DIAGRAMMES

FLORENCE CURY

**Graphes multiplicatis enrichis. Partie IV**

*Diagrammes*, tome 57-58 (2007), exp. n$^{o}$ 1, p. 121-183

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2007__57-58__A1_0>

DIAGRAMMES VOLUMES 57 + 58 , 2007

# GRAPHES MULTIPLICATIS ENRICHIS

## PARTIE IV

Florence Cury

A.M.S. Sub. Class : 18 D 05 , 18 D 20

## CHAPITRE IV: CHANGEMENT D'ENRICHISSEMENT.



---

IV.1. L'objet de tout ce Chapitre est d'étudier les foncteurs:

$$\overline{Q}\text{-néof} : V^\wedge\text{-néof} \longrightarrow W^\wedge\text{-néof} ,$$

$$\overline{Q}\text{-apor} : V^\wedge\text{-apor} \longrightarrow W^\wedge\text{-apor} ,$$

$$\overline{Q}\text{-fonc} : V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow W^\wedge\text{-fonc} ,$$

que l'on déduit, dans certaines conditions, de la donnée d'un foncteur monoïdal ("de changement d'enrichissement"):

$$\overline{Q} : V\hat{} \longrightarrow W\hat{},$$

de la catégorie monoïdale $V\hat{}$ vers la catégorie monoïdale $W\hat{}$.

Il nous semble donc utile, tout d'abord, de rappeler dans ce paragraphe la définition d'un tel foncteur monoïdal $\overline{Q}$ , voir (C.L.C.A.).

Si $V\hat{} = (V^{\bullet}, \boxtimes_{V\hat{}}, i_{V\hat{}}, \Phi_{V\hat{}}, \Psi_{V\hat{}}, \omega_{V\hat{}})$ et $W\hat{} = (W^{\bullet}, \boxtimes_{W\hat{}}, i_{W\hat{}}, \Phi_{W\hat{}}, \Psi_{W\hat{}}, \omega_{W\hat{}})$ sont deux catégories monoïdales (et nous omettrons, sauf pour $i_{V\hat{}}$ et $i_{W\hat{}}$, les indices " $V\hat{}$ " et " $W\hat{}$ ", car aucun risque de confusion n'est à craindre), nous dirons que $\overline{Q} = (W\hat{}, (Q^{\bullet}, t, \varepsilon), V\hat{})$ est un <u>foncteur monoïdal de</u> $V\hat{}$ <u>vers</u> $W\hat{}$ si, et seulement si:

- $Q^{\bullet} : V^{\bullet} \longrightarrow W^{\bullet}$ est un foncteur (on rappelle que l'on note alors

$$q : V \longrightarrow W$$

son application sous-jacente, voir 0.2),
- $t : i_{W\hat{}} \longrightarrow q(i_{V\hat{}})$ est un morphisme de $W^{\bullet}$,
- $\varepsilon : (-\boxtimes-).(Q^{\bullet} \times Q^{\bullet}) \Longrightarrow Q^{\bullet} . (-\boxtimes-)$ est une transformation naturelle,

ce qui signifie aussi que, pour tout couple $(z_2, z_1)$ de morphismes $z_1 : v_1 \longrightarrow v'_1$ et $z_2 : v_2 \longrightarrow v'_2$ de $V^{\bullet}$, le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
q(v_2) \boxtimes q(v_1) \arrow[r, "\varepsilon(v_2,v_1)"] \arrow[d, "q(z_2) \boxtimes q(z_1)"'] & q(v_2 \boxtimes v_1) \arrow[d, "q(z_2 \boxtimes z_1)"] \\
q(v'_2) \boxtimes q(v'_1) \arrow[r, "\varepsilon(v'_2,v'_1)"'] & q(v'_2 \boxtimes v'_1)
\end{tikzcd}$$

- pour tout objet v de V^, les diagrammes ci-dessous sont commutatifs (<u>axiome d'unitarité pour un foncteur monoïdal</u>):

$$\begin{tikzcd}
q(v) \arrow[r, "\sim", "q(\Phi(v))"'] \arrow[d, "\Phi(q(v))"', "\wr"] & q(v \boxtimes i_{V^\wedge}) \\
q(v) \boxtimes i_{W^\wedge} \arrow[r, "q(v) \boxtimes t"] & q(v) \boxtimes q(i_{V^\wedge}) \arrow[u, "\varepsilon(v, i_{V^\wedge})"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
q(v) \arrow[r, "\sim", "q(\Psi(v))"'] \arrow[d, "\Psi(q(v))"', "\wr"] & q(i_{V^\wedge} \boxtimes v) \\
i_{W^\wedge} \boxtimes q(v) \arrow[r, "t \boxtimes q(v)"] & q(i_{V^\wedge}) \boxtimes q(v) \arrow[u, "\varepsilon(i_{V^\wedge}, v)"']
\end{tikzcd}$$

,

- pour tout triplet (v'',v',v) d'objets de V^, le diagramme ci-dessous est commutatif (<u>axiome d'associativité pour un foncteur monoïdal</u>):

$$\begin{tikzcd}
 & q(v'') \boxtimes (q(v') \boxtimes q(v)) \arrow[dl, "q(v'') \boxtimes \varepsilon(v', v)"'] \arrow[dr, "\omega(q(v''), q(v'), q(v))", "\sim"'] & \\
q(v'') \boxtimes q(v' \boxtimes v) \arrow[d, "\varepsilon(v'', v' \boxtimes v)"'] & & (q(v'') \boxtimes q(v')) \boxtimes q(v) \arrow[d, "\varepsilon(v'', v') \boxtimes q(v)"] \\
q(v'' \boxtimes (v' \boxtimes v)) \arrow[dr, "\sim", "q(\omega(v'', v', v))"'] & & q(v'' \boxtimes v') \boxtimes q(v) \arrow[dl, "\varepsilon(v'' \boxtimes v', v)"] \\
 & q((v'' \boxtimes v') \boxtimes v) &
\end{tikzcd}$$

(ce dernier axiome n'est utilisé, dans la suite, que pour construire le foncteur $\overline{Q}$-fonc: $V^\wedge$-fonc $\longrightarrow W^\wedge$-fonc).

IV.2. Supposons que $\overline{Q} : V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ est un foncteur monoïdal (nous reprenons les notations de IV.1 ).
Si $\vec{C} = (\vec{C}_o, \underline{\vec{C}}, j_{\vec{C}})$ est un $V^\wedge$-graphe orienté, il est clair que le triplet $\vec{C}' = (\vec{C}'_o, \underline{\vec{C}}', j_{\vec{C}'})$ est un $W^\wedge$-graphe orienté, lorsque:

- $\vec{C}'_o = \vec{C}_o$ ,
- pour tout couple $(c',c)$ d'objets de $\vec{C}$, on a $\underline{\vec{C}}'(c',c) = q(\underline{\vec{C}}(c',c))$ ,
- pour tout objet $c$ de $\vec{C}$, le morphisme $j_{\vec{C}'}(c)$ est le composé de $W^\bullet$ suivant:

$$j_{\vec{C}'}(c) : i_{W^\wedge} \xrightarrow[t]{} q(i_{V^\wedge}) \xrightarrow[q(j_{\vec{C}}(c))]{} q(\underline{\vec{C}}(c,c)) = \underline{\vec{C}}'(c,c)$$

De même, si $\vec{G} = (\vec{B}, (G, \underline{\vec{G}}), \vec{C}) : \vec{C} \longrightarrow \vec{B}$ est une $V^\wedge$-application orientée, il est clair que l'on définit une $W^\wedge$-application orientée $\vec{G}' = (\vec{B}', (G', \underline{\vec{G}}'), \vec{C}') : \vec{C}' \longrightarrow \vec{B}'$, lorsque:

- $G' = G : \vec{C}'_o = \vec{C}_o \longrightarrow \vec{B}_o = \vec{B}'_o$ ,
- pour tout couple $(c',c)$ d'objets de $\vec{C}$, on a:

$$\begin{array}{cccc} \underline{\vec{G}}'(c',c) & \underline{\vec{C}}'(c',c) & \longrightarrow & \underline{\vec{B}}'(G(c'),G(c)) \\ \| & \| & & \| \\ q(\underline{\vec{G}}(c',c)) : & q(\underline{\vec{C}}(c',c)) & \longrightarrow & q(\underline{\vec{B}}(G(c'),G(c))) \end{array}$$

On vérifie alors facilement que, si $\mathcal{U}_o$ est un univers, l'application de $V^\wedge$-apor dans $W^\wedge$-apor qui, à tout morphisme tel que $\vec{G}$, associe $\vec{G}'$ définit un foncteur $\overline{Q}$-apor: $V^\wedge$-apor $\longrightarrow$ $W^\wedge$-apor.(Remarquons que nous ne nous sommes pas servis de tous les axiomes exprimant la monoïdalité de $\overline{Q}$ pour construire $\overline{Q}$-apor.)On peut donc énoncer, pour résumer:

Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, si $V^\wedge$ et $W^\wedge$ sont deux catégories monoïdales, tout foncteur monoïdal $\overline{Q} : V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ induit un foncteur

$$\overline{Q}\text{-apor}: V^\wedge\text{-apor} \longrightarrow W^\wedge\text{-apor}$$

IV.3. Supposons, maintenant, que $\overline{Q}$: $V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ est un foncteur monoïdal tel que:

- le foncteur $Q^\bullet$: $V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$, sous-jacent à $\overline{Q}$, est compatible avec les monomorphismes (nous dirons aussi que $\overline{Q}$ l'est, pour simplifier),
- $W^\bullet$ est une catégorie à produits fibrés (de deux morphismes de même but) que l'on munit donc d'un choix de tels produits fibrés que nous dirons <u>canoniques</u>.

Alors, si $C^\wedge = (C_o^\wedge, \underline{C}^\wedge, j_{C^\wedge}, m_{C^\wedge}, k_{C^\wedge}, \overline{\alpha}_{C^\wedge}, \overline{\beta}_{C^\wedge})$ est un $V^\wedge$-graphe multiplicatif, il est clair (en utilisant l'axiome d'unitarité pour le foncteur monoïdal $\overline{Q}$ ) que l'on définit un $W^\wedge$-graphe multiplicatif

$$C'^\wedge = (C'^\wedge_o, \underline{C}'^\wedge, j_{C'^\wedge}, m_{C'^\wedge}, k_{C'^\wedge}, \overline{\alpha}_{C'^\wedge}, \overline{\beta}_{C'^\wedge}) \quad ,$$

lorsque:

- $\vec{C}' = (C'^\wedge_o, \underline{C}'^\wedge, j_{C'^\wedge})$ est le $W^\wedge$-graphe orienté associé, comme en IV.2 , au $V^\wedge$-graphe orienté $\vec{C} = (C_o^\wedge, \underline{C}^\wedge, j_{C^\wedge})$, sous-jacent à $C^\wedge$ ,
- pour tout triplet $(c'',c',c)$ d'objets de $C^\wedge$, le diagramme ci-dessous est un produit fibré canonique de $W^\bullet$:

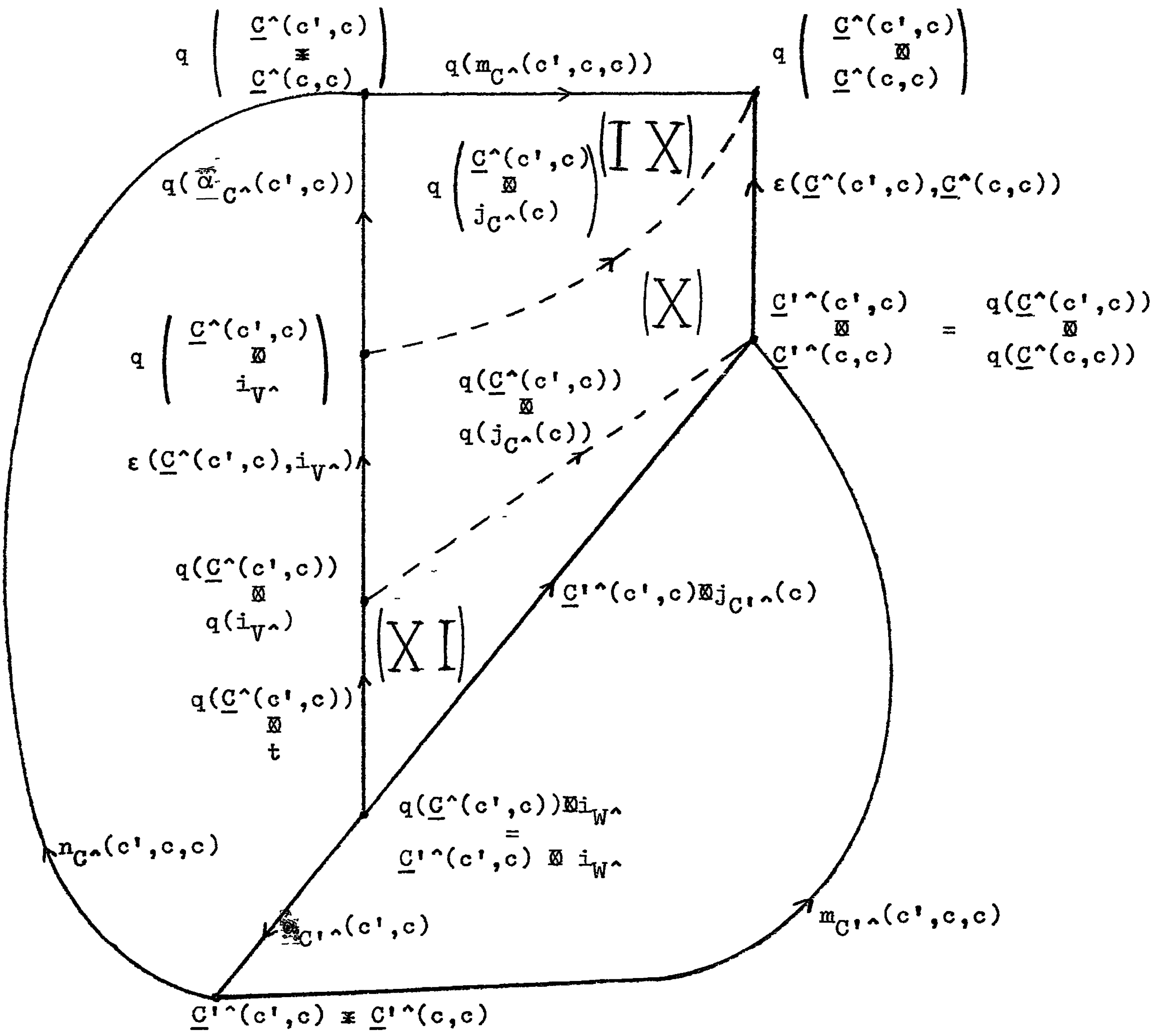
$$\begin{tikzcd}
q(\,\underline{C}^\wedge(c'',c') \ast \underline{C}^\wedge(c',c)\,) \arrow[r, "q(\,m_{C^\wedge}(c'',c',c)\,)"] & q(\,\underline{C}^\wedge(c'',c') \boxtimes \underline{C}^\wedge(c',c)\,) \\
\underline{C}'^\wedge(c'',c') \ast \underline{C}'^\wedge(c',c) \arrow[u, "n_{C^\wedge}(c'',c',c)"] \arrow[r, "m_{C'^\wedge}(c'',c',c)"'] & \underline{C}'^\wedge(c'',c') \boxtimes \underline{C}'^\wedge(c',c) = q(\underline{C}^\wedge(c'',c')) \boxtimes q(\underline{C}^\wedge(c',c)) \arrow[u, "\varepsilon(\,\underline{C}^\wedge(c'',c'),\underline{C}^\wedge(c',c)\,)"']
\end{tikzcd}$$

(et alors, $m_{C^\wedge}(c'',c',c)$ étant un monomorphisme, $q(m_{C^\wedge}(c'',c',c))$ est un monomorphisme, puisque $Q^\bullet$ est compatible avec les monomorphismes, et donc $m_{C'^\wedge}(c'',c',c)$ aussi),

- pour tout triplet $(c'',c',c)$ d'objets de $C^{\wedge}$, le morphisme $k_{C'^{\wedge}}(c'',c',c)$ est le composé suivant de $W^{\bullet}$ :

$$k_{C'^{\wedge}}(c'',c',c) : \begin{matrix}\underline{C}'^{\wedge}(c'',c')\\ \ast \\ \underline{C}'^{\wedge}(c',c)\end{matrix} \xrightarrow[n_{C^{\wedge}}(c'',c',c)]{} q\begin{pmatrix}\underline{C}^{\wedge}(c'',c')\\ \ast \\ \underline{C}^{\wedge}(c',c)\end{pmatrix} \xrightarrow[q(k_{C^{\wedge}}(c'',c',c))]{} \underline{C}'^{\wedge}(c'',c)\quad ,$$

- pour tout couple $(c',c)$ d'objets de $C^{\wedge}$, on désigne par $\underline{\overline{\alpha}}_{C'^{\wedge}}(c',c)$ l'unique morphisme de $W^{\bullet}$ rendant commutatif le diagramme ci-dessous:



(rappelons que, dans le diagramme précédent, le "sous-diagramme" (IX) est commutatif car c'est l'image d'un diagramme commutatif de $V^{\bullet}$ qui exprime l'axiome d'unitarité à droite pour $C^\wedge$, le sous-diagramme (X) est commutatif puisque $\varepsilon$ est une transformation naturelle et le sous-diagramme (XI) est commutatif d'après la construction de IV.2 ),

- pour tout couple $(c',c)$ d'objets de $C^\wedge$, on définit $\underline{\mathfrak{B}}_{C'^\wedge}(c',c)$ d'une manière analogue.

Si $G^\wedge = (B^\wedge, (G,\underline{G}^\wedge,M_{G^\wedge}), C^\wedge)$ est un $V^\wedge$-néofoncteur, il est clair, dans les mêmes conditions, que $G'^\wedge = (B'^\wedge, (G',\underline{G}'^\wedge,M_{G'^\wedge}), C'^\wedge)$ est un $W^\wedge$-néofoncteur de $C'^\wedge$ vers $B'^\wedge$, lorsque:

- $\vec{G}' = (\vec{B}', (G',\underline{G}'^\wedge), \vec{C}')$ est la $W^\wedge$-application orientée associée, comme en IV.2, à la $V^\wedge$-application orientée $\vec{G}$, sous-jacente à $G^\wedge$,
- pour tout triplet $(c'',c',c)$ d'objets de $C^\wedge$(i.e. de $C'^\wedge$), on désigne par $M_{G'^\wedge}(c'',c',c)$ l'unique morphisme, "produit fibré" dans $W^{\bullet}$, qui fait commuter le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
q\begin{pmatrix}\underline{B}^\wedge(b'',b') \\ \ast \\ \underline{B}^\wedge(b',b)\end{pmatrix} \arrow[rrr, "q(m_{B^\wedge}(b'',b',b))"] & & & q\begin{pmatrix}\underline{B}^\wedge(b'',b') \\ \boxtimes \\ \underline{B}^\wedge(b',b)\end{pmatrix} \\
& q\begin{pmatrix}\underline{C}^\wedge(c'',c') \\ \ast \\ \underline{C}^\wedge(c',c)\end{pmatrix} \arrow[ul, "q(M_{G^\wedge}(c'',c',c))"'] \arrow[r, "q(m_{C^\wedge}(c'',c',c))"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{XII}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{XIV}"] & q\begin{pmatrix}\underline{C}^\wedge(c'',c') \\ \boxtimes \\ \underline{C}^\wedge(c',c)\end{pmatrix} \arrow[ur, "q(\underline{G}^\wedge(c'',c')\boxtimes\underline{G}^\wedge(c',c))"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{XIII}"] & \\
& \underline{C}'^\wedge(c'',c') \ast \underline{C}'^\wedge(c',c) \arrow[u, "n_{C^\wedge}(c'',c',c)"'] \arrow[r, "m_{C'^\wedge}(c'',c',c)"] & \underline{C}'^\wedge(c'',c') \boxtimes \underline{C}'^\wedge(c',c) \arrow[u, "\varepsilon(\underline{C}^\wedge(c'',c'),\underline{C}^\wedge(c',c))"] \arrow[dr, "\underline{G}'^\wedge(c'',c')\boxtimes\underline{G}'^\wedge(c',c)"] & \\
\underline{B}'^\wedge(b'',b') \ast \underline{B}'^\wedge(b',b) \arrow[uuu, "n_{B^\wedge}(b'',b',b)"] \arrow[ur, "M_{G'^\wedge}(c'',c',c)"'] \arrow[rrr, "m_{B'^\wedge}(b'',b',b)"'] & & & \underline{B}'^\wedge(b'',b') \boxtimes \underline{B}'^\wedge(b',b) \arrow[uuu, "\varepsilon(\underline{B}^\wedge(b'',b'),\underline{B}^\wedge(b',b))"']
\end{tikzcd}$$

,

où nous avons posé $G(c) = b$, $G(c') = b'$ et $G(c'') = b''$ (rappelons que le sous-diagramme (XII) est commutatif car c'est l'image d'un diagramme commutatif qui exprime que $G^\wedge$ est un $V^\wedge$-néofoncteur, le sous-diagramme (XIII) est commutatif car $\varepsilon$ est une transformation naturelle, le sous-diagramme (XIV) et le sous-diagramme "contour extérieur" du diagramme précédent sont commutatifs puisque, par construction, ce sont des produits fibrés canoniques de $W^\bullet$).

Il est, dès lors, clair que, si $\mathcal{U}_0$ est un univers, l'application de $V^\wedge$-néof vers $W^\wedge$-néof qui, à tout morphisme tel que $G^\wedge$, associe $G'^\wedge$ définit un foncteur:

$$\overline{Q}_{pf}\text{-néof} : V^\wedge\text{-néof} \longrightarrow W^\wedge\text{-néof} ,$$

lorsque pf: $W^\bullet$ (  ) $\longrightarrow$ $W^\bullet$ (  ) est le foncteur qui décrit le choix de produits fibrés canoniques effectué initialement dans $W^\bullet$.

Plus précisément nous avons:

<u>Proposition</u>. <u>Si</u> $\mathcal{U}_0$ <u>est un univers</u>, <u>si</u> $V^\wedge$ <u>et</u> $W^\wedge$ <u>sont deux catégories monoïdales</u>, <u>si</u> $W^\bullet$ <u>est une catégorie à produits fibrés</u> (<u>de deux morphismes de même but</u>), <u>à tout foncteur monoïdal</u> $\overline{Q}: V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$, <u>compatible avec les monomorphismes</u>, <u>et à tout foncteur "choix de produits fibrés naturalisés"</u>

pf: $W^\bullet$ (  ) $\longrightarrow$ $W^\bullet$ (  )

<u>dans</u> $W^\bullet$, <u>est associé un foncteur</u>

$$\overline{Q}_{pf}\text{-néof} : V^\wedge\text{-néof} \longrightarrow W^\wedge\text{-néof}$$

<u>rendant commutatif le diagramme suivant</u>:

$$\begin{tikzcd}
V^\wedge\text{-néof} \arrow[r, "\overline{Q}_{pf}\text{-néof}"] \arrow[d, "\text{(voir I.11) } P_{V^\wedge\text{-an}}"'] & W^\wedge\text{-néof} \arrow[d, "P_{W^\wedge\text{-an}} \text{ (voir I.11)}"] \\
V^\wedge\text{-apor} \arrow[r, "\overline{Q}\text{-apor}"] & W^\wedge\text{-apor}
\end{tikzcd}$$

<u>Si, de plus,</u> $pf_1$ <u>et</u> $pf_2$ <u>sont deux foncteurs "choix de produits fibrés naturalisés" dans</u> W$^\bullet$, <u>alors les foncteurs</u> $\overline{Q}_{pf_1}$-néof <u>et</u> $\overline{Q}_{pf_2}$-néof <u>sont naturellement équivalents.</u>

Le lecteur vérifiera sans difficulté la dernière assertion de cette proposition.

IV.4. <u>Proposition.</u> <u>Si</u> $\mathcal{U}_o$ <u>est un univers, si</u> V^ <u>et</u> W^ <u>sont deux catégories monoïdales, à tout foncteur monoïdal</u> $\overline{Q}$: V^ $\longrightarrow$ W^ <u>est associé un foncteur</u>

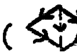
$$\overline{Q}\text{-fonc}: V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow W^\wedge\text{-fonc}$$

<u>rendant commutatif le diagramme ci-dessous:</u>

$$\begin{tikzcd}
V^\wedge\text{-fonc} \arrow[r, "\overline{Q}\text{-fonc}"'] \arrow[d, "P_{V^\wedge\text{-af}}"'] & W^\wedge\text{-fonc} \arrow[d, "P_{W^\wedge\text{-af}}"] \\
V^\wedge\text{-apor} \arrow[r, "\overline{Q}\text{-apor}"] & W^\wedge\text{-apor}
\end{tikzcd}$$

(voir I.11) (voir I.11)

<u>Si, de plus,</u> W$^\bullet$ <u>est à produits fibrés</u> (<u>de deux morphismes de même but</u>) <u>et</u> $\overline{Q}$ <u>est compatible avec les monomorphismes, à tout "choix de produits fibrés naturalisés"</u>

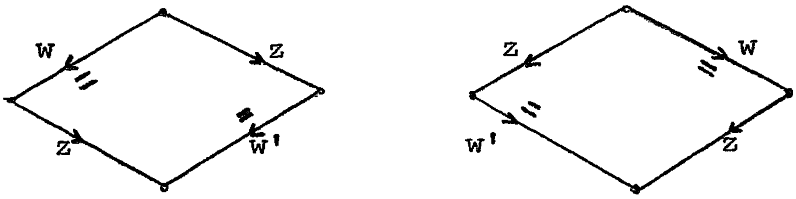
pf: W$^\bullet$ (  ) $\longrightarrow$ W$^\bullet$ (  )

<u>dans</u> W$^\bullet$, <u>est associée une équivalence naturelle</u> $\zeta_{pf}$ <u>représentée par</u>

$$\begin{tikzcd}
V^\wedge\text{-fonc} \arrow[r, "\overline{Q}\text{-fonc}"'] \arrow[d, "P_{V^\wedge\text{-nf}}"'] & W^\wedge\text{-fonc} \arrow[d, "P_{W^\wedge\text{-nf}}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{\sim}{\Rightarrow}\ \zeta_{pf}"] \\
V^\wedge\text{-néof} \arrow[r, "\overline{Q}_{pf}\text{-néof}"] & W^\wedge\text{-néof}
\end{tikzcd}$$

(voir I.7) (voir I.7)

En particulier, si $pf_0$ est un choix de produits fibrés naturalisés dans $W^\bullet$ tel que, pour tout morphisme $z: w \longrightarrow w'$ de $W^\bullet$, les diagrammes




sont des produits fibrés naturalisés choisis, alors $\zeta_{pf_0}$ est la transformation naturelle identique; c'est dire aussi que le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
V^\wedge\text{-fonc} \arrow[r, "\overline{Q}\text{-fonc}"] \arrow[d, "P_{V^\wedge\text{-nf}}"'] & W^\wedge\text{-fonc} \arrow[d, "P_{W^\wedge\text{-nf}}"] \\
V^\wedge\text{-néof} \arrow[r, "\overline{Q}_{pf_0}\text{-néof}"] & W^\wedge\text{-néof}
\end{tikzcd}$$

Pour la construction de $\overline{Q}$-fonc, il suffit de constater que l'image, par $\overline{Q}_{pf_0}$-néof, d'une $V^\wedge$-catégorie est une $W^\wedge$-catégorie: $\overline{Q}$-fonc n'est , ainsi, qu'une restriction de $\overline{Q}_{pf_0}$-néof. Le troisième point de la proposition est donc trivial et le second point s'en déduit facilement.
Plus généralement, on peut construire $\overline{Q}$-fonc même si $W^\bullet$ n'est pas à produits fibrés et $Q^\bullet$ n'est pas compatible avec les monomorphismes: il suffit de reprendre la construction de IV.3, où les seuls produits fibrés et monomorphismes à utiliser sont triviaux dans le cas des catégories enrichies. On retrouve, ainsi, le résultat analogue de (C.L.C.A.).

---

Dans la suite, si un choix de produits fibrés naturalisés tel que $pf_0$ est effectué, nous poserons systématiquement, pour plus de simplicité:

$$\overline{Q}_{pf_0}\text{-néof} = \overline{Q}\text{-néof}$$

IV.5. Nous examinons, ici, trois cas particuliers qui illustrent les considérations précédentes. Nous les reprendrons, d'ailleurs, en IV.20 pour montrer comment s'appliquent les théorèmes d'adjonction de IV.18 et IV.19.

a). Soit $\mathcal{U}_o$ un univers et $\mathcal{U}^\wedge$ la structure cartésienne (donc monoïdale) usuelle sur la catégorie $\mathcal{U}$ pleine d'applications entre éléments de $\mathcal{U}_o$. Si $V^\wedge = (V^\bullet, \boxtimes, i, \Phi, \Psi, \omega)$ est une catégorie monoïdale au-dessus de $\mathcal{U}_o$ (i.e. si le foncteur $Hom_{V^\bullet}(-,i)$ est à valeurs dans $\mathcal{U}$), il est clair que le foncteur $Hom_{V^\bullet}(-,i): V^\bullet \longrightarrow \mathcal{U}$ est sous-jacent à un foncteur monoïdal:

$$\overline{Hom_{V^\bullet}}(-,i): V^\wedge \longrightarrow \mathcal{U}^\wedge .$$

Alors, le foncteur composé:

$$P_{(\mathcal{U}^\wedge, V^\wedge)\text{-apor}}: V^\wedge\text{-apor} \xrightarrow[\overline{Hom_{V^\bullet}}(-,i)\text{-apor}]{} \mathcal{U}^\wedge\text{-apor} \xrightarrow[\text{(voir 0.7)}]{} \Gamma$$

est le foncteur d'oubli défini en I.12 et qui, à toute $V^\wedge$-application orientée, associe son application orientée sous-jacente.

De même, le foncteur composé:

$$P_{(\mathcal{U}^\wedge, V^\wedge)\text{-fonc}}: V^\wedge\text{-fonc} \xrightarrow[\overline{Hom_{V^\bullet}}(-,i)\text{-fonc}]{} \mathcal{U}^\wedge\text{-fonc} \xrightarrow[\text{(voir 0.6)}]{} \mathcal{F}$$

est le foncteur d'oubli défini en 0.6 et qui, à tout $V^\wedge$-foncteur, associe son foncteur sous-jacent.

Enfin, comme $\mathcal{U}$ est à produits fibrés et $Hom_{V^\bullet}(-,i)$ est évidemment compatible avec les monomorphismes, pour tout "choix de produits fibrés naturalisés"

$$pf: \mathcal{U}^{(\searrow\swarrow)} \longrightarrow \mathcal{U}^{(\diamond)}$$

dans $\mathcal{U}$ , le foncteur composé:

$$P_{(\mathcal{U}^\wedge, V^\wedge)\text{-néof}}: V^\wedge\text{-néof} \xrightarrow[(\overline{Hom_{V^\bullet}}(-,i))_{pf}\text{-néof}]{} \mathcal{U}^\wedge\text{-néof} \xrightarrow[\text{(voir I.14 )}]{} \mathcal{N}'$$

est le foncteur d'oubli défini en I.14 et qui, à tout $V^{\wedge}$-néofoncteur, associe son néofoncteur sous-jacent.

b). Supposons encore que $\mathcal{U}_0$ est un univers et désignons par $\mathfrak{F}^{\wedge}$ (resp. $\mathcal{N}'^{\wedge}$) la structure cartésienne canonique sur la catégorie $\mathfrak{F}$ (resp. $\mathcal{N}'$) pleine de foncteurs (resp. de néofoncteurs) relatifs à l'univers $\mathcal{U}_0$, introduite en 0.2 (resp. 0.3).

Il est clair que le foncteur injection canonique $P_{nf}: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathcal{N}'$, qui a été défini en 0.3, est sous-jacent à un foncteur monoïdal strict (i.e pour lequel "t" et "$\varepsilon$" sont des identités) $\overline{P_{nf}} : \mathfrak{F}^{\wedge} \longrightarrow \mathcal{N}'^{\wedge}$, compatible avec les monomorphismes.

Comme $\mathcal{N}'$ est à produits fibrés naturalisés, on peut donc y définir un foncteur "choix de produits fibrés naturalisés":

$$pf_0 : \mathcal{N}'^{(\to\leftarrow)} \longrightarrow \mathcal{N}'^{(\diamond)} ,$$

vérifiant les conditions du $pf_0$ de la proposition de IV.4, où l'on prend $W^{\bullet} = \mathcal{N}'$ .

Alors, le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{F}^{\wedge}\text{-fonc} \arrow[r, "\overline{P_{nf}}\text{-fonc}"] \arrow[d, "P_{\mathfrak{F}^{\wedge}\text{-nf}}"'] & \mathcal{N}'^{\wedge}\text{-fonc} \arrow[d, "P_{\mathcal{N}'^{\wedge}\text{-nf}}"] \\
\mathfrak{F}^{\wedge}\text{-néof} \arrow[r, "\overline{P_{nf}}\text{-néof}"'] & \mathcal{N}'^{\wedge}\text{-néof}
\end{tikzcd}$$

et le foncteur composé commun des deux couples de côtés consécutifs de ce diagramme, à savoir

$$P_{2\text{-nf}} \ : \ \mathfrak{F}^{\wedge}\text{-fonc} \longrightarrow \mathcal{N}'^{\wedge}\text{-néof} ,$$

identifie une 2-catégorie à son 2-graphe-multiplicatif sous-jacent.

c). Supposons encore que $\mathcal{U}_0$ est un univers et désignons par $\mathcal{F}_1\hat{}$ (resp. $\Gamma_1\hat{}$) la structure cartésienne canonique sur la catégorie $\mathcal{F}_1$ (resp. $\Gamma_1$) pleine de foncteurs (resp. d'applications orientées) entre catégories $A^{\cdot}$ relatives (resp. entre graphes orientés $[A]$ relatifs) à l'univers $\mathcal{U}_0$ et qui vérifient:

- pour tout couple $(a',a)$ d'objets de $A^{\cdot}$ (resp. de $[A]$ ), l'ensemble des morphismes de $a$ vers $a'$ est l'ensemble vide ou un singleton.

Notons alors:

$$P_{af} : \mathcal{F} \longrightarrow \Gamma$$

le foncteur d'oubli composé des foncteurs d'oubli (voir 0.3):

$$P_{nf} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{N}' \quad \text{et} \quad P_{an} : \mathcal{N}' \longrightarrow \Gamma \qquad ,$$

qui, à une catégorie, associe son graphe orienté sous-jacent, et:

$$P_1 : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \Gamma_1$$

sa restriction aux sous-catégories pleines, $\mathcal{F}_1$ et $\Gamma_1$, des catégories $\mathcal{F}$ et $\Gamma$.

Il est clair que $P_1$ est sous-jacent à un foncteur monoïdal

$$\overline{P_1} : \mathcal{F}_1\hat{} \longrightarrow \Gamma_1\hat{}$$

(pour lequel "t" et "$\varepsilon$" sont des identités), compatible avec les monomorphismes . Puisque, d'autre part, $\Gamma_1$ est une catégorie à produits fibrés, nous y effectuons un choix de produits fibrés naturalisés:

$$pf_0 : \Gamma_1^{(\cdot\rightarrow\cdot\leftarrow\cdot)} \longrightarrow \Gamma_1^{(\square)}$$

vérifiant les conditions du $pf_0$ de la proposition de IV.4, où l'on prend $W^{\cdot} = \Gamma_1$ .

Ceci nous permet donc de définir les foncteurs "changement d'enrichissement" suivants:

$$\overline{P_1}\text{-néof} : \mathcal{F}_1\hat{}\text{-néof} \longrightarrow \Gamma_1\hat{}\text{-néof}$$

et

$$\overline{P_1}\text{-fonc} : \mathcal{F}_1\hat{}\text{-fonc} \longrightarrow \Gamma_1\hat{}\text{-fonc}$$

IV.6. Nous étudions ici, en IV.7 et en IV.8 la compatibilité des foncteurs $\overline{Q}$-apor, $\overline{Q}$-néof et $\overline{Q}$-fonc, associés comme précédemment à un foncteur monoïdal $\overline{Q}$, avec les limites projectives.Les résultats que nous allons, ainsi, établir nous seront fort utiles pour établir sous quelles conditions ils admettent des adjoints.

Proposition. *Si* $\mathcal{U}_o$ *est un univers, si* $V^\wedge$ *et* $W^\wedge$ *sont deux catégories monoïdales, si* $\overline{Q}$: $V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ *est un foncteur monoïdal, si* $B^\bullet$ *est une catégorie relative à* $\mathcal{U}_o$ *et si, de plus:*

- $V^\bullet$ *est une catégorie à* $\{B^\bullet\}$*-limites projectives,*
- *le foncteur* $Q^\bullet$: $V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ *est compatible avec les* $\{B^\bullet\}$*-limites projectives,*

*alors, le foncteur* $\overline{Q}$-apor: $V^\wedge$-apor $\longrightarrow$ $W^\wedge$-apor (*construit en* IV.2) *est compatible avec les* $\{B^\bullet\}$*-limites projectives.*

Supposons que $S^\bullet$: $B^\bullet \longrightarrow V^\wedge$-apor est un foncteur et désigons par $S'^\bullet$ le foncteur composé:

$$S'^\bullet:\ B^\bullet \xrightarrow[S^\bullet]{\qquad\qquad} V^\wedge\text{-apor} \xrightarrow[\overline{Q}\text{-apor}]{\qquad\qquad\qquad} W^\wedge\text{-apor}$$

D'après la proposition de II.1, dont les hypothèses sont vérifiées, on sait que $S^\bullet$ admet une limite projective,dans $V^\wedge$-apor, que nous notons

$$\vec{A} = (\vec{A}_o, \underline{\vec{A}}, j_{\vec{A}}) \ .$$

Il s'agit donc de prouver que $\overline{Q}\text{-apor}(\vec{A}) = \vec{A'} = (\vec{A'}_o, \underline{\vec{A'}}, j_{\vec{A'}})$ est une limite projective de $S'^\bullet$ .

Or, par construction (voir II.2), l'ensemble des objets $\vec{A}_o$ de la limite projective $\vec{A}$ de $S^\bullet$ est une limite projective, dans $\mathcal{U}$ , du foncteur composé:

$$B^\bullet \xrightarrow[S^\bullet]{\qquad\qquad} V^\wedge\text{-apor} \xrightarrow[Ob_{V^\wedge}\ \ (\text{voir II.2})]{\qquad\qquad\qquad} \mathcal{U}$$

D'autre part, d'après la construction de $\overline{Q}$-apor (donnée en IV.2), il est clair que le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
B^{\bullet} \arrow[r, "S^{\bullet}"] \arrow[d, "S'^{\bullet}"'] & V^{\wedge}\text{-apor} \arrow[d, "Ob_{V^{\wedge}}"] \\
W^{\wedge}\text{-apor} \arrow[r, "Ob_{W^{\wedge}}"'] & \mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

Il en résulte donc que l'ensemble des objets $\overrightarrow{A}'_o$ de $\overrightarrow{A}'$ est une limite projective dans $\mathcal{U}$ du foncteur $Ob_{W^{\wedge}}.S'^{\bullet}$ .

De même, pour tout couple (a',a) d'objets de $\overrightarrow{A}$ (donc de $\overrightarrow{A}'$), le "Hom" à valeurs dans $V^{\wedge}$, à savoir $\underline{\overrightarrow{A}}(a',a)$, est la limite projective, dans $V^{\bullet}$, du foncteur $S^{\bullet}{}_{a',a} : B^{\bullet} \longrightarrow V^{\bullet}$ défini explicitement en II.2 et qui, notamment, à tout objet b de $B^{\bullet}$, associe le "Hom" à valeurs dans $V^{\wedge}$:

$$\underline{\overrightarrow{A}}_b(P_b(a'),P_b(a)),$$

lorsque:

- $S^{\bullet}(b) = \overrightarrow{A}_b = (\overrightarrow{A}_{b,o}, \underline{\overrightarrow{A}}_b, j_{\overrightarrow{A}_b})$ ,
- $\overrightarrow{P}_b = (\overrightarrow{A}_b, (P_b, \underline{\overrightarrow{P}}_b), \overrightarrow{A})$ est la projection relative à b

(autrement dit, le "Hom" à valeurs dans $V^{\wedge}$ de la limite projective est la limite projective "couple par couple" des "Hom" à valeurs dans $V^{\wedge}$).

Puisque $Q^{\bullet}$ est, par hypothèse, compatible avec les $\{B^{\bullet}\}$-limites projectives, il en résulte que, pour tout couple (a',a) d'objets de $\overrightarrow{A}'$ (i.e. de $\overrightarrow{A}$) l'objet $\underline{\overrightarrow{A}'}(a',a) = Q^{\bullet}(\underline{\overrightarrow{A}}(a',a))$ est une limite projective, dans $W^{\bullet}$, du foncteur $Q^{\bullet}.S^{\bullet}{}_{a',a} = S'^{\bullet}{}_{a',a}$ (autrement dit, encore, le "Hom" à valeurs dans $W^{\wedge}$ de $\overrightarrow{A}'$ est la limite "couple par couple" des "Hom" à valeurs dans $W^{\wedge}$).

Les deux propriétés universelles, ainsi établies, pour l'ensemble $\overrightarrow{A}'_o$, d'une part, et les "Hom" à valeurs dans $W^\wedge$ de $\overrightarrow{A^\intercal}$, d'autre part, permettent alors de conclure facilement.

IV.7. Proposition. *Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, si $V^\wedge$ et $W^\wedge$ sont deux catégories monoïdales, si $\overline{Q}$: $V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ est un foncteur monoïdal, si $B^\bullet$ est une catégorie relative à $\mathcal{U}_o$ et si, de plus:*

*- $W^\bullet$ est une catégorie à $\{\searrow\swarrow\}$-limites projectives (i.e. à produits fibrés de deux morphismes de même but),*

*- pf: $W^{\bullet(\searrow\swarrow)} \longrightarrow W^{\bullet(\diamond)}$ est un foncteur "choix de produits fibrés naturalisés" dans $W^\bullet$,*

*- $V^\bullet$ est une catégorie à $\{B^\bullet,\searrow\swarrow\}$-limites projectives,*

*- le foncteur $Q^\bullet$: $V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$, sous-jacent à $\overline{Q}$, est compatible avec les $\{B^\bullet,\searrow\swarrow\}$-limites projectives (et donc avec les monomorphismes),*

*alors, le foncteur $\overline{Q}_{pf}$-néof: $V^\wedge$-néof $\longrightarrow$ $W^\wedge$-néof (construit en IV.3) est compatible avec les $\{B^\bullet\}$-limites projectives.*

Supposons que $R^\bullet$: $B^\bullet \longrightarrow V^\wedge$-néof est un foncteur et désignons par $R'^\bullet$ le foncteur composé:

$$R'^\bullet : B^\bullet \xrightarrow[R^\bullet]{} V^\wedge\text{-néof} \xrightarrow[\overline{Q}_{pf}\text{-néof}]{} W^\wedge\text{-néof}$$

D'après la proposition de II.3, on sait que $R^\bullet$ admet une limite projective naturalisée, que nous représentons par le diagramme commutatif (XV) suivant:

$$A^\wedge = (A^\wedge_o, \underline{A}^\wedge, j_{A^\wedge}, m_{A^\wedge}, k_{A^\wedge}, \alpha_{A^\wedge}, \beta_{A^\wedge})$$

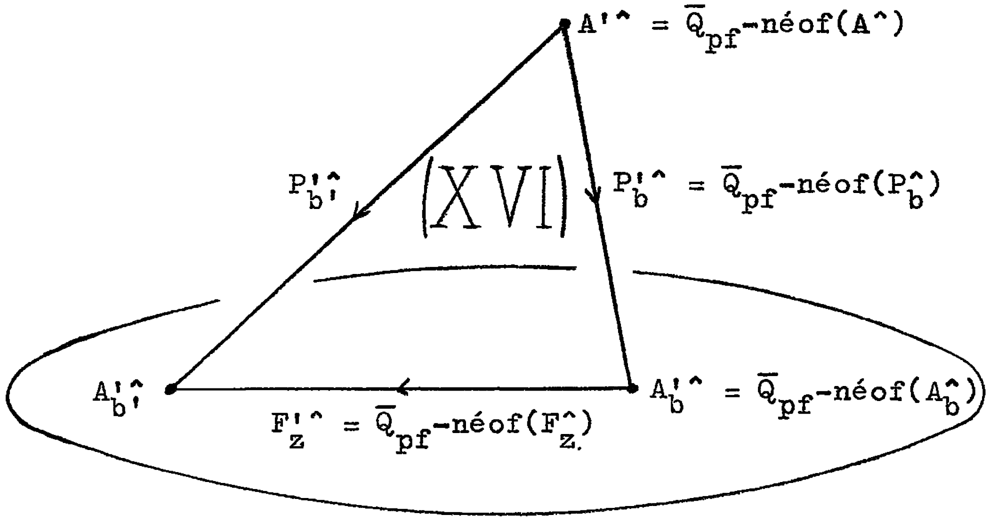
$$\begin{tikzcd} & A^\wedge \arrow[dl, "P^\wedge_{b'}"'] \arrow[dr, "P^\wedge_b"] \arrow[d, phantom, "(XV)"] & \\ A^\wedge_{b'} & & A^\wedge_b \arrow[ll, "F^\wedge_z"] \end{tikzcd}$$

$$P^\wedge_b = (A^\wedge_b, (P_b, \underline{P}^\wedge_b, M_{P^\wedge_b}), A^\wedge)$$

,

où nous avons posé: $A_b^{\wedge} = R^{\bullet}(b)$, pour tout objet b de $B^{\bullet}$, et $F_z^{\wedge} = R^{\bullet}(z)$, pour tout morphisme $z: b \longrightarrow b'$ de $B^{\bullet}$.

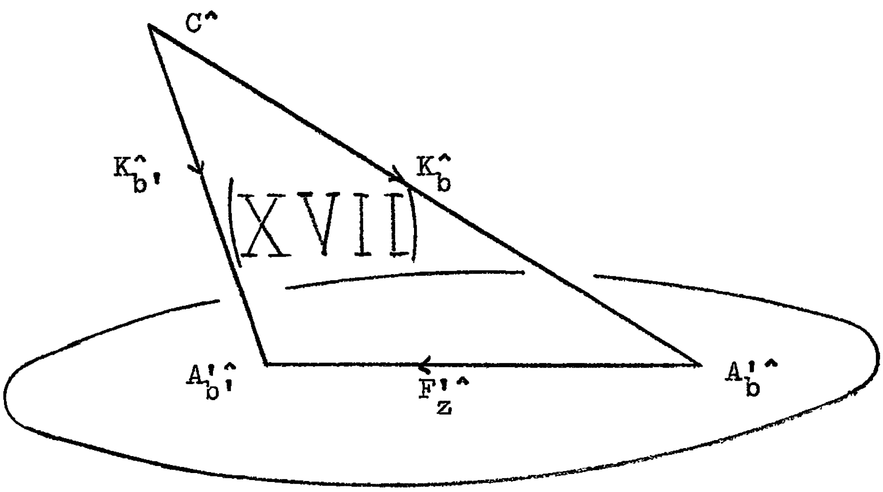
Il nous faut donc prouver que le cône projectif image par $\overline{Q}_{pf}$-néof du cône projectif (XV), que nous représentons par le diagramme commutatif (XVI) ci-dessous:




,

est une limite projective naturalisée de $R'^{\bullet}$ dans $W^{\wedge}$-néof.

Supposons, pour ce faire, que $(K_b^{\wedge})_{b \in B_o^{\bullet}}$ soit une famille de $W^{\wedge}$-néofoncteurs $K_b^{\wedge}: C^{\wedge} \longrightarrow A_b'^{\wedge}$ (pour tout objet b de $B^{\bullet}$) définissant une transformation naturelle $(K_-^{\wedge}): \mathrm{Const}(C^{\wedge}) \Longrightarrow R'^{\bullet}$ que nous représentons par le diagramme commutatif (XVII) ci-dessous:



En particulier, ceci signifie que,pour tout objet b de $B^{\bullet}$ et tout triplet $(c'',c',c)$ d'objets de $C^{\wedge}$, le diagramme (XVIII) ci-dessous est commutatif (compatibilité de $K_b^{\wedge}$ avec les monomorphismes des composables):

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}'^{\wedge}_b(K_b(c''),K_b(c')) \ast \underline{A}'^{\wedge}_b(K_b(c'),K_b(c)) \arrow[r, "m_{\underline{A}'^{\wedge}_b}(K_b(c''),K_b(c'),K_b(c))"] & \underline{A}'^{\wedge}_b(K_b(c''),K_b(c')) \boxtimes \underline{A}'^{\wedge}_b(K_b(c'),K_b(c)) \\
\underline{C}^{\wedge}(c'',c') \ast \underline{C}^{\wedge}(c',c) \arrow[u, "M_{K_b^{\wedge}}(c'',c',c)"] \arrow[r, "m_{C^{\wedge}}(c'',c',c)"'] \arrow[ur, phantom, "(XVIII)"] & \underline{C}^{\wedge}(c'',c') \boxtimes \underline{C}^{\wedge}(c',c) \arrow[u, "\underline{K}_b^{\wedge}(c'',c')\boxtimes\underline{K}_b^{\wedge}(c',c)"']
\end{tikzcd}$$

Comme le diagramme ci-dessous est commutatif (voir IV.3):

$$\begin{tikzcd}
V^{\wedge}\text{-néof} \arrow[r, "\overline{Q}_{pf}\text{-néof}"'] \arrow[d, "P_{V^{\wedge}\text{-an}}"'] & W^{\wedge}\text{-néof} \arrow[d, "P_{W^{\wedge}\text{-an}}"] \\
V^{\wedge}\text{-apor} \arrow[r, "\overline{Q}\text{-apor}"] & W^{\wedge}\text{-apor}
\end{tikzcd}$$

et comme $\overline{Q}$ -apor . $P_{V^{\wedge}\text{-an}}$ est compatible avec les $\{B^{\bullet}\}$-limites projectives (voir le corollaire de II.4 et la proposition de IV.6), l'image par $P_{W^{\wedge}\text{-an}}$ du diagramme (XVI) (qui est donc égale à l'image par $\overline{Q}$-apor.$P_{V^{\wedge}\text{-an}}$ du diagramme (XV) ) représente une limite projective naturalisée dans $W^{\wedge}$-apor du foncteur $P_{W^{\wedge}\text{-an}}.R'^{\bullet}$ .Il existe donc une unique $W^{\wedge}$-application orientée $\vec{K} : \vec{C} \longrightarrow \vec{A}'$ rendant commutatif, pour tout objet b de $B^{\bullet}$, le diagramme ci-dessous (puisque l'image par $P_{W^{\wedge}\text{-an}}$ du diagramme (XVII) représente un cône projectif de base $P_{W^{\wedge}\text{-an}}.R'^{\bullet}$ et de sommet $\vec{C}$ ):

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
P_{W^\wedge\text{-an}}(C^\wedge) = \vec{C} \arrow[rr, "\vec{K}"'] \arrow[dr, "P_{W^\wedge\text{-an}}(K^\wedge_b) = \vec{K}_b"'] & & \vec{A'} = P_{W^\wedge\text{-an}}(A'^\wedge) \arrow[dl, "\vec{P'_b} = P_{W^\wedge\text{-an}}(P'^\wedge_b)"] \\
& \vec{A'_b} = P_{W^\wedge\text{-an}}(A'^\wedge_b) &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que, pour tout triplet (c",c',c) d'objets de $C^\wedge$, le diagramme (XIX), qui suit, est commutatif (en vertu de la fonctorialité de $\otimes$ et de la définition de la composée de deux $W^\wedge$-applications orientées):

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
& \begin{matrix} \underline{A}'^\wedge(K(c''),K(c')) \\ \otimes \\ \underline{A}'^\wedge(K(c'),K(c)) \end{matrix} = \begin{matrix} \underline{\vec{A'}}(K(c''),K(c')) \\ \otimes \\ \underline{\vec{A'}}(K(c'),K(c)) \end{matrix} \arrow[dl, "\underline{P}'^\wedge_b(K(c''),K(c'))\otimes\underline{P}'^\wedge_b(K(c'),K(c))"'] \\
\begin{matrix} \underline{A}'^\wedge_b(K_b(c''),K_b(c')) \\ \otimes \\ \underline{A}'^\wedge_b(K_b(c'),K_b(c)) \end{matrix} \arrow[r, phantom, "(\mathrm{XIX})"] & \\
& \begin{matrix} \underline{C}^\wedge(c'',c') \\ \otimes \\ \underline{C}^\wedge(c',c) \end{matrix} = \begin{matrix} \underline{\vec{C}}(c'',c') \\ \otimes \\ \underline{\vec{C}}(c',c) \end{matrix} \arrow[uu, "\underline{\vec{K}}(c'',c') \otimes \underline{\vec{K}}(c',c)"'] \arrow[ul, "\underline{K}^\wedge_b(c'',c') \otimes \underline{K}^\wedge_b(c',c)"]
\end{tikzcd}$$

Pour prouver la proposition, il suffit donc d'établir que la $W^\wedge$-application orientée $\vec{K} = (\vec{A'}, (K,\underline{\vec{K}}), \vec{C})$ est sous-jacente à un $W^\wedge$-néofoncteur (nécessairement unique) $K^\wedge = (A'^\wedge, (K,\underline{K}^\wedge,M_{K^\wedge}), C^\wedge) = (A'^\wedge, (K,\underline{\vec{K}},M_{K^\wedge}), C^\wedge)$ rendant commutatif, pour tout objet b de B•, le diagramme ci-dessous:

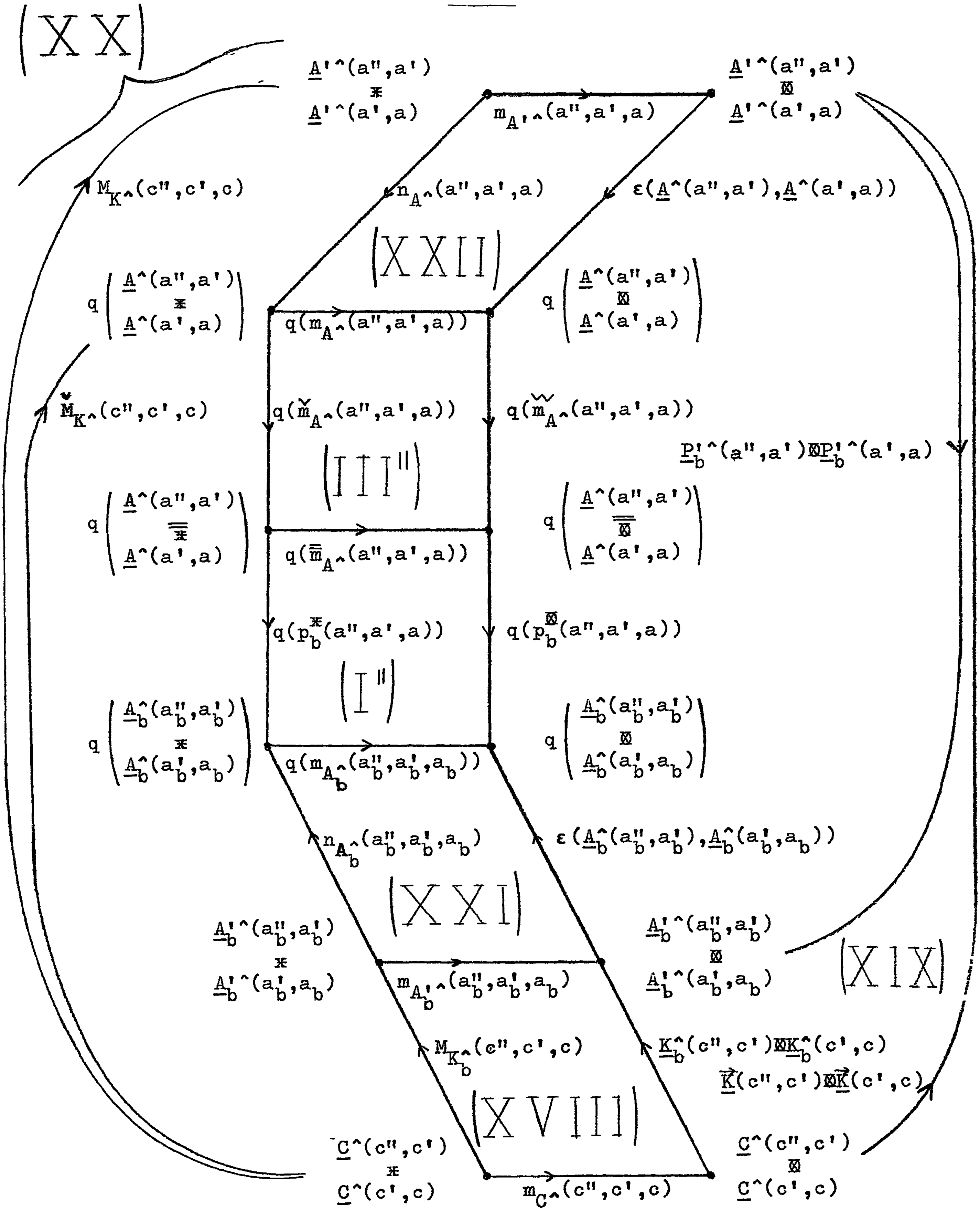
$$\begin{tikzcd}
C^{\wedge} \arrow[rr, "K^{\wedge}"] \arrow[dr, "K_b^{\wedge}"'] & & A'^{\wedge} \arrow[dl, "P_b'^{\wedge}"] \\
& A_b'^{\wedge} &
\end{tikzcd}$$

Il nous faut donc définir, pour tout triplet $(c'',c',c)$ d'objets de $C^{\wedge}$, le morphisme $M_{K^{\wedge}}(c'',c',c)$ : c'est, avec $\check{M}_{K^{\wedge}}(c'',c',c)$, l'un des deux morphismes de $W^{\bullet}$ qui sont les seuls à rendre commutatif le diagramme (XX) ci-dessous et qui se déduisent directement de la construction de II.4 ( dont nous reprenons les notations dans le diagramme (XX) ).

En effet, nous savons que:

- par construction (voir IV.3), les sous-diagrammes (XXI) et (XXII) du diagramme (XX) sont des produits fibrés naturalisés de $W^{\bullet}$,
- le sous-diagramme (I") de (XX) décrit le morphisme $q(\bar{\bar{m}}_{A^{\wedge}}(a'',a',a))$ comme étant la $\{B^{\bullet}\}$-limite projective de la transformation naturelle définie par la famille $(q(m_{A_b^{\wedge}}(a''_b,a'_b,a_b)))_{b\in B_o^{\bullet}}$ ,puisque c'est l'image par le foncteur $Q^{\bullet}$, qui est compatible avec les $\{B^{\bullet}\}$-limites projectives, du diagramme (I) de II.4 qui décrit une $\{B^{\bullet}\}$-limite projective analogue,
- le sous-diagramme (III") de (XX) est un produit fibré naturalisé de $W^{\bullet}$, puisque c'est l'image par le foncteur $Q^{\bullet}$, qui est compatible avec les produits fibrés, du diagramme (III) de II.4 qui est, par construction, un produit fibré naturalisé de $V^{\bullet}$,
- les sous-diagrammes (XVIII) et (XIX) commutent, d'après précédemment.

L'existence de $M_{K^{\wedge}}(c'',c',c)$ et $\check{M}_{K^{\wedge}}(c'',c',c)$ est alors évidente en utilisant les diverses propriétés universelles que l'on vient de mettre en évidence.




(Nous avons posé: $K(c") = a"$, $K(c') = a'$, $K(c) = a$ et $K_b(c") = P'_b(a") = a"_b$, $K_b(c') = P'_b(a') = a'_b$ , $K_b(c) = P'_b(a) = a_b$ , pour plus de commodité.)

IV.8. Désignons encore par $\mathcal{U}_o$ un univers et par $B^\bullet$ une catégorie relative à $\mathcal{U}_o$. Nous cherchons, maintenant, sous quelles conditions le foncteur $\bar{Q}$-fonc: $V^\wedge$-fonc $\longrightarrow$ $W^\wedge$-fonc, associé au foncteur monoïdal $\bar{Q}$: $V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$, est compatible avec les $\{B^\bullet\}$-limites projectives.
Or:

- la catégorie $V^\wedge$-fonc est à $\{B^\bullet\}$-limites projectives, dès que $V^\bullet$ l'est (comme nous l'avons signalé en II.4),
- dans le cas particulier d'un foncteur $R^\bullet$: $B^\bullet \longrightarrow V^\wedge$-néof, à valeurs dans la sous-catégorie pleine $V^\wedge$-fonc de $V^\wedge$-néof, le raisonnement de IV.7 ne nécessite que la compatibilité du foncteur $Q^\bullet$: $V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ avec les $\{B^\bullet\}$-limites projectives, puisque, dans ces conditions, les seuls produits fibrés utilisés sont "triviaux" (et existent toujours et sont toujours "préservés" par $Q^\bullet$),
- dans ce cas, ceci implique que le foncteur composé

$$V^\wedge\text{-fonc} \xrightarrow[\bar{Q}\text{-fonc}]{} W^\wedge\text{-fonc} \xrightarrow[P_{W^\wedge\text{-nf}}]{} W^\wedge\text{-néof}$$

est compatible avec les $\{B^\bullet\}$-limites projectives et, donc, qu'il en est de même du foncteur $\bar{Q}$-fonc: $V^\wedge$-fonc $\longrightarrow$ $W^\wedge$-fonc, puisque le foncteur $P_{W^\wedge\text{-nf}}$ : $W^\wedge$-fonc $\longrightarrow$ $W^\wedge$-néof est injectif et plein.
Nous pouvons donc énoncer la proposition:

Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, si $V^\wedge$ et $W^\wedge$ sont deux catégories monoïdales, si $\bar{Q}$: $V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ est un foncteur monoïdal, si $B^\bullet$ est une catégorie relative à $\mathcal{U}_o$ et si, de plus:
- $V^\bullet$ est une catégorie à $\{B^\bullet\}$-limites projectives,
- le foncteur $Q^\bullet$: $V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$, sous-jacent à $\bar{Q}$, est compatible avec les $\{B^\bullet\}$-limites projectives,

alors, le foncteur $\bar{Q}$-fonc: $V^\wedge$-fonc $\longrightarrow$ $W^\wedge$-fonc est compatible avec les $\{B^\bullet\}$-limites projectives.

IV.9. Notre but est, maintenant, de donner des conditions suffisantes pour que les foncteurs $\overline{Q}$-apor, $\overline{Q}$-néof et $\overline{Q}$-fonc, associés à un foncteur monoïdal $\overline{Q}$, admettent des adjoints.

Nous commencerons par la démonstration de la proposition suivante, qui utilise la construction du foncteur $\overline{Q}$-apor donnée en IV.2.

Proposition. Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, si $V^\wedge$ et $W^\wedge$ sont deux catégories monoïdales, si $\overline{Q} = (W^\wedge, (Q^\bullet, t, \varepsilon), V^\wedge)$ est un foncteur monoïdal de $V^\wedge$ vers $W^\wedge$ et si, de plus:

- le foncteur $Q^\bullet: V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ admet un adjoint,
- le morphisme $t: i_{W^\wedge} \longrightarrow q(i_{V^\wedge})$ est le morphisme "universel" (i.e. $(i_{V^\wedge}, t)$ est un $Q^\bullet$-projecteur) définissant $i_{V^\wedge}$ comme une structure libre sur $i_{W^\wedge}$, relativement à $Q^\bullet$,

alors, le foncteur $\overline{Q}$-apor: $V^\wedge$-apor $\longrightarrow W^\wedge$-apor admet un adjoint.

Nous allons prouver la proposition précédente en construisant explicitement le $V^\wedge$-graphe orienté libre sur un $W^\wedge$-graphe orienté donné.

Pour ce faire, nous choisissons, tout d'abord, un adjoint

$$Ad(Q^\bullet): W^\bullet \longrightarrow V^\bullet$$

au foncteur

$$Q^\bullet: V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$$

(et nous noterons $ad(q)$ son application sous-jacente).

De plus, pour tout objet $w$ de $W^\bullet$, nous choisissons un morphisme universel

$$\tau(w): w \longrightarrow q.ad(q)(w)$$

associé à l'adjonction ainsi considérée (autrement dit, $(ad(q)(w), \tau(w))$ est un $Q^\bullet$-projecteur, au sens de (M.M.A.G.), ou, si l'on préfère, $\tau$ "est" la transformation naturelle d'unitarité sous-jacente à un triple associé à cette adjonction - et dont $Q^\bullet.Ad(Q^\bullet)$ est l'endofoncteur).

Bien entendu, les hypothèses de la proposition précédente nous autorisent à supposer que:

- $ad(q)(i_{W^\wedge}) = i_{V^\wedge}$,
- $\tau(i_{W^\wedge}) = t$ .

Dans ces conditions, supposons que $\vec{A} = (\vec{A}_o, \underline{\vec{A}}, j_{\vec{A}})$ soit un $W^\wedge$-graphe orienté, objet de $W^\wedge$-apor. Il est, alors, clair que l'on définit bien un $V^\wedge$-graphe orienté $\vec{B} = (\vec{B}_o, \underline{\vec{B}}, j_{\vec{B}})$, objet de $V^\wedge$-apor, lorsque l'on pose:

- $\vec{B}_o = \vec{A}_o$ (i.e. $\vec{B}$ et $\vec{A}$ ont les mêmes objets),
- pour tout couple $(a',a)$ d'objets de $\vec{B}$ (i.e. de $\vec{A}$),

$$\underline{\vec{B}}(a',a) = ad(q)(\underline{\vec{A}}(a',a))$$

(les "Hom" à valeurs dans $V^\wedge$, pour le $V^\wedge$-graphe orienté libre sur $\vec{A}$, sont les structures libres - relativement à $Q^\bullet$ - sur les "Hom" à valeurs dans $W^\wedge$ pour le $W^\wedge$-graphe orienté $\vec{A}$),

- pour tout objet a de $\vec{B}$ (i.e. de $\vec{A}$),

$$ad(q)(j_{\vec{A}}(a)) = j_{\vec{B}}(a) : \underset{\substack{\| \\ ad(q)(i_{W^\wedge})}}{i_{V^\wedge}} \longrightarrow \underset{\substack{\| \\ ad(q)(\underline{\vec{A}}(a,a))}}{\underline{\vec{B}}(a,a)}$$

De même, il est clair que l'on définit bien une $W^\wedge$-application orientée $\vec{T}_{\vec{A}} = (\vec{B}', (T_{\vec{A}}, \underline{\vec{T}}_{\vec{A}}), \vec{A})$, de $\vec{A}$ vers $\vec{B}' = \vec{Q}$-apor$(\vec{B})$ (voir IV.2), lorsque l'on pose:

- $T_{\vec{A}}: \vec{A}_o \longrightarrow \vec{B}'_o$ est l'application identique,
- pour tout couple $(a',a)$ d'objets de $\vec{A}$ (donc de $\vec{B}$ ou de $\vec{B}'$),

$$\tau(\underline{\vec{A}}(a',a)) = \underline{\vec{T}}_{\vec{A}}(a',a) : \underline{\vec{A}}(a',a) \longrightarrow \begin{array}{c} \underline{\vec{B}}'(a',a) \\ \| \\ q(\underline{\vec{B}}(a',a)) \\ \| \\ q.ad(q)(\underline{\vec{A}}(a',a)) \end{array}$$

On vérifie, alors, sans difficulté que $(\vec{B}, \vec{T}_{\vec{A}})$ est un $(\vec{Q}$-apor)-projecteur ou, ce qui revient au même, que $\vec{T}_{\vec{A}}: \vec{A} \longrightarrow \vec{Q}$-apor$(\vec{B})$ définit bien $\vec{B}$ comme le $V^\wedge$-graphe orienté libre sur le $W^\wedge$-graphe orienté $\vec{A}$, relativement au foncteur $\overline{Q}$-apor.

Ainsi, la proposition précédente se trouve démontrée.

La démonstration qui vient d'être achevée appelle plusieurs remarques.
Tout d'abord, tout comme lors de la construction du foncteur $\overline{Q}$-apor (voir IV.2), nous n'avons pas utilisé complètement la "monoïdalité" de $\overline{Q}$ .Ceci n'est évidemment pas fait pour surprendre si l'on se réfère à 0.7 .
Plus précisément, pour obtenir un foncteur "convenable" de $V^\wedge$-apor vers $W^\wedge$-apor, il suffit, en effet, de supposer que $\widetilde{Q} = (\vec{W}, (Q^\bullet,t), \vec{V})$ est un <u>homomorphisme vague</u> de la catégorie pointée $\vec{V} = (V^\bullet, i_{V^\wedge})$ (sous-jacente à $V^\wedge$) vers la catégorie pointée $\vec{W} = (W^\bullet, i_{W^\wedge})$ (sous-jacente à $W^\wedge$), i.e. que:
- $Q^\bullet : V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ est un foncteur,
- $t: i_{W^\wedge} \longrightarrow q(i_{V^\wedge})$ est un morphisme de $W^\bullet$ .

Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, on en déduit immédiatement un foncteur

$$\widetilde{Q}\text{-apor}: \begin{matrix}\vec{V}\text{-apor} \\ = \\ V^\wedge\text{-apor}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\vec{W}\text{-apor} \\ = \\ W^\wedge\text{-apor}\end{matrix} \quad \text{(voir 0.7)} \quad ,$$

en utilisant exactement la même construction qu'en IV.2.
Cette précision, qui complète la remarque de IV.2 et aurait fort bien pu y trouver sa place, ne prend tout son sens que dans la proposition ci-dessous (c'est pourquoi nous jugeons utile de la développer ici) qui n'est que la réplique de la proposition précédente, dans ce cadre plus général, et que le lecteur démontrera exactement de la même façon.

<u>Proposition</u> (<u>deuxième version de la précédente</u>). <u>Si</u> $\mathcal{U}_o$ <u>est un univers</u>, <u>si</u> $\vec{V} = (V^\bullet, i_{\vec{V}})$ <u>et</u> $\vec{W} = (W^\bullet, i_{\vec{W}})$ <u>sont deux catégories pointées</u>, <u>si</u> $\vec{Q} = (\vec{W}, (Q^\bullet,t), \vec{V})$ <u>est un homomorphisme vague de catégories pointées et si</u>, <u>de plus</u>:
- $Ad(Q^\bullet): W^\bullet \longrightarrow V^\bullet$ <u>est un adjoint à</u> $Q^\bullet : V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ ,

- $Ad(Q^{\bullet})(i_W) = i_V$ et $t: i_W \longrightarrow Q^{\bullet}(i_V) = Q^{\bullet}.Ad(Q^{\bullet})(i_W)$ définit $i_V$ comme structure libre sur $i_W$, relativement à $Q^{\bullet}$,

alors on a:

- $Ad(Q^{\bullet})$ est sous-jacent à un homomorphisme vague de catégories pointées

$$\widetilde{Ad(Q^{\bullet})} = (\vec{V}, (Ad(Q^{\bullet}), i_V), \vec{W})$$

(qui est, en fait, un foncteur pointé usuel),

- le foncteur $\widetilde{Q}$-apor: $\vec{V}$-apor $\longrightarrow \vec{W}$-apor admet pour adjoint le foncteur $\widetilde{Ad(Q^{\bullet})}$-apor: $\vec{W}$-apor $\longrightarrow \vec{V}$-apor .

Rappelons, cependant, que notre objectif n'est pas de rechercher systématiquement le cadre le plus général permettant l'étude formelle de toutes les notions que nous introduisons. Par exemple, dans ce Chapitre, notre but essentiel est d'établir que les foncteurs $\overline{Q}$-fonc et $\overline{Q}$-néof admettent, sous certaines conditions, des adjoints. Aussi, l'étude des propriétés de $\widetilde{Q}$-apor peut-elle être regardée comme préliminaire. Néanmoins, dans ce seul paragraphe particulier, il nous a semblé que l'utilisation du cadre le plus général éclairait les constructions particulières utilisées.

IV.10. Si les catégories monoïdales $V^{\wedge}$ et $W^{\wedge}$ sont, de plus, symétriques, fermées et complètes, B.J. Day et G.M. Kelly ont prouvé en (E.N.F.C.) que le foncteur monoïdal sur-jacent au foncteur $\overline{Q}$-fonc admet un adjoint (dans la 2-catégorie des foncteurs monoïdaux entre catégories monoïdales fermées symétriques), si $\overline{Q}$ lui-même en admet un (dans cette même 2-catégorie).

Nous préférons, cependant, établir que $\overline{Q}$-fonc et $\overline{Q}$-néof admettent des adjoints par une méthode notablement différente (à l'aide du théorème d'existence de structures libres de (C.O.S.L.)) pour les deux raisons suivantes:

- même sous les conditions particulières de (E.N.F.C.), il est difficile d'établir que $\overline{Q}$-néof admet un adjoint,

-nous ne désirons pas nous restreindre au seul cas des catégories monoïdales fermées symétriques (dans tout ce travail, nous ne considérons que des catégories monoïdales afin d'obtenir un champ d'applications plus vaste) et nous voulons donner des hypothèses qui, même si elles sont nombreuses, sont "toujours" vraies et faciles à vérifier dans la pratique. Ajoutons que B.J. Day et G.M. Kelly privilégient dans (E.N.F.C.) l'aspect "tenseurs et cotenseurs", alors que nous insistons, plutôt, sur l'aspect "propriétés aux limites".

Puisque nous préférons utiliser le Théorème d'existence de structures libres de (C.O.S.L.) pour établir que, sous certaines hypothèses, les foncteurs $\overline{Q}$-néof et $\overline{Q}$-fonc admettent des adjoints, il nous semble utile de le rappeler en détail.
C'est l'objet de ce paragraphe.

Pour établir qu'un foncteur $P^{\bullet}: H^{\bullet} \longrightarrow L^{\bullet}$ admet un adjoint, il suffit que certaines conditions soient vérifiées:

- (<u>condition d'emboîtement</u>) il existe un diagramme commutatif de foncteurs:

$$\begin{tikzcd}
H^{\bullet} \arrow[r, hook, "I^{\bullet}"'] \arrow[d, "P^{\bullet}"'] & H'^{\bullet} \arrow[d, "P'^{\bullet}"] \\
L^{\bullet} \arrow[r, hook, "J^{\bullet}"] & L'^{\bullet}
\end{tikzcd}$$

où $H^\bullet$ (resp. $L^\bullet$) est une sous-catégorie pleine de $H'^\bullet$ (resp. $L'^\bullet$), où $I^\bullet$ (resp. $J^\bullet$) est le foncteur injection canonique et où $P^\bullet$ est la restriction de $P'^\bullet$,

- (condition aux limites projectives) $H'^\bullet$ est à $\mathcal{P}(H_o^\bullet \times L)$-produits et $P'^\bullet$ est compatible avec ces produits, de plus $H^\bullet$ est à noyaux (de deux morphismes) et $P^\bullet$ est compatible avec ces noyaux,
- (condition aux monomorphismes) $Y$ est un ensemble de monomorphismes de $H'^\bullet$ (i.e. $Y \subset$ Monos($H'^\bullet$) ) tel que $P'^\bullet(Y)$ est inclus dans Monos($L'^\bullet$),
- (condition d'absorption) il existe un choix de noyaux, dits canoniques, dans $H^\bullet$ de telle sorte que, pour tout noyau canonique $n$, on ait $Y.n \subset Y$,
- (condition de génération) le foncteur $P'^\bullet$ est $(L_o^\bullet, Y.H_o^\bullet)$-engendrant (voir 0.10).

Théorème (Existence de structures libres dans le cas général).
Si le foncteur $P^\bullet: H^\bullet \longrightarrow L^\bullet$ vérifie la condition d'emboîtement, la condition aux limites projectives, la condition aux monomorphismes, la condition d'absorption et la condition de génération précédentes, alors il admet un adjoint.

(On rapprochera ce Théorème de celui de II.6 concernant l'existence de limites inductives et qui procède de la même idée.)

IV.11. Avant de prouver que le Théorème d'existence de structures libres de IV.10 s'applique au cas $P^\bullet = \overline{Q}$-néof, il nous faut donner différents lemmes de la Théorie générale des Catégories qui nous seront utiles dans la suite. C'est l'objet de ce paragraphe.

La démonstration du lemme 1, ci-dessous, est laissée au lecteur car elle est immédiate (et ce lemme n'est énoncé que pour mémoire).

*Lemme* 1 (*Utilisé en* IV.17 ). *Si* D$^\bullet$ *est une catégorie et si les deux diagrammes commutatifs ci-dessous*:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "z_2"'] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "z_4"] \arrow[r, "z_3"] & \bullet \arrow[u, "z_1"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "z_5"'] & \bullet \arrow[r, "z_2"'] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "z_7"] \arrow[r, "z_6"] & \bullet \arrow[r, "z_3"] & \bullet \arrow[u, "z_1"'] \end{tikzcd}$$

*représentent deux produits fibrés naturalisés de* D$^\bullet$, *où* $z_4.z_6 = z_5.z_7$, *alors*, *le diagramme commutatif ci-dessous*:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "z_5"'] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "z_7"] \arrow[r, "z_6"] & \bullet \arrow[u, "z_4"'] \end{tikzcd}$$

*représente aussi un produit fibré naturalisé de* D$^\bullet$.

Enonçons, maintenant, un lemme qui peut être regardé comme une sorte de réciproque du Théorème d'existence de structures libres que nous avons énoncé en IV.10.

*Lemme* 2 (*Utilisé en* IV.17 ). *Si le diagramme commutatif de foncteurs ci-dessous*:

$$\begin{tikzcd}
\underline{H}^{\bullet} \arrow[r, hook, "\underline{I}^{\bullet}"'] \arrow[d, "\underline{P}^{\bullet}"'] & \underline{H}'^{\bullet} \arrow[d, "\underline{P}'^{\bullet}"] \\
\underline{L}^{\bullet} \arrow[r, hook, "\underline{J}^{\bullet}"] & \underline{L}'^{\bullet}
\end{tikzcd}$$

*vérifie la condition d'emboîtement de* IV.10 *et si, de plus:*

- $\underline{P}^{\bullet}$ *admet un adjoint* Ad($\underline{P}^{\bullet}$),
- *pour tout objet* $\underline{l}$ *de* $\underline{L}^{\bullet}$, *la structure libre* Ad($\underline{P}^{\bullet}$)($\underline{l}$) *sur* $\underline{l}$, *relativement au foncteur* $\underline{P}^{\bullet}$, *est aussi une structure libre sur* $\underline{l}$, *relativement au foncteur* $\underline{P}'^{\bullet}$,
- $\underline{Y}$ *est un ensemble de monomorphismes de* $\underline{H}'^{\bullet}$ *tel que la condition aux monomorphismes de* IV.10 *est vérifiée*,
- *tout morphisme de* $\underline{H}'^{\bullet}$, *dont la source est objet de* $\underline{H}^{\bullet}$, *admet un* $\underline{Y}$*-reflet dont la source est aussi objet de* $\underline{H}^{\bullet}$,

*alors*, *le foncteur* $\underline{P}'^{\bullet}$ *est* $(\underline{L}^{\bullet}_{o}, \underline{Y}.\underline{H}^{\bullet}_{o})$*-engendrant*.

Pour prouver ce lemme, munissons tout d'abord $\underline{H}'^{\bullet}$ d'un choix de $\underline{Y}$-reflets, que nous dirons canoniques, pour ceux dont l'existence est assurée par l'hypothèse. De plus, pour tout objet $\underline{l}$ de $\underline{L}^{\bullet}$, nous choisissons un morphisme universel (appartenant à $\underline{L}$)

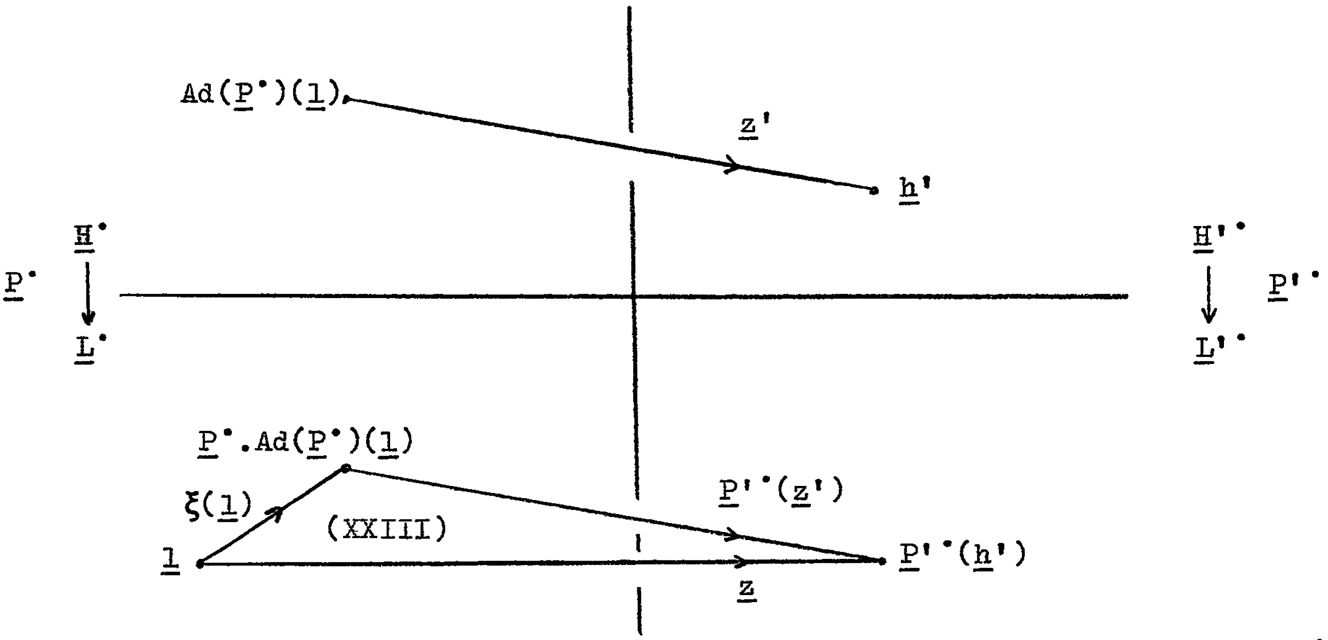
$$\xi(\underline{l}) : \underline{l} \longrightarrow \underline{P}^{\bullet}.\mathrm{Ad}(\underline{P}^{\bullet})\ (\underline{l})$$

définissant Ad($\underline{P}^{\bullet}$)($\underline{l}$) comme une structure libre sur $\underline{l}$ relativement au foncteur $\underline{P}'^{\bullet}$ (et donc aussi relativement au foncteur $\underline{P}^{\bullet}$).

Supposons alors que $\underline{h}'$ est un objet de $\underline{H}'^{\bullet}$ et que $\underline{z} : \underline{l} \longrightarrow \underline{P}'^{\bullet}(\underline{h}')$ est un morphisme de $\underline{L}'^{\bullet}$ dont la source, $\underline{l}$, est objet de $\underline{L}^{\bullet}$ .

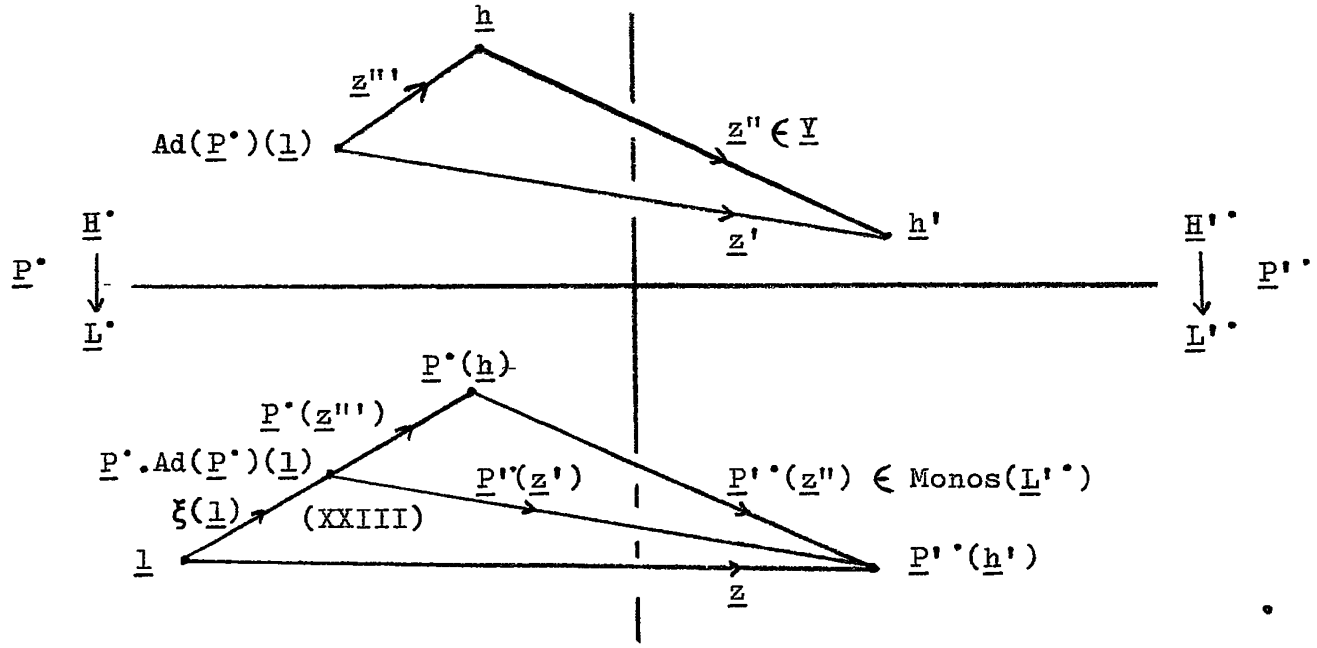
Nous désignons, alors, par:

- $\underline{z}'$: $\mathrm{Ad}(\underline{P}^\bullet)(\underline{1}) \longrightarrow \underline{h}'$ l'unique morphisme de $\underline{H}'^\bullet$ qui rend commutatif le diagramme (XXIII) ci-dessous:




,

- $\underline{z}''$: $\underline{h} \longrightarrow \underline{h}'$ le $\underline{Y}$-reflet canonique de $\underline{z}'$, comme le représente le diagramme commutatif ci-dessous:




.

On vérifie, facilement, dans ces conditions, que $\underline{z}''$ est aussi un $(\underline{Y}.\underline{H}^\bullet_o,\underline{P}'^\bullet)$-

morphisme engendré par $\underline{z}$ (voir 0.9); ce qui prouve que le foncteur $\underline{P}'^{\bullet}$ est bien $(\underline{L}_o^{\bullet},\underline{Y}.\underline{H}_o^{\bullet})$-engendrant.

Le lemme 3, qui suit, concerne la composition des foncteurs engendrants. Sa démonstration, évidente, est laissée au lecteur.

*Lemme 3. Si* $\Pi_1'^{\bullet} : H'^{\bullet} \longrightarrow \underline{H}'^{\bullet}$ *et* $\underline{P}'^{\bullet} : \underline{H}'^{\bullet} \longrightarrow \underline{L}'^{\bullet}$ *sont deux foncteurs et si, de plus:*

- $\underline{H}_o$ (resp. $\underline{L}_o$) *est une partie de l'ensemble des objets* $\underline{H}'^{\bullet}_o$ (resp. $\underline{L}'^{\bullet}_o$) *de* $\underline{H}'^{\bullet}$ (resp. $\underline{L}'^{\bullet}$),
- $H_o$ *est une partie de l'ensemble des objets* $H'^{\bullet}_o$ *de* $H'^{\bullet}$, *telle que*

$$\Pi_1'^{\bullet}(H_o) \subset \underline{H}_o ,$$

- $\underline{Y}$ *est une partie de* $\underline{H}'$ (*qui, dans la pratique, est constituée de monomorphismes*),
- $Y$ *est une partie de* $H'$ (*qui, dans la pratique, est constituée de monomorphismes*), *telle que* $\Pi_1'^{\bullet}(Y) \subset \underline{Y}$ ,
- $\Pi_1'^{\bullet}$ *est* $(\underline{H}_o, Y.H_o)$-*engendrant* (*voir* 0.10),
- $\underline{P}'^{\bullet}$ *est* $(\underline{L}_o, \underline{Y}.\underline{H}_o)$-*engendrant* (*voir* 0.10),

*alors, le foncteur composé* $\underline{P}'^{\bullet}.\Pi_1'^{\bullet} : H'^{\bullet} \longrightarrow \underline{L}'^{\bullet}$ *est* $(\underline{L}_o, Y.H_o)$-*engendrant*. (On pourra se reporter au schéma suivant qui visualise les notations utilisées:

$$\begin{tikzcd}
H_o \arrow[d, dashed] & \subset & H'^{\bullet}_o \arrow[d, dashed] & \subset & H' \arrow[d, "\Pi_1'^{\bullet}"] & \supset & Y \arrow[d, dashed] \\
\underline{H}_o & \subset & \underline{H}'^{\bullet}_o & \subset & \underline{H}' \arrow[d, "\underline{P}'^{\bullet}"] & \supset & \underline{Y} \\
\underline{L}_o & \subset & \underline{L}'^{\bullet}_o & \subset & \underline{L}' & &
\end{tikzcd}$$

)

Le lemme que nous allons énoncer, maintenant, résulte directement d'une remarque, due à C. Ehresmann, concernant le Théorème d'existence de structures libres de (C.O.S.L.). (Signalons qu'il constitue aussi une sorte de réciproque du lemme 3 qui précède.)

<u>Lemme</u> 4. <u>Si</u> $P'^{\bullet}: H'^{\bullet} \longrightarrow L'^{\bullet}$ <u>et</u> $\Pi'^{\bullet}_2: L'^{\bullet} \longrightarrow \underline{L}'^{\bullet}$ <u>sont deux foncteurs et si</u>, <u>de plus</u>:

- $H_o$ (resp. $\underline{L}_o$) <u>est une partie de l'ensemble</u> $H'^{\bullet}_o$ (resp. $\underline{L}'^{\bullet}_o$) <u>des objets de</u> $H'^{\bullet}$ (resp. $\underline{L}'^{\bullet}$),
- $L_o$ <u>est une partie de l'ensemble</u> $L'^{\bullet}_o$ <u>des objets de</u> $L'^{\bullet}$, <u>telle que</u>

$$\Pi'^{\bullet}_2(L_o) \subset \underline{L}_o ,$$

- $Y$ <u>est une partie de</u> $H'$ <u>telle que</u> $P'^{\bullet}(Y)$ <u>a pour éléments des</u> $\Pi'^{\bullet}_2$-<u>monomorphismes</u> (<u>voir</u> 0.8),
- <u>le foncteur composé</u> $\Pi'^{\bullet}_2 . P'^{\bullet} : H'^{\bullet} \longrightarrow \underline{L}'^{\bullet}$ <u>est</u> $(\underline{L}_o, Y.H_o)$-<u>engendrant</u>,

<u>alors</u>, <u>le foncteur</u> $P'^{\bullet}$ <u>est</u> $(L_o, Y.H_o)$-<u>engendrant</u>.

(On pourra se reporter au schéma suivant qui fixe les notations utilisées:

$$\begin{tikzcd}
H_o \arrow[r, phantom, "\subset"] & H'^{\bullet}_o \arrow[r, phantom, "\subset"] & H' \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "P'^{\bullet}"] & Y \arrow[d, dashed] \\
L_o \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, dashed] & L'^{\bullet}_o \arrow[r, phantom, "\subset"] \arrow[d, dashed] & L' \arrow[r, phantom, "\supset"] \arrow[d, "\Pi'^{\bullet}_2"] & \Pi'^{\bullet}_2\text{-Monos}(L'^{\bullet}) \\
\underline{L}_o \arrow[r, phantom, "\subset"] & \underline{L}'^{\bullet}_o \arrow[r, phantom, "\subset"] & \underline{L}' &
\end{tikzcd} ,$$

où $\Pi'^{\bullet}_2$-Monos$(L'^{\bullet})$ est l'ensemble des $\Pi'^{\bullet}_2$-monomorphismes de $L'^{\bullet}$ .)

Pour prouver ce lemme, supposons que $h'$ est un objet de $H'^{\bullet}$ et que $z: l \longrightarrow P'^{\bullet}(h')$ est un morphisme de $L'^{\bullet}$, dont la source, $l$, est élément de $L_o$.

L'hypothèse assure, alors, que $\Pi_2^{\prime\bullet}(1)$ est élément de $\underline{L}_o$ et donc que le morphisme:

$$\Pi_2^{\prime\bullet}(z) : \Pi_2^{\prime\bullet}(1) \longrightarrow \Pi_2^{\prime\bullet}.P'^{\bullet}(h')$$

de $\underline{L}'^{\bullet}$, engendre un $(Y.H_o, \Pi_2^{\prime\bullet} . P'^{\bullet})$-morphisme:

$$z' : h \longrightarrow h'$$

dans $H'^{\bullet}$, pour lequel on a donc, par définition, $z' \in Y$ et $h \in H_o$.

Il en résulte qu'il existe un unique morphisme:

$$\underline{z} : \Pi_2^{\prime\bullet}(1) \longrightarrow \Pi_2^{\prime\bullet}.P'^{\bullet}(h),$$

dans $\underline{L}'^{\bullet}$, rendant commutatif le sous-diagramme (XXIV) du diagramme ci-dessous, et, comme $P'^{\bullet}(z')$ est un $\Pi_2^{\prime\bullet}$-monomorphisme (car $z' \in Y$), il existe aussi un unique morphisme $\bar{z} : 1 \longrightarrow P'^{\bullet}(h)$, tel que

$$\Pi_2^{\prime\bullet}(\bar{z}) = \underline{z} ,$$

dans $L'^{\bullet}$, rendant commutatif le sous-diagramme (XXV) du diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} h \in H_o \arrow[rr, "z' \in Y"] & & h' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & P'^{\bullet}(h) \arrow[dr, "P'^{\bullet}(z') \in \Pi_2^{\prime\bullet}\text{-Monos}(L'^{\bullet})"] \arrow[d, phantom, "(XXV)"] & \\ 1 \in L_o \arrow[ur, "\bar{z}"] \arrow[rr, "z"'] & {} & P'^{\bullet}(h') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \Pi_2^{\prime\bullet}.P'^{\bullet}(h) \arrow[dr, "\Pi_2^{\prime\bullet}.P'^{\bullet}(z')"] \arrow[d, phantom, "(XXIV)"] & \\ \Pi_2^{\prime\bullet}(1) \in \underline{L}_o \arrow[ur, "\underline{z}"] \arrow[rr, "\Pi_2^{\prime\bullet}(z)"'] & {} & \Pi_2^{\prime\bullet}.P'^{\bullet}(h') \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} H'^{\bullet} \arrow[d, "P'^{\bullet}"] \\ L'^{\bullet} \arrow[d, "\Pi_2^{\prime\bullet}"] \\ \underline{L}'^{\bullet} \end{tikzcd}$$

On constate alors, facilement, que z' est aussi un $(Y.H_o, P'^{\cdot})$-morphisme engendré par z (en utilisant le diagramme (XXV) ).
Ceci suffit à prouver que $P'^{\cdot}$ est bien $(L_o, Y.H_o)$-engendrant.

Comme les notations des lemmes 3 et 4 qui précèdent peuvent le laisser prévoir, nous regroupons ces deux lemmes en un lemme 5, qui nous sera très utile, dans la suite, pour prouver que la condition de génération du Théorème de IV.10 est effectivement vérifiée lorsque l'on prend (entre autres) $P^{\cdot} = \overline{Q}$-néof.

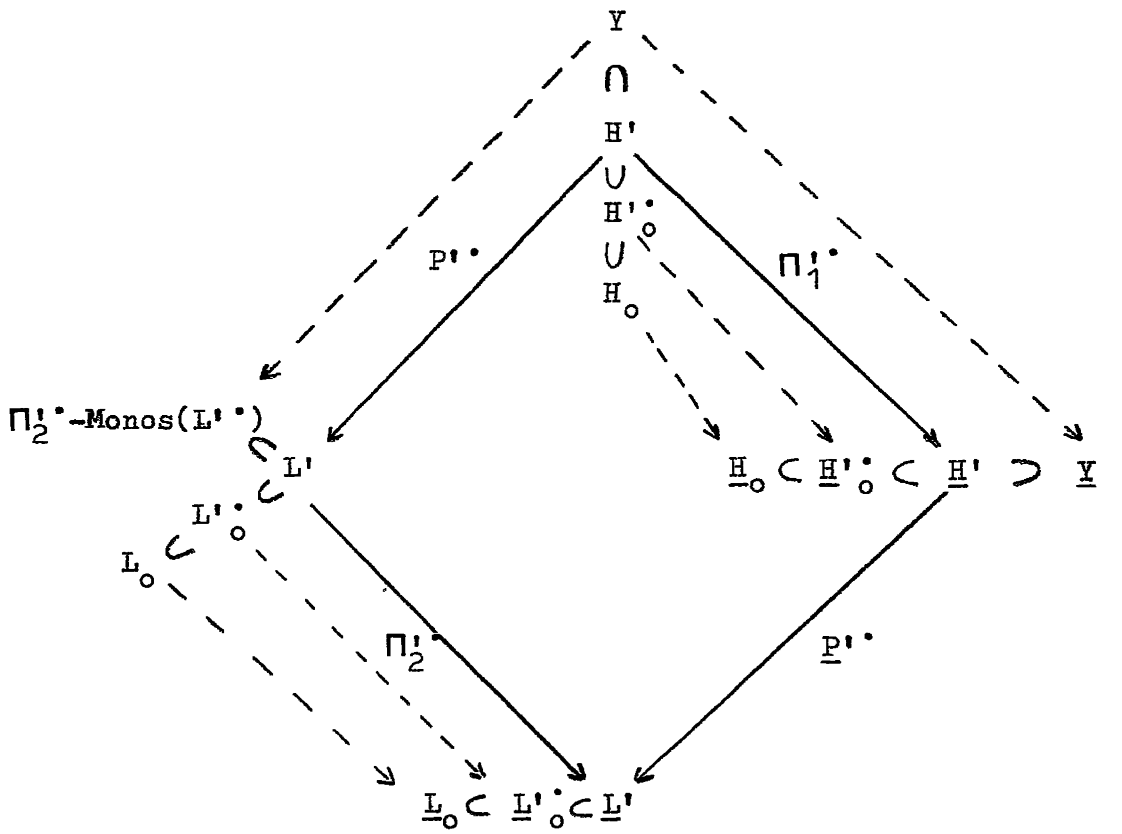
<u>Lemme</u> 5 (<u>Utilisé en</u> IV.17 ). <u>Si</u>, <u>pour le diagramme commutatif de foncteurs ci-dessous</u>:

$$\begin{tikzcd}
 & H'^{\cdot} \arrow[dl, "P'^{\cdot}"'] \arrow[dr, "\Pi_1'^{\cdot}"] & \\
L'^{\cdot} \arrow[dr, "\Pi_2'^{\cdot}"'] & & \underline{H}'^{\cdot} \arrow[dl, "\underline{P}'^{\cdot}"] \\
 & \underline{L}'^{\cdot} &
\end{tikzcd}$$
,

$H_o$ (resp. $\underline{H}_o$ ; $L_o$ ; $\underline{L}_o$ ) <u>est une partie de l'ensemble</u> $H'^{\cdot}_o$ (resp. $\underline{H}'^{\cdot}_o$ ; $L'^{\cdot}_o$ ; $\underline{L}'^{\cdot}_o$ ) <u>des objets de</u> $H'^{\cdot}$ (resp. $\underline{H}'^{\cdot}$ ; $L'^{\cdot}$ ; $\underline{L}'^{\cdot}$) , $Y$ (resp. $\underline{Y}$ ) <u>est une partie de</u> $H'$ (resp. $\underline{H}'$) <u>qui vérifient toutes les conditions dès lemmes</u> 3 <u>et</u> 4 <u>qui précédent</u> (<u>voir le schéma ci-dessous qui les "visualise</u>") <u>et si</u>, <u>de plus</u>:

- $\underline{P}'^{\cdot}$ <u>est</u> $(\underline{L}_o, \underline{Y}.\underline{H}_o)$-<u>engendrant</u>,
- $\Pi_1'^{\cdot}$ <u>est</u> $(\underline{H}_o, Y.H_o)$-<u>engendrant</u>,

<u>alors</u>, <u>le foncteur</u> $P'^{\cdot}$ <u>est</u>, <u>lui-même</u>, $(L_o, Y.H_o)$-<u>engendrant</u>.




IV.12. Dans le seul but d'alléger l'écriture des hypothèses utilisées dans les paragraphes qui suivent, nous consacrons celui-ci à l'énoncé d'un certain nombre de définitions.

<u>Définition</u> 1. Si $V^{\wedge} = (V^{\bullet}, \otimes, i_{V^{\wedge}}, \Phi, \Psi, \omega)$ et $V'^{\wedge} = (V'^{\bullet}, \otimes', i_{V'^{\wedge}}, \Phi', \Psi', \omega')$ sont deux catégories monoïdales telles que:

- $V^{\bullet}$ est une sous-catégorie pleine de $V'^{\bullet}$,
- $\otimes$ (resp. $\Phi$ ; $\psi$; $\omega$) est une restriction de $\otimes'$ (resp. $\Phi'$;$\Psi'$;$\omega'$),
- $i_{V^{\wedge}} = i_{V'^{\wedge}}$,

nous dirons que $V^{\wedge}$ est <u>emboîtée dans</u> $V'^{\wedge}$.

(Ceci signifie aussi que le foncteur injection canonique $V^{\bullet} \hookrightarrow V'^{\bullet}$ est sous-jacent à un foncteur monoïdal strict de $V^\wedge$ vers $V'^\wedge$, i.e. pour lequel "t" et "$\varepsilon$" sont des identités.)

<u>Définition</u> 1bis. Nous dirons que la catégorie monoïdale $V^\wedge$ est <u>bien emboîtée</u> dans la catégorie monoïdale $V'^\wedge$ si, et seulement si:

- $V^\wedge$ est emboîtée dans $V'^\wedge$ (définition 1),
- $\mathrm{Monos}(V^\cdot) \subset \mathrm{Monos}(V'^\cdot)$.

<u>Définition</u> 2. Désignons par $V^\wedge$ (resp. $W^\wedge$) une catégorie monoïdale emboîtée dans une catégorie monoïdale $V'^\wedge$ (resp. $W'^\wedge$).

Si $\overline{Q} = (W^\wedge, (Q^\cdot, t, \varepsilon), V^\wedge)$ et $\overline{Q}' = (W'^\wedge, (Q'^\cdot, t', \varepsilon'), V'^\wedge)$ sont deux foncteurs monoïdaux (voir IV.1) tels que:

- $Q^\cdot : V^\cdot \longrightarrow W^\cdot$ est une restriction du foncteur $Q'^\cdot : V'^\cdot \longrightarrow W'^\cdot$,
- les deux morphismes ci-dessous sont égaux:

$$\begin{array}{rccc} t: & i_{W^\wedge} & \longrightarrow & Q^\cdot(i_{V^\wedge}) \\ & = & & = \\ t': & i_{W'^\wedge} & \longrightarrow & Q'^\cdot(i_{V'^\wedge}) \end{array} \quad ,$$

- la transformation naturelle $\varepsilon : (-\boxtimes-).(Q^\cdot \times Q^\cdot) \Longrightarrow Q^\cdot.(-\boxtimes-)$ est une restriction de la transformation naturelle

$$\varepsilon' : (-\boxtimes'-).(Q'^\cdot \times Q'^\cdot) \Longrightarrow Q'^\cdot.(-\boxtimes'-),$$

alors, nous dirons que $\overline{Q}$ est <u>emboîté dans</u> $\overline{Q}'$.

(Signalons que ceci signifie exactement que $\overline{Q}$ et $\overline{Q}'$ rendent le diagramme de foncteurs monoïdaux ci-dessous commutatif:

$$\begin{array}{ccc} V^\wedge & \hookrightarrow & V'^\wedge \\ {\scriptstyle \overline{Q}} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \overline{Q}'} \\ W^\wedge & \hookrightarrow & W'^\wedge \end{array} \quad ,$$

le composé de deux foncteurs monoïdaux se définissant de manière évidente, voir par exemple (C.L.C.A.) .)

<u>Définition</u> 2bis. Nous dirons que le foncteur monoïdal $\overline{Q}$ est <u>bien emboîté</u> dans le foncteur monoïdal $\overline{Q}'$ si, et seulement si:

- $\overline{Q}$ est emboîté dans $\overline{Q}'$ (définition 2),
- le foncteur $Q^{\bullet}$ (resp. $Q'^{\bullet}$), sous-jacent à $\overline{Q}$ (resp. $\overline{Q}'$), est compatible avec les monomorphismes.

<u>Définition</u> 3. Supposons que $W^{\bullet}$ et $W'^{\bullet}$ sont deux catégories telles que:

- $W^{\bullet}$ est une sous-catégorie pleine de $W'^{\bullet}$,
- $W^{\bullet}$ (resp. $W'^{\bullet}$) est une catégorie à produits fibrés.

Si nous désignons alors par:

$$\mathrm{pf} : W^{\bullet}(\searrow\swarrow) \longrightarrow W^{\bullet}(\diamondsuit)$$

$$(\text{resp.} \qquad \mathrm{pf}' : W'^{\bullet}(\searrow\swarrow) \longrightarrow W'^{\bullet}(\diamondsuit) \qquad )$$

un foncteur "choix de produits fibrés naturalisés" dans $W^{\bullet}$ (resp. $W'^{\bullet}$), nous dirons que le choix pf est <u>emboîté</u> dans le choix pf' si, et seulement si, le foncteur inclusion $W^{\bullet} \hookrightarrow W'^{\bullet}$ est compatible avec ces choix de produits fibrés.

(Evidemment, c'est aussi dire que le diagramme ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
W^{\bullet}(\searrow\swarrow) \arrow[r, "\mathrm{pf}"] \arrow[d, "\text{inclusion}(\searrow\swarrow)"'] & W^{\bullet}(\diamondsuit) \arrow[d, "\text{inclusion}(\diamondsuit)"] \\
W'^{\bullet}(\searrow\swarrow) \arrow[r, "\mathrm{pf}'"] & W'^{\bullet}(\diamondsuit)
\end{tikzcd}$$
.)

IV.13. Avec ce paragraphe, commence la vérification des hypothèses du Théorème de IV.10, lorsque $P^{\bullet} = \overline{Q}_{pf}$-néof (voir IV.3). Elle se poursuit en IV.14, IV.15, IV.16 et IV.17.

Proposition. *Moyennant les définitions de* IV.12, *si* $\mathcal{U}_o$ *et* $\mathcal{U}'_o$ *sont deux univers, si* $\overline{Q}: V^{\wedge} \longrightarrow W^{\wedge}$ *et* $\overline{Q}': V'^{\wedge} \longrightarrow W'^{\wedge}$ *sont deux foncteurs monoïdaux tels que:*

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ *et* $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$,
- $V^{\wedge}$ (resp. $W^{\wedge}$) *est bien emboîtée dans* $V'^{\wedge}$ (resp. $W'^{\wedge}$),
- $\overline{Q}$ *est bien emboîté dans* $\overline{Q}'$,
- $W^{\bullet}$ (resp. $W'^{\bullet}$) *est à produits fibrés*,
- pf (resp. pf') *est un choix de produits fibrés naturalisés dans* $W^{\bullet}$ (resp. *dans* $W'^{\bullet}$),
- *le choix* pf *est emboîté dans le choix* pf',

*alors, le diagramme ci-dessous, où* $I^{\bullet}$ *et* $J^{\bullet}$ *sont les foncteurs injections canoniques, vérifie la condition d'emboîtement de* IV.10:

$$\begin{tikzcd}
H^{\bullet} = V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}\text{-néof} \arrow[r, hook, "I^{\bullet}"'] \arrow[d] & V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}\text{-néof} = H'^{\bullet} \arrow[d] \\
P^{\bullet} = \overline{Q}_{pf}\text{-néof} \arrow[d, dash] \arrow[r, phantom, "(\mathrm{XXVI})"] & \overline{Q}'_{pf'}\text{-néof} = P'^{\bullet} \arrow[d, dash] \\
L^{\bullet} = W^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}\text{-néof} \arrow[r, hook, "J^{\bullet}"] & W'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}\text{-néof} = L'^{\bullet}
\end{tikzcd}$$

Il est évident, en effet, que $I^{\bullet}$ et $J^{\bullet}$ sont des foncteurs pleins et injectifs et que ce diagramme (XXVI) est commutatif.

Dans la suite, si des conditions analogues sont vérifiées, nous poserons, pour plus de simplicité:

- $V^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}$-néof = $V^{\wedge}$-néof et $W^{\wedge}_{\mathcal{U}_o}$-néof = $W^{\wedge}$-néof,
- $V'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}$-néof = $V'^{\wedge}$-néof et $W'^{\wedge}_{\mathcal{U}'_o}$-néof = $W'^{\wedge}$-néof,

car il n'y aura pas de risque de confusion.

IV.14. Proposition. Moyennant les définitions de IV.12, si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers et si $\bar{Q}: V^{\wedge} \longrightarrow W^{\wedge}$ et $\bar{Q}': V'^{\wedge} \longrightarrow W'^{\wedge}$ sont deux foncteurs monoïdaux tels que:

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$,
- $V^{\wedge}$ (resp. $W^{\wedge}$) est bien emboîtée dans $V'^{\wedge}$ (resp. $W'^{\wedge}$),
- $\bar{Q}$ est bien emboîté dans $\bar{Q}'$,
- $W^{\bullet}$ (resp. $W'^{\bullet}$) est à produits fibrés,
- pf (resp. pf') est un foncteur choix de produits fibrés naturalisés dans $W^{\bullet}$ (resp. $W'^{\bullet}$),
- le choix pf est emboîté dans le choix pf',
- $V \in \mathcal{U}'_o$ et $W \in \mathcal{U}'_o$,
- $V'^{\bullet}$ est à $\mathcal{U}'_o$-produits et à produits fibrés et $Q'^{\bullet}: V'^{\bullet} \longrightarrow W'^{\bullet}$ est compatible avec ces deux types de limites,
- $V^{\bullet}$ est à noyaux (de deux morphismes de même source et de même but), $V^{\bullet}$ est à produits fibrés et $Q^{\bullet}: V^{\bullet} \longrightarrow W^{\bullet}$ est compatible avec ces deux types de limites,

alors, le diagramme (XXVI) de IV.13 vérifie la condition aux limites projectives de IV.10.

Pour prouver cette proposition, on fait, comme en II.8, deux types de raisonnement:

- le premier, concernant la taille de $(V^{\wedge}\text{-néof})_o$ (ensemble des objets de $V^{\wedge}$-néof) et la taille de $W^{\wedge}$-néof, utilise la Théorie des Univers (T.E.N.S.) (et le lecteur pourra traduire, dans la suite, l'écriture "$E \in \mathcal{U}'_o$" en "E est un ensemble équipotent à un élément de $\mathcal{U}'_o$", ce qui donne des résultats plus étendus et parfaitement rigoureux),
- le second, purement catégorique, utilise la proposition de II.3 (existence de limites projectives dans une catégorie de néofoncteurs enrichis) et la proposition de IV.7 (compatibilité avec les limites projectives d'un foncteur "changement d'enrichissement" entre catégories de néofoncteurs enrichis) que l'on applique à $V^{\wedge}$-néof, $V'^{\wedge}$-néof, $\overline{Q}_{pf}$-néof et $\overline{Q}'_{pf'}$-néof.

En ce qui concerne la taille de $(V^{\wedge}\text{-néof})_o$ et celle de $W^{\wedge}$-néof, nous renvoyons le lecteur à II.8 qui assure que:
- puisque V est élément de $\mathcal{U}'_o$, l'ensemble $(V^{\wedge}\text{-néof})_o$ est, lui aussi, élément de $\mathcal{U}'_o$,
- puisque W est élément de $\mathcal{U}'_o$, l'ensemble sous-jacent à $W^{\wedge}$-néof (noté encore $W^{\wedge}$-néof) est, également, élément de $\mathcal{U}'_o$.

Il en résulte que l'ensemble produit

$$(V^{\wedge}\text{-néof})_o \times (W^{\wedge}\text{-néof})$$

est élément de $\mathcal{U}'_o$ ainsi qu'une quelconque de ses parties.

Nous pouvons, alors, appliquer les propositions de II.3 et IV.7:
- la catégorie $V^{\wedge}$-néof est à noyaux et la catégorie $V'^{\wedge}$-néof est à $\mathcal{U}'_o$-produits, ce qui assure qu'elle est donc à $\mathcal{P}(\,(V^{\wedge}\text{-néof})_o \times (W^{\wedge}\text{-néof})\,)$-produits,
- $\overline{Q}'_{pf'}$-néof est compatible avec les $\mathcal{P}(\,(V^{\wedge}\text{-néof})_o \times (W^{\wedge}\text{-néof})\,)$-produits et $\overline{Q}_{pf}$-néof est compatible avec les noyaux.

Ainsi, la proposition énoncée est démontrée.

IV.15. Si $\mathcal{U}'_o$ est un univers et $V'^\wedge$ une catégorie monoïdale, rappelons (voir II.10) que $Y_{\mathcal{U}'_o} = Y$ est la sous-catégorie de $V'^\wedge$-néof ( = $V'^\wedge_{\mathcal{U}'_o}$-néof) dont les morphismes sont les $V'^\wedge$-néofoncteurs $G^\wedge: C^\wedge \longrightarrow B^\wedge$ vérifiant les trois conditions:

(y"). $G: C^\wedge_o \longrightarrow B^\wedge_o$ est une application injective,

(y'). pour tout couple $(c',c)$ d'objets de $C^\wedge$, le morphisme

$$\underline{G}^\wedge(c',c): \underline{C}^\wedge(c',c) \longrightarrow \underline{B}^\wedge(G(c'),G(c))$$

est un monomorphisme de $V'^{\bullet}$,

(y). pour tout triplet $(c'',c',c)$ d'objets de $C^\wedge$, le diagramme ci-dessous (nécessairement commutatif, en vertu de la définition, donnée en I.6, des néofoncteurs enrichis) est un produit fibré naturalisé dans $V'^{\bullet}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\underline{C}^\wedge(c'',c') \ast \underline{C}^\wedge(c',c) \arrow[r, "M_{G^\wedge}(c'',c',c)"] \arrow[d, "m_{C^\wedge}(c'',c',c)"'] & \underline{B}^\wedge(G(c''),G(c')) \ast \underline{B}^\wedge(G(c'),G(c)) \arrow[d, "m_{B^\wedge}(G(c''),G(c'),G(c))"] \\
\underline{C}^\wedge(c'',c') \boxtimes' \underline{C}^\wedge(c',c) \arrow[r, "\underline{G}^\wedge(c'',c')\boxtimes'\underline{G}^\wedge(c',c)"] & \underline{B}^\wedge(G(c''),G(c')) \boxtimes' \underline{B}^\wedge(G(c'),G(c))
\end{tikzcd}$$

Signalons que la fidélité de $P_{V'^\wedge\text{-an}}$ (voir I.11) et les conditions (y") et (y') assurent que tout élément de $Y$ est un monomorphisme de $V'^\wedge$-néof (ceci pourrait, aussi, se déduire du lemme de II.10 et de la remarque de 0.8).

Nous pouvons alors énoncer:

<u>Proposition</u>. <u>Moyennant les définitions de</u> IV.12, <u>si</u> $\mathfrak{U}_o$ <u>et</u> $\mathfrak{U}'_o$ <u>sont deux univers et si</u> $\bar{Q}: V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ et $\bar{Q}': V'^\wedge \longrightarrow W'^\wedge$ <u>sont deux foncteurs monoïdaux tels que</u>:

- $\mathfrak{U}_o \in \mathfrak{U}'_o$ <u>et</u> $\mathfrak{U}_o \subset \mathfrak{U}'_o$,
- $V^\wedge$ (resp. $W^\wedge$) <u>est bien emboîtée dans</u> $V'^\wedge$ (resp. $W'^\wedge$),
- $\bar{Q}$ <u>est bien emboîté dans</u> $\bar{Q}'$,
- $W^\bullet$ (resp. $W'^\bullet$ ) <u>est à produits fibrés</u>,
- pf (resp. pf') <u>est un foncteur choix de produits fibrés naturalisés dans</u> $W^\bullet$ (resp. $W'^\bullet$),
- <u>le choix</u> pf <u>est emboîté dans le choix</u> pf',

<u>si</u>, <u>de plus</u>, Y <u>est la sous-catégorie de</u> $V'^\wedge$-néof <u>constituée des</u> $V'^\wedge$-<u>néofoncteurs vérifiant les conditions</u> (y''), (y') <u>et</u> (y) <u>précédentes</u>, <u>alors</u>, <u>le diagramme</u> (XXVI) <u>de</u> IV.13 <u>vérifie la condition aux monomorphismes de</u> IV.10.

En effet, nous avons déjà remarqué ci-dessus que:

$$Y \subset \mathrm{Monos}(V'^\wedge\text{-néof}) \ .$$

De plus, puisque $\bar{Q}$ est bien emboîté dans $\bar{Q}'$, le foncteur $Q'^\bullet$ est, par définition, compatible avec les monomorphismes.Moyennant la construction de $\bar{Q}'_{pf'}$-néof (voir IV.3 pour la construction, analogue, de $\bar{Q}_{pf}$-néof), il est alors clair que l'image, par ce foncteur, d'un élément quelconque de Y vérifie, également, les conditions (y'') et (y') (où l'on remplace $V'^\bullet$ par $W'^\bullet$). Comme $P_{W'^\wedge\text{-an}}$ est fidèle, au même titre que $P_{V'^\wedge\text{-an}}$, on en déduit donc que:

$$\bar{Q}'_{pf'}\text{-néof}\ (Y) \subset \mathrm{Monos}(W'^\wedge\text{-néof}) \ ;$$

ce qui prouve bien la proposition précédente.

IV.16. La proposition de II.11 (condition d'absorption des noyaux de $V^\wedge$-néof par la sous-catégorie Y de $V'^\wedge$-néof) permet d'énoncer, sans autre détail:

Proposition. Moyennant les définitions de IV.12, si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers et si $\overline{Q}$: $V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ et $\overline{Q}'$: $V'^\wedge \longrightarrow W'^\wedge$ sont deux foncteurs monoïdaux tels que:

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$,
- $V^\wedge$(resp. $W^\wedge$) est bien emboîtée dans $V'^\wedge$ (resp. $W'^\wedge$),
- $\overline{Q}$ est bien emboîté dans $\overline{Q}'$,
- $W^\bullet$ (resp. $W'^\bullet$) est à produits fibrés,
- pf (resp. pf') est un foncteur choix de produits fibrés naturalisés dans $W^\bullet$ (resp. $W'^\bullet$),
- le choix pf est emboîté dans le choix pf',
- $V^\bullet$ est à noyaux (de deux morphismes) et à produits fibrés,
- le foncteur inclusion $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ est compatible avec les produits fibrés,

et si, de plus, Y est la sous-catégorie de $V'^\wedge$-néof constituée des $V'^\wedge$-néofoncteurs vérifiant les conditions (y"), (y') et (y) de IV.15, alors le diagramme (XXVI) de IV.13 vérifie la condition d'absorption de IV.10.

IV.17. Proposition. Moyennant les définitions de IV.12, si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers et si $\overline{Q}$: $V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ et $\overline{Q}'$: $V'^\wedge \longrightarrow W'^\wedge$ sont deux foncteurs monoïdaux tels que:

- $\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o$ et $\mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o$,
- $V^\wedge$ (resp. $W^\wedge$) est bien emboîtée dans $V'^\wedge$ (resp. $W'^\wedge$) et $\overline{Q}$ est bien emboîté dans $\overline{Q}'$,
- $W^\bullet$ (resp. $W'^\bullet$) est à produits fibrés,
- pf (resp. pf') est un foncteur choix de produits fibrés naturalisés dans

$W^\bullet$ (resp. $W'^\bullet$) et pf est emboîté dans pf',

- $V'^\bullet$ est à produits fibrés et, pour tout couple $(z',z)$ de deux morphismes de $V'^\bullet$ tels que:

  + $\underline{\beta}_{V'^\bullet}(z') = \underline{\beta}_{V'^\bullet}(z) = v'$ (i.e. ils ont même but),
  + $\underline{\alpha}_{V'^\bullet}(z)$ est objet de $V^\bullet$,
  + $z'$ est un monomorphisme,

il existe un produit fibré $z \underset{v'}{\times} z'$, dans $V'^\bullet$, qui est objet de $V^\bullet$,

- le foncteur $Q'^\bullet : V'^\bullet \longrightarrow W'^\bullet$ est compatible avec les produits fibrés,

- $V^\bullet$ et $V'^\bullet$ sont à limites inductives dénombrablement filtrantes, $V^\bullet$ est à $\mathcal{U}_0$-sommes, le foncteur inclusion $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ est compatible avec toutes ces limites inductives et les limites inductives dénombrablement filtrantes commutent, dans $V'^\bullet$, avec les produits fibrés,

- pour tout objet $v'$ de $V'^\bullet$, les foncteurs $-\boxtimes' v' : V'^\bullet \longrightarrow V'^\bullet$ et $v'\boxtimes' - : V'^\bullet \longrightarrow V'^\bullet$ (et donc, aussi, leurs restrictions à $V^\bullet$) sont compatibles avec les limites inductives dénombrablement filtrantes (c'est le cas si $V'^\wedge$ est fermée),

- tout morphisme de $V'^\bullet$, dont la source est objet de $V^\bullet$, admet un $X''$-reflet (où $X'' = \mathrm{Monos}(V'^\bullet)$ ) dont la source est objet de $V^\bullet$,

- le foncteur $Q^\bullet : V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ admet un adjoint $\mathrm{Ad}(Q^\bullet) : W^\bullet \longrightarrow V^\bullet$ tel que:

  + pour tout objet $w$ de $W^\bullet$, la structure libre $\mathrm{Ad}(Q^\bullet)(w)$ sur $w$, relativement au foncteur $Q^\bullet$, est aussi une structure libre sur $w$, relativement au foncteur $Q'^\bullet$,

  + le morphisme $t : i_{W^\wedge} \longrightarrow Q^\bullet(i_{V^\wedge})$ (associé au foncteur monoïdal $\overline{Q}$) est le morphisme universel définissant $i_{V^\wedge} = \mathrm{Ad}(Q^\bullet)(i_{W^\wedge})$ comme une structure libre sur $i_{W^\wedge}$, relativement à $Q'^\bullet$ (et donc aussi à $Q^\bullet$ ),

alors, le foncteur $\overline{Q}'_{pf'}$-néof est ( $(W^\wedge\text{-néof})_0, Y.(V^\wedge\text{-néof})_0$)-engendrant, où

$Y$ est la sous-catégorie de $V'^\wedge$-néof constituée des $V'^\wedge$-néofoncteurs vérifiant les conditions ($y''$), ($y'$) et ($y$) de IV.15. Le diagramme (XXVI) de IV.13 vérifie donc la condition de génération de IV.10.

(Nous tenons à insister sur le fait que, malgré la longueur apparente de l'énoncé de cette proposition et le nombre, qui semble élevé, de conditions qui y interviennent, toutes les hypothèses utilisées sont, à la fois, très naturelles et très faciles à vérifier dans la pratique.)

La proposition ci-dessus sera démontrée dès lors que nous aurons établi que le diagramme, commutatif en vertu de la construction de $\overline{Q}'_{pf'}$-néof (voir par exemple IV.3), ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
& H'^\bullet = V'^\wedge\text{-néof} \arrow[dl, "\overline{Q}'_{pf'}\text{-néof} = P'^\bullet"'] \arrow[dr, "\Pi_1'^\bullet = P_{V'^\wedge\text{-an}}\ \text{(voir I.11)}"] & \\
W'^\wedge\text{-néof} = L'^\bullet \arrow[dr, "P_{W'^\wedge\text{-an}} = \Pi_2'^\bullet\ \text{(voir I.11)}"'] & & \underline{H}'^\bullet = V'^\wedge\text{-apor} \arrow[dl, "\underline{P}'^\bullet = \overline{Q}'\text{-apor}"] \\
& \underline{L}'^\bullet = W'^\wedge\text{-apor} &
\end{tikzcd}$$

vérifie toutes les hypothèses du lemme 5 de IV.11, que nous pourrons donc appliquer dans le cas où:

- $H_o = (V^\wedge\text{-néof})_o$ et $L_o = (W^\wedge\text{-néof})_o$,
- $\underline{H}_o = (V^\wedge\text{-apor})_o$ et $\underline{L}_o = (W^\wedge\text{-apor})_o$,
- $Y$ est justement la sous-catégorie de $V'^\wedge$-néof, introduite en IV.15, dont il s'agit dans la proposition et qui est constituée des $V'^\wedge$-néofoncteurs vérifiant les conditions ($y''$), ($y'$) et ($y$),
- $\underline{Y}$ est justement la sous-catégorie de $V'^\wedge$-apor dont les morphismes sont

les $V'^{\wedge}$-applications orientées $\vec{G}: \vec{C} \longrightarrow \vec{B}$ telles que:

($y''$). $G: \vec{C}_o \longrightarrow \vec{B}_o$ est une application injective,

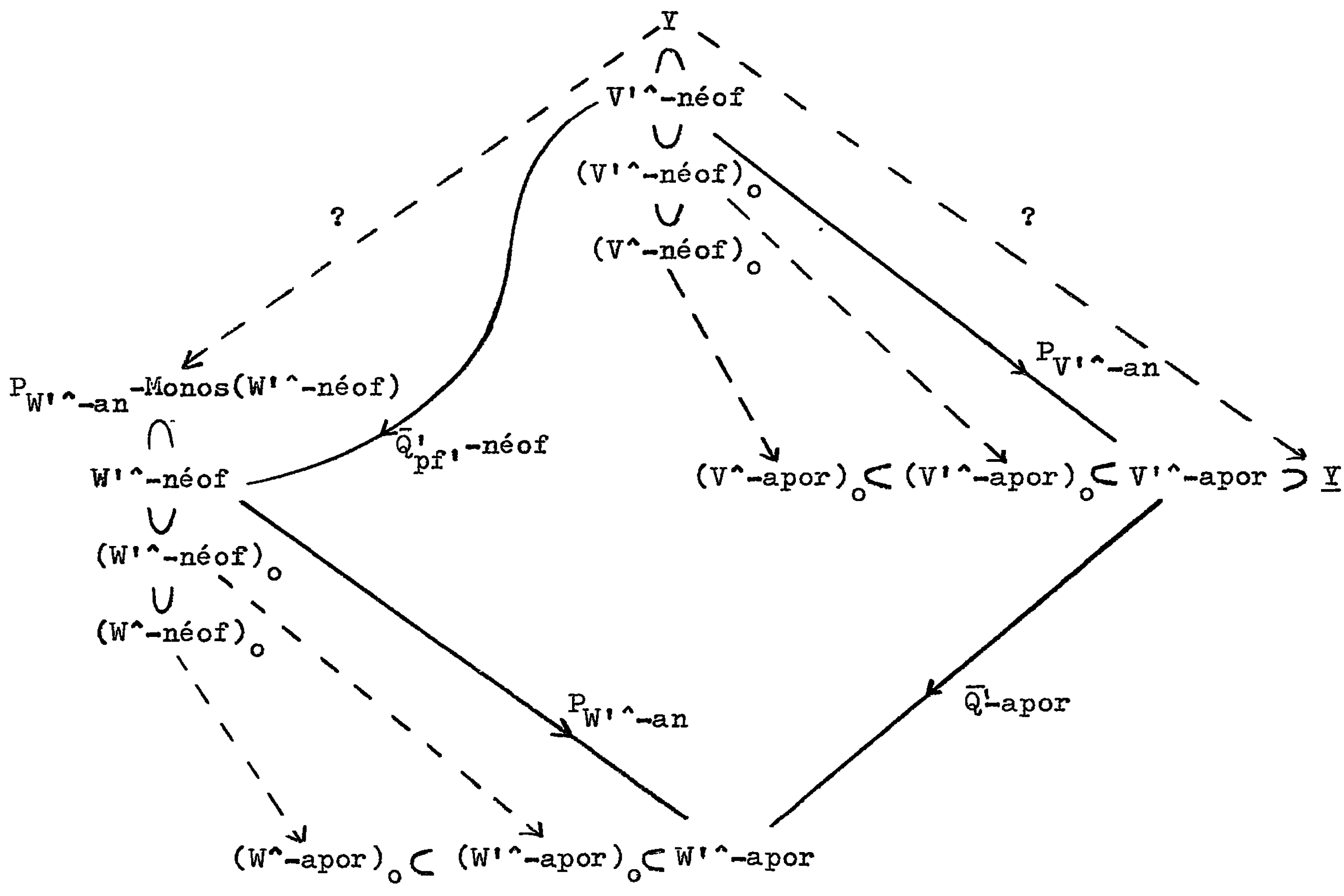
($y'$). pour tout couple $(c',c)$ d'objets de $\vec{C}$, le morphisme

$$\underline{\vec{G}}(c',c): \underline{\vec{C}}(c',c) \longrightarrow \underline{\vec{B}}(G(c'),G(c))$$

est un monomorphisme de $V'$

(il s'agit aussi de la sous-catégorie construite en II.12).

Comme dans le lemme 5 de IV.11, nous visualisons ces diverses données par le schéma ci-dessous (où les "?" correspondent à des points que nous devons démontrer):




Pour démontrer que le lemme 5 s'applique (et établir, ainsi, la proposition ci-dessus), il nous faut donc prouver (et cela est suffisant) que:

a). le foncteur $\overline{Q}$-apor est $((W^\wedge\text{-apor})_0, \underline{Y}.(V^\wedge\text{-apor})_0)$-engendrant,

b). le foncteur $P_{V'^\wedge\text{-an}}$ est $((V^\wedge\text{-apor})_0, Y.(V^\wedge\text{-néof})_0)$-engendrant,

c). la restriction de $P_{V'^\wedge\text{-an}}$, à savoir ce que nous avons représenté dans le schéma précédent par $Y \dashrightarrow \underline{Y}$ , existe,

d). la restriction de $\overline{Q}'_{pf'}$-néof, que nous avons représentée dans le schéma précédent par $Y \dashrightarrow (P_{W'^\wedge\text{-an}})$-Monos$(W'^\wedge\text{-néof})$ existe également.

Prouvons donc ces quatre points, dans cet ordre.

a). Le lemme 2 de IV.11 s'applique au diagramme commutatif ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
V^\wedge\text{-apor} = \underline{H}^\bullet \arrow[r, hook, "\underline{I}^\bullet"] \arrow[dd, "\overline{Q}\text{-apor} = \underline{P}^\bullet"'] & \underline{H}'^\bullet = V'^\wedge\text{-apor} \arrow[dd, "\underline{P}'^\bullet = \overline{Q}'\text{-apor}"] \\
& \\
W^\wedge\text{-apor} = \underline{L}^\bullet \arrow[r, hook, "\underline{J}^\bullet"] & \underline{L}'^\bullet = W'^\wedge\text{-apor}
\end{tikzcd} ,$$

puisqu'il est bien clair que:

- la condition d'emboîtement de IV.10 est vérifiée par ce diagramme,
- $\overline{Q}$-apor admet un adjoint Ad($\overline{Q}$-apor), puisque les hypothèses de la proposition précédente permettent d'appliquer la proposition de IV.9,
- pour tout objet $\vec{A}$ de $V^\wedge$-apor, la structure libre $\vec{B}$ = Ad($\overline{Q}$-apor)($\vec{A}$), relativement au foncteur $\overline{Q}$-apor, est aussi une structure libre sur $\vec{A}$, relativement au foncteur $\overline{Q}'$-apor (il suffit d'utiliser l'hypothèse analogue, concernant les structures libres relativement à $Q^\bullet$, donnée dans la proposition,et la construction de Ad($\overline{Q}$-apor) donnée en IV.9),
- $\overline{Q}$ étant bien emboîté dans $\overline{Q}'$, le foncteur $Q'^\bullet$ est compatible avec les monomorphismes et $\underline{Y}$ est bien un ensemble de monomorphismes de $V'^\wedge$-apor qui

vérifie $\overline{Q}'\text{-apor}(\underline{Y}) \subset \mathrm{Monos}(W'^{\wedge}\text{-apor})$,

- tout morphisme de $V'^{\wedge}$-apor, dont la source est objet de $V^{\wedge}$-apor, admet un $\underline{Y}$-reflet dont la source est objet de $V^{\wedge}$-apor, car les hypothèses de la proposition précédente permettent d'appliquer le lemme 1 de II.12.

Il en résulte donc que $\overline{Q}'$-apor est $((W^{\wedge}\text{-apor})_o, \underline{Y}.(V^{\wedge}\text{-apor})_o)$-engendrant.

b). La proposition de II.13 (condition de génération du Théorème d'existence de limites inductives) s'applique évidemment et prouve immédiatement que $P_{V'^{\wedge}\text{-an}}$ est $((V^{\wedge}\text{-apor})_o, Y.(V^{\wedge}\text{-néof})_o)$-engendrant.

c). Comme Y est l'ensemble des $V'^{\wedge}$-néofoncteurs vérifiant les conditions (y"), (y') et (y), comme $\underline{Y}$ est l'ensemble des $V'^{\wedge}$-applications orientées vérifiant les conditions (y") et (y'), il est clair que:

$$P_{V'^{\wedge}\text{-an}}(Y) \subset \underline{Y} \quad .$$

La restriction de $P_{V'^{\wedge}\text{-an}}$, notée $Y \dashrightarrow \underline{Y}$ , existe donc.

d). Il nous faut montrer, maintenant, que l'image

$$\begin{array}{ccccc} G'^{\wedge} & : & C'^{\wedge} & \longrightarrow & B'^{\wedge} \\ = & & = & & = \\ \overline{Q}'_{pf'}\text{-néof}(G^{\wedge}) & & \overline{Q}'_{pf'}\text{-néof}(C^{\wedge}) & & \overline{Q}'_{pf'}\text{-néof}(B^{\wedge}) \end{array}$$

d'un élément quelconque $G^{\wedge}: C^{\wedge} \longrightarrow B^{\wedge}$, appartenant à Y, est un $P_{W'^{\wedge}\text{-an}}$-monomorphisme.

Pour ce faire, désignons par Z la sous-catégorie de $W'^{\wedge}$-néof dont les morphismes sont les $W'^{\wedge}$-néofoncteurs vérifiant les conditions (y"), (y') et (y) ci-dessus, où l'on remplace $V'^{\wedge}$ par $W'^{\wedge}$ (donc Z joue, pour $W'^{\wedge}$-néof, le même rôle que Y pour $V'^{\wedge}$-néof).

Alors, le lemme de II.10 (appliqué à Z) nous assure que les éléments de Z sont, en particulier, des $P_{W'^{\wedge}\text{-an}}$-monomorphismes.

Il nous suffit donc d'établir que $G'^{\wedge}$ (avec les notations précédentes) est élément de Z.

Nous constatons, tout d'abord, que le $W'^{\wedge}$-néofoncteur $G'^{\wedge}$ vérifie les conditions (y") et (y'), puisque $G^{\wedge}$(élément de Y) les vérifie aussi et puisque $Q'^{\bullet}$ est, par hypothèse, compatible avec les monomorphismes.

---

Pour tout triplet $(c'',c',c)$ d'objets de $C'^{\wedge}$ (i.e. de $C^{\wedge}$) considérons, de plus, le diagramme ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=large]
\begin{array}{c}\underline{B}'^{\wedge}(G(c''),G(c'))\\ \boxtimes'\\ \underline{B}'^{\wedge}(G(c'),G(c))\end{array} \arrow[rrr, "{\varepsilon'(\underline{B}^{\wedge}(G(c''),G(c')),\underline{B}^{\wedge}(G(c'),G(c)))}"'] & & & Q'^{\bullet}\left(\begin{array}{c}\underline{B}^{\wedge}(G(c''),G(c'))\\ \boxtimes'\\ \underline{B}^{\wedge}(G(c'),G(c))\end{array}\right) \\
& \begin{array}{c}\underline{B}'^{\wedge}(G(c''),G(c'))\\ \ast\\ \underline{B}'^{\wedge}(G(c'),G(c))\end{array} \arrow[ul, "{m_{B'^{\wedge}}(G(c''),G(c'),G(c))}"'] \arrow[r, "{n_{B^{\wedge}}(G(c''),G(c'),G(c))}"'] \arrow[ur, phantom, "\mathrm{(XXIX)}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XXX)}"] \arrow[ddl, phantom, "\mathrm{(XXXI)}"] & Q'^{\bullet}\left(\begin{array}{c}\underline{B}^{\wedge}(G(c''),G(c'))\\ \ast\\ \underline{B}^{\wedge}(G(c'),G(c))\end{array}\right) \arrow[ur, "{Q'^{\bullet}(m_{B^{\wedge}}(G(c''),G(c'),G(c)))}"'] \arrow[ddr, phantom, "\mathrm{(XXVII)}"] & \\
& \begin{array}{c}\underline{C}'^{\wedge}(c'',c')\\ \ast\\ \underline{C}'^{\wedge}(c',c)\end{array} \arrow[u, "{M_{G'^{\wedge}}(c'',c',c)}"] \arrow[r, "{n_{C^{\wedge}}(c'',c',c)}"'] \arrow[dl, "{m_{C'^{\wedge}}(c'',c',c)}"] \arrow[dr, phantom, "\mathrm{(XXVIII)}"] & Q'^{\bullet}\left(\begin{array}{c}\underline{C}^{\wedge}(c'',c')\\ \ast\\ \underline{C}^{\wedge}(c',c)\end{array}\right) \arrow[u, "{Q'^{\bullet}(M_{G^{\wedge}}(c'',c',c))}"'] \arrow[dr, "{Q'^{\bullet}(m_{C^{\wedge}}(c'',c',c))}"] & \\
\begin{array}{c}\underline{C}'^{\wedge}(c'',c')\\ \boxtimes'\\ \underline{C}'^{\wedge}(c',c)\end{array} \arrow[uuu, "{\begin{array}{c}\underline{G}'^{\wedge}(c'',c')\\ \boxtimes'\\ \underline{G}'^{\wedge}(c',c)\end{array}}"] \arrow[rrr, "{\varepsilon'(\underline{C}^{\wedge}(c'',c'),\underline{C}^{\wedge}(c',c))}"'] & & & Q'^{\bullet}\left(\begin{array}{c}\underline{C}^{\wedge}(c'',c')\\ \boxtimes'\\ \underline{C}^{\wedge}(c',c)\end{array}\right) \arrow[uuu, "{Q'^{\bullet}\left(\begin{array}{c}\underline{G}^{\wedge}(c'',c')\\ \boxtimes'\\ \underline{G}^{\wedge}(c',c)\end{array}\right)}"']
\end{tikzcd}
$$

(rappelons que, pour tout couple $(c',c)$ d'objets de $C^{\wedge}$, on a:

- $G(c) = G'(c)$, car $G$ et $G'$ sont égales, et $\underline{G}'^{\wedge}(c',c) = Q'^{\bullet}(\underline{G}^{\wedge}(c',c))$,
- $\underline{C}'^{\wedge}(c',c) = Q'^{\bullet}(\underline{C}^{\wedge}(c',c))$ et $\underline{B}'^{\wedge}(G(c'),G(c)) = Q'^{\bullet}(\underline{B}^{\wedge}(G(c'),G(c)))$ ).

Nous constatons que, dans ce diagramme:

(i). le sous-diagramme (XXVII) est commutatif et représente un produit fibré naturalisé dans $W'^{\cdot}$, puisque c'est l'image, par le foncteur $Q'^{\cdot}$ (compatible avec les produits fibrés), d'un diagramme commutatif représentant un produit fibré naturalisé dans $V'^{\cdot}$ et qui exprime que $G^{\wedge}$ vérifie la condition (y),

(ii). le sous-diagramme (XXVIII) est commutatif et représente un produit fibré naturalisé dans $W'^{\cdot}$, en vertu de la construction (voir IV.3) du $W'^{\wedge}$-graphe multiplicatif $C'^{\wedge}$, image par $\overline{Q}'_{pf'}$-néof du $V'^{\wedge}$-graphe multiplicatif $C^{\wedge}$,

(iii). pour la même raison, le sous-diagramme (XXIX) est commutatif et représente un produit fibré naturalisé dans $W'^{\cdot}$,

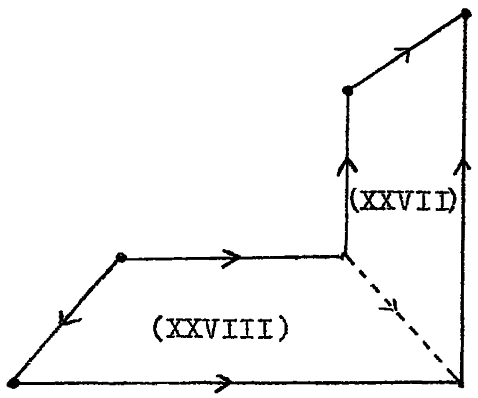
(iv). le sous-diagramme (XXX) est commutatif, par définition du morphisme $M_{G'^{\wedge}}(c'',c',c)$ (voir IV.3),

(v). le sous-diagramme (XXXI) est commutatif car $G'^{\wedge}$ est un $W'^{\wedge}$-néofoncteur (voir la définition de I.6),

(vi). le sous-diagramme "contour extérieur" est commutatif, en vertu de la naturalité de $\varepsilon'$.

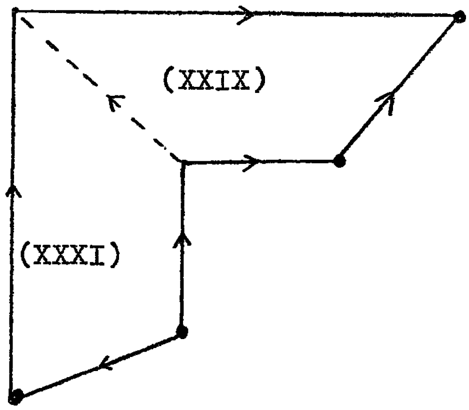
Le diagramme (complet) précédent est donc commutatif.

De plus, le composé "longitudinal" des sous-diagrammes (XXVII) et (XXVIII):




représente un produit fibré naturalisé dans $W'^{\cdot}$, puisque chacun d'eux en est un d'après (i) et (ii).

Ceci assure donc que le composé "longitudinal" (égal au composé précédent, d'après la commutativité du diagramme total) des sous-diagrammes (XXIX) et (XXXI)




est un produit fibré naturalisé dans $W'^{\bullet}$.

Or, le point (iii) affirme que le diagramme (XXIX) "est" un produit fibré naturalisé dans $W'^{\bullet}$, c'est donc que, en vertu du lemme 1 de IV.11, le diagramme (XXXI) est aussi un produit fibré naturalisé dans $W'^{\bullet}$.

Mais ceci signifie exactement que $G'^{\wedge}$ vérifie la condition (y).

Le point d) se trouve donc démontré.

Les points a), b), c) et d) étant établis, le lemme 5 de IV.11 s'applique, ce qui démontre la proposition énoncée.

(Signalons qu'il aurait été vraiment beaucoup plus long de vérifier directement, i.e. à la façon de II.13 par exemple, que le foncteur $\overline{Q}'_{pf'}$-néof est $((W^{\wedge}\text{-néof})_o, Y.(V^{\wedge}\text{-néof})_o)$-engendrant.)

IV.18. Les propositions de IV.13, IV.14, IV.15, IV.16 et IV.17 assurent que le Théorème général d'existence de structures libres (rappelé en IV.10) s'applique au diagramme (XXVI) de IV.13 (i.e. au foncteur $P^{\bullet} = \overline{Q}_{pf}$-néof) et, ceci, sous des hypothèses qui sont la "réunion" des hypothèses de ces diverses propositions.
Pour les mêmes raisons qu'en II.14, nous préférons énoncer le Théorème particulier d'existence de structures libres pour le foncteur $\overline{Q}_{pf}$-néof avec des hypothèses un peu plus fortes.
Par exemple, pour ce qui concerne les propriétés aux limites, nous faisons jouer des rôles analogues à $V^{\wedge}$ (resp. $W^{\wedge};\overline{Q}$) et $V'^{\wedge}$ (resp. $W'^{\wedge};\overline{Q}'$), ce qui est naturel car, dans la pratique, " $V^{\wedge}$ est à $\mathfrak{U}_o$ ce que $V'^{\wedge}$ est à $\mathfrak{U}'_o$ ".
D'autre part, nous n'avons pas craint d'énoncer, parfois, des hypothèses surabondantes pour faciliter l'application (toujours immédiate alors) des diverses propositions que nous avons citées précédemment. Par exemple, il suffirait d'écrire que:
- $V^{\wedge}$ est emboîtée dans $V'^{\wedge}$,
- le foncteur inclusion $V^{\bullet} \hookrightarrow V'^{\bullet}$ est compatible avec les $\mathfrak{J}_o$-limites projectives,

plutôt que (ce que nous avons fait):
- $V^{\wedge}$ est bien emboîtée dans $V'^{\wedge}$,
- le foncteur inclusion $V^{\bullet} \hookrightarrow V'^{\bullet}$ est compatible avec les $\mathfrak{J}_o$-limites projectives,

puisque, si le foncteur inclusion est compatible avec les $\mathfrak{J}_o$-limites projectives, il est compatible avec les monomorphismes, ce qui impose que $V^{\wedge}$ est bien emboîtée dans $V'^{\wedge}$ dès qu'elle n'y est (a priori) qu'emboîtée (voir les définitions de IV.12).

Nous énonçons donc:

Théorème (Existence de structures libres pour le foncteur $\overline{Q}_{pf}$-néof).
Moyennant les définitions de IV.12, si $\mathfrak{U}_o$ et $\mathfrak{U}'_o$ sont deux univers et si $\overline{Q}: V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ et $\overline{Q}': V'^\wedge \longrightarrow W'^\wedge$ sont deux foncteurs monoïdaux tels que:

- $\mathfrak{U}_o \in \mathfrak{U}'_o$ et $\mathfrak{U}_o \subset \mathfrak{U}'_o$ (première condition de taille),
- $V \in \mathfrak{U}'_o$ et $W \in \mathfrak{U}'_o$ (deuxième condition de taille),
- $V^\wedge$ (resp. $W^\wedge$) est bien emboîtée dans $V'^\wedge$ (resp. $W'^\wedge$) et $\overline{Q}$ est bien emboîté dans $\overline{Q}'$ (voir les définitions de IV.12),
- $W^\bullet$ (resp. $W'^\bullet$) est à produits fibrés (de deux morphismes de même but), pf (resp. pf') est un foncteur choix de produits fibrés naturalisés dans $W^\bullet$ (resp. $W'^\bullet$) et pf est emboîté dans pf' (voir les définitions de IV.12),
- $V^\bullet$ est à $\mathfrak{I}_o$-limites projectives, le foncteur inclusion $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ est compatible avec ces limites et $V'^\bullet$ est à $\mathfrak{I}'_o$-limites projectives,
- $V^\bullet$ est à $\mathfrak{I}_o$-limites inductives, le foncteur inclusion $V^\bullet \hookrightarrow V'^\bullet$ est compatible avec ces limites, $V'^\bullet$ est à $\mathfrak{I}'_o$-limites inductives et les limites inductives dénombrablement filtrantes commutent, dans $V'^\bullet$, avec les produits fibrés,
- pour tout objet $v'$ de $V'^\bullet$, les foncteurs $-\boxtimes' v': V'^\bullet \longrightarrow V'^\bullet$ et $v'\boxtimes' - : V'^\bullet \longrightarrow V'^\bullet$ sont compatibles avec les limites inductives (c'est le cas si $V'^\wedge$ est fermée),
- tout morphisme de $V'^\bullet$, dont la source est objet de $V^\bullet$, admet un $X''$-reflet (où $X'' = \text{Monos}(V'^\bullet)$), i.e. une image, dont la source est objet de $V^\bullet$ (troisième condition de taille),
- tout couple $(z',z)$ de morphismes $z: v \longrightarrow v'$ et $z': v'' \longrightarrow v'$ de $V'^\bullet$, tel que $z'$ est un monomorphisme de $V'^\bullet$ et $v$ est un objet de $V^\bullet$, admet un produit fibré $z \underset{v}{\times} z'$ qui est un objet de $V^\bullet$ (quatrième condition de taille),
- le foncteur $Q^\bullet: V^\bullet \longrightarrow W^\bullet$ admet un adjoint $Ad(Q^\bullet): W^\bullet \longrightarrow V^\bullet$ ($Q^\bullet$ est donc compatible, en particulier, avec les $\mathfrak{I}_o$-limites projectives)

tel que:

+ pour tout objet w de $W^{\bullet}$, la structure libre $Ad(Q^{\bullet})(w)$ sur w, relativement au foncteur $Q^{\bullet}$, est aussi une structure libre sur w, relativement au foncteur $Q'^{\bullet}$,

+ le morphisme $t: i_{W^\wedge} \longrightarrow Q^{\bullet}(i_{V^\wedge})$ (associé au foncteur monoïdal $\overline{Q}$ ) est le morphisme universel définissant $i_{V^\wedge} = Ad(Q^{\bullet})(i_{W^\wedge})$ comme une structure libre sur $i_{W^\wedge}$, relativement à $Q'^{\bullet}$ (et donc aussi à $Q^{\bullet}$),

- le foncteur $Q'^{\bullet}$ est compatible avec les $\mathfrak{I}'_o$-limites projectives (ce qui est vérifié s'il admet un adjoint),

alors, le foncteur $\overline{Q}_{pf}$-néof: $V^\wedge$-néof $\longrightarrow$ $W^\wedge$-néof admet un adjoint.

Tout comme en IV.17, nous tenons à insister sur le fait que, malgré les apparences, toutes les hypothèses utilisées sont, à la fois, très naturelles et très faciles à vérifier dans la pratique.

IV.19. Démontrons, maintenant, le Théorème suivant:

Théorème (Existence de structures libres pour le foncteur $\overline{Q}$-fonc).
Si $\mathcal{U}_o$ et $\mathcal{U}'_o$ sont deux univers, si $\overline{Q}: V^\wedge \longrightarrow W^\wedge$ et $\overline{Q}': V'^\wedge \longrightarrow W'^\wedge$ sont deux foncteurs monoïdaux et si, de plus, toutes les autres hypothèses du Théorème de IV.18 sont vérifiées, alors le foncteur $\overline{Q}$-fonc admet un adjoint.

Pour établir ce Théorème, nous allons prouver que le Théorème d'existence de structures libres, rappelé en IV.10, s'applique également, en montrant dans les points a), b), c), d) et e), qui suivent, que les différentes conditions qui y sont énoncées (emboîtement, aux limites projectives...) sont vérifiées.

Ces vérifications découlent, bien entendu, facilement de celles, analogues, auxquelles nous avons procédé dans le cas où $P^\bullet = \overline{Q}$-néof.

Nous ne jugeons donc pas utile de les détailler.

a). Il est clair que le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
V^{\wedge}\text{-fonc} = H^\bullet \arrow[r, hook, "I^\bullet"'] \arrow[d, "\overline{Q}\text{-fonc} = P^\bullet"'] \arrow[dr, phantom, "(XXXII)"] & H'^\bullet = V'^{\wedge}\text{-fonc} \arrow[d, "P'^\bullet = \overline{Q}'\text{-fonc}"] \\
W^{\wedge}\text{-fonc} = L^\bullet \arrow[r, hook, "J^\bullet"] & L'^\bullet = W'^{\wedge}\text{-fonc}
\end{tikzcd}$$

vérifie la condition d'emboîtement de IV.10 si $I^\bullet$ et $J^\bullet$ sont les foncteurs injections canoniques.

b). Le lecteur s'inspirera d'abord de IV.14 pour vérifier que l'ensemble $(V^{\wedge}\text{-fonc})_o \times (W^{\wedge}\text{-fonc})$ appartient à $\mathcal{U}'_o$. Il utilisera, ensuite, le corollaire énoncé en II.4 (existence de limites projectives dans une catégorie de foncteurs enrichis) ainsi que la proposition de IV.8 (compatibilité des foncteurs $\overline{Q}$-fonc et $\overline{Q}'$-fonc avec les limites projectives) pour prouver que le diagramme (XXXII), ci-dessus, vérifie bien la condition aux limites projectives de IV.10.

c). L'ensemble $(V'^{\wedge}\text{-fonc}) \cap Y$ (où $Y$ est la sous-catégorie -que l'on note comme son ensemble sous-jacent - de $V'^{\wedge}$-néof définie en IV.15) est constitué des V'^-foncteurs $G\hat{}: C\hat{} \longrightarrow B\hat{}$ tels que:

(y"). $G: C\hat{}_o \longrightarrow B\hat{}_o$ est une application injective,

(y'). pour tout couple (c',c) d'objets de C^, le morphisme

$$\underline{G}\hat{}(c',c): \underline{C}\hat{}(c',c) \longrightarrow \underline{B}\hat{}(G(c'),G(c))$$

est un monomorphisme de V'˙.

Il s'agit, manifestement, d'une classe particulière de monomorphismes de V'^-fonc pour laquelle le diagramme (XXXII), ci-dessus, vérifie la condition aux monomorphismes de IV.10, puisque, le foncteur Q'˙ étant compatible avec les $\mathfrak{I}'_o$-limites projectives, il est compatible avec les monomorphismes.

d). Du lemme énoncé en II.11 ("tout noyau dans V^-néof est élément de Y ") et du corollaire énoncé en II.4 (compatibilité de $P_{V\hat{}-nf}$ avec les noyaux), on déduit que tout noyau de V^-fonc est élément de (V'^-fonc) ∩ Y, ce qui assure, évidemment, que le diagramme (XXXII), ci-dessus, vérifie la condition d'absorption de IV.10.

e). Le lecteur établira sans peine le lemme:

Lemme. Pour tout V'^-néofoncteur $G\hat{}: C\hat{} \longrightarrow B\hat{}$ élément de Y (voir IV.15), dont le but B^ est sous-jacent (voir I.2) à une V'^-catégorie, il existe un V'^-foncteur $G''\hat{}: C''\hat{} \longrightarrow B\hat{}$ élément de (V'^-fonc) ∩ Y et un V'^-néofoncteur inversible $G'''\hat{}: C\hat{} \xrightarrow{\sim} C''\hat{}$ qui rendent commutatif le diagramme (de V'^-néof) ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & B\hat{} & \\
C\hat{} \arrow[ur, "G\hat{} \in Y"] \arrow[rr, "G'''\hat{}", "\sim"'] & & C''\hat{} \arrow[ul, "G''\hat{} \in (V'\hat{}\text{-fonc}) \cap Y"']
\end{tikzcd}$$

Ceci admis, d'après IV.17 le foncteur $\overline{Q}'_{pf'}$-néof: $V'^{\wedge}$-néof $\longrightarrow W'^{\wedge}$-néof est $((W^{\wedge}\text{-néof})_o, Y.(V^{\wedge}\text{-néof})_o)$-engendrant et, de plus, $V'^{\wedge}$-fonc est une sous-catégorie pleine de $V'^{\wedge}$-néof; c'est donc que le foncteur

$$\overline{Q}'\text{-fonc}: V'^{\wedge}\text{-fonc} \longrightarrow W'^{\wedge}\text{-fonc}$$

est $((W^{\wedge}\text{-fonc})_o, ((V'^{\wedge}\text{-fonc}) \cap Y).(V^{\wedge}\text{-fonc})_o)$-engendrant.
Le diagramme (XXXII), ci-dessus, vérifie donc la condition de génération de IV.10.

Les points a), b), c), d) et e) précédents prouvent donc le Théorème énoncé plus haut.

Signalons que nous n'avons pas cherché à raffiner l'énoncé et la démonstration du Théorème précédent, pour simplifier l'exposition et la lecture. Cependant, nous aurions pu notablement affaiblir les hypothèses.
Par exemple, pour vérifier la condition de génération, on peut procéder d'une manière analogue à celle de IV.17. Ceci permet de se rendre compte que l'hypothèse d'existence de produits fibrés dans $W^{\bullet}$ et $W'^{\bullet}$, de même que la quatrième condition de taille, peuvent être éliminées dans une version plus "sophistiquée" du Théorème précédent.

IV.20. Reprenons les exemples traités en IV.5 pour leur appliquer les théorèmes d'adjonction de IV.18 (pour $\overline{Q}_{pf}$-néof) et IV.19 (pour $\overline{Q}$-fonc).
Rappelons que nous raisonnons dans un bon modèle de la Théorie des ensembles avec axiome des Univers (T.E.N.S.); il en résulte que, pour tout univers $\mathcal{U}_o$, il existe un autre univers $\mathcal{U}'_o$ tel que:

$$\mathcal{U}_o \in \mathcal{U}'_o \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_o \subset \mathcal{U}'_o \quad .$$

a). Supposons que $V^\wedge$ est une catégorie monoïdale bien emboîtée dans une catégorie monoïdale $V'^\wedge$. Posons, d'autre part, $W^\wedge = \mathcal{U}^\wedge$ (structure monoïdale usuelle sur la catégorie $\mathcal{U}$ pleine d'applications entre éléments de $\mathcal{U}_o$) et $W'^\wedge = \mathcal{U}'^\wedge$ (structure monoïdale analogue sur la catégorie $\mathcal{U}'$ pleine d'applications entre éléments de $\mathcal{U}'_o$).

Si $V^\wedge$ et $V'^\wedge$ vérifient toutes les conditions (les concernant) du Théorème de IV.18, alors les foncteurs monoïdaux $\mathrm{Hom}_{V}\cdot(-,i)\colon V^\wedge \longrightarrow \mathcal{U}^\wedge$ et $\mathrm{Hom}_{V'}\cdot(-,i)\colon V'^\wedge \longrightarrow \mathcal{U}'^\wedge$ (où l'on a posé $i = i_{V^\wedge} = i_{V'^\wedge}$), sur-jacents (voir IV.5,a) ) aux foncteurs $\mathrm{Hom}_V\cdot(-,i)$ et $\mathrm{Hom}_{V'}\cdot(-,i)$, vérifient nécessairement les conditions du Théorème de IV.18 qui les concernent.

Comme il est évident que $\mathcal{U}^\wedge$ et $\mathcal{U}'^\wedge$ les vérifient également, on en déduit que (à une équivalence de catégories près) les foncteurs (voir IV.5, a) )

$$P_{(\mathcal{U}^\wedge,V^\wedge)\text{-néof}}\colon V^\wedge\text{-néof} \longrightarrow \mathcal{N}'$$

et

$$P_{(\mathcal{U}^\wedge,V^\wedge)\text{-fonc}}\colon V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow \mathcal{F}$$

admettent des adjoints (pour ce qui concerne l'existence d'un adjoint à $P_{(\mathcal{U}^\wedge,V^\wedge)\text{-fonc}}$, on peut, aussi, utiliser directement le résultat de B. J. Day et G. M. Kelly, obtenu en (E.N.F.C.) ).

Par exemple, il en est ainsi lorsque $V^\wedge = \mathcal{N}'^\wedge$ (structure monoïdale usuelle sur la catégorie $\mathcal{N}'$ pleine de néofoncteurs relatifs à $\mathcal{U}_o$) et $V'^\wedge = \mathcal{N}''^\wedge$ (structure monoïdale usuelle sur la catégorie $\mathcal{N}''$ pleine de néofoncteurs relatifs à $\mathcal{U}'_o$). On peut donc affirmer que tout graphe multiplicatif (relatif à $\mathcal{U}_o$) engendre un 2-graphe multiplicatif libre ... trivial: ses "Hom" à valeurs dans $\mathcal{N}'^\wedge$ sont des graphes multiplicatifs discrets et il s'identifie donc au graphe multiplicatif qui l'engendre.

De même, si l'on pose $V^\wedge = \mathcal{F}^\wedge$ (structure monoïdale usuelle sur la catégorie $\mathcal{F}$ pleine de foncteurs relatifs à $\mathcal{U}_o$) et $V'^{\wedge} = \mathcal{F}'^{\wedge}$ (structure monoïdale usuelle sur la catégorie $\mathcal{F}'$ pleine de foncteurs relatifs à $\mathcal{U}_o'$), on voit que toute catégorie (relative à $\mathcal{U}_o$) engendre une 2-catégorie libre, triviale et qui s'identifie, aussi, à la catégorie qui l'engendre.

Outre ces deux exemples, triviaux, on peut en obtenir de nombreux autres non triviaux.

Signalons, entre autres, le cas où $V^{\wedge} = \mathcal{H}_{ga}^{\wedge}$ (structure monoïdale usuelle sur la catégorie $\mathcal{H}_{ga}$ pleine d'homomorphismes entre groupes abéliens relatifs à $\mathcal{U}_o$, munie du "produit tensoriel de groupes abéliens") et où $V'^{\wedge} = \mathcal{H}'^{\wedge}_{ga}$ (structure monoïdale usuelle analogue sur la catégorie $\mathcal{H}'_{ga}$ pleine d'homomorphismes entre groupes abéliens relatifs à $\mathcal{U}_o'$): tout graphe multiplicatif (resp. toute catégorie) relatif (resp. relative) à $\mathcal{U}_o$ engendre un "graphe multiplicatif préadditif" (resp. une catégorie préadditive) libre ...

b). Reprenons l'exemple b) de IV.5. Les Théorèmes d'adjonction de IV.18 et IV.19 s'appliquent évidemment et prouvent que les foncteurs

$$\overline{P_{nf}}\text{-néof}: \mathcal{F}^{\wedge}\text{-néof} \longrightarrow \mathcal{N}'^{\wedge}\text{-néof}$$

et

$$\overline{P_{nf}}\text{-fonc}: \mathcal{F}^{\wedge}\text{-fonc} \longrightarrow \mathcal{N}'^{\wedge}\text{-fonc}$$

admettent des adjoints.

De plus, le Théorème d'adjonction de III.1 assure que les foncteurs

$$P_{\mathcal{F}^{\wedge}\text{-nf}}: \mathcal{F}^{\wedge}\text{-fonc} \longrightarrow \mathcal{F}^{\wedge}\text{-néof}$$

et

$$P_{\mathcal{N}'^{\wedge}\text{-nf}}: \mathcal{N}'^{\wedge}\text{-fonc} \longrightarrow \mathcal{N}'^{\wedge}\text{-néof}$$

admettent des adjoints (voir III.6, b) et c) ).

Comme le diagramme ci-dessous est commutatif (voir IV.5, b) ):

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\mathcal{F}^\wedge\text{-fonc} \arrow[r, "\overline{P_{nf}}\text{-fonc}"] \arrow[d, "P_{\mathcal{F}\text{-nf}}"'] \arrow[dr, "P_{2\text{-nf}}"] & \mathcal{N}'^\wedge\text{-fonc} \arrow[d, "P_{\mathcal{N}'^\wedge\text{-nf}}"] \\
\mathcal{F}^\wedge\text{-néof} \arrow[r, "\overline{P_{nf}}\text{-néof}"'] & \mathcal{N}'^\wedge\text{-néof}
\end{tikzcd}$$

,

le foncteur $P_{2\text{-nf}}$: $\mathcal{F}^\wedge$-fonc $\longrightarrow$ $\mathcal{N}'^\wedge$-néof admet un adjoint (qui est, de deux manières différentes, le composé de deux adjoints).

En conséquence, tout 2-graphe multiplicatif engendre une 2-catégorie libre. Par exemple, le 2-graphe multiplicatif $\mathbf{T}^\wedge$, construit explicitement (et facilement) en I4, engendre une 2-catégorie libre: c'est bien entendu la 2-catégorie simpliciale (voir I.4) usuellement utilisée pour décrire, à l'aide de 2-foncteurs, une structure de triple dans une 2-catégorie (voir (C.D.S.T.) et (A.M.C.A.) ).

(Signalons que les résultats de B.J. Day et G.M. Kelly en (E.N.F.C.) assureraient que le foncteur $\overline{P_{nf}}$-fonc: $\mathcal{F}^\wedge$-fonc $\longrightarrow$ $\mathcal{N}'^\wedge$-fonc admet bien un adjoint, moyennant la construction, non triviale, d'une fermeture sur la catégorie monoïdale symétrique $\mathcal{N}'^\wedge$, explicitée en (E.G.C.E.), mais dont nous pouvons nous dispenser dans notre contexte - ce qui n'est pas un désavantage!)

c). Reprenons l'exemple c) de IV.5 et rappelons qu'une relation (binaire), r, définie sur un graphe multiplicatif $C^\bullet$ est dite élémentaire si, et seulement si

-pour tous morphismes $\begin{matrix} c_1 \xrightarrow{x_1} c'_1 \\ c_2 \xrightarrow{x_2} c'_2 \end{matrix}$ de $C^\bullet$, on a:

$x_1 \, r \, x_2 \Longrightarrow c_1 = c_2$ et $c'_1 = c'_2$ ,

-pour tous morphismes $c \underset{x_2}{\overset{x_1}{\rightrightarrows}} c' \underset{x'_2}{\overset{x'_1}{\rightrightarrows}} c''$

de $C^\bullet$ , on a:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \; r \; x_2 \quad \text{et} \quad x'_1 \; r \; x'_2 \\ \exists \; x'_1 . x_1 \quad \text{et} \quad \exists x'_2 . x_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x'_1 . x_1) \; r \; (x'_2 . x_2) \qquad .$$

Il est alors clair qu'un $\Gamma_1^\wedge$-graphe multiplicatif (resp. une $\Gamma_1^\wedge$-catégorie) s'identifie à un graphe multiplicatif muni (resp. une catégorie munie) d'une relation réflexive et élémentaire, tandis qu'un $\mathfrak{J}_1^\wedge$-graphe multiplicatif (resp. une $\mathfrak{J}_1^\wedge$-catégorie) s'identifie à un graphe multiplicatif muni (resp. une catégorie munie) d'un préordre élémentaire.

Or les Théorèmes d'adjonction de IV.18 et IV.19 s'appliquent aux foncteurs

$$\overline{P_1}\text{-néof} : \mathfrak{J}_1^\wedge\text{-néof} \longrightarrow \Gamma_1^\wedge\text{-néof}$$

et

$$\overline{P_1}\text{-fonc} : \mathfrak{J}_1^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow \Gamma_1^\wedge\text{-fonc}$$

et prouvent donc qu'ils admettent des adjoints.

On retrouve alors le résultat bien connu:

-toute relation réflexive et élémentaire donnée sur un graphe multiplicatif engendre un préordre élémentaire sur celui-ci,

ainsi que le résultat analogue (qui, d'ailleurs, pourrait s'en déduire) concernant les catégories.

Ce dernier peut être vu aussi comme une application des critères de B.J. Day et G.M. Kelly donnés en (E.N.F.C.).

Signalons que, si l'on remplace dans ce qui précède $\mathfrak{J}_1^\wedge$ (resp. $\Gamma_1^\wedge$) par $\mathfrak{J}^\wedge$ (resp. $\Gamma^\wedge$) et $P_1$ par son analogue $P_{af}$ , les Théorèmes d'adjonction de IV.18 et IV.19 assurent encore que les foncteurs

$$\overline{P_{af}}\text{-néof} : \mathfrak{J}^\wedge\text{-néof} \longrightarrow \Gamma^\wedge\text{-néof}$$

et

$$\overline{P_{af}}\text{-fonc} : \mathfrak{J}^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow \Gamma^\wedge\text{-fonc}$$

---

admettent des adjoints. Par contre, ce dernier résultat ne rentre plus dans le champ d'application des critères de (E.N.F.C.) (de toute manière, pour pouvoir appliquer les résultats de (E.N.F.C.), il faut disposer de fermetures qui ne sont pas toujours très simples à calculer, comme nous l'avons déjà signalé en renvoyant à (E.G.C.E.) ).

En effet, $\widetilde{\mathfrak{F}}^{\wedge}$ s'identifie à une $\widetilde{\mathfrak{F}}^{\wedge}$-catégorie et donc à une $\Gamma^{\wedge}$-catégorie. Le foncteur $P_{af}$ s'identifie alors à un $\Gamma^{\wedge}$-foncteur, mais son adjoint (ensembliste) n'est pas un $\Gamma^{\wedge}$-adjoint (on rappelle que, si $[A]$ et $[B]$ sont deux graphes orientés, $[A]^{[B]}$ est la structure de graphe orienté, évidente, sur l'ensemble des applications orientées du graphe orienté produit $2\times[B]$ vers le graphe orienté $[A]$ ).

Comme $P_{af}$ n'a pas de $\Gamma^{\wedge}$-adjoint, les résultats de (A.D.E.C.) interdisent l'utilisation des résultats de (E.N.F.C.).

## BIBLIOGRAPHIE.


(A.D.E.C.) G. M. Kelly, Adjunction for enriched categories, Lect. Notes in Math. 106, Springer, 1969.

(A.M.C.A.) C. Auderset, Adjonctions et monades au niveau des 2-catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XV,1, Paris 1974.

(C.D.S.T.) E. Burroni, Catégories discrètement structurées et triples, Esquisses mathématiques 4, Paris 1970.

(C.L.C.A.) S. Eilenberg et G. M. Kelly, Closed categories, Proc. of the Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer, New-York 1966.

(C.O.C.A.) F. Foltz, Complétion des V-catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol XIV,1, Paris 1973.

(C.O.S.L.) C. Ehresmann, Construction de structures libres, Lect. Notes in Math. 92, Springer, 1969.

(D.L.A.W.) J. Beck, Distributive laws, Lect. Notes in Math. 80, Springer, 1969.

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses mathématiques 23, Paris 1975.

(E.N.F.C.) B. J. Day et G. M. Kelly, Enriched functor categories, Lect. Notes in Math. 106, Springer, 1969.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Inst. Polit. Iași, XIV, 1968.

(I.N.B.I.) J. Bénabou, Introduction to bi-categories, Lect. Notes in Math. 47, Springer, 1967.

(M.M.A.G.) C. Ehresmann, Maîtrise de mathématiques: Algèbre et Géométrie (1ère partie: Algèbre), C.D.U., Paris 1968.

(T.E.N.S.) A. Bastiani, Théorie des ensembles, C.D.U., Paris 1970.


o

o o