DIAGRAMMES

C. LAIR

Eclatements de modèles d'esquisses et applications

Diagrammes, tome S67-68 (2012), p. 239-248

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2012__S67-68__239_0>

DIAGRAMMES , SUPPLEMENT AUX VOLUMES 67 + 68 , 2012, PARIS, pp. 239-248

ECLATEMENTS DE MODELES D'ESQUISSES ET APPLICATIONS

C. LAIR

EDITE PAR L. COPPEY , F. FOLTZ , R. GUITART, C. HENRY , C. LAIR

ECLATEMENTS DE MODELES D'ESQUISSES ET APPLICATIONS

Christian Lair
lairchrist@aol.com

à Madame Andrée CHARLES EHRESMANN
en témoignage de gratitude et de profond respect

Introduction.

On sait, très classiquement, associer à un foncteur $F : \boldsymbol{C} \to \boldsymbol{Ens}$, d'une catégorie $\boldsymbol{C}$ vers la catégorie des ensembles, une fibration discrète $F/\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ où $F/\boldsymbol{C}$ est la catégorie *des éléments de* F, encore appelée (comme en [C.A.S.T.]) la catégorie des *hypermorphismes de* F et que nous préfererons appeler ici, par commodité, la *catégorie éclatement de* F.

Après avoir brièvement rappelé (§1) ce que sont les *graphes à composition* (ces héritiers directs des *graphes multiplicatifs* de [C.A.S.T.] et qui sont des "présentations de catégories"), c'est sans aucune difficulté qu'on adapte immédiatement (§2) cette construction classique. Ainsi, à un quelconque foncteur $F : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{Ens}$ d'un quelconque graphe à composition $\boldsymbol{G}$ vers la catégorie des ensembles, nous associons, par pure analogie avec le cas des catégories, le *graphe à composition* $F/\boldsymbol{G}$ *éclatement de* F.

Après avoir brièvement rappelé (§3) ce que sont les *esquisses* (initiées en [I.T.S.C.] et [E.T.S.A.]), nous montrons (§4) qu'on peut très naturellement associer (moyennant un effort supplémentaire) à un modèle $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$, d'une esquisse $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{Ens}$, une esquisse $M/\boldsymbol{E}$ qui mérite tout autant de s'appeler l'*esquisse éclatement de* M.

Nous utilisons enfin (§5) cette dernière construction pour (ré-)établir *très simplement* que :

- si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie accessible (i.e. esquissable) et si C en est un objet, alors la catégorie $\boldsymbol{C}/C$ est aussi accessible (i.e. esquissable),

- les catégories esquissables possédant un objet terminal sont exactement les catégories qui peuvent être esquissées par des esquisses où les cônes inductifs distingués sont tous d'indexations non vides et connexes.

De la sorte, à l'aide de ces éclatements de modèles d'esquisses, nous retrouvons très simplement, deux résultats antérieurement établis (voir [A.C.F.C.] et [C.M.O.T.]) utilisant systématiquement (donc plus "lourdement") la caractérisation *intrinsèque* des catégories accessibles ou esquissables (voir [C.M.C.E.]).

Nous espérons montrer, ainsi, tout l'intérêt qu'il peut y avoir (parfois ... ou souvent) à esquisser ou ré-esquisser *explicitement* (surtout quand c'est très simple) les catégories accessibles (de [A.C.F.C.]), i.e. les catégories esquissables, (de [C.M.C.E.]), sans énumérer la longue liste des situations qui confirment ce point de vue.

1. Graphes à composition.

Un *graphe à composition* $\boldsymbol{G}$ est constitué par :

- une classe d'*objets* $\mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$,

- une classe de *flèches* $\mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$,

- une classe de *flèches identités* $\mathtt{FlId}(\boldsymbol{G}) \subseteq \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$,

- une classe de *couples (de flèches) composables* $\mathtt{Comp}(\boldsymbol{G}) \subseteq \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \times \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$,

- une opération *sélection des domaines (des flèches)* :

$$\mathtt{selectdom}(\boldsymbol{G}) : \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G}) ,$$

(alors, pour toute flèche g de $\boldsymbol{G}$, on note évidemment :

$$\mathtt{selectdom}(\boldsymbol{G})(g) = \mathtt{dom}(g) \text{),}$$

- une opération *sélection des co-domaines (des flèches)* :

$$\mathtt{selectcodom}(\boldsymbol{G}) : \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{Ob}(\boldsymbol{G}) ,$$

(alors, pour toute flèche g de $\boldsymbol{G}$, on note évidemment :

$$\mathtt{selectcodom}(\boldsymbol{G})(g) = \mathtt{codom}(g) \text{),}$$

- une opération *composition des couples composables* :

$$\mathtt{comp}(\boldsymbol{G}) : \mathtt{Comp}(\boldsymbol{G}) \to \mathtt{Fl}(\boldsymbol{G}) ,$$

(alors, pour tout couple composable (g', g) de $\boldsymbol{G}$, on note évidemment :

$$\mathtt{comp}(\boldsymbol{G})(g', g) = \mathtt{comp}(g', g) = g'.g \text{),}$$

et, ce, de sorte que :

- pour toute flèche à identité g de $\boldsymbol{G}$, on a :

$$\mathtt{dom}(g) = \mathtt{codom}(g) ,$$

- pour tout couple composable (g', g) de $\boldsymbol{G}$, on a :

$$\mathtt{dom}(g') = \mathtt{codom}(g)$$

$$\mathtt{codom}(g'.g) = \mathtt{codom}(g') \text{ et } \mathtt{dom}(g'.g) = \mathtt{dom}(g) \ .$$

En particulier, un graphe orienté s'identifie à un graphe à composition dont la classe des flèches identités et la classe des couples composables sont vides.

De même, une catégorie s'identifie à un graphe à composition où chaque objet est le domaine/codomaine d'une seule flèche identité, chaque couple de flèches consécutives est un couple composable, les flèches identités sont des éléments neutres ("locaux") pour la composition et la composition est associative.

Enfin, un graphe à composition $\boldsymbol{G}$ est évidemment dit *petit* si les classes $\mathtt{Ob}(\boldsymbol{G})$, $\mathtt{Fl}(\boldsymbol{G})$ et $\mathtt{Comp}(\boldsymbol{G})$ sont des ensembles.

Nous laissons au lecteur le soin de définir (par analogie avec le cas des seules catégories) ce qu'est un *foncteur* (i.e. un homomorphisme) $F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{G}'$ d'un graphe à composition $\boldsymbol{G}$ vers un graphe à composition $\boldsymbol{G}'$.

De même, nous lui laissons le soin de définir (par analogie avec le cas des seules catégories) ce qu'est une *transformation naturelle* $n:F\Rightarrow F':\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}$ entre deux foncteurs $F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}$ et $F':\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{C}$ d'un graphe à composition vers (seulement) une catégorie.

2. Le graphe à composition éclatement d'un foncteur d'un graphe à composition vers la catégorie des ensembles.

Supposons que $\boldsymbol{G}$ est un graphe à composition et que $F:\boldsymbol{G}\to\boldsymbol{Ens}$ est un foncteur.

On désigne par $F/\boldsymbol{G}$ l'*éclatement de* F , i.e. le graphe à composition (évidemment petit, si $\boldsymbol{G}$ est petit) défini comme suit :

- ses objets sont les (G,x) , où G est un objet de $\boldsymbol{G}$ et x est un élément de $F(G)$,

- ses flèches sont les $((G,x),g,(G',x')):(G,x)\to(G',x')$, où (G,x) et (G',x') sont deux objets de $F/\boldsymbol{G}$, $g:G\to G'$ est une flèche de $\boldsymbol{G}$ et $F(g)(x)=x'$,

- ses flèches identités sont les flèches $((G,x),g,(G,x)):(G,x)\to(G,x)$ de $F/\boldsymbol{G}$, où $g:G\to G$ est une flèche identité de $\boldsymbol{G}$,

- ses couples composables sont les $(\,((G',x'),g',(G'',x''))\,,\,((G,x),g,(G',x'))\,)$, où $((G',x'),g',(G'',x''))$ et $((G,x),g,(G',x'))$ sont deux flèches de $F/\boldsymbol{G}$ et (g',g) est un couple composable de $\boldsymbol{G}$ et alors on a :

$$((G',x'),g',(G'',x'')) \,.\, ((G,x),g,(G',x'))) = ((G,x),g'.g,(G'',x'')) \ .$$

3. Esquisses.

Une *esquisse* $\boldsymbol{E}$ est constituée par :

- un graphe à composition $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$, qu'on appelle son *support*,
- une classe $\mathtt{CP}(\boldsymbol{E})$ de cônes projectifs $p = (p_I : P \to P_I)_{I \in \boldsymbol{I}}$, dits *distingués* dans $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$, d'*indexations* des graphes à composition $\boldsymbol{I}$ et de *bases* des foncteurs $P : \boldsymbol{I} \to \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$,
- une classe $\mathtt{CI}(\boldsymbol{E})$ de cônes inductifs $q = (q_J : Q_J \to Q)_{J \in \boldsymbol{J}}$, dits *distingués* dans $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$, d'*indexations* des graphes à composition $\boldsymbol{J}$ et de bases des foncteurs $Q : \boldsymbol{J} \to \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$.

Et une telle esquisse $\boldsymbol{E}$ est dite *petite* si, et seulement si :

- son support $\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E})$ est un graphe à composition petit,
- la classe $\mathtt{CP}(\boldsymbol{E})$ de ses cônes projectifs distingués est un ensemble,
- la classe $\mathtt{CI}(\boldsymbol{E})$ de ses cônes inductifs distingués est un ensemble,
- l'indexation $\boldsymbol{I}$ de chacun des ses cônes projectifs distingués est un graphe à composition petit,
- l'indexation $\boldsymbol{J}$ de chacun de ses cônes inductifs distingués est un graphe à composition petit.

Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse.

Un *modèle* $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{Ens}$ est constitué par un foncteur $\mathtt{Supp}(M) : \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{Ens}$, qu'on appelle son support, tel que :

- pour tout cône projectif distingué $p = (p_I : P \to P_I)_{I \in \boldsymbol{I}} \in \mathtt{CP}(\boldsymbol{E})$, le cône projectif image $\mathtt{Supp}(M)(p)$ est un cône limite projective de $\boldsymbol{Ens}$,
- pour tout cône inductif distingué $q = (q_J : Q_J \to Q)_{J \in \boldsymbol{J}} \in \mathtt{CI}(\boldsymbol{E})$, le cône inductif image $\mathtt{Supp}(M)(q)$ est un cône limite inductive de $\boldsymbol{Ens}$.

Un *homomorphisme* $m : M \Rightarrow M' : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ d'un modèle $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ vers un modèle $M' : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ est constitué par une transformation naturelle *support* :

$$\mathtt{Supp}(m) : \mathtt{Supp}(M) \Rightarrow \mathtt{Supp}(M') : \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{Ens} \ .$$

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, on note $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ la catégorie dont les objets sont les modèles de $\boldsymbol{E}$ vers $\boldsymbol{Ens}$ et dont les flèches sont les homomorphismes entre ces modèles.

Si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie localement petite, on dit qu'elle est *esquissable* si et seulement si :

- il existe une esquisse petite $\boldsymbol{E}$ telle que $\boldsymbol{C}$ et $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ sont équivalentes.

Plus précisément, si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie équivalente à $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ (autrement dit, si on sait *précisément* comment $\boldsymbol{C}$ est esquissable), on dit qu'elle est *ré-esquissable* par l'esquisse petite $\boldsymbol{E}'$ si, et seulement si :

- les catégories $\boldsymbol{C}$ et $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{Ens})$ (et donc aussi $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$) sont équivalentes.

4. L'esquisse éclatement d'un modèle d'une esquisse vers la catégorie des ensembles.

Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse et que $M:\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{Ens}$ est un modèle.

On désigne par $M/\boldsymbol{E}$ l'*éclatement de* M , i.e. l'esquisse (évidemment petite, si $\boldsymbol{E}$ est petite) définie comme suit :

- son support est le graphe à composition des éléments du support de M , autrement dit on a :

$$\mathtt{Supp}(M/\boldsymbol{E})=\mathtt{Supp}(M)/\mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}) \ ,$$

- ses cônes projectifs distingués sont les :

$$p^x$$

$$=$$

$$(\ p^x{}_I : P^x \to P^x{}_I)_{I\in \boldsymbol{I}}$$

$$=$$

$$(\ ((P,x),p_I,(P_I,x_I)):(P,x)\to(P_I,x_I)\ )_{I\in \boldsymbol{I}}$$

d'indexation le graphe à composition $\boldsymbol{I}$ et de base le foncteur :

$$\begin{array}{rcl} P^x:\boldsymbol{I} & \to & \mathtt{Supp}(M/\boldsymbol{E}) \\ I & \mapsto & (P_I,x_I) \\ (i:I\to I') & \mapsto & ((P_I,x_I),P_i,(P_{I'},x_{I'})) \end{array}$$

et, ce, dès que $p = (p_I : P \to P_I)_{I \in \boldsymbol{I}}$ est un cône projectif distingué de $\boldsymbol{E}$ et $x \in M(P)$,

- ses cônes inductifs distingués sont les :

$$q^x$$

$$=$$

$$(\, q^x{}_{(J,y)} : Q^x{}_{(J,y)} \to Q^x)_{(J,y)\in \boldsymbol{J}^x}$$

$$=$$

$$(\, ((Q_J, y), q_J, (Q,x)) : (Q_J, y) \to (Q,x)\,)_{(J,y)\in \boldsymbol{J}^x}$$

d'indexation le graphe orienté $\boldsymbol{J}^x$ (composante connexe - dénuée de composition, pour simplifier - , des éléments représentant x dans $(\mathtt{Supp}(M)\circ Q)/\boldsymbol{J}$, i.e. dans le graphe à composition des éléments du foncteur $\boldsymbol{J} \xrightarrow{Q} \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}) \xrightarrow{\mathtt{Supp}(M)} \boldsymbol{Ens}$) tel que :

+ ses objets sont les (J, y) , où J est objet de $\boldsymbol{J}$ et $M(Q_J)(y) = x$,

+ ses flèches sont les $((J, y), j, (J', y')) : (J, y) \to (J', y')$, où $j : J \to J'$ est une flèche de $\boldsymbol{J}$ et $M(Q_j)(y) = y'$,

de base le foncteur :

$$\begin{array}{rcl} Q^x : \boldsymbol{J}^x & \to & \mathtt{Supp}(M/\boldsymbol{E}) \\ (J,y) & \mapsto & (Q_J, y) \\ ((J,y), j, (J',y')) & \mapsto & ((Q_J, y), Q_j, (Q_{J'}, y')) \end{array}$$

et, ce, dès que $q = (q_J : Q_J \to Q)_{J \in \boldsymbol{J}}$ est un cône inductif distingué de $\boldsymbol{E}$ et $x \in M(Q)$.

5. Application : sur la ré-esquissabilité des catégories esquissables possédant un objet terminal.

Il est facile, maintenant de prouver que :

Proposition. Si $\boldsymbol{E}$ *est une esquisse petite et si* $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ *en est un modèle, alors, les catégories* $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})/M$ *et* $\mathtt{Mod}(M/\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})$ *sont équivalentes.*

Preuve. A tout homomorphisme $h : M' \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ (objet de $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})/M$), on peut associer le modèle (évidemment bien défini) $\Phi(h) : M/\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ (objet de $\mathtt{Mod}(M/\boldsymbol{E}, \boldsymbol{Ens})$) tel que (notamment) :

- pour tout objet (E,x) de $\boldsymbol{M}/\boldsymbol{E}$, on a :

$$\Phi(h)(E,x) = h(E)^{-1}(x) \ .$$

Et, à tout modèle $N : \boldsymbol{M}/\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ (objet de $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$), on peut associer tout d'abord le modèle (évidemment bien défini) $\Theta(N) : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ tel que (notamment) :

- pour tout objet E de $\boldsymbol{E}$, on a :

$$\Theta(N)(E) = \sum_{x \in M(E)} N(E,x) \ ,$$

puis l'homomorphisme (évidemment bien défini) $\Psi(N) : \Theta(N) \Rightarrow M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$ (objet de $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})/M$) tel que :

- pour tout objet E de $\boldsymbol{E}$, l'application :

$$\Psi(N)(E) : (\,\Theta(N)(E) = \sum_{x \in M(E)} N(E,x)\,) \to M(E)$$

est l'unique application induite par les applications constantes sur les x parcourant $M(E)$:

$$\begin{array}{ccc} N(E,x) & \to & M(E) \\ y & \mapsto & x \end{array} .$$

On obtient, ainsi, l'équivalence annoncée :

$$\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})/M \ \underset{\Psi}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \ \mathtt{Mod}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$$

Fin de la preuve.

On déduit immédiatement de la proposition précédente que :

Corollaire 1. *Si $\boldsymbol{C}$ est une catégorie esquissable (i.e. accessible) et si C en est un objet, alors la catégorie $\boldsymbol{C}/C$ est esquissable (i.e. accessible).*

Preuve. Comme $\boldsymbol{C}$ est esquissable, elle est équivalente à une catégorie de la forme $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ et donc $\boldsymbol{C}/C$ est équivalente à une catégorie de la forme $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})/M$. Or, d'après la proposition précédente, $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})/M$ est équivalente, et donc $\boldsymbol{C}/C$ aussi, à la catégorie $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{M}/\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$. D'où la conclusion.
Fin de la preuve.

De la proposition qui précède résulte aussi que :

Corollaire 2. *Les catégories esquissables (i.e. accessibles) possédant un objet terminal sont exactement celles qu'on peut ré-esquisser à l'aide d'une esquisse petite dont les cônes inductifs distingués sont tous (s'il y en a) d'indexations non vides et connexes.*

Preuve. Supposons, en effet, que $\boldsymbol{C} = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ est la catégorie des modèles d'une esquisse petite (quelconque) et qu'elle possède un objet terminal T . On a donc, d'après la proposition précédente, $\boldsymbol{C} \cong \boldsymbol{C}/T = \mathtt{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})/T \approx \mathtt{Mod}(T/\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$. Mais, par construction, les cônes inductifs dinstingués de $T/\boldsymbol{E}$ - s'il y en a - sont tous d'indexations non vides et connexes.

Inversement, si $\boldsymbol{E}'$ est une esquisse petite où tous les cônes inductifs distingués - s'il y en a - sont tous d'indexations non vides et connexes, alors le foncteur $\underline{T} : \mathtt{Supp}(\boldsymbol{E}') \to \boldsymbol{Ens}$, constant sur 1 , est évidemment le support d'un (unique) modèle $T : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{Ens}$, objet terminal de $\mathtt{Mod}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{Ens})$.

Fin de la preuve.

Bibliographie.

[A.C.F.C.] **M. Makkai et R. Paré**, Accessible categories : the foundations of categorical model theory, Contemporary Math. 104, Amer. Math. Soc., Providence, 1989.

[C.A.S.T.] **C. Ehresmann**, Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

[C.M.C.E.] **C. Lair**, Catégories modelables et catégories esquissables, Diagrammes 6, Paris, 1981.

[C.M.O.T] **C. Lair**, Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant un objet terminal, Diagrammes 35, Paris, 1996.

[E.T.S.A.] **C. Ehresmann**, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iasi, XIV, 1968.

[I.T.S.C.] **C. Ehresmann**, Introduction to the theory of structured categories, Techn. Report 10, Univ. of Kansas, Lawrence, 1966.

N.B. Les numéros 1 à 58 (1979-2007) de la revue **Diagrammes** sont tous en accès libre sur le site **http://www.numdam.org/** .