FLORENCE CURY

Graphes multiplicatis enrichis. Partie III

Diagrammes, tome 55-56 (2006), exp. n° 1, p. 96-120

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2006__55-56__A1_0>

DIAGRAMMES VOLUMES 55 + 56 , 2006

GRAPHES MULTIPLICATIS ENRICHIS

PARTIE III

Florence Cury

A.M.S. Sub. Class : 18 D 05 , 18 D 20

CHAPITRE III: CATEGORIE ENRICHIE LIBRE SUR UN GRAPHE MULTIPLICATIF ENRICHI.

III.1. Le but essentiel de tout ce chapitre est de démontrer le Théorème d'adjonction suivant:

Théorème. Si $\mathcal{U}_o$ est un univers, si $V^{\wedge} = (V^{\bullet}, \boxtimes, i, \phi, \psi, \omega)$ est une catégorie monoïdale, si $\mathfrak{F}$ est la catégorie pleine de foncteurs relatifs à $\mathcal{U}_o$ et si:

- $V^{\bullet}$ est une catégorie à $\mathfrak{F}_o$-limites inductives,

- <u>pour tout objet</u> v <u>de</u> $V^{\bullet}$, <u>les foncteurs</u> $- \boxtimes v : V^{\bullet} \longrightarrow V^{\bullet}$ <u>et</u> $v \boxtimes - : V^{\bullet} \longrightarrow V^{\bullet}$ <u>sont compatibles avec les</u> $\mathfrak{J}_o$<u>-limites inductives</u>, (ce qui est vérifié si, par exemple, $V^{\wedge}$ est fermée),

<u>alors</u>, <u>le foncteur</u> $P_{V^{\wedge}\text{-nf}}$: $V^{\wedge}$-fonc $\longrightarrow$ $V^{\wedge}$-néof <u>admet un adjoint</u>.

III.2. Désignons par $\mathfrak{U}$ la catégorie pleine d'applications entre éléments de l'univers $\mathfrak{U}_o$ et par $\mathfrak{U}^{\wedge}$ sa structure cartésienne (donc monoïdale) canonique. Nous savons alors que:
- la catégorie $\mathfrak{U}^{\wedge}$-néof est équivalente à la catégorie $\mathcal{N}'$ pleine de néofoncteurs relatifs à $\mathfrak{U}_o$ (voir I.14),
- la catégorie $\mathfrak{U}^{\wedge}$-fonc est équivalente à la catégorie $\mathfrak{F}$ (voir 0.7).

De plus, $\mathfrak{U}^{\wedge}$ vérifie toutes les hypothèses du Théorème de III.1, ce qui impliquera que le foncteur d'oubli (à un abus de notation près):

$$P_{\mathfrak{U}^{\wedge}\text{-nf}} = P_{nf}: \mathfrak{F} \longrightarrow \mathcal{N}'$$

admet un adjoint ... ce qui est, bien entendu, un résultat très connu (sans qu'il soit fait appel à la notion d'enrichissement).
Cependant, c'est évidemment la construction, dans ce cas particulier, de la catégorie libre $B''^{\bullet}$ sur un graphe multiplicatif $B^{\bullet}$ qui suggère (et justifie), au moins en partie, la construction, dans le cas général, de la $V^{\wedge}$-catégorie libre $A''^{\wedge}$ sur un $V^{\wedge}$-graphe multiplicatif $A^{\wedge}$ (voir III.5).
C'est pourquoi il nous semble très utile, pour fixer les idées, de rappeler cette construction particulière dans ce paragraphe.

Désignons par Γ la catégorie pleine d'applications orientées entre graphes orientés relatifs à $\mathfrak{U}_o$ (qui, d'après 0.6 , est équivalente à $\mathfrak{U}^{\wedge}$-apor) et (à cette équivalence près) par:

$$P_{\mathfrak{U}^{\wedge}\text{-an}} = P_{an} : \mathcal{N}' \longrightarrow \Gamma$$

le foncteur d'oubli usuel.

Si $B^{\cdot}$ est un graphe multiplicatif relatif à $\mathcal{U}_o$ (i.e. un objet de $\mathcal{N}'$), on construit la catégorie libre (relativement au foncteur P_{nf}) $B''^{\cdot}$ sur $B^{\cdot}$ en deux étapes:

- on fabrique, tout d'abord, la catégorie libre (relativement au foncteur composé $P_{an}.P_{nf}$) $B'^{\cdot}$ sur le graphe orienté $P_{an}(B^{\cdot}) = [B^{\cdot}]$, sous-jacent à $B^{\cdot}$ ($B'^{\cdot}$ est la catégorie des "chemins propres" de $[B^{\cdot}]$),
- on quotiente, ensuite, $B'^{\cdot}$ par une relation d'équivalence r (qui identifie un chemin propre de $B^{\cdot}$ à son composé dans $B^{\cdot}$, lorsqu'il en a un) et l'on obtient une catégorie quotient (strict) $B'^{\cdot}/\, r = B''^{\cdot}$ qui est la catégorie libre sur $B^{\cdot}$ recherchée.

Plus précisément, on appelle chemin propre de $[B^{\cdot}]$ (ou de $B^{\cdot}$):

- tout élément z de B (que l'on identifie au chemin (z) de longueur 1),
- toute famille $(z_n,\dots\dots,z_1)$ de morphismes non triviaux de $B^{\cdot}$ vérifiant:

  $n \geqslant 2$, $\underline{\alpha}_{B^{\cdot}}(z_p) = \underline{\beta}_{B^{\cdot}}(z_{p-1})$ pour tout $n \geqslant p \geqslant 2$ et $z_p \notin B^{\cdot}_o$ pour tout $n \geqslant p \geqslant 1$

(et on dit que $(z_n,\dots,z_1)$ est de longueur n).

L'application $\underline{\alpha}_{B'^{\cdot}}$ (resp. $\underline{\beta}_{B'^{\cdot}}$) est le prolongement de l'application $\underline{\alpha}_{B^{\cdot}}$ (resp. $\underline{\beta}_{B^{\cdot}}$) tel que:

- pour tout chemin propre $(z_n,\dots,z_1)$ de longueur $n \geqslant 2$, on a

$\underline{\alpha}_{B'^{\cdot}}((z_n,\dots,z_1)) = \underline{\alpha}_{B^{\cdot}}(z_1)$ (resp. $\underline{\beta}_{B'^{\cdot}}((z_n,\dots,z_1)) = \underline{\beta}_{B^{\cdot}}(z_n)$).

Les composés non triviaux de $B'^{\cdot}$ sont obtenus en supprimant les parenthèses.

La relation d'équivalence r est alors engendrée par la relation r' sur B' définie par:

- pour tout chemin propre (z_2,z_1), on a $(z_2,z_1)\ r'\ (z_2.z_1)$ si, et seulement si, $(z_2,z_1) \in B^{\cdot} * B^{\cdot}$.

Du point de vue de l'enrichissement (par $\mathcal{U}^{\wedge}$) on peut déduire de cette construction une construction "Hom par Hom" équivalente.

On a, tout d'abord: $B''^{\cdot}_o = B'^{\cdot}_o = B^{\cdot}_o$.

Pour tout couple (b',b) d'objets de $B'^{\bullet}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{B'^{\bullet}}(b',b)$ est une limite inductive (dans $\mathcal{U}$) de la forme:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Hom}_{B'^{\bullet}}(b',b) & \\
Q(b_n,\dots,b_{p+1},b_p,b_{p-1}\dots,b) \arrow[ur] \arrow[rr] & & Q(b_n,\dots,b_{p+1},b_p,b_p,b_{p-1},\dots,b_1) \arrow[ul] \\
\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_n,b_{n-1}) \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_{p-1}) \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_2,b_1) \end{array} & \begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_n,b_{n-1}) \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ j'_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_2,b_1) \end{array} & \begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_n,b_{n-1}) \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_p) \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_{p-1}) \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_2,b_1) \end{array}
\end{tikzcd}$$

où l'on a:

- $n \geqslant p \geqslant 1$ et $(b_n,\dots,b_{p+1},b_p,b_{p-1},\dots,b_1)$ est une famille d'objets de $B'^{\bullet}$,
- $b_n = b'$ et $b_1 = b$,
- $j_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p)$: $\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) \times 1 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) \times \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_p)$ est l'application qui associe à $(z,0)$ l'élément (z,b_p),
- $j'_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) : \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) \times 1 \xrightarrow{j_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p)} \begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p) \\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_p) \end{array}$.

(Ceci signifie que l'on regarde un chemin propre $(z_{n-1},\dots,z_p,z_{p-1},\dots z_1)$ de $B^{\bullet}$ comme une classe d'équivalence, dans l'ensemble des chemins non nécessairement propres de $B^{\bullet}$, dont un représentant est un chemin, non propre, de la forme $(z_{n-1},\dots,z_p,\underline{\alpha}_{B^{\bullet}}(z_p),z_{p-1},\dots,z_1)$ où "p varie" .)

De même, pour tout couple (b',b) d'objets de $B''^{\bullet}$, l'ensemble $\mathrm{Hom}_{B''^{\bullet}}(b',b)$ est une limite inductive (dans $\mathcal{U}$) de la forme:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & \mathrm{Hom}_{B''^{\bullet}}(b',b) \\
 & & \mathrm{Hom}_{B'^{\bullet}}(b',b) \arrow[u] \\
\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_n,b_{n-1})\times\ldots\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p)\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_{p-1})\times\ldots\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_2,b_1) \arrow[urr, "{Q(b_n,\ldots,b_{p+1},b_p,b_{p-1},\ldots,b_1)}"] & & \\
 & & \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_n,b_{n-1})\times\ldots\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_{p-1})\times\ldots\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_2,b_1) \arrow[uu, "{Q(b_n,\ldots,b_{p+1},b_{p-1},\ldots,b_1)}"'] \\
\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_n,b_{n-1})\times\ldots\times(\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p)\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_{p-1}))\times\ldots\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_2,b_1) \arrow[uu, "{\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_n,b_{n-1})\times\ldots\times m_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p,b_{p-1})\times\ldots\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_2,b_1)}"] \arrow[urr, "{\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_n,b_{n-1})\times\ldots\times k_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p,b_{p-1})\times\ldots\times\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_2,b_1)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

où l'on a:

- $n>p>1$ et $(b_n,\ldots,b_{p+1},b_p,b_{p-1},\ldots,b_1)$ est une famille d'objets de $B^{\bullet}$,

- $b_n = b'$ et $b_1 = b$,

- $m_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p,b_{p-1})$: $\begin{matrix}\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p)\\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_{p-1})\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix}\mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_{p+1},b_p)\\ \times \\ \mathrm{Hom}_{B^{\bullet}}(b_p,b_{p-1})\end{matrix}$

est l'injection canonique, dans le produit des "Hom", de l'ensemble des couples composables (dans $B^\bullet$), relatifs à ces "Hom",

$$- k_{B^\bullet}(b_{p+1}, b_p, b_{p-1}) : \begin{matrix} \mathrm{Hom}_{B^\bullet}(b_{p+1}, b_p) \\ \ast \\ \mathrm{Hom}_{B^\bullet}(b_p, b) \end{matrix} \longrightarrow \mathrm{Hom}_{B^\bullet}(b_{p+1}, b_{p-1})$$

est la restriction de la composition de $B^\bullet$.

(Ceci décrit bien la relation d'équivalence r: on identifie, en effet, un chemin propre $(z_{n-1}, \ldots, z_p, z_{p-1}, \ldots, z_1)$ au chemin propre défini par le chemin $(z_{n-1}, \ldots, z_{p+1}, z_p . z_{p-1}, z_{p-2}, \ldots, z)$ lorsque $z_p . z_{p-1}$ est défini dans $B^\bullet$.)

Dans le cas général de l'enrichissement par une catégorie monoïdale $V^\wedge$, ce sont essentiellement ces deux types de limites inductives (dans $V^\bullet$) qui nous serviront à construire la $V^\wedge$-catégorie libre sur un $V^\wedge$-graphe orienté (voir III.3 ,où nous rappelons la construction de (C.O.C.A.)) et la $V^\wedge$-catégorie libre sur un $V^\wedge$-graphe multiplicatif (voir III.5).

III.3. Pour construire la $V^\wedge$-catégorie libre sur un $V^\wedge$-graphe multiplicatif, il est donc nécessaire (comme dans le cas ensembliste rappelé en III.2) de construire la $V^\wedge$-catégorie libre sur son $V^\wedge$-graphe orienté sous-jacent. Il nous suffit, pour ce faire, de savoir construire la $V^\wedge$-catégorie libre sur un $V^\wedge$-graphe orienté quelconque. Cette construction a été donnée par F. Foltz en (C.O.C.A.).
Nous la rappelons ici pour plus de clarté (et elle s'inspire du passage de $B^\bullet$ à $B'^\bullet$ rappelé en III.2).

Plus précisément, nous allons rappeler, très brièvement, la démonstration (constructive) du Théorème suivant:

<u>Théorème</u> (C.O.C.A.). <u>Si</u> $\mathcal{U}_0$ <u>est un univers</u>, <u>si</u> $V^\wedge = (V^\bullet, \boxtimes, i, \phi, \psi, \omega)$

<u>est une catégorie monoïdale, si</u> $\mathfrak{I}$ <u>est la catégorie pleine de foncteurs entre catégories relatives à</u> $\mathcal{U}_o$ <u>et si, de plus:</u>

- $V^{\cdot}$ <u>est une catégorie à</u> $\mathfrak{I}_o$<u>-limites inductives,</u>
- <u>pour tout objet</u> v <u>de</u> $V^{\cdot}$, <u>les foncteurs</u> $- \boxtimes v : V^{\cdot} \longrightarrow V^{\cdot}$ <u>et</u> $v \boxtimes - : V^{\cdot} \longrightarrow V^{\cdot}$ <u>sont compatibles avec les</u> $\mathfrak{I}_o$<u>-limites inductives de</u> $V^{\cdot}$,

<u>alors, le foncteur d'oubli composé</u> $P_{V^\wedge\text{-an}} . P_{V^\wedge\text{-nf}} : V^\wedge\text{-fonc} \longrightarrow V^\wedge\text{-apor}$ <u>admet un adjoint</u>.

Pour démontrer ce Théorème, nous effectuons tout d'abord un choix, dans $V^{\cdot}$, de $\mathfrak{I}_o$-limites inductives dont nous dirons qu'elles sont canoniques. Si $\vec{A}$ est un objet de $V^\wedge$-apor , la $V^\wedge$-catégorie $A'^\wedge$ libre (relativement au foncteur $P_{V^\wedge\text{-an}} . P_{V^\wedge\text{-nf}}$) sur $\vec{A}$ est construite comme suit:

- $A'^\wedge_o = \vec{A}_o$,
- à toute suite $s = (a_n, \dots, a_1)$ d'objets de $\vec{A}$,de longueur $n \geqslant 2$, nous associons l'objet $\boxtimes(s) = \boxtimes(a_n, \dots, a_1)$ de $V^{\cdot}$, défini par récurrence par:

  + si $n = 2$, alors $\boxtimes(a_2, a_1) = \underline{\vec{A}}(a_2, a_1)$,

  + si $n \geqslant 3$, alors $\boxtimes(a_n, \dots, a_1) = (\boxtimes(a_n, \dots, a_2)) \boxtimes (\boxtimes(a_2, a_1))$,

- pour tout couple (a', a) d'objets de $\vec{A}$, on désigne par $\Sigma^{\cdot}_{(a',a)}$ la catégorie définie comme suit:

  + ses objets sont les suites $(a_n, \dots, a_1) = s$ d'objets de $\vec{A}$,de longueur $n \geqslant 2$, et vérifiant $a_n = a'$ et $a_1 = a$ (on posera, dans la suite, $\text{long}(s) = n$ et $s_p = a_p$, pour tout $1 \leqslant p \leqslant \text{long}(s)$),

  + un système générateur de $\Sigma^{\cdot}_{(a',a)}$ est formé par l'ensemble des $((s';s), j) : s \longrightarrow s'$, où s' et s sont deux objets de $\Sigma^{\cdot}_{(a',a)}$, $\text{long}(s') = \text{long}(s)+1$, $1 \leqslant j \leqslant \text{long}(s)$, $s_p = s'_p$ dès que $1 \leqslant p \leqslant j$, $s_q = s'_{q+1}$, pour tout $j \leqslant q \leqslant n$,

- pour tout couple (a', a) d'objets de $\vec{A}$, on désigne par

$$L^{\bullet}_{(a',a)} \; : \; \Sigma^{\bullet}(a',a) \longrightarrow V^{\bullet}$$

le foncteur (qu'il suffit de définir sur le système générateur précédent) tel que, pour tout morphisme de $\Sigma^{\bullet}_{(a',a)}$ de la forme $((s';s),j)$ précédente, $L^{\bullet}_{(a',a)}((s';s),j)$ est le morphisme composé de $V^{\bullet}$ représenté par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\boxtimes(s) = \boxtimes(a_n,\dots,a_1) \arrow[d, "\wr"', "\text{associativité et unitarité dans } V^{\wedge}"] \arrow[ddd, bend left=90, "L^{\bullet}_{(a',a)}((s';s),j)"] \\
(\boxtimes(a_n,\dots,a_{j+1},a_j) \boxtimes i) \boxtimes (\boxtimes(a_j,a_{j-1},\dots,a_1)) \arrow[d, "(\boxtimes(a_n,\dots,a_{j+1},a_j) \boxtimes j_{\vec{A}}(a_j)) \boxtimes (\boxtimes(a_j,a_{j-1},\dots,a_1))"] \\
(\boxtimes(a_n,\dots,a_{j+1},a_j) \boxtimes \underline{\vec{A}}(a_j,a_j)) \boxtimes (\boxtimes(a_j,a_{j-1},\dots,a_1)) \arrow[d, "\wr"', "\text{associativité dans } V^{\wedge}"] \\
\boxtimes(a_n,\dots,a_{j+1},a_j,a_j,a_{j-1},\dots,a_1) = \boxtimes(s')
\end{tikzcd}$$

,

- pour tout couple (a',a) d'objets de $\vec{A}$, l'objet $\underline{A}'^{\wedge}(a',a)$ est la limite inductive canonique, dans $V^{\bullet}$, du foncteur $L^{\bullet}_{(a',a)}$ que l'on vient de définir (cette limite existe bien car, à une équipotence près, on vérifie immédiatement que $\Sigma^{\bullet}_{(a',a)} \in \mathcal{U}_o$,puisque $A_o \in \mathcal{U}_o$) et les co-projections sont représentées par le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{A}'^{\wedge}(a',a) & \\
\boxtimes(s) \arrow[ur, "\underline{Q}(s)"] \arrow[rr, "L^{\bullet}_{(a',a)}((s';s),j)"'] & & \boxtimes(s') \arrow[ul, "\underline{Q}(s')"']
\end{tikzcd}$$

(et ceci correspond bien à la construction ensembliste rappelée en III.2),

- pour tout objet a de $\vec{A}$, on désigne par $j_{A'^{\wedge}}(a)$ le morphisme composé dans $V^{\bullet}$:

$$j_{A'^{\wedge}}(a) : i \xrightarrow[j_{\vec{A}}(a)]{} \vec{\underline{A}}(a,a) \xrightarrow[\underline{Q}(s)]{} \underline{A}'^{\wedge}(a,a)$$

où $s = (a,a)$,

- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $\vec{A}$, si $s' = (a'_m,\dots,a'_1)$ est un objet de $\Sigma^{\bullet}_{(a'',a')}$ et si $s = (a_n,\dots,a_1)$ est un objet de $\Sigma^{\bullet}_{(a',a)}$, alors, on pose $s'!s = (a'_m,\dots,a'_2,a_n,\dots,a_1)$ (il s'agit donc d'un objet de $\Sigma^{\bullet}_{(a'',a)}$) et

$$\omega_!(s',s) : \underset{\displaystyle L^{\bullet}_{(a'',a')}(s') \boxtimes L^{\bullet}_{(a',a)}(s)}{\underset{\|}{(\boxtimes(s'))\boxtimes(\boxtimes(s))}} \xrightarrow{\sim} \underset{\displaystyle L^{\bullet}_{(a'',a)}(s'!s)}{\underset{\|}{\boxtimes(s'!s)}}$$

désigne l'isomorphisme d'associativité (de $\boxtimes$) dans V ,

- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $\vec{A}$, comme les foncteurs $-\boxtimes v$ et $v\boxtimes -$ sont, pour tout $v\in V^{\bullet}_{o}$, compatibles avec les $\mathfrak{J}_o$-limites inductives dans $V^{\bullet}$, on vérifie sans difficulté que le foncteur composé:

$$L^{\bullet}_{(a'',a')}\boxtimes L^{\bullet}_{(a',a)} : \Sigma^{\bullet}_{(a'',a')} \times \Sigma^{\bullet}_{(a',a)} \xrightarrow[L^{\bullet}_{(a'',a')} \times L^{\bullet}_{(a',a)}]{} V^{\bullet}\times V^{\bullet} \xrightarrow[\boxtimes]{} V^{\bullet}$$

admet pour limite inductive naturalisée (non nécessairement canonique), dans $V^{\bullet}$, le cône inductif représenté par le diagramme:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \underline{A}'^{\wedge}(a'',a') \boxtimes \underline{A}'^{\wedge}(a',a) & \\
\begin{array}{c} L^{\bullet}_{(a'',a')}(s') \\ \boxtimes \\ L^{\bullet}_{(a',a)}(s) \end{array} \arrow[ur, "\underline{Q}(s') \boxtimes \underline{Q}(s)"] \arrow[rr, "\begin{array}{c} L^{\bullet}_{(a'',a')}((s'_1;s'),j') \\ \boxtimes \\ L^{\bullet}_{(a',a)}((s_1;s),j) \end{array}"'] & & \begin{array}{c} L^{\bullet}_{(a'',a')}(s'_1) \\ \boxtimes \\ L^{\bullet}_{(a',a)}(s_1) \end{array} \arrow[ul, "\underline{Q}(s'_1) \boxtimes \underline{Q}(s_1)"']
\end{tikzcd}$$
,

- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $\vec{A}$, le lecteur vérifiera facilement que la famille

$$\left(\underline{Q}(s'!s) \cdot \omega_!(s',s) \right)_{(s',s) \in \Sigma^{\bullet}_{(a'',a')_o} \times \Sigma^{\bullet}_{(a',a)_o}}$$

définit une transformation naturelle

$$\underline{Q}(-!-) \cdot \omega_!(-,-) : L^{\bullet}_{(a'',a')} \boxtimes L^{\bullet}_{(a',a)} \Longrightarrow \mathrm{Const}(\underline{A}'^{\wedge}(a'',a))$$

(où $\mathrm{Const}(\underline{A}'^{\wedge}(a'',a))$ est le foncteur constant sur $\underline{A}'^{\wedge}(a'',a)$), on désigne alors par $k_{A'^{\wedge}}(a'',a',a)$ l'unique morphisme de $V^{\bullet}$ rendant commutatif, pour tout $(s',s) \in \Sigma^{\bullet}_{(a'',a')_o} \times \Sigma^{\bullet}_{(a',a)_o}$, le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}'^{\wedge}(a'',a') \boxtimes \underline{A}'^{\wedge}(a',a) \arrow[rr, "k_{A'^{\wedge}}(a'',a',a)"'] & & \underline{A}'^{\wedge}(a'',a) \\
 & & L^{\bullet}_{(a'',a)}(s'!s) \arrow[u, "\underline{Q}(s'!s)"'] \\
\begin{array}{c} L^{\bullet}_{(a'',a')}(s') \\ \boxtimes \\ L^{\bullet}_{(a',a)}(s) \end{array} \arrow[uu, "\underline{Q}(s') \boxtimes \underline{Q}(s)"] \arrow[urr, "\omega_!(s',s)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Avec cette construction, il est alors évident que $(A_o'^\wedge, \underline{A}'^\wedge, j_{A'^\wedge}, k_{A'^\wedge})$ est bien une $V^\wedge$-catégorie $A'^\wedge$.

Si $\vec{Q}: \vec{A} \longrightarrow \vec{A}'$ (où $\vec{A}'$ est le $V^\wedge$-graphe orienté sous-jacent à $A'^\wedge$) est la $V^\wedge$-application orientée définie par:

- $Q: \vec{A}_o \longrightarrow \vec{A}_o'$ (où, évidemment, $\vec{A}_o' = A_o'^\wedge$) est l'identité,
- pour tout couple (a',a) d'objets de $\vec{A}_o'$ $(= A_o'^\wedge = \vec{A}_o)$, on pose $\underline{Q}(a',a) = \underline{Q}(s)$ (où $s = (a',a)$ et $\underline{Q}(s)$ est la co-projection construite précédemment),

on vérifie facilement que le couple $(A'^\wedge, \vec{Q})$ est bien "universel sur $\vec{A}$ " (pour le foncteur d'oubli $P_{V^\wedge\text{-an}} . P_{V^\wedge\text{-nf}}$), i.e. que l'on a bien une structure libre sur $\vec{A}$.

Ceci achève la démonstration du Théorème énoncé au début de ce paragraphe (et qui est dûe à F. Foltz) ainsi que la première étape de la démonstration du Théorème énoncé en III.1 .

III.4. Avant d'aborder la seconde étape de la démonstration du Théorème énoncé en III.1 (qui consiste à construire explicitement la $V^\wedge$-catégorie libre sur un $V^\wedge$-graphe multiplicatif, en utilisant la $V^\wedge$-catégorie libre sur le $V^\wedge$-graphe orienté sous-jacent à ce $V^\wedge$-graphe multiplicatif, que nous savons construire d'après III.3), nous procédons ici à quelques constructions préliminaires qui nous seront fort utiles.

Il s'agit, essentiellement, de définir le diagramme sur lequel on prendra une limite inductive (dans $V^\bullet$) déterminant les "Hom à Valeurs dans $V^\wedge$ " de la $V^\wedge$-catégorie libre recherchée. Elles s'inspirent des remarques faites en III.2 dans le cas ensembliste.

Supposons que $A^\wedge$ est un $V^\wedge$-graphe multiplicatif, objet de $V^\wedge$-néof.

Pour tout couple (a',a) d'objets de $A^\wedge$, on désigne par $\Sigma'^\bullet_{(a',a)}$ la catégorie (triviale) définie comme suit:

- ses objets sont de deux sortes:

+ d'une part, ce sont des suites $s = (a_n, \dots, a_1)$ d'objets de $A^\wedge$, de longueur $\mathrm{long}(s) = n \geqslant 2$ et telles que $a_n = a'$ et $a_1 = a$ (on rappelle qu'alors $s_j = a_j$, pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$),

+ d'autre part, ce sont des $\sigma = ((a_n, \dots, a_1); p ; c)$ où $(s =)\ \sigma^- = (a_n, \dots, a_1)$ est un objet de la forme précédente, $1 \leqslant p \leqslant n-1$ et c est objet de $A^\wedge$ (on posera, éventuellement, $\sigma_j = \sigma^-_j = a_j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, $\mathrm{long}(\sigma^-) = \mathrm{long}(\sigma) = n$ et $\sigma^+ = (a_n, \dots, a_{p+1}, c, a_p, \dots, a_1)$),

- ses morphismes sont de deux sortes:

+ d'une part, ce sont les couples

$$(\sigma^-, \sigma): \quad \underset{((a_n,\dots,a_1);\, p\, ;\, c)}{\sigma} \longrightarrow \underset{(a_n,\dots,a_1)}{\sigma^-}\ ,$$

+ d'autre part, ce sont les couples

$$(\sigma^+, \sigma): \quad \underset{((a_n,\dots,a_1);\, p\, ;\, c)}{\sigma} \longrightarrow \underset{(a_n,\dots,a_{p+1},c,a_p,\dots,a_1)}{\sigma^+}\ ,$$

où σ est de la forme précédente,

- la composition est toute définie (i.e. $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ s'identifie à un graphe orienté, ou bien encore: il n'y a pas de morphismes consécutifs non triviaux à composer).

(On pourra remarquer que $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ est la catégorie subdivision d'une certaine catégorie que le lecteur reconstituera assez facilement.)

Pour mieux illustrer le rôle des objets (et des morphismes) de cette catégorie, nous allons construire un foncteur:

$$L'^{\bullet}_{(a',a)}: \quad \Sigma'^{\bullet}_{(a',a)} \longrightarrow V^{\bullet}$$

(qui montrera ce que le formalisme précédent représente).

Avec les hypothèses et les notations qui précèdent, nous définissons $L'^{\bullet}_{(a',a)}$ de la manière qui suit:

-- on rappelle (voir III.3) que, pour toute suite $s = (a_n,\dots,a_1)$ d'objets de $A^\wedge$, où $n \geqslant 2$, on définit le "produit tensoriel" $\boxtimes(s) = \boxtimes(a_n,\dots,a_1)$ par récurrence en posant:

+ si $n = 2$, $\boxtimes(s) = \boxtimes(a_2,a_1) = \underline{A}^\wedge(a_2,a_1)$,

+ si $n \geqslant 3$, $\boxtimes(s) = \boxtimes(a_n,\dots,a_1) = (\boxtimes(a_n,\dots,a_2))\boxtimes \underline{A}^\wedge(a_2,a_1)$

$= (\boxtimes(a_n,\dots,a_2))\boxtimes(\boxtimes(a_2,a_1))$,

- tout morphisme de la forme (σ^-, σ), où $\sigma = ((a_n,\dots,a_1); p ;c)$ et $1 < p < n-1$, a pour image, par ce foncteur, le morphisme composé de $V^\bullet$:

$$\begin{array}{l}
((\boxtimes(a_n,\dots,a_{p+1}))\boxtimes(\underline{A}^\wedge(a_{p+1},c)\ast\underline{A}^\wedge(c,a_p)))\boxtimes(\boxtimes(a_p,\dots,a_1))\\
\Big\downarrow\ ((\boxtimes(a_n,\dots,a_{p+1}))\boxtimes k_{A^\wedge}(a_{p+1},c,a_p))\boxtimes(\boxtimes(a_p,\dots,a_1))\\
((\boxtimes(a_n,\dots,a_{p+1}))\boxtimes\underline{A}^\wedge(a_{p+1},a_p))\boxtimes(\boxtimes(a_p,\dots,a_1))\\
\wr\Big\downarrow\ \text{associativité dans } V^\wedge\\
\boxtimes(a_n,\dots,a_1)
\end{array}$$

(on peut donc dire que le morphisme (σ^-, σ) "représente" un morphisme de composition de $A^\wedge$, relativement aux "chemins" reliant les objets a et a' de $A^\wedge$) ,

- tout morphisme de la forme (σ^-, σ), où $\sigma = ((a_n,\dots,a_1); 1 ;c)$ et $n > 2$, a pour image, par ce foncteur, le morphisme de $V^\bullet$:

$$\begin{tikzcd} (\boxtimes(a_n,\dots,a_2)) \boxtimes (\underline{A}^\wedge(a_2,c) \ast \underline{A}^\wedge(c,a_1)) \arrow[d, "(\boxtimes(a_n,\dots,a_2)) \boxtimes k_{A^\wedge}(a_2,c,a_1)"] \\ (\boxtimes(a_n,\dots,a_2)) \boxtimes \underline{A}^\wedge(a_2,a_1) = \boxtimes(a_n,\dots,a_1) \end{tikzcd}$$,

- **tout** morphisme de la forme (σ^-,σ), où $\sigma = ((a_2,a_1);\ 1\ ;c)$, a pour image, par ce foncteur, le morphisme

$k_{A^\wedge}(a_2,c,a_1)$: $\underline{A}^\wedge(a_2,c) \ast \underline{A}^\wedge(c,a_1) \longrightarrow \underline{A}^\wedge(a_2,a_1) = \boxtimes(a_2,a_1)$,

- tout morphisme de la forme (σ^-,σ), où $\sigma = ((a_n,\dots,a_1);\ n-1\ ;c)$ et $n \geqslant 3$, a pour image, par ce foncteur, le morphisme composé de $V^\bullet$:

$$\begin{tikzcd} (\underline{A}^\wedge(a_n,c) \ast \underline{A}^\wedge(c,a_{n-1})) \boxtimes (\boxtimes(a_{n-1},\dots,a_1)) \arrow[d, "k_{A^\wedge}(a_n,c,a_{n-1}) \boxtimes (\boxtimes(a_{n-1},\dots,a_1))"] \\ \underline{A}^\wedge(a_n,a_{n-1}) \boxtimes (\boxtimes(a_{n-1},\dots,a_1)) \arrow[d, "\text{associativité dans } V^\wedge", "\wr"'] \\ \boxtimes(a_n,\dots,a_1) \end{tikzcd}$$,

- tout morphisme de la forme (σ^+,σ), où $\sigma=((a_n,\dots,a_1);\ p\ ;c)$ et

$1 < p < n-1$, a pour image, par ce foncteur, le morphisme composé dans $V^{\bullet}$:

$$
\begin{array}{l}
\left(\left(\boxtimes (a_n,\ldots,a_{p+1}) \right) \boxtimes \left(\underline{A}^{\wedge}(a_{p+1},c) \ast \underline{A}^{\wedge}(c,a_p)\right) \right) \boxtimes \left(\boxtimes (a_p,\ldots,a_1) \right) \\
\Big\downarrow \ \left(\left(\boxtimes(a_n,\ldots,a_{p+1})\right) \boxtimes m_{A^{\wedge}}(a_{p+1},c,a_p) \right) \boxtimes \left(\boxtimes (a_p,\ldots,a_1) \right) \\
\left(\left(\boxtimes (a_n,\ldots,a_{p+1}) \right) \boxtimes \left(\underline{A}^{\wedge}(a_{p+1},c) \boxtimes \underline{A}^{\wedge}(c,a_p)\right) \right) \boxtimes \left(\boxtimes (a_p,\ldots,a_1) \right) \\
\wr\Big\downarrow \ \text{associativité dans } V^{\wedge} \\
\boxtimes (a_n,\ldots,a_{p+1},c,a_p,\ldots,a_1) \ ,
\end{array}
$$

- pour les morphismes de la forme (σ^{+}, σ), où $\sigma = ((a_n,\ldots,a_1);\ p\ ;c)$ vérifie l'une des conditions suivantes:

  + $p = 1$ et $n > 2$,
  + $p = 1$ et $n = 2$,
  + $p = n-1$ et $n \geqslant 3$,

on définit leurs images de manières analogues à celles qui ont été utilisées, dans les mêmes conditions, pour définir l'image de (σ^{-}, σ) (on peut donc dire, "intuitivement", que le morphisme (σ^{+}, σ) distingue, parmi tous les "chemins" reliant $a_1,\ldots,a_p,c,a_{p+1},\ldots,a_n$, ceux pour lesquels les "couples" extraits, reliant a_p,c,a_{p+1}, sont composables).

Pour mener à bien la construction que nous ferons en III.5 , il nous faudra prendre des limites inductives, non pas des foncteurs $L'^{\bullet}_{(a',a)}$, mais de "sur-foncteurs" qui les prolongent à des "sur-catégories" $\Sigma''^{\bullet}_{(a',a)}$ des $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ que nous allons définir maintenant (les sur-foncteurs en question ne pourront être définis qu'en III.5).

Si, donc, a' et a sont deux objets du $V^{\wedge}$-graphe multiplicatif $A^{\wedge}$, objet de $V^{\wedge}$-néof , nous désignons par $\Sigma''^{\bullet}_{(a',a)}$ la catégorie telle que:

- elle admet $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ pour sous-catégorie pleine,
- elle n'a qu'un seul objet, noté ? , qui ne soit pas objet de $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ (la signification de cet objet ? , "rajouté formellement", ne prendra tout son sens qu'en III.5),
- elle est librement engendrée par l'ensemble constitué:

  + des morphismes de $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$,

  + des $(?,s)\colon s \longrightarrow ?$, où $s = (a_n,\dots,a_1)$ est un objet de $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ de la première forme

(ceci signifie, en particulier, que ? <u>n'est pas</u> un objet final dans $\Sigma''^{\bullet}_{(a',a)}$ et que, quel que soit l'objet de $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ de la forme $\sigma = ((a_n,\dots,a_1);\ p\ ;c)$, le diagramme suivant, dans $\Sigma''^{\bullet}_{(a',a)}$:

$$\begin{tikzcd}
 & \sigma^- \arrow[dr, "{(?,\,\sigma^-)}"] & \\
\sigma \arrow[ur, "{(\sigma^-,\,\sigma)}"] \arrow[dr, "{(\sigma^+,\,\sigma)}"'] & & ? \\
 & \sigma^+ \arrow[ur, "{(?,\,\sigma^+)}"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>n'est pas</u> commutatif).

Enfin, on constate que, $A^{\wedge}_o$ étant élément de $\mathfrak{U}_o$, pour tout couple (a',a) d'objets de $A^{\wedge}$, la catégorie $\Sigma''^{\bullet}_{(a',a)}$ est élément de $\mathfrak{J}_o$.

Ceci achève les constructions préliminaires dont nous aurons besoin en III.5 .

III.5. Nous reprenons toutes les hypothèses et notations du Théorème de III.1, ainsi que celles des constructions de III.3 et III.4, pour achever la démonstration de ce Théorème, dont la première étape a été exposée en III.3 .

Nous supposons donc que $A^\wedge$ est un $V^\wedge$-graphe multiplicatif, objet de $V^\wedge$-néof , et nous désignons par $A'^\wedge$ la $V^\wedge$-catégorie libre (relativement au foncteur d'oubli composé $P_{V^\wedge\text{-an}}.P_{V^\wedge\text{-nf}}$) sur le $V^\wedge$-graphe orienté $\vec{A}$ (sous-jacent à $A^\wedge$) que nous avons construite en III.3 .

Nous définissons la $V^\wedge$-catégorie $A''^\wedge$, objet de $V^\wedge$-fonc , de la manière suivante:

- $A''^\wedge_o = A^\wedge_o$ ($= A'^\wedge_o$),
- pour tout couple (a',a) d'objets de $A^\wedge$, le foncteur (annoncé en III.4)

$$L''^{\bullet}_{(a',a)}\colon\ \Sigma''^{\bullet}_{(a',a)} \longrightarrow V^{\bullet}$$

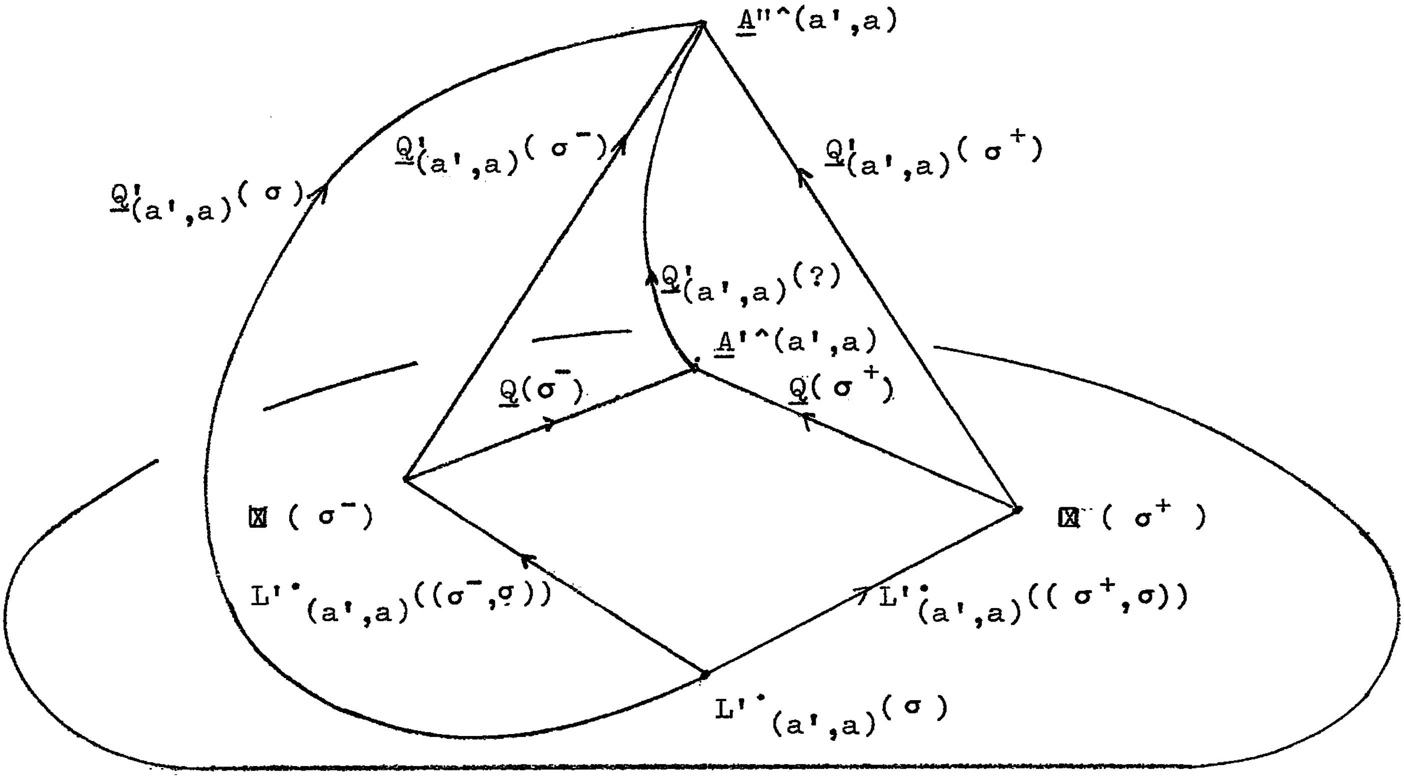
est le prolongement de

$$L'^{\bullet}_{(a',a)}\colon\ \Sigma'^{\bullet}_{(a',a)} \longrightarrow V^{\bullet} \quad \text{(voir III.4)}$$

tel que, pour toute suite $s = (a_n,\dots,a_1)$, objet de $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ (i.e. vérifiant: $n \geqslant 2$, $a' = a_n$ et $a = a_1$), on ait:

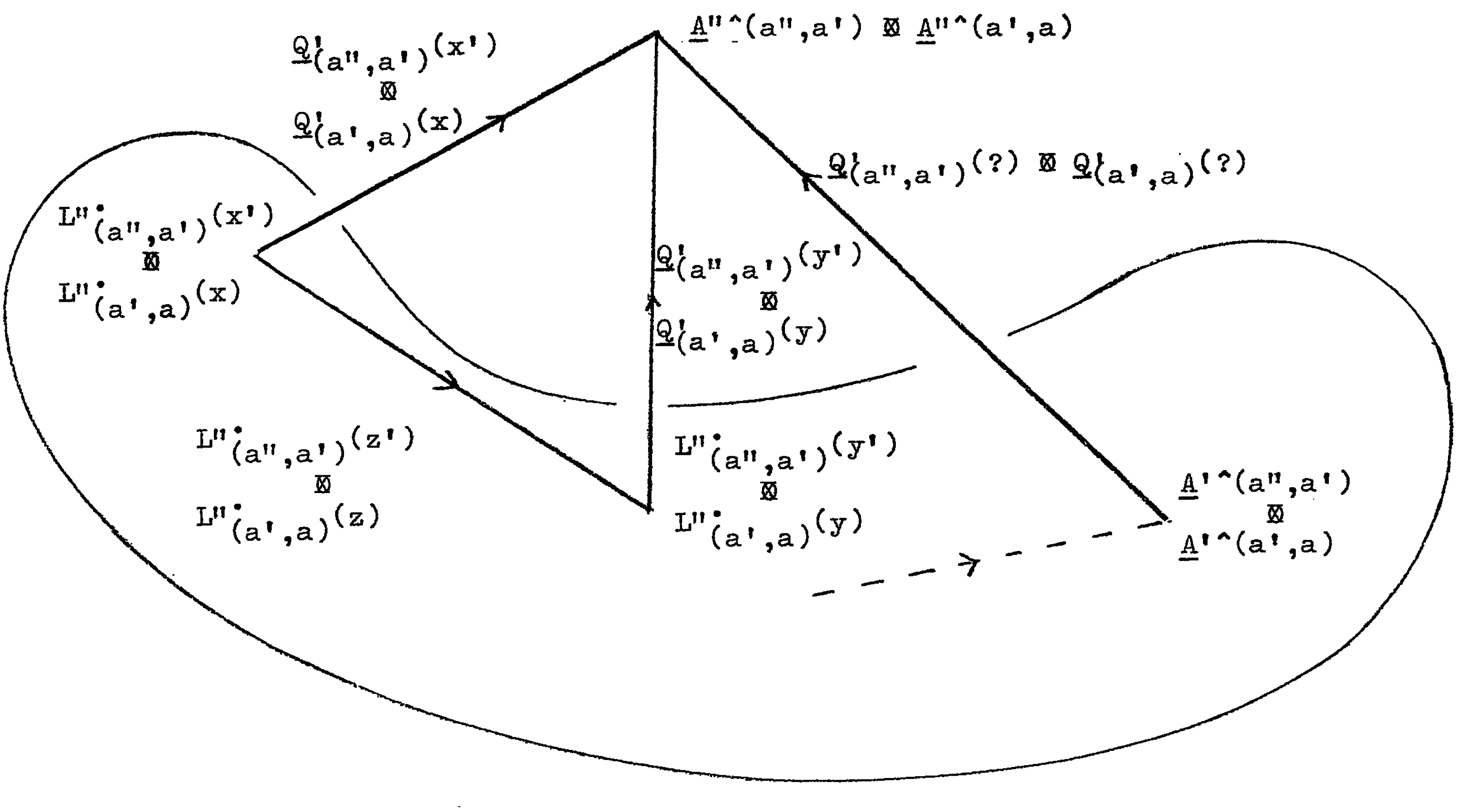
$$L''^{\bullet}_{(a',a)}((?,s)) = \underline{Q}(s)$$

(on rappelle que l'objet $\underline{A}'^\wedge(a',a)$, construit en III.3, est la limite inductive canonique dans $V^{\bullet}$ d'un diagramme dont les objets sont les $\boxtimes(s)$ et que $\underline{Q}(s)\colon \boxtimes(s) \longrightarrow \underline{A}'^\wedge(a',a)$ est la co-projection),
- pour tout couple (a',a) d'objets de $A^\wedge$, l'objet $\underline{A}''^\wedge(a',a)$ est la limite inductive canonique, dans $V^{\bullet}$, du foncteur $L''^{\bullet}_{(a',a)}$, représentée par le diagramme ci-dessous (qui reprend bien la construction ensembliste rappelée en III.2):



(où, avec les notations de III.4 , $\sigma=((a_n,\dots,a_1);\ p\ ;c)$ est un objet de $\Sigma'^{\bullet}_{(a',a)}$ de la seconde forme),

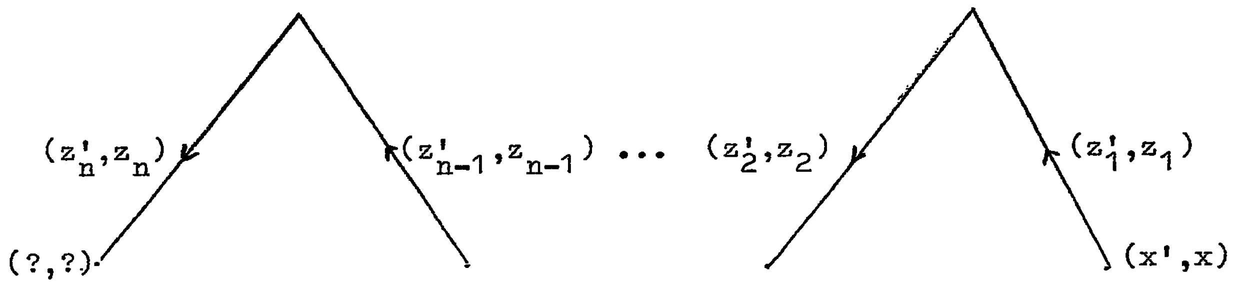
- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $A^{\wedge}$, comme $-\boxtimes v$ et $v\boxtimes -$ sont, pour tout objet v de $V^{\bullet}$, des foncteurs compatibles avec les $\mathfrak{J}_o$-limites inductives, il est clair que le cône inductif



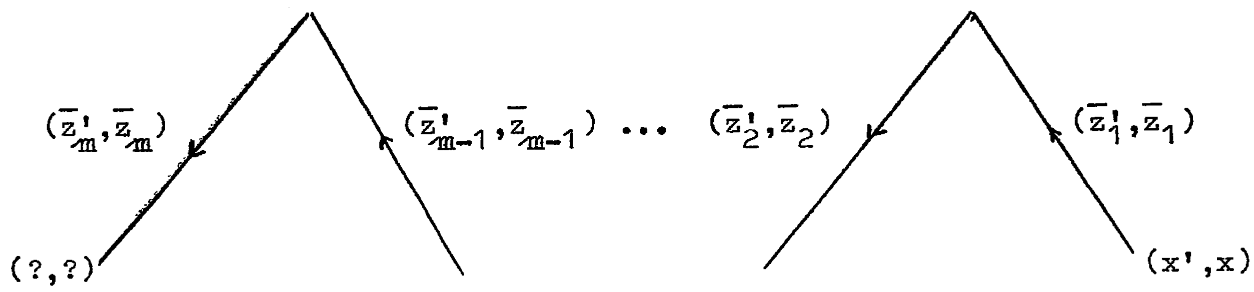
(où $z : x \longrightarrow y$ est un morphisme quelconque de $\Sigma''^{\bullet}_{(a',a)}$ et $z' : x' \longrightarrow y'$ est un morphisme quelconque de $\Sigma''^{\bullet}_{(a'',a')}$), est une limite inductive naturalisée dans $V^{\bullet}$ du foncteur composé:

$$L''^{\bullet}_{(a'',a')} \otimes L''^{\bullet}_{(a',a)} : \Sigma''^{\bullet}_{(a'',a')} \times \Sigma''^{\bullet}_{(a',a)} \xrightarrow[\substack{L''^{\bullet}_{(a'',a')} \\ \times \\ L''^{\bullet}_{(a',a)}}]{} V^{\bullet} \times V^{\bullet} \xrightarrow[\otimes]{} V^{\bullet} ,$$

- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $A^{\wedge}$, le lecteur vérifiera que, quels que soient les chemins:



et



,

"reliant" dans $\Sigma''^{\bullet}_{(a'',a')} \times \Sigma''^{\bullet}_{(a',a)}$ l'objet quelconque (x',x) à l'objet privilégié $(?,?)$ (on remarquera que les longueurs de ces chemins, notées ici n et m pour plus de commodité d'exposition, ne peuvent alors excéder 2 ... ce qui signifie bien que la vérification laissée au lecteur est facile), les deux morphismes composés dans $V^{\bullet}$ ci-dessous:

$$
\begin{tikzcd}
L''^{\bullet}_{(a'',a')}(x')\boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)}(x) \arrow[d, "\begin{array}{c} L''^{\bullet}_{(a'',a')}(z'_n)\boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)}(z_n) \\ \vdots \\ L''^{\bullet}_{(a'',a')}(z'_1)\boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)}(z_1) \end{array}"] \\
\underline{A}'^{\wedge}(a'',a')\boxtimes\underline{A}'^{\wedge}(a',a) \arrow[d, "k_{A'^{\wedge}}(a'',a',a)"] \\
\underline{A}'^{\wedge}(a'',a) \arrow[d, "\underline{Q}'_{(a'',a)}(?)"] \\
\underline{A}''^{\wedge}(a'',a)
\end{tikzcd}
\qquad \text{et} \qquad
\begin{tikzcd}
L''^{\bullet}_{(a'',a')}(x')\boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)}(x) \arrow[d, "\begin{array}{c} L''^{\bullet}_{(a'',a')}(\bar{z}'_m)\boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)}(\bar{z}_m) \\ \vdots \\ L''^{\bullet}_{(a'',a')}(\bar{z}'_1)\boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)}(\bar{z}_1) \end{array}"] \\
\underline{A}'^{\wedge}(a'',a')\boxtimes\underline{A}'^{\wedge}(a',a) \arrow[d, "k_{A'^{\wedge}}(a'',a',a)"] \\
\underline{A}'^{\wedge}(a'',a) \arrow[d, "\underline{Q}'_{(a'',a)}(?)"] \\
\underline{A}''^{\wedge}(a'',a)
\end{tikzcd}
$$

sont égaux à un même morphisme de $V^{\bullet}$ que nous notons

$$k_{(a'',a',a)}(x',x):\ L''^{\bullet}_{(a'',a')}(x')\boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)}(x) \longrightarrow \underline{A}''^{\wedge}(a'',a),$$

- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $A^{\wedge}$, il est donc clair que la famille $\left(k_{(a'',a',a)}(x',x)\right)_{(x',x)\in \Sigma''^{\bullet}_{(a'',a')_o}\times\Sigma''^{\bullet}_{(a',a)_o}}$

définit une transformation naturelle:

$$k_{(a'',a',a)}(-,-):\ L''^{\bullet}_{(a'',a')}\boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)} \Longrightarrow \mathrm{Const}(\underline{A}''^{\wedge}(a'',a))$$

(où $\mathrm{Const}(\underline{A}''^{\wedge}(a'',a))$ est le foncteur constant sur $\underline{A}''^{\wedge}(a'',a)$), alors $k_{A''^\wedge}(a'',a',a)$ est l'unique morphisme de $V^\bullet$ qui rend commutatif, pour tout objet (x',x) de $\Sigma''^{\bullet}_{(a'',a')} \times \Sigma''^{\bullet}_{(a',a)}$, le diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\underline{A}''^\wedge(a'',a') \boxtimes \underline{A}''^\wedge(a',a) \arrow[rr, "k_{A''^\wedge}(a'',a',a)"'] & & \underline{A}''^\wedge(a'',a) \\
& L''^{\bullet}_{(a'',a')}(x') \boxtimes L''^{\bullet}_{(a',a)}(x) \arrow[ul, "\underline{Q}^!_{(a'',a')}(x') \boxtimes \underline{Q}^!_{(a',a)}(x)"] \arrow[ur, "k_{(a'',a',a)}(x',x)"'] &
\end{tikzcd}$$

,

- pour tout objet a de $A^\wedge$, nous désignons , enfin, par $j_{A''^\wedge}(a)$ le morphisme composé de $V^\bullet$:

$$j_{A''^\wedge}(a) : i \xrightarrow[j_{A'^\wedge}(a)]{} \underline{A}'^\wedge(a,a) \xrightarrow[\underline{Q}^!_{(a,a)}(?)]{} \underline{A}''^\wedge(a,a)$$

(et on vérifie bien, dans ces conditions, que $(A''^\wedge_o, \underline{A}''^\wedge, j_{A''^\wedge}, k_{A''^\wedge})$ est une $V^\wedge$-catégorie, objet de $V^\wedge$-fonc).

Si, de plus, $Q'^\wedge : A^\wedge \longrightarrow A''^\wedge$ est le $V^\wedge$-néofoncteur défini par:

- $Q' : A^\wedge_o \longrightarrow A''^\wedge_o$ est l'identité,
- pour tout couple (a',a) d'objets de $A^\wedge$, le morphisme $\underline{Q}'^\wedge(a',a)$ est le composé suivant de $V^\bullet$ (qui est aussi égal à $\underline{Q}'_{(a',a)}((a',a))$):

$$\underline{Q}'^\wedge(a',a) : \underline{A}^\wedge(a',a) \xrightarrow[\underline{Q}((a',a))]{} \underline{A}'^\wedge(a',a) \xrightarrow[\underline{Q}^!_{(a',a)}(?)]{} \underline{A}''^\wedge(a',a) ,$$

- pour tout triplet (a'',a',a) d'objets de $A^\wedge$, le morphisme $M_{Q'^\wedge}(a'',a',a)$

est le composé suivant de $V^{\wedge}$:

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^{\wedge}(a'',a') \mathbin{\overline{\underline{\times}}} \underline{A}^{\wedge}(a',a) \arrow[d, "m_{\underline{A}^{\wedge}}(a'',a',a)"] \arrow[dd, bend left=90, "M_{Q'^{\wedge}}(a'',a',a)"] \\
\underline{A}^{\wedge}(a'',a') \boxtimes \underline{A}^{\wedge}(a',a) \arrow[d, "\underline{Q}'_{(a'',a')}((a'',a')) \boxtimes \underline{Q}'_{(a',a)}((a',a))"] \\
\underline{A}''^{\wedge}(a'',a') \boxtimes \underline{A}''^{\wedge}(a',a)
\end{tikzcd}$$

(et l'on vérifie bien que ceci définit un $V^{\wedge}$-néofoncteur), alors, on établit facilement (en utilisant les diverses constructions universelles précédentes) que le couple $(A''^{\wedge},Q'^{\wedge})$ est "universel" sur $A^{\wedge}$ (relativement au foncteur d'oubli $P_{V^{\wedge}-nf}$), i.e. que $A''^{\wedge}$ est bien une $V^{\wedge}$-catégorie libre sur le $V^{\wedge}$-graphe multiplicatif $A^{\wedge}$ (relativement à $P_{V^{\wedge}-nf}$).

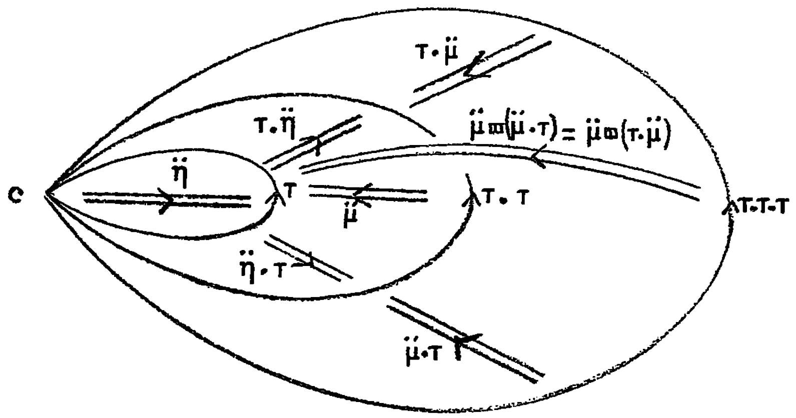
Le Théorème d'adjonction énoncé en III.1 est donc démontré.

III.6. Le Théorème d'adjonction de III.1 s'applique, évidemment, dans toutes les situations usuelles.

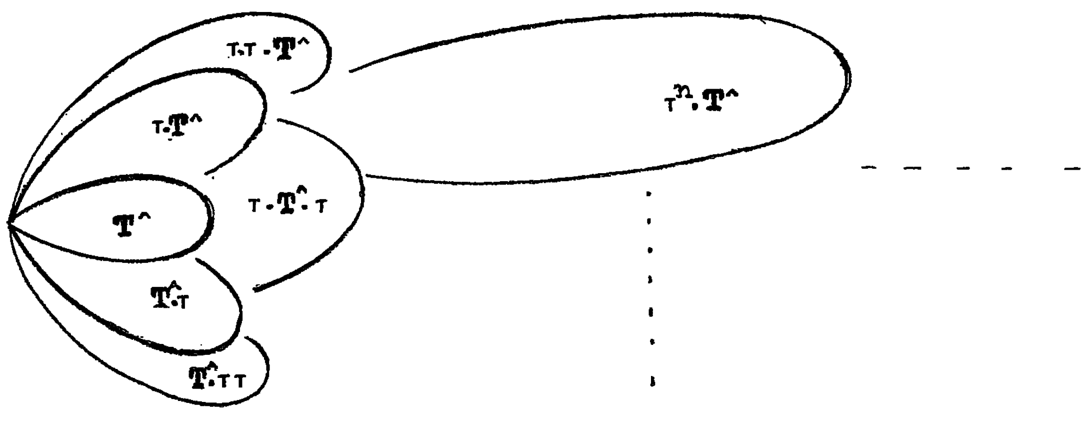
Nous pouvons signaler, à titre d'exemples, trois cas particuliers.

a). Si $V^{\wedge} = \mathfrak{U}^{\wedge}$ (où $\mathfrak{U}^{\wedge}$ est la catégorie pleine d'applications entre éléments de $\mathcal{U}_o$), alors le Théorème d'adjonction signifie qu'à tout graphe multiplicatif, relatif à $\mathcal{U}_o$, on peut associer une catégorie, relative à $\mathcal{U}_o$, libre sur ce graphe multiplicatif ... ce qui est bien connu et à l'origine du Théorème et de sa démonstration, comme nous l'avons indiqué en III.2 .

b). Si $V^\wedge = \mathcal{N}'^\wedge$ (où $\mathcal{N}'$ est la catégorie pleine de néofoncteurs relatifs à $\mathcal{U}_o$), alors tout $\mathcal{N}'^\wedge$-graphe multiplicatif (qu'on peut encore appeler, par analogie, un 2-graphe multiplicatif), objet de $\mathcal{N}'^\wedge$-néof , engendre une $\mathcal{N}'^\wedge$-catégorie libre.
Ainsi, le $\mathcal{N}'^\wedge$-graphe multiplicatif $\mathbf{T}^\wedge$ (construit en I.4) que l'on peut, sommairement, représenter par un diagramme de la forme:



(se reporter à I.4 pour plus de précisions), engendre une $\mathcal{N}'^\wedge$-catégorie libre $\mathbf{T}''^\wedge$, représentée, sommairement, ci-dessous:



,

où, pour tout $n \geqslant 1$, l'application qui, à tout élément z du graphe multiplicatif $\mathbb{T}^\wedge(c,c)$, associe "formellement" $\tau^n.z$ (resp. $z.\tau^n$; $\tau^{n-p}.z.\tau^p$, si $n > p \geqslant 1$), définit un isomorphisme du graphe multiplicatif $\mathbb{T}^\wedge(c,c)$ sur un sous-graphe multiplicatif $\tau^n.\mathbb{T}^\wedge(c,c)$ (resp. $\mathbb{T}^\wedge(c,c).\tau^n$; $\tau^{n-p}.\mathbb{T}^\wedge(c,c).\tau^p$) de $\mathbb{T}'^\wedge(c,c)$.

Ceci permet de remarquer que $\mathbb{T}'^\wedge$ <u>n'est pas</u> une 2-catégorie (en particulier parce que $\mathbb{T}^\wedge(c,c)$ n'est pas une catégorie).

Pour obtenir la description usuelle de la "structure de triple dans une 2-catégorie" par une 2-catégorie (voir, par exemple, (C.D.S.T.) et (A.M.C.A.)), il est nécessaire de prendre la 2-catégorie (i.e. la $\mathfrak{F}^\wedge$-catégorie) libre sur la $\mathcal{N}'^\wedge$-catégorie $\mathbb{T}'^\wedge$ (qui est, elle-même, libre sur le $\mathcal{N}'^\wedge$-graphe multiplicatif $\mathbb{T}^\wedge$). C'est donc qu'il faut pouvoir justifier d'un "Théorème d'adjonction pour les changements d'enrichissement" : c'est l'objet du Chapitre IV .

On y justifiera donc parfaitement l'idée commune à (C.D.S.T.) et (A.M.C.A.) où il est suggéré que cette 2-catégorie (qui décrit les triples avec des axiomes et des relations en nombre largement surabondant) est "engendrée" par un système générateur (dans un sens peu précisé) ... qui n'est rien d'autre que le $\mathbb{T}^\wedge$ que nous avons introduit (et qui, lui, ne décrit que les seuls axiomes et relations nécessaires à la définition d'un triple).

c). Si $V^\wedge = \mathfrak{F}^\wedge$ (où $\mathfrak{F}$ est la catégorie pleine de foncteurs relatifs à l'univers $\mathcal{U}_o$), tout $\mathfrak{F}^\wedge$-graphe multiplicatif engendre une $\mathfrak{F}^\wedge$-catégorie (i.e. une 2-catégorie) libre.

Supposons, en particulier, que $C^\bullet$ est une catégorie relative à $\mathcal{U}_o$ et munie d'un choix de produits fibrés (pour ceux qui existent) qui permette de construire le $\mathfrak{F}^\wedge$-graphe multiplicatif $S(C^\bullet)^\wedge$ de ses spans, voir I.5 .

En général, la 2-catégorie $S(C^{\bullet})''^{\wedge}$ libre sur $S(C^{\bullet})^{\wedge}$ n'est pas une " 2-catégorie de spans".Cependant, elle pourrait être interprétée comme représentant une "complétion associative" du choix de produits fibrés donné, au départ, sur $C^{\bullet}$.

o

o o

BIBLIOGRAPHIE.

(A.D.E.C.) G. M. Kelly, Adjunction for enriched categories, Lect. Notes in Math. 106, Springer, 1969.

(A.M.C.A.) C. Auderset, Adjonctions et monades au niveau des 2-catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XV,1, Paris 1974.

(C.D.S.T.) E. Burroni, Catégories discrètement structurées et triples, Esquisses mathématiques 4, Paris 1970.

(C.L.C.A.) S. Eilenberg et G. M. Kelly, Closed categories, Proc. of the Conf. on Categorical Algebra, La Jolla 1965, Springer, New-York 1966.

(C.O.C.A.) F. Foltz, Complétion des V-catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol XIV,1, Paris 1973.

(C.O.S.L.) C. Ehresmann, Construction de structures libres, Lect. Notes in Math. 92, Springer, 1969.

(D.L.A.W.) J. Beck, Distributive laws, Lect. Notes in Math. 80, Springer, 1969.

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses mathématiques 23, Paris 1975.

(E.N.F.C.) B. J. Day et G. M. Kelly, Enriched functor categories, Lect. Notes in Math. 106, Springer, 1969.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Inst. Polit. Iaşi, XIV, 1968.

(I.N.B.I.) J. Bénabou, Introduction to bi-categories, Lect. Notes in Math. 47, Springer, 1967.

(M.M.A.G.) C. Ehresmann, Maîtrise de mathématiques: Algèbre et Géométrie (1ère partie: Algèbre), C.D.U., Paris 1968.

(T.E.N.S.) A. Bastiani, Théorie des ensembles, C.D.U., Paris 1970.

o

o o