DIAGRAMMES VOLUME 69+70 , 2013

Dénombrement des droites du complexe de Farey

Saab Abou-Jaoudé
ancien professeur de mathématiques spéciales
docteur d'état en mathématiques
abouanpi@gmail.com

A.M.S. Sub. Class : 05 A 04 , 52 A 02 , 52 C 04

Résumé :

Après avoir défini l'environnement de travail et les mots utilisés, nous faisons le dénombrement des droites du complexe de Farey.

Mots clé :

Complexe de Farey, Connexe de Farey, Droite de Farey. Sommet de Farey. Segment de Farey. Graphe planaire.

I Les segments de Farey dans le carré unité

Dans cette première section, nous donnons les définitions et les structures qui nous seront utiles.

1. Les définitions :

Soit $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On va définir et étudier des objets indexés par (m, n) en rapport avec les suites de Farey. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Rappelons ce que c'est qu'une suite de Farey :

En mathématiques, la suite de Farey d'ordre n, qu'on notera F_n, est la suite ordonnée croissante des fractions irréductibles de l'intervalle $[0, 1]$ dont le dénominateur est dans l'intervalle $[1..n] = [1, n] \cap \mathbb{N}$.

On appelle **carré unité** le carré $C = [0, 1]^2$ de $\mathbb{R}^2$.

On définit les **points de Farey** d'ordre (m, n) comme étant $F_m \times F_n$. En d'autres termes ce sont les points $(x, y) \in C$ tels que $x \in F_m$ et $y \in F_n$. On notera $PF_{m,n}$ l'ensemble de ces points.

Parmi ces points, il y en a qui se trouvent sur la frontière de C. Ce sont des points de Farey dont l'une des coordonnées vaut 0 ou 1. Ces points-là seront appelé des **points frontière de Farey**. Leur ensemble sera noté $PFF_{m,n}$.

On considère l'ensemble D des droites d'équations $\boxed{ux + vy = w}$, où :

$$-m \leqslant u \leqslant m,\ -n \leqslant v \leqslant n,\ (u, v) \neq (0, 0),\ w \in \mathbb{Z}$$

On n'a pas unicité de l'équation d'une telle droite, mais si on impose aux coefficients (u, v, w) d'être premiers entre eux et de respecter la condition :

$$u > 0 \quad \text{ou} \quad (u = 0 \text{ et } v > 0)$$

l'équation devient unique. Nous dirons que c'est l'**équation réduite** de la droite D.

On appelle **droites de Farey** d'ordre (m, n) les droites de l'ensemble D qui rencontre C suivant un segment **non réduit à un point**. On se permettra de parler d'une D-Farey. L'ensemble des droites de Farey d'ordre (m, n) sera noté $D_{m,n}$. on notera :

$$TD_{m,n} = \{d \cap C \mid d \in D_{m,n}\}$$

Le mot "segments de Farey d'ordre (m, n)" étant réservé dans ce texte pour un autre usage, les éléments de $TD_{m,n}$ seront appelés des **tronçons de Farey** d'ordre (m, n). On se permettra de parler d'un TD-Farey.

notons tout de suite que les extrémités A et B d'un tronçon de farey $t \in TD_{m,n}$ sont deux points frontière de Farey i.e. $A \in PFF_{m,n}$, $B \in PFF_{m,n}$.

On appelle **sommets de Farey** tout point de C intersection de deux éléments distincts de $TD_{m,n}$. On notera $SF_{m,n} = \{d_1 \cap d_2 \mid (d_1, d_2) \in TD^2_{m,n}, d_1 \neq d_2\}$.

On se permettra d'omettre, pour alléger les écritures, l'indice (m, n) lorsque m et n sont fixés. On notera donc D et TD pour $D_{m,n}$ et $TD_{m,n}$.

On considère le carré unité privé de $TD_{m,n}$ (i.e. on enlève du carré unité les morceaux des droites de Farey d'ordre (m, n) qu'il contient). Le reste est un ensemble $CF_{m,n}$. Les composantes connexes de $CF_{m,n}$ sont appelées les **connexes de Farey**. Un des problèmes est de construire un algorithme efficace pour énumérer les connexes de Farey.

2. Structure de graphe

On peut définir deux stuctures de graphe sur les objets définis ci-dessous, le graphe des connexe qu'on note G_C et le graphe des sommets qu'on note G_S.

On définit les segments de Farey comme étant les segments joignant deux sommets de Farey consédutifs sur une droite de Farey. Une droite de Farey passant par un sommets de Farey A, intérieur au carré unité, définit deux arêtes d'origine A. Une droite de Farey passant par un sommet situé sur la frontière du carré détermine une seule arête d'origine A passant par ce sommet. On obtient ainsi G_S, le graphe des sommets. Notons que ce graphe est planaire, connexe et qu'il vérifie la formule d'Euler $S - A + F = 2$, où S (resp. A, resp. F) est le nombre de sommets (resp. le nombre d'arêtes, resp. le nombre de facettes). Les facettes sont les connexes de Farey plus la région infinie extérieure au carré qui est considérée comme une facette par Euler.

Dans le graphe G_C des connexes, on considère que les sommets du graphe sont les connexes de Farey. Deux connexes de Farey sont reliés s'ils ont une frontière commune. Les sommets deviennent les facettes. Nous utiliserons dans la suite la structure de graphe G_S. Si A est un sommet de G_S, le nombre d'arêtes qui en sont issues est appelé le degré de A et noté $d(A)$. Notons que la somme des $d(A)$, lorsque A parcourt les sommets de Farey est égal à deux fois le nombre des arêtes. Mais $d(A)$ est aussi deux fois le nombre de droites de Farey passant par A, lorsque ce point est intérieur au carré.

Nous utiliserons ces considérations quand nous compterons le nombre des sommets de Farey.

II Compter les droites de Farey

1. Préliminaires : notations et outils.

On notera :

1. $|E|$ le cardinal de l'ensemble E,
2. $[n]$ la partie entière de l'entier n
3. $\{n\}$ sa partie fractionnaire.
4. $p \wedge q$ le plus grand commun diviseur des entiers p et q (PGCD).

Ces notations sont, nous semble-t-il, consacrée par l'usage.

Si p, q, r sont trois entiers, on notera $p \wedge q \wedge r$ l'entier $(p \wedge q) \wedge r = p \wedge (q \wedge r)$.

Pour compter le nombre de droites de Farey d'ordre (m, n), nous allons d'abord partitionner cet ensemble en 4 :

1. L'ensemble $DH_{m,n}$ des droites horizontales,
2. L'ensemble $DV_{m,n}$ des droites verticales,
3. L'ensemble $DN_{m,n}$ des droites de pente strictement négative,
4. L'ensemble $DP_{m,n}$ des droites de pente strictement positive.

Ces quatre ensembles forment manifestement une partition de $D_{m,n}$.

On a de façon évidente $|DH_{m,n}| = |F_n|$ et $|DV_{m,n}| = |F_m|$.

On a de plus :

Proposition 1

Les ensembles $DN_{m,n}$ et $DP_{m,n}$ sont en bijection.

Démonstration : Soit $D = ux + vy - w$ l'équation réduite d'une droite de $DN_{m,n}$. On a $u > 0$, $v > 0$ et $u \wedge v \wedge w = 1$. La droite d'équation D est bien dans $DN_{m,n}$ si et seulement si :

$$u \in [1..m],\ v \in [1..n],\ u \wedge v \wedge w = 1,\ \ 0 < w < u + v. \quad (**)$$

Les trois premières conditions sont immédiates. La quatrième résulte du fait que si cette droite rencontre l'intérieur du carré unité, elle rencontre le segment $[(0,0),(1,1)]$ en un point non extrémité, donc $D(0,0) = -w < 0$ et $D(1,1) = u + v - w > 0$, et réciproquement.

Soit maintenant $D = ux + vy - w$ l'équation d'une droite de $DP_{m,n}$. On a $u > 0$, $v < 0$ et $u \wedge v \wedge w = 1$. La droite d'équation D est bien dans $DP_{m,n}$ si et seulement si :

$$u \in [1..m],\ v \in [-n.. - 1],\ (u, v, w) = 1,\ \ v < w < u.$$

Les trois premières conditions sont immédiates. La quatrième résulte du fait que si cette droite rencontre l'intérieur du carré unité, elle rencontre le segment $[(1,0),(0,1)]$ en un point non extrémité, donc $D(1,0) = v - w < 0$ et $D(0,1) = u - w > 0$, et réciproquement.

De plus, par symétrie par rapport à la droite $y = 1/2$, on peut, à la droite de $DN_{m,n}$ d'équation $ux + vy - w$ et vérifiant les conditions $(**)$, associer bijectivement la droite d'équation $ux + v(1-y) - w = ux - vy - (w - v)$, qui est bien l'équation d'une droite de $DP_{m,n}$. On a donc

$$|DN_{m,n}| = |DP_{m,n}|.$$

Il nous suffit donc de compter $DN_{m,n}$.

Avant de faire ce décompte, nous ajoutons deux notations :

- Soit $F(n)$ une formule arithmétique dépendant de l'entier n. On notera $SF(n)$ la somme des $F(k)$ pour k entier allant de 1 à n.
- Conformément à l'usage, on notera $\varphi(n)$ le nombre des entiers premiers avec n compris entre 1 et n. Cette fonction φ est appelé communément l'indicatrice d'Euler.

Avec ces notations, on peut écrire par exemple :

$$|F_n| = \sum_{k=1}^{n} \varphi(k) = S\varphi(n)$$

On obtient donc le résultat suivant sur le compte des droites de Farey :

Théorème 2 (Cardinal de $D_{m,n}$)

On a la formule :

$$\mid D_{m,n} \mid = 2 \mid DN_m, n \mid + S\varphi(m) + S\varphi(n)$$

2. Compter $DN_{m,n}$

Compter $DN_{m,n}$, c'est compter le nombre des équations réduites c'est-à-dire le nombre $A_{m,n}$ de triplets (u, v, w) d'entiers réalisant les conditions suivantes :

$$0 < u <= m \quad 0 < v <= n \quad u \wedge v \wedge w = 1 \quad 0 < u + v < w$$

Théorème 3

Le nombre $A_{m,n}$ s'exprime sous forme d'une série :

$$A_{m,n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left[\frac{m}{k}\right] \left[\frac{n}{k}\right] \left(\left[\frac{m}{k}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]\right).$$

μ désigne la fonction de Moëbius et $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Il en résulte l'estimation suivante : :

$$A_{m,n} = \frac{mn(m+n)}{2\zeta(3)} + \left((m+n)^2 + 2mn\right) K_{m,n}$$

avec

$$|K_{m,n}| \leqslant \frac{\zeta(2) - \zeta(3)}{2} \leqslant \frac{1}{4}$$

où ζ désigne la fonction Zéta de Riemann.

Ce résultat est, à notre connaissance, inédit. Nous en donnons ci-dessous une démonstration, en rappelant au préalable les formules de théorie des nombres que nous utilisons. Nous en profitons pour remercier les participants du forum "Les-mathematiques.net" qui nous ont fourni les diverses formules de théorie des nombres que nous utilisons.

Nous aurons besoin dans ce qui suit de la fonction μ de Moëbius dont nous rappelons la définition. Notons pour cela $SFPC$ (entier Sans Facteur Premier Carré) l'ensemble des entiers n tels qu'il n'existe pas de nombre premier p vérifiant $p^2|n$ (p^2 divise n). Notons également P_n l'ensemble des diviseurs premier de l'entier n. On a $P_1 = \varnothing$. On définit la fonction μ par :

$$\mu(n) = \begin{cases} (-1)^{card(P_n)} & \text{si} \quad n \in SFPC \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Rappelons une propriété de cette fonction μ :

$$\sum_{k|n} \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

cette relation permet de démontrer le lemme de Vinogradov dont nous aurons besoin et qui s'énonce ainsi :

Lemme 4 (Vinogradov)

Soit f une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{C}$ et soit d, n deux entiers non nuls fixés. On a :

$$\sigma_f(n,d) = \sum_{k=1,\ k\wedge d=1}^{n} f(k) = \sum_{e|d} \mu(e) \left(\sum_{k=1}^{[n/e]} f(ke) \right).$$

En particulier, pour $f = 1$, on a

$$\sigma_1(n,d) = \sum_{e|d} \left[\frac{n}{e}\right] \mu(e) \qquad (*)$$

Nous aurons besoin également de l'identité suivante qui relie la fonction μ de Moëbius et la fonction φ indicatrice d'Euler. Rappelons que $\varphi(n)$ est le nombre des entiers premiers avec n compris entre 1 et n. Ces noms ont été consacrés par l'usage.

Lemme 5 (Euler-Moëbius)

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\sum_{(d,e)\in\mathbb{N}^2, de=n} e\mu(e)\varphi(d) = \mu(n).$$

Nous aurons enfin besoin de la relation suivante qui relie la fonction de Moëbius à la fonction Zéta. Rappelons que, pour $x > 1$, $\zeta(x)$ est la somme de la série (convergente) de terme général $\frac{1}{n^x}$.

Lemme 6

Pour tout $x > 1$, on a la formule :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu(n)}{n^x} = \frac{1}{\zeta(x)}.$$

Toutes ces formules sont des classiques de la théorie des nombres. Elles nous ont été fournies par des membres éminents du forum "lesmathematics.net". Nous les remercions chaleureusement.

III Calcul de $A_{m,n}$

Pour cela, nous allons compter, pour (u,v) fixé, le nombre $G_{u,v}$ des entiers w tels que $(u,v,w) \in DN_{m,n}$. Si $d = u \wedge v = 1$, $G_{u,v}$ est égal à $u+v-1$, sinon $G_{u,v}$ est égal au nombre de $w \in [1..u+v-1]$ premier avec d. Comme $u+v$ est un multiple de d, il n'y a pas d'inconvénient à aller jusqu'à $u+v$. On a donc :

- Si $d = u \wedge v = 1$, alors : $G_{u,v} = u+v-1 = \dfrac{u+v}{1}\varphi(1) - 1$,

- Si $d = u \wedge v > 1$, alors : $G_{u,v} = \displaystyle\sum_{1 \leqslant w \leqslant (u+v),\ w \wedge d = 1} 1 = \dfrac{u+v}{d}\varphi(d)$.

Le nombre d'entier inférieur à qn et premier avec n étant évidemment $q\varphi(n)$, ceci justifie la dernière égalité ci-dessus.

Notons $\chi(k,l) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ k \wedge l = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Avec cette notation, on obtient la formule :

$$G_{u,v} = \frac{u+v}{u \wedge v}\varphi(u \wedge v) - \chi(u,v).$$

On peut maintenant calculer $A_{m,n}$. On a :

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \sum_{(u,v) \in [1..m] \times [1..n]} G_{u,v} \\ &= \sum_{(u,v) \in [1..m] \times [1..n]} \frac{u+v}{u \wedge v}\varphi(u \wedge v) - \sum_{(u,v) \in [1..m] \times [1..n]} \chi(u,v) \\ &= \qquad B_{m,n} \qquad - \qquad C_{m,n}. \end{aligned}$$

Calculons d'abord $B_{m,n}$. On a :

$$\begin{aligned}
B_{m,n} &= \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \sum_{k\leqslant m/d,\ l\leqslant n/d,\ k\wedge l=1} \frac{kd+ld}{d}\varphi(d) \\
&= \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \varphi(d) \sum_{k\leqslant m/d} k \left(\sum_{l\leqslant n/d\ k\wedge l=1} 1 \right) \\
&+ \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \varphi(d) \sum_{l\leqslant n/d} l \left(\sum_{k\leqslant m/d\ k\wedge l=1} 1 \right).
\end{aligned}$$

Posons :

$$\begin{aligned}
B_1 &= \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \varphi(d) \sum_{k\leqslant m/d} k \left(\sum_{l\leqslant n/d\ k\wedge l=1} 1 \right) = \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \varphi(d) S_1(d) \\
B_2 &= \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \varphi(d) \sum_{l\leqslant n/d} l \left(\sum_{k\leqslant m/d\ k\wedge l=1} 1 \right) = \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \varphi(d) S_2(d)
\end{aligned}$$

On voit apparaitre dans les parenthèses une expression semblable au premier membre du lemme de Vinogradov avec $f(l) = 1$. En utilisant la formule $(*)$, on a :

$$\begin{aligned}
S_1(d) &= \sum_{k\leqslant m/d} k \left(\sum_{l\leqslant n/d\ k\wedge l=1} 1 \right) = \sum_{k\leqslant m/d} k \sum_{e|k} \left[\frac{n}{de}\right] \mu(e) \\
&= \sum_{je\leqslant m/d} je \left[\frac{n}{de}\right] \mu(e) = \sum_{e\leqslant m/d} e\mu(e) \left[\frac{n}{de}\right] \left(\sum_{j\leqslant m/de} j \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{e\leqslant m/d} e\mu(e) \left[\frac{n}{de}\right] \left[\frac{m}{de}\right] \left(\left[\frac{m}{de}\right] + 1 \right).
\end{aligned}$$

D'où,

$$B_1 = \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \varphi(d) \sum_{e\leqslant m/d} e\mu(e) \left[\frac{n}{de}\right] \left[\frac{m}{de}\right] \left(\left[\frac{m}{de}\right] + 1 \right).$$

Il n'y a aucun inconvénient à étendre les deux sommes jusqu'à $+\infty$, car, pour $e > m/d$, $\left[\frac{m}{de}\right] = 0$ et si $d > \min(m,n)$, l'un des deux termes $\left[\frac{n}{de}\right]$, $\left[\frac{m}{de}\right]$ est nul. On peut donc écrire, en remarquant que la série double qui est un $O(\frac{1}{d^3e^2})$ est absolument convergente :

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{1}{2}\sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{e=1}^{+\infty}\varphi(d)e\mu(e)\left[\frac{n}{de}\right]\left[\frac{m}{de}\right]\left(\left[\frac{m}{de}\right]+1\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{k}\right]\left[\frac{m}{k}\right]\left(\left[\frac{m}{k}\right]+1\right)\sum_{de=k}e\mu(e)\varphi(d)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\left[\frac{n}{k}\right]\left[\frac{m}{k}\right]\left(\left[\frac{m}{k}\right]+1\right)\mu(k),
\end{aligned}$$

la dernière égalité résulte de l'application du lemme d'Euler-Moëbius cité plus haut.

On a de même :

$$B_2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(k)\left[\frac{m}{k}\right]\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right),$$

On en déduit donc :

$$B_{m,n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\mu(k)\left[\frac{m}{k}\right]\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{m}{k}\right]+\left[\frac{n}{k}\right]+2\right).$$

Un calcul analogue permet d'obtenir la valeur de $C_{m,n}$ [1]

$$C_{m,n} = \sum_{k=1}^{+\infty}\mu(k)\left[\frac{m}{k}\right]\left[\frac{n}{k}\right]$$

1.

$$\begin{aligned}
C(m,n) &= \sum_{i\leqslant m}\sum_{j\leqslant n,\ i\wedge j=1} = \sum_{i\leqslant m}\sum_{d|i}\mu(d)\sum_{k\leqslant n/d}1\\
&= \sum_{i\leqslant m}\sum_{d|i}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor = \sum_{d\leqslant m}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\sum_{k\leqslant m/d}1\\
&= \sum_{d\leqslant m}\mu(d)\left\lfloor\frac{n}{d}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{d}\right\rfloor
\end{aligned}$$

On peut donc en déduire le cardinal de $DN_{m,n}$, c'est-à-dire :

$$A_{m,n} = B_{m,n} - C_{m,n} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left[\frac{m}{k}\right] \left[\frac{n}{k}\right] \left(\left[\frac{m}{k}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]\right)$$

On ne peut pas aller beaucoup plus loin dans les simplifications.

IV Asymptotique de $A_{m,n}$

La formule donnant $A_{m,n}$ nous suggère de calculer la différence :

$$\begin{aligned}
\Delta_{m,n}(k) &= \frac{mn(m+n)}{k^3} - \left[\frac{m}{k}\right] \left[\frac{n}{k}\right] \left(\left[\frac{m}{k}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]\right) \\
&= \frac{m}{k}\frac{n(m+n)}{k^2} - \left[\frac{m}{k}\right] \frac{n(m+n)}{k^2} \\
&\quad + \left[\frac{m}{k}\right] \frac{n}{k}\frac{(m+n)}{k} - \left[\frac{m}{k}\right] \left[\frac{n}{k}\right] \frac{(m+n)}{k} \\
&\quad + \left[\frac{m}{k}\right] \left[\frac{n}{k}\right] \frac{(m+n)}{k} - \left[\frac{m}{k}\right] \left[\frac{n}{k}\right] \left(\left[\frac{m}{k}\right] + \left[\frac{n}{k}\right]\right) \\
&= \{\frac{m}{k}\}\frac{n(m+n)}{k^2} + \left[\frac{m}{k}\right] \{\frac{n}{k}\}\frac{(m+n)}{k} + \left[\frac{m}{k}\right] \left[\frac{n}{k}\right] \left(\{\frac{m}{k}\} + \{\frac{n}{k}\}\right)
\end{aligned}$$

On en déduit la majoration suivante puisque, pour tout entier $i, \{\frac{i}{k}\} \leqslant \frac{k-1}{k}$:

$$\Delta_{m,n}(k) \leqslant \frac{k-1}{k^3}\left((m+n)^2 + 2mn\right),$$

La suite est une affaire d'inégalité triangulaires. En remarquant que $\Delta_{m,n}(1) = 0$, On a :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{mn(m+n)}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu(k)}{k^3} - A_{m,n}\right| &\leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} |\Delta_{m,n}(k)| \\
&\leqslant \frac{(m+n)^2 + 2mn}{2}\left(\zeta(2) - \zeta(3)\right).
\end{aligned}$$

On obtient finalement l'estimation suivante :

$$A_{m,n} = \frac{mn(m+n)}{2\zeta(3)} + \left((m+n)^2 + 2mn\right) K_{m,n}$$

avec

$$|K_{m,n}| \leqslant \frac{(\zeta(2) - \zeta(3))}{2} \# 0.22.$$

Une simulation numérique permet de constater que le majorant de $|K_{m,n}|$ ainsi obtenu est voisin de l'optimum. Pour $0 < n \leqslant m \leqslant 1000$, la moitié du majorant est atteint.

V Asymptotique du nombre de droites de Farey

On a déjà vu l'égalité :

$$| D_{m,n} |= 2A_{m,n}+ | F_m | + | F_n |$$

On sait par ailleurs, d'après [4] que : $| F_m |\leqslant m^2$ et $| F_n |\leqslant n^2$

On obtient donc le résultat suivant :

Théorème 7

1. Lorsque m et n tendent vers l'infini, $| D_{m,n} |$ est équivalent à : $\dfrac{mn(m+n)}{\zeta(3)}$.
2. On a de plus une majoration inconditionnelle du reste :
$$abs\Big(| D_{m,n} | - \frac{mn(m+n)}{\zeta(3)}\Big) \leqslant \frac{5}{2}(m^2 + n^2)$$

Le premier résultat de ce dernier théorème nous a été communiqué par l'auteur de [6] en 2012, accompagné de la démonstration publié dans [6]. Nous avons attiré son attention sur la mauvaise organisation de sa démonstration et le manque de clarté de son texte. Force est de constater qu'il a maintenu son texte dans son état d'origine et qu'il démarre l'estimation asymptotique sans avoir mis $A_{m,n}$ sous forme d'une série simple, ce qui lui donne une estimation de l'erreur bien moins précise que celle que nous obtenons.

Références :

[1] Saab Abou-Jaoudé, Forme des connexes de Farey. /arxiv.org/pdf/1312.4306.pdf (2013)

[2] Saab Abou-Jaoudé, Dénombrement de triplets d'entiers NDN.PDF (2014) diffusé sur Whaller.com et à l'université de Strasbourg.

[3] Malcolm Douglas McIlroy. A note on discrete representation of lines. ATT Technical Journal, 64(2) :481-490, 2984.

[4] Alain Daurat, Mohamed Tajine, Mahdi Zouaoui. About the frequencies of some patterns in digital planes. application to area estimators. Computer Graphics, 2008.

[5] Indicatrice d'Euler, les formules de théorie des nombres, https ://fr.wikipedia.org/wiki/Indicatrice d'Euler

[6] Daniel Khoshnoudirad, Farey lines defining Farey diagrams and application to some discrete structures, Appl. Anal. Discrete Math. 9 (2015)