,y) &= u_0 x + v_0 y - w_0 \text{ avec } u_0 > 0,\ v_0 > 0, \\ \psi(x,y) &= vy - w \quad \text{ avec } v > 0. \end{aligned}$$

La division euclidienne de v_0 par v fournit deux entiers (q, r) tels que :

$$v_0 = qv + r \text{ avec } 0 \leqslant r < v.$$

Alors la droite d'équation $\varphi_0 - (q+1)\psi = u_0 x - (v - r)y - (w_0 - (q+1)w)$ est une droite de $DP_{m,n}$ qui passe par A,d'où contradiction.
- Supposons-là dans $DV(A)$. Son équation sera de la forme : $\psi = ux - w$. L'hypothèse $u < u_0$ entraine l'existence dans $DN(A)$ d'une droite d'équation $\varphi_0 - \psi = (u_0 - u)x + vy - (w_0 - w)$, ce qui contredit la définition de u_0. D'autre part, $u = u_0$ entraine l'existence d'une droite dans $DH(A)$, ce qui nous ramène au cas précédent. On a donc $u > u_0$ et la droite d'équation $\psi - \varphi_0 = (u - u_0)x - v_0 y + w_0$. est une droite de $DP_{m,n}$ qui passe par A, donc encore une contradiction.
- Supposons-là enfin dans $DN(A)$. Elle a une équation de la forme : $\psi = ux + vy - w$, avec $u \geqslant u_0$. En choisissant l'équation d'une telle droite de u minimum, et en lui retranchant φ_0, on arrive à une contradiction, soit sur le choix de u, soit l'existence d'une droite dans $DH(A)$ ou dans $DP(A)$.
Nous avons donc bien démontré que $DP(A) \neq \varnothing$ et $DN(A) \neq \varnothing$.

III Sommet de Farey et droite de Farey.

On considère un point $A = (a, b)$ du carré unité à coordonnées rationnelles, situé sur une droite de $D_{m,n}$. S'il est situé sur une autre droite de $D_{m,n}$, un calcul simple montre que les dénominateurs de ses coordonnées sont majorés par $2.m.n$. On se place dans cette hypothèse et on suppose que A est intérieur au carré unité. En effet les sommets de Farey situés sur la frontière du carré unité sont facilement énumérés.
On pose $denom(a) = sq$, $denom(b) = sq'$, avec $q \wedge q' = 1$.
De même $numer(a) = rp$, $numer(b) = rp'$, avec $p \wedge p' = 1$.
On a : $0 < rp < sq \leqslant 2mn$ et $0 < rp' < sq' \leqslant 2mn$.
Les fractions a et b étant supposés sous forme irréductible, on a aussi :

$$rp \wedge sq = 1 \text{ et } rp' \wedge sq' = 1.$$

On note $H_{m,n}$ l'ensemble des hexuplets (q, q', r, s, p, p') qui vérifient les conditions ci-dessus. A tout élément $h = (q, q', r, s, p, p') \in H_{m,n}$ correspond un point rationnel $A_h = (\frac{rp}{sq}, \frac{rp'}{sq'})$ de <u>**l'intérieur du carré unité**</u> et on voit facilement que l'application $\varphi : h \to A_h$ est injective.

Soit $h = (q, q', r, s, p, p') \in H_{m,n}$. On cherche s'il existe une droite $D \in D_{m,n}$ d'équation réduite $u_0 x + v_0 y = w_0$ contenant le point A_h. L'appartenance de A_h à D s'écrit :

$$u_0 \frac{rp}{sq} + v_0 \frac{rp'}{sq'} = w_0,$$

soit, après réduction au même dénominateur :

$$u_0 rpq' + v_0 rp'q = w_0 sqq'.$$

Il s'en suit que q, premier avec rpq', divise u_0. De même q' divise v_0 tandis que r divise w_0. Posons :

$$u_0 = qu,\ v_0 = q'v,\ w_0 = rw.$$

L'équation précédente devient, après simplification :

$$up + vp' = ws.$$

Faisons un point provisoire. On va supposer $D \in DN_{m,n}$ (i.e. $1 \leqslant u_0 \leqslant m$ et $1 \leqslant v_0 \leqslant n$).

- l'entier q (resp. q', resp. r) divisant u_0 (resp. v_0, resp. w_0), on a $1 \leqslant q \leqslant m$ (resp. $1 \leqslant q' \leqslant n$, resp. $1 \leqslant r \leqslant m+n$).
– les entiers q, q', r sont premiers entre eux deux à deux.
- les entiers p, p', s sont premiers entre eux deux à deux.
- Les entiers u, v, w vérifient :

$$1 \leqslant u \leqslant \frac{m}{q}, \quad 1 \leqslant v \leqslant \frac{n}{q'}, \quad up + vp' = sw, \quad u \wedge v \wedge w = 1.$$

Le point $A = (\frac{rp}{sq}, \frac{rp'}{sq'})$ appartient à une droite de $DN_{m,n}$ si et seulement si ces dernières conditions sont réalisés par au moins un triplet (u, v, w).

Remarquons, avant d'aller plus loin, que si la droite D est dans $DP_{m,n}$ (i.e. $1 \leqslant u_0 \leqslant m$ et $1 \leqslant -v_0 \leqslant n$) on a exactement le même problème en changeant v en $-v$. Il suffit donc de remplacer la condition $1 \leqslant v \leqslant \frac{n}{q'}$ par la condition $1 \leqslant -v \leqslant \frac{n}{q'}$.

IV Un point rationnel est un sommet

Un sommet de Farey intérieur au carré unité est situé sur deux droites de Farey distinctes. Dans ces conditions il est toujours intersection d'une droite de $DN_{m,n}$ et d'une droite de $DP_{m,n}$. Il existe donc deux triplets d'entiers naturels (u,v,w) et (u',v',w') tels que :

$$1 \leqslant u \leqslant \frac{m}{q},\ \ 1 \leqslant v \leqslant \frac{n}{q'},\ up + vp' = sw, \qquad (1)$$

$$1 \leqslant u' \leqslant \frac{m}{q},\ 1 \leqslant v' \leqslant \frac{n}{q'},\ u'p - v'p' = sw' \quad (2)$$

Revenons sur la définition d'un tel point A. Posons $\alpha = 2mn$. Un tel point A est défini par la donnée de :

- deux entiers $(q,q') \in [1,m] \times [1,n]$, avec $q \wedge q' = 1$.

- d'un entier $r \in [1, m+n]$, avec $r \wedge qq' = 1$. (r divise $w_0 \leqslant m+n$)

- d'un triplet d'entiers (s,p,p') premiers entre eux deux à deux et vérifiant les conditions :

$$0 < rp < qs \quad \text{et} \quad 0 < rp' < q's \quad \text{avec} \quad rp \wedge sq = 1,\ rp' \wedge sq' = 1$$

- l'équation $up + vp' = sw$ d'inconnues (u,v,w) doit avoir une solution dans $[1, \frac{m}{q}] \times [1, \frac{n}{q'}] \times \mathbb{Z}$ et une autre dans $[1, \frac{m}{q}] \times [-\frac{n}{q'}, -1] \times \mathbb{Z}$

Notons que $sq,\ sq'$ sont des entiers strictement majorés par α.

Mieux, on a $sqq' < \alpha$.

Notons aussi la majoration $|w| \leqslant \frac{1}{s}\left(\frac{mp}{q} + \frac{np'}{q'}\right)$.

On peut paramétrer les solutions de l'équation $up + vp' = sw$ par un couple d'entiers. Soit en effet (l,l') un couple d'entiers qu'on appellera couple conjugué de (p',p) qui réalise l'identité de Bezout $lp' - l'p = 1$. Nous savons qu'un tel couple existe. les solutions (u,v,w) de l'équation $up + vp' = sw$ peuvent alors être paramétrées par $(w,t) \in \mathbb{Z}^2$ de la manière suivante :

$$u = tp' - swl',\ v = -tp + swl \quad (w = w).$$

Nous appellerons PW ce premier paramétrage.

On peut paramétrer autrement. Soit (s',l') un couple d'entiers conjugué de (p',s) (i.e. $s'p' - l's = 1$). Les solutions (u,v,w) de l'équation $up + vp' = sw$ peuvent être paramétrées par $(u,t) \in \mathbb{Z}^2$ de la manière suivante :

$$u = u, \quad v = -s'pu + st; \quad (w = -upl' + tp').$$

Nous appellerons PU ce deuxième paramétrage.

Notons que s' est l'inverse de p' modulo s.

On peut paramétrer aussi par (v, t). Soit (s', l) un couple conjugué de (p, s) (i.e. $s'p - ls = 1$). Les solutions (u, v, w) de l'équation $up + vp' = sw$ peuvent être paramétrées par $(v, t) \in \mathbb{Z}^2$ de la manière suivante :

$$u = -s'p'v + st, \quad v = v, \quad (w = -vp'l + tp).$$

Nous appellerons PV ce troisième paramétrage.

Ces paramétrages vont nous aider à compter le nombre de solutions des équations (1) et (2) en supposant que chacune d'elle a au moins une solution. On pourra ainsi savoir, pour tout $h \in H_{m,n}$ combien de droites de Farey passent par A_h, sachant qu'il y en a une de $DN_{m,n}$ et une autre de $DP_{m,n}$ qui passent par ce point. Nous aurons besoin du résultat suivant :

Proposition 2

Soit $h = (q, q', r, s, p, p') \in H_{m,n}$ vérifiant $s \leqslant \max(\frac{m}{q}, \frac{n}{q'})$. Alors A_h est un sommet de Farey.

Démonstration : Notons d'abord que $q \leqslant m$ et $q' \leqslant n$, si bien que $\frac{m}{q}$ et $\frac{n}{q'}$ sont $\geqslant 1$.
Supposons par exemple que $s \leqslant \frac{n}{q'}$. Utilisons le paramétrage PU. effectuons la division euclidienne de $s'p$ par s. Soit a et s_0 les deux entiers vérifiant :

$$s'p = a\,s + s_0, \quad 1 \leqslant s_0 < s.$$

La condition $s_0 \geqslant 1$ résulte du fait que $s'p \wedge s = 1$. Alors, le couple $(u, t) = (1, a)$ fournit le triplet $(1, -s_0, -pl' + ap')$ solution et le couple $(u, t) = (1, a+1)$ fournit le triplet $(1, s - s_0, -pl' + (a+1)p')$ solution. A_h est donc bien un sommet de Farey.
Si $s \leqslant \frac{m}{q}$, l'utilisation du paramétrage PV conduit à un résultat analogue.

Remarque : Cette proposition nous permet accessoirement de majorer le nombre de solutions, c'est-à-dire le nombre de droites de Farey passant par A_h. Pour $u \leqslant \frac{m}{q}$ fixé, il y a, au plus, $\frac{2n}{sq'} + 1 \leqslant \frac{3n}{sq'}$ valeurs possibles de v. Le nombre de solutions est donc inférieur à $\frac{3mn}{sqq'}$. Nous approfondirons cette question au paragraphe VII

Pour nettoyer un peu le terrain, on va commencer par majorer le nombre des sommets "proches" d'une verticale ou d'une horizontale de Farey. Plus précisèment, notons NSB_k le nombre des points A_h, $h = (q, q', r, s, p, p') \in H_{m,n}$ tels que $s \leqslant k \max(\frac{m}{q}, \frac{n}{q'})$, avec $k \in \mathbb{N}^*$.

V Une majoration de NSB_k.

Il suffit de faire la sommation sur toutes les valeurs possibles de h. On augmente la majoration en remplaçant $s \leqslant k \max(\frac{m}{q}, \frac{n}{q'})$ par $s \leqslant k(\frac{m}{q} + \frac{n}{q'}) = s_1$. Nous savons aussi que

$$q \leqslant m,\ q' \leqslant n,\ r \leqslant m+n,\ p \leqslant \frac{sq}{r},\ p' \leqslant \frac{sq'}{r}.$$

On a donc,

$$\begin{aligned} NSB_k &\leqslant \sum_{q,q',r} \sum_{s \leqslant s_1} \frac{s^2 q q'}{r^2} \leqslant \sum_{q,q',r} \frac{qq'}{r^2} s_1^3 \\ &\leqslant k^3 \sum_{q,q',r} \frac{1}{r^2} \left(\frac{m^3 q'}{q^2} + 3\frac{m^2 n}{q} + 3\frac{mn^2}{q'} + \frac{n^3 q}{q'^2} \right) \end{aligned}$$

En majorant $\sum \frac{1}{r^2}, \sum \frac{1}{q^2}$ et $\sum \frac{1}{q'^2}$ par $\zeta(2)$, $\sum q'$ par n^2, $\sum q$ par m^2, Il reste

$$NSB_k \leqslant k^3 \zeta(2) m^2 n^2 \left((\zeta(2)(m+n) + 3(\ln m + \ln n + 2) \right)$$

En remarquant que $\zeta(2) \leqslant 2$, $\ln m \leqslant m-1$ et $\ln n \leqslant n-1$, nous obtenons la majoration "confortable" suivante :

$$NSB_k \leqslant 10k^3 m^2 n^2 (m+n).$$

En particulier, prenant $k = 1$, nous obtenons une majoration du nombre de sommets se trouvant sur une horizontale ou une verticale de Farey :

$$NSB_1 \leqslant 10m^2 n^2 (m+n).$$

VI Une minoration de NSB_1

Avec les notations précédentes, si $sq \leqslant m$, alors le point A_h se trouve sur une droite D de Farey verticale ($D \in DV_{m,n}$) d'équation

$sqx = rp$.Nous noterons NSV le nombre des sommets se trouvant sur une droite $D \in DV_{m,n}$. De même, si $sq' \leqslant n$, le point A_h se trouve sur une droite D de Farey horizontale ($D \in DH_{m,n}$) d'équation $sq'y = rp'$. Nous noterons NSH le nombre des sommets se trouvant sur une droite $D \in DH_{m,n}$. Enfin nous noterons $NSHV$ le nombre des sommets se trouvant à l'intersection d'une verticale et d'une horizontale. Nous disposons déjà de l'égalité :

$$NSB_1 = NSV + NSH - NSHV.$$

De plus, nous avons la majoration évidente : $NSHV \leqslant m^2n^2$, si bien que :

$$NSB_1 \geqslant NSV + NSH - m^2n^2.$$

On va calculer un minorant de NSV en se limitant aux points $A_h = \left(\frac{rp}{sq}, \frac{rp'}{sq'}\right)$ tels que $h = (q, q', r, s, p, p') \in H_{m,n}$ soit de la forme $h = (1, q', 1, s, p, p')$ et vérifie les conditions :

$$s \leqslant m,\ p \leqslant s,\ p' \leqslant sq',\ p \wedge sp' = 1,\ p' \wedge sq' = 1$$

On minore encore en imposant a p la condition $p \wedge sp'q' = 1$. On a :

$$\sum_{p \leqslant s,\ p \wedge sp'q'=1} 1 = \sum_{p \leqslant sp'q',\ p \wedge sp'q'=1} \frac{1}{p'q'} = \frac{\varphi(sp'q')}{p'q'}.$$

Comme $sq' \wedge p' = 1$, on a $\varphi(sp'q') = \varphi(sq')\varphi(p')$, d'où :

$$NSV \geqslant \sum_{q'=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \frac{\varphi(sq')}{q'} \sum_{p' \leqslant sq', p' \wedge sq'=1} \frac{\varphi(p')}{p'}$$

On sait qu'il existe des constantes K_1, K_2, K_3 ($K_1 \geqslant 0.2,\ K_2 \geqslant 0.11,\ K_3 \geqslant 0.07$) telle que :

$$\sum_{k \leqslant x, k \wedge x=1} \frac{\varphi(k)}{k} \geqslant K_1 x, \qquad \sum_{k \leqslant x, k \wedge x=1} \varphi(k) \geqslant K_2 x^2, \qquad \sum_{k \leqslant x, k \wedge x=1} k\,\varphi(k) \geqslant K_3 x^3$$

Il vient donc, en utilisant la relation $\varphi(a\,b) \geqslant \varphi(a)\,\varphi(b)$, valable pour tout couple (a, b) d'entiers :

$$NSV \geqslant \sum_{q'=1}^{n} \sum_{s=1}^{m} \frac{\varphi(sq')}{q'} K_1 sq' = K_1 \sum_{q'=1}^{n} \varphi(q') \sum_{s=1}^{m} s\varphi(s) \geqslant K_1K_2K_3 n^2 m^3$$

Posons $K = K_1K_2K_3$. En faisant le même calcul pour NSH, on obtient la minoration :

$$NSH \geqslant Kn^3m^2$$

On en déduit :

$$\boxed{NSB_1 \geqslant m^2n^2\left(K(m+n)-1\right)}$$

On peut améliorer la valeur de la constante en faisant un calcul plus raffiné. Nous avons d'ores et déjà la minoration inconditionnelle de NS

$$NS \geqslant m^2n^2\left(K(m+n)-1\right) >>_{m,n\to+\infty} m^2n^2(m+n)$$

Un calcul analogue portant sur les $h = (q, q', 1, s, p, p')$, avec les limitations :

$$s \leqslant \frac{2mn}{qq'},\ p \leqslant sq,\ p' \leqslant sq',$$

donne une minoration du cardinal de $H_{m,n}\bigcap[0,1]^2$ de la forme $K'm^3n^3$, K' constante > 0, mais comme tous ces points ne sont pas des sommets de Farey, nous ne pouvons pas en déduire un minorant de NS. L'attaque directe pour évaluer un minorant de NS se heurte à la difficulté de trouver une condition suffisante raisonnable pour dire que l'équation $up + vp' = ws$ (voir section IV équations (1) et (2)) d'inconnues (u, v, w) admet au moins deux solutions.

Nous allons donc attaquer ce dénombrement par un autre biais, en étudiant le nombre de paires de droites de Farey s'intersectant au même sommet de Farey.

VII Intersection de deux droites de Farey.

Si k droites de Farey se coupent au même point A_h, alors il y a $\frac{k(k-1)}{2}$ sommets confondus avec le point A_h. Notons C_k le nombre de sommets de Farey par lesquels passent k droites de Farey. On dira que le point $A_h \in C_k$ est d'$\underline{\text{ordre } k}$ et on posera $\underline{od(A_h) = k}$.

On note S le nombre total de paires de droites de Farey qui se coupent dans le carré unité, On rappelle que NS désigne le nombre total de sommets de Farey. On a :

$$\begin{aligned} NS &= \sum_{j=2}^{+\infty} C_j \quad \text{et} \\ S &= \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{j(j-1)}{2} C_j = \sum_{j=2}^{k} \alpha_j C_j + \sum_{j=k+1}^{+\infty} \alpha_j C_j, \end{aligned}$$

où on a posé $\alpha_j = \frac{j(j-1)}{2}$ et où k est un entier à définir. Remarquons que les C_j sont nuls à partir d'un certain rang. On va tenter d'estimer la somme :

$$S_k = \sum_{j=k}^{+\infty} C_j \quad \text{de sorte que} \quad C_k = S_k - S_{k+1}.$$

En remarquant que $\alpha_{k+1} - \alpha_k = k$, On a :

$$R_k = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \alpha_j C_j = \sum_{j=k+1}^{+\infty} \alpha_j (S_j - S_{j+1}) = \frac{(k+1)k}{2} S_{k+1} + \sum_{j=k+2}^{+\infty} j S_j.$$

S_j est le nombre de sommets d'ordre $\geqslant j$. Notre objectif est d'estimer la somme ci-dessus et de démontrer qu'elle est une fraction de S, si bien que S et NS seront du même ordre quand $m, n \to +\infty$. Nous sommes poussé sur cette voie par les résultats d'une expérimentation numérique. Cette expérimentation numérique nous a conduit à construire des algorithmes très efficaces pour énumérer les connexes de Farey ou compter les sommets de Farey.

Pour l'instant, nous devons estimer, pour $h = (q, q', r, s, p, p') \in H_{m,n}$, l'ordre de A_h. Notons que cet ordre ne dépend que du triplet (s, p, p').

Conjecture : $\exists c > 0 : \forall h \in H_{m,n}\ ,\ od(A_h) \leqslant \frac{2cmn}{sqq'}$.

Cette conjecture, avec $c = 2$, est confirmée numériquement pour les couples (m, n) tels que : $3 \leqslant n \leqslant m \leqslant 26$. Le calcul nous a également montré que cette inégalité est optimale et l'égalité est atteinte notamment lorsque $m \wedge n = 1$. Admettons-là provisoirement et voyons ce qu'on peut en tirer.

Pour (q, q', r, s) fixé, on a $p \in [1..\frac{sq}{r}[,\ p' \in [1..\frac{sq'}{r}[$. Le nombre de tels sommets est donc inférieur à $\frac{s^2qq'}{r^2}$ et tous ces sommets ont un ordre majoré par $\frac{2cmn}{sqq'}$. Dire que cet ordre est $\geqslant k$, c'est dire que $s \leqslant \frac{2cmn}{kqq'}$. On a donc :

$$\begin{aligned} S_k &\leqslant \sum_{q,q',r} \sum_{s \leqslant \frac{2cmn}{kqq'}} \frac{s^2qq'}{r^2} \leqslant \sum_{q,q',r} \frac{qq'}{r^2} \left(\frac{2cmn}{kqq'}\right)^3 \\ &= \frac{8c^3m^3n^3}{k^3} \sum_{q,q',r} \frac{1}{q^2q'^2r^2} \leqslant 8c^3\zeta(2)^3 \frac{m^3n^3}{k^3} = C\frac{m^3n^3}{k^3} \end{aligned}$$

On obtient ainsi une majoration de R_k, pour $k \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} R_k &= \frac{(k+1)k}{2} S_{k+1} + \sum_{j=k+2}^{+\infty} jS_j \\ &\leqslant Cm^3n^3 \left(\frac{k}{2(k+1)^2} + \sum_{j=k+2}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \right) \\ &\leqslant Cm^3n^3 \left(\frac{k}{2(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} \right) \\ &\leqslant \frac{3Cm^3n^3}{2(k+1)} \leqslant \frac{2Cm^3n^3}{k}. \end{aligned}$$

On en déduit la minoration suivante du nombre de sommets d'ordre inférieurs ou égaux à k à partir de l'inégalité :

$$\alpha_k \sum_{j=2}^{k} C_j \geqslant \sum_{j=2}^{k} \alpha_j C_j = S - R_k \geqslant S - \frac{2Cm^3n^3}{k}.$$

Si nous établissons l'existence d'une constante C_1 telle que, pour $m = n$, $S \geqslant C_1 n^6$, il nous suffira de choisir un entier k tel que $\frac{2C}{k} \leqslant \frac{C_1}{2}$ pour avoir la minoration :

$$NS \geqslant \sum_{j=2}^{k} C_j \geqslant \frac{C_1}{k(k-1)} n^6.$$

Nous sommes donc conduit à estimer le nombre S des paires de droites de Farey se coupant à l'intérieur du carré unité. Cette estimation étant un peu délicate nous allons plutôt calculer un minorant de S en nous limitant à des paires de droites qui se coupent certainement dans le carré unité, sans qu'il soit besoin de le vérifier.

VIII Une minoration de S

On se place dans le cas $\underline{m = n}$ [1]

Considérons l'ensemble DN des droites de $DN_{m,n}$ qui coupent les segments $([0,1],[1,1])$ et $([0,0],[1,0])$ (côté haut et bas du carré unité). Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble DP des droites de $DP_{m,n}$ qui coupent les segments $([0,0],[0,1])$ et $([1,0],[1,1])$ (côté gauche et droit du carré unité) par la rotation de centre $[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ et l'angle $\frac{\pi}{2}$. Toute droite de DN coupe toute droite de DP. Si on note D le cardinal de DN, on a :

$$S \geqslant D^2.$$

Comptons donc DN. soit $\varphi(x,y) = ux + vy - w = 0$ l'équation d'une droite de DN. Elle vérifie $\varphi(0,1) \leqslant 0$, $\varphi(1,0) \geqslant 0$ et réciproquement. Pour (u,v) strictement positifs fixés, les w possibles vérifient donc :

$$v \leqslant w \leqslant u \quad \text{et} \quad w \wedge (v \wedge u) = 1.$$

En nous limitant aux couples (u,v) premiers entre eux, nous obtenons une minoration de D :

$$D \geqslant \sum_{u=1}^{m} \sum_{v \leqslant u,\ v \wedge u = 1} (u - v)$$

Or les relations $v \wedge u = 1$ et $(u - v) \wedge u = 1$ sont équivalentes. Comme $v \to u - v$ est une bijection de $[0..u]$ sur lui-même, on obtient :

$$2 \sum_{v \leqslant u,\ v \wedge u = 1} (u-v) = \sum_{v \leqslant u,\ v \wedge u = 1} (u-v) + \sum_{v \leqslant u,\ v \wedge u = 1} v = u \sum_{v \leqslant u,\ v \wedge u = 1} 1 = u\varphi(u),$$

donc :

$$D \geqslant \sum_{u=1}^{m} u\varphi(u).$$

1. Dans le cas général, nous conjecturons une minoration de la forme $K\Big(mn(m+n)\Big)^2$, mais nous n'avons pas fait les calculs. La méthode est similaire Ãă celle que nous utilisons

On a $\sum_{u=1}^{m} u\varphi(u) \geqslant K_3 m^3$. On en déduit la minoration :

$$S \geqslant K_3^2 m^6.$$

Ce qui est la minoration souhaitée.

Nous avons donc démontré, modulo la conjecture, que le nombre de sommet de $CF(n,n)$ est minoré par une quantité de l'ordre de n^6.

Il nous reste donc à démontrer la conjecture portant sur $od(A_h)$, avec $h = (q, q', r, s, p, p')$ et $A_h = \left(\frac{rp}{sq}, \frac{rp'}{sq'}\right)$.

IX Démonstration de la conjecture

$$\forall h \in H_{m,n},\ od(A_h) \leqslant \tfrac{4mn}{sqq'}$$

Le majorant de $od(A_h)$ que nous proposons est indépendant de r, p, p', ce qui semble à priori curieux. Nous allons d'abord simplifier le problème en remarquant que si $od(A_h) \leqslant \frac{4}{s}\left[\frac{m}{q}\right]\left[\frac{n}{q'}\right]$, l'inégalité souhaitée est immédiate. Ensuite, les calculs antérieurs montrent que $od(A_h)$ dans $CF(m,n)$ est égal à $od(A_{h'})$ dans $CF(\left[\frac{m}{q}\right], \left[\frac{n}{q'}\right])$, avec $A_{h'} = (1, 1, 1, s, p, p')$. On supposera donc dans la suite que $q = q' = r = 1$. A_h sera donc le point de coordonnées $\left(\frac{p}{s}, \frac{p'}{s}\right)$, avec $p \wedge s = p' \wedge s = 1$.

1. Les symétries et le paramétrage PU

Il est facile de voir que l'ordre d'un point est invariant par les symétries $x \to 1-x$ et $y \to 1-y$. On peut donc supposer sans perte de généralité que

$$m \leqslant n$$

D'autre part, le paramétrage PU nous fournit un entier $s_0 \in [1, s[$ tel que l'ensemble des solutions en (u, v, w) de l'équation $up + vp' = sw$

dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ peut être paramétrés par

$$u = u, \quad v = -s_0 u + st.$$

Il est inutile d'exprimer w car l'équation est fonctionnelle en w. Rappelons que s_0 est premier avec s et ne peut donc être égal à $\frac{s}{2}$.

Supposons $s_0 > \frac{s}{2}$. Alors, on peut remplacer s_0 par $s - s_0 \in [1, \frac{s}{2}[$.

Sinon, par la symétrie $y \to 1 - y$ qui laisse invariant m et n, on peut remplacer s_0 par $-s_0$.

On peut donc supposer, sans perte de généralité que

$$s_0 \in]-\frac{s}{2}, -1]$$

Nous sommes donc conduit à chercher le cardinal de l'ensemble A des $u \in [1, m]$ tels que

$$\exists t \in \mathbb{Z} : s_0 u \in [st - n, st + n],$$

le cardinal de A étant par définition $od(A_h)$.

2. Quelques préliminaires.

Commençons par expliciter un lemme que nous avons précédemment sous-entendu :

Lemme 3

Soit $ux + vy = w$ et $u'x + v'y = w'$ les équations à coefficients entiers et réduites de deux droites distinctes qui se coupent en A_h.

1. Alors :
$$s \leqslant 2 \max(|u|, |u'|) \max(|v|, |v'|).$$
2. Si de plus v et v' sont de même signe, alors :
$$s \leqslant |uv' - u'v| \leqslant \max(|u|, |u'|) \max(|v|, |v'|).$$

Démonstration : Les deux droites étant distinctes et se coupant en A_h, on a : $uv' - u'v \neq 0$. De plus, $\frac{p}{s}$ étant le représentant irréductible de la fraction $\frac{wv' - w'v}{uv' - u'v}$, s divise $uv' - u'v$. Le résultat en découle immédiatement, en remarquant que u et u' sont positifs.

Revenons à l'exploration de la majoration annoncée, avec $h = (1, 1, 1, s, p, p'),\ p \wedge s = p' \wedge s = 1$.

Il y a des valeurs de s pour lesquels la majoration est facile à établir.

Il en est ainsi lorsque $s \leqslant n = \max(m, n)$. Nous avons déjà établi dans ce cas que $od(A_h) \leqslant \frac{3mn}{s}$. Comme on a $3mn \leqslant 4mn$, la majoration en résulte.

Il en est ainsi également lorsque $n = \max(m, n) < s \leqslant 2\max(m, n) = 2n$. Reprenons pour cela le paramétrage PU. Pour u fixé dans $[1, m]$, il y a au plus deux valeurs de v possibles, leur différence, divisible par s, étant strictement supérieure en module à n. Le nombre de solutions est donc majoré par $2m.1 \leqslant 2m.\frac{2n}{s}$ $(1 \leqslant \frac{2n}{s})$. Le résultat est également acquis.

Le problème devient délicat lorsque $s > 2\max(m, n) = 2n$. Supposons cette condition réalisée et posons $k = od(A_h)$. Soit $(D_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ les droites de $CF(m, n)$ passant par A_h. La droite D_i admet pour équation réduite $u_i x + v_i y = w_i$. Rappelons que ces droites sont dans $DN_{m,n} \cup DP_{m,n}$ (i.e. elles ne sont ni horizontales ni verticales). Tous les u_i sont strictement positifs et tous les v_i sont non nuls.

Lemme 4

Avec les notations qui précèdent, les deux applications $i \to u_i$ et $i \to |v_i|$ sont injectives.

Démonstration : Supposons, par exemple, qu'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $u_i = u_j$. Si $v_i = v_j$, alors $w_i = w_j$ ce qui est impossible. Donc $v_i \neq v_j$. Le point A_h appartient alors à la droite d'équation $(v_i - v_j)y = (w_i - w_j)$. On a donc $\frac{p'}{s} = \frac{w_i - w_j}{v_i - v_j}$ et $|v_i - v_j| \leqslant 2n$. Comme $s \wedge p' = 1$, s divise $v_i - v_j$ et $s \leqslant 2n$, ce qui contredit l'hypothèse en cours. Les autres cas se traitent de façon analogue par somme $(v_i = -v_j)$ ou différence $(v_i = v_j)$ des équations.

Lemme 5

Avec les mêmes notations, si $od(A_h) \geqslant 3$, alors $s \leqslant mn$.

Démonstration : Dans ce cas il y a deux équations de droites dont les v sont de même signe. Le résultat découle alors du lemme 3

Résumons : si $s > mn$, alors $od(A_h) = 2$ et l'inégalité est démontré. Sinon, $s \leqslant mn$, donc $\frac{4mn}{s} \geqslant 4$. Si $od(A_h) \leqslant 4$, l'inégalité est donc également réalisée.

Remarquons d'autre part que $od(A_h) \leqslant m$, car tous les u_i sont distincts 2 à 2 et sont dans l'intervalle $[1..m]$. On va supposer, quitte à permuter les droites, que l'application $i \to u_i$ est strictement croissante.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que si $m \leqslant 4$, l'inégalité est vérifiée, en examinant successivement $m = 1, 2, 3, 4$ et en discutant sur $od(A_h)$ lorsque le point A_h n'est ni sur une horizontale, ni sur une verticale. Dans la suite on suppose $m > 4$.

Notons d'abord que si $s \leqslant 4n$, on a $od(A_h) \leqslant m \leqslant \frac{4n}{s}m = \frac{4mn}{s}$, et l'inégalité souhaitée est réalisée. On supposera donc dans la suite que

$$n \geqslant m > 4, \quad h = (1, 1, 1, s, p, p'), \quad s > 4n, \quad od(A_h) > 4$$

3. Un premier pas.

Reprenons les notations déjà utilisées : $k = od(A_h)$, $(D_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ les droites passant par A_h, d'équations réduites $u_i x + v_i y = w_i$ rangées dans l'ordre croissant des u_i. On a vu précédemment que si $i \neq j$, alors $\Delta_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ est non nul, divisible par s et majoré en module par $2mn$. Notre raisonnement va reposer sur la proposition évidente qui suit :

Proposition 6

> Si on note $\Delta = \{\Delta_{ij} \,|\, 1 \leqslant j \neq i \leqslant k\}$ et $\delta = card(\Delta)$, alors : $\delta s \leqslant 4mn$

Si nous démontrons que $\delta \geqslant k$, alors nous aurons démontré notre conjecture. Pour cela il nous faut faire un petit détour.

Soit $X = (u, v, w) \in \mathbb{Z}^3$ tel que $ux + vy = w$ soit l'équation réduite d'une droite D, ce qui suppose $X \neq 0$, $(u, v) \neq (0, 0)$ et u, v, w premiers entre eux, et soit $X' = (u', v', w') \in \mathbb{Z}^3$ tel que $u'x + v'y = w'$ soit une équation de la même droite D. Alors il existe un entier g tel que $X' = gX$. D'autre part, si D et D' sont deux droites d'équations respectives $ux + vy = w$, $u'x + v'y = w'$ passant par A_h on a : $D \neq D' \Leftrightarrow uv' - u'v \neq 0$. Fin du détour.

Revenons à nos Δ_{ij}. On a, avec les notations qui précédent : Les Δ_{kj}, $1 \leqslant j < k$ constituent $k-1$ entiers distincts 2 à 2. Supposons en effet qu'il existe j, l tels que $1 \leqslant l < j < k$ et $\Delta_{kj} = \Delta_{kl}$. Cette dernière relation s'écrit : $u_k v_j - u_j v_k = u_k v_l - u_l v_k$ ou encore

$$u_k(v_j - v_l) - (u_j - u_l)v_k = 0$$

Comme $u_j - u_l \neq 0$, l'équation $(u_j - u_l)x + (v_j - v_l)y = w_j - w_l$ est celle d'une droite passant par A_h. La relation qui précéde montre que c'est une équation de D_k. Ainsi u_k divise $u_j - u_l$, ce qui est impossible. On a donc démontré : $k - 1 \leqslant \frac{4mn}{s}$, c'est-à-dire :

$$od(A_h) \leqslant \frac{4mn}{s} + 1 \leqslant \frac{4mn}{s} + \frac{2mn}{s} = \frac{6mn}{s}$$

4. Pour aller plus loin

Nous allons discuter suivant la parité de $k = od(A_h)$. Nous utiliserons la notation Δ_{ij} définie dans le paragraphe précédent.

a) k pair

Posons $a = \frac{k}{2} \in \mathbb{N}^*$, et notons :

$$\begin{aligned} \Delta_+ &= \{j \in [1, k-1] \,|\, \Delta_{kj} > 0\}, \quad \delta_+ = card(\Delta_+) \\ \Delta_- &= \{j \in [1, k-1] \,|\, \Delta_{kj} < 0\}, \quad \delta_- = card(\Delta_-) \end{aligned}$$

de sorte que Δ_+ et Δ_- constituent une partition de $[1, k-1] \cap \mathbb{N}$.

Alors $\delta_+ + \delta_- = 2a - 1$. Donc l'un des deux entiers δ_+ ou δ_- est supérieur ou égal à a. Supposons, par exemple que ce soit le second. Alors $\{\Delta_{kj} \,|\, j \in \delta_-\}$ est constitué d'entiers distincts 2 à 2, tous dans l'intervalle $[-2mn, 0[$ et tous multiples de s. On a donc :

$$as \leqslant s\delta_- \leqslant 2mn$$

Donc

$$a \leqslant \frac{2mn}{s} \quad \text{soit} \quad k = 2a \leqslant \frac{4mn}{s}$$

b) k **impair**

Posons $a = \frac{k-1}{2}$. Dans ce cas, on a $\delta_+ + \delta_- = 2a$. Si l'un des deux entiers δ_+ ou δ_- est strictement supérieur à a, alors le raisonnement précédent s'applique à l'entier $a+1$.

Le seul cas défavorable est $\delta_+ = \delta_- = a$. Même là, S'il existe $j \in \Delta_-$ tel que $\Delta_{jk} = -\Delta_{kj} \notin \{\Delta_{kl} \,|\, l \in \Delta_+\}$, alors Δ contient plus de $(k-1)+1$ éléments et le résultat est démontré. Il en est de même lorsqu'il existe $j \in \Delta_+$ tel que $\Delta_{jk} = -\Delta_{kj} \notin \{\Delta_{kl} \,|\, l \in \Delta_-\}$

On se place donc dans la situation contraire, c'est-à-dire dans le cas où les deux ensembles Δ_+ et Δ_- sont en bijection par l'application qui, à $j \in \Delta_-$ associe $l \in \Delta_+$ tel que $\Delta_{kj} + \Delta_{kl} = 0$ $(*)$. Cette condition se traduit par l'égalité :

$$u_k(v_j + v_l) - v_k(u_j + u_l) = 0.$$

Cette égalité montre que $(u_j + u_l)x + (v_j + v_l)y = (w_j + w_l)$ est une autre équation de la droite D_k d'équation réduite $u_k x + v_k y = w_k$. Il existe donc un entier g tel que

$$u_j + u_l = g u_k, \quad v_j + v_l = g v_k, \quad w_j + w_l = g w_k.$$

Mais $0 < u_j < u_k$ et $0 < u_l < u_k$, donc, par addition, $0 < g u_k < 2u_k$ et $g = 1$. On a ainsi provisoirement :

$$u_j + u_l = u_k, \quad v_j + v_l = v_k \quad \text{et} \quad 0 < u_k \leqslant m, \ |v_k| \leqslant n.$$

La relation $v_j + v_l = v_k$ montre que l'un des deux entiers v_j et v_l est du signe de v_k. Nous avons presque terminé. Encore un petit effort : remarquons que la relation $(*)$ s'écrit aussi :

$$|u_k v_j - v_k u_j| = |u_k v_l - v_k u_l| \stackrel{def}{=} A$$

L'entier v_k étant du signe de v_j ou du signe de v_l, l'assertion 2. du lemme 3 montre que $A \leqslant \max(u_j, u_k, u_l) \max(|v_j|, |v_k|, |v_l|) \leqslant mn$. Tous les déterminants Δ_{kj} sont ainsi majorés en module par mn. On a donc :

$$(k-1)s \leqslant 2mn.$$

On en déduit : $k \leqslant \frac{2mn}{s} + 1 \leqslant \frac{2mn}{s} + \frac{2mn}{s} = \frac{4mn}{s}$.

La conjecture est donc complétement démontrée.

5. Une suite ?

Une autre manière pour aller au bout de la conjecture : il faudrait démontrer que parmi les Δ_{ij} il y a k éléments distincts, mais cela est une autre histoire.

Parmi les autres histoires qu'on peut raconter :

- Le nombre de sommets d'ordre 2 est asymptotiquement égal au deux tiers du nombre total des sommets. Déjà regarder s'il y en a plus de la moitié.

- Le nombre de facettes triangulaires est asymptotiquement égal au trois quart du nombre total de facettes. Déjà regarder s'il y en a plus de la moitié.

- La conjecture forte de Tajine-Daurat qui dit que les facettes en dehors du carré unité sont aussi des triangles ou des quadrilatères.

Références :

[1] Saab Abou-Jaoudé Forme des connexes de Farey. /arxiv.org/pdf/1312.4306.pdf

[2] Malcolm Douglas McIlroy. A note on discrete representation of lines. ATT Technical Journal, 64(2) :481-490, 2984.

[3] Alain Daurat, Mohamed Tajine, Mahdi Zouaoui. About the frequencies of some patterns in digital planes. application to area estimators. Computer Graphics, 2008.

[4] Daniel Khoshnoudirad, Erratum to âĂIJA further study for the upper bound of the cardinality of Farey vertices and applications in discrete geometryâĂİ [J. Algebra Comb. Discrete Appl. 2(3) (2015) 169-190] Journal of algebra combinatorics discrete structures and applications 3(2) Âů May 2016