DIAGRAMMES

C. LAIR

**Systèmes tensoriels et systèmes enrichis**

*Diagrammes*, tome 43-44 (2000), p. 3-48
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_2000__43-44__3_0>

# SYSTEMES TENSORIELS ET SYSTEMES ENRICHIS

**C. Lair**

## 1. Introduction.

Un *$\mathcal{J}$-système tensoriel* est constitué d'une famille $(\mathcal{V}_j)_{j \in \mathrm{Fl}(\mathcal{J})}$ de catégories, indexées par les flèches d'une catégorie *guide* $\mathcal{J}$, et d'une famille de *produits tensoriels*, i.e. de foncteurs :

$$( - \otimes_{j,j'} - : \mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_{j'} \to \mathcal{V}_{j'.j} )_{(j,j') \in \mathrm{Cons}(\mathcal{J})} ,$$

indexés par les couples $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$.

Evidemment, si $\mathcal{J} = \mathit{1}$, ces systèmes tensoriels [de catégorie guide "triviale"] s'identifient aux *catégories avec mutiplication* de (C.A.M.U.) ou, plus classiquement encore, aux catégories monoïdales, dès lors qu'on dispose de propriétés d'associativité et unitarité à isomorphismes cohérents près.

Mais, même pour de nombreuses catégories guides $\mathcal{J}$ non triviales, il y a de multiples exemples "naturels" de tels systèmes tensoriels.

Ainsi, pour n'en citer qu'un [en laissant au lecteur le soin d'en expliciter d'autres, issus de produits tensoriels tout aussi "classiques"], faisant référence à des produits tensoriels "usuels" mais entre objets de catégories *disctinctes*, si $\mathcal{J}$ est la catégorie dont les objets sont les anneaux unitaires et dont les flèches sont les couples $(J, J')$ de tels anneaux, la famille $((J,J')\text{-}\mathcal{B}im)_{(J,J')\in \mathrm{Fl}(\mathcal{J})}$ des catégories de bimodules est canoniquement munie d'une structure de $\mathcal{J}$-système tensoriel [puisque - classiquement - le produit tensoriel usuel d'un $(J,J')$-bimodule avec un $(J',J")$-bimodule est évidemment un $(J,J")$-bimodule].

Si $\mathcal{V}=(\mathcal{V}_j)_{j\in \mathrm{Fl}(\mathcal{J})}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel associatif et unitaire à isomorphismes cohérents près, un *$\mathcal{J}$-système enrichi par $\mathcal{V}$* est constitué [notamment] par une famille $(\mathbf{A}_J)_{J\in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})}$ d'ensembles [des *objets* du système], de *Hom internes aux diverses $\mathcal{V}_j$*, i.e. d'une famille d'applications :

$$(\mathbf{A}_{j(-,-)} : \mathbf{A}_{\mathrm{dom}(j)} \times \mathbf{A}_{\mathrm{codom}(j)} \to \mathcal{V}_j)_{j\in \mathrm{Fl}(\mathcal{J})}$$

ainsi que de *flèches de composition et d'unitarié.*

Evidemment, si $\mathcal{J}=\mathit{1}$, ces systèmes enrichis s'identifient aux catégories enrichies classsiques [de (C.L.C.A.) par exemple].

Mais, de nouveau, même pour de nombreuses catégories guides $\mathcal{J}$ non triviales, il y a de multiples exemples "naturels" de tels systèmes enrichis.

Comme plus haut, pour n'en citer qu'un [en laissant au lecteur le soin d'en expliciter d'autres] faisant référence à des Hom internes "usuels" mais entre objets de catégories *disctinctes*, désignons par $\mathcal{J}$ la catégorie des anneaux commutatifs unitaires puis, pour tout homomorphsime $j:J\to J'$ entre de tels anneaux, par $\mathcal{V}_j$ la catégorie des $J'$-modules et enfin, pour tout tel anneau $J$, par $\mathbf{A}_J$ l'ensemble des $J$-modules.

Les homomorphismes $j:J\to J'$ et $j':J'\to J"$ étant donnés, un $J'$-module $V'$ s'identifie évidemment à un $(J,J')$-bimodule et, de même, un $J"$-module $V"$ s'identifie évidemment à un $(J',J")$-bimodule, dès lors le $(J,J")$-bimodule $V'\otimes V"$ est évidemment entièrement déterminé par son $J"$-module sous-jacent. La famille $\mathcal{V}=(\mathcal{V}_j)_{j\in\mathcal{J}}$ s'organise donc naturellement en un $\mathcal{J}$-sytème tensoriel.

Maintenant, si $j:J\to J'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, si $A$ est un $J$-module et si $A'$ est un $J'$-module, désignons par $\underline{\mathbf{A}}_j(A,A')$ l'ensemble des applications $J$-linéaires de $A$ vers $A'$ : il est clairement muni d'une structure de $J'$-module $\mathbf{A}_j(A,A')$. La famille $(\mathbf{A}_J)_{J\in \mathrm{Ob}(\mathcal{J})}$ s'organise donc naturellement en un $\mathcal{J}$-système enrichi par $\mathcal{V}$.

En rappelant, au §2 du présent texte, quelques éléments de la théorie des systèmes tensoriels, déjà bien développée en (P.T.E.A.) [où on trouvera de nombreux exemples, une étude systématique des conditions d'existence et des procédures de classification des systèmes tensoriels en lesquels peuvent, éventuellement, s'organiser des familles de catégories "essentiellement algébriques", ainsi qu'une comparaison entre les notions de systèmes tensoriels et de bicatégories -

présentée en (I.N.B.I.)] et en introduisant, au §3 de ce travail, quelques éléments de la théorie des systèmes enrichis, nous n'avons pas cherché à développer un exposé particulièrment exhaustif.

Notre but est de fournir un cadre précis [et actualisé] qui justifie les considérations que nous avons en vue [voir (S.T.G.C.) et (S.E.E.S.)] concernant le système tensoriel des graphes à composition *et* catégories puis les systèmes enrichis [par le système tensoriel précédent] des graphes à composition *et* catégories d'une part, des esquisses *et* prototypes d'autre part.

C'est que *plusieurs* types de produits tensoriels de graphes à composition et catégories "entre eux" méritent non seulement d'être étudiés *isolément* [ce qui est assez bien connu déjà, au moins dans le cas des catégories], mais doivent l'être *simultanément* : en les organisant *tous* dans un *même* système tensoriel.

De même, *plusieurs* types de "2-flèches" entre foncteurs [resp. homomorphismes] reliant des graphes à composition [resp des esquisses] et/ou des catégories [resp. des prototypes] et *plusieurs* types de composition [en "parallèle", en "série" ... ] des 1-flèches et 2-flèches "entre elles" méritent non seulement d'être étudiés séparément [ce qui assez bien connu aussi, au moins dans le cas des catégories], mais doivent l'être *simultanément* : en les organisant *tous* dans un *même* système enrichi.

Ce travail résulte d'une collaboration avec D. Duval : on pourra en trouver une version initiale intégrée à (C.O.G.R.).

# 2. Systèmes tensoriels, morphismes de systèmes tensoriels et sytèmes tensoriels déduits.

## 2.1. Systèmes tensoriels.

**2.1.a.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, un *$\mathcal{J}$-système tensoriel* $\mathcal{V}$ est constitué par :

- la donnée, pour toute flèche $j$ de $\mathcal{J}$, d'une catégorie *composante de* $\mathcal{V}$ *en* $j$ :

$$\mathtt{Cpste}(\mathcal{V},j)$$

[alors, on note plus simplement :

$$\mathcal{V}_j = \mathtt{Cpste}(\mathcal{V},j) \quad ],$$

- la donnée, pour tout couple $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, d'un *foncteur de tensorisation en* $(j, j')$ :

$$\mathtt{Tens}(\mathcal{V},(j,j')) : \mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_{j'} \to \mathcal{V}_{j'.j}$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$- \otimes_{j,j'} - = \mathtt{Tens}(\mathcal{V},(j,j')) : \mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_{j'} \to \mathcal{V}_{j'.j},$$

ou même, bien souvent, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

$$- \otimes_{..} - = - \otimes_{j,j'} - : \mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_{j'} \to \mathcal{V}_{j'.j},$$

autrement dit, on écrit aussi :

- pour tout point $V$ [1] de $\boldsymbol{V}_j$ et pour tout point $V'$ de $\boldsymbol{V}_{j'}$ :

$$V \otimes_{..} V'$$
$$=$$
$$V \otimes_{j,j'} V'$$
$$=$$
$$(- \otimes_{..} -)(V, V')$$
$$=$$
$$(- \otimes_{j,j'} -)(V, V')$$
$$=$$
$$\mathtt{Tens}(\boldsymbol{V},(j,j'))(V, V'),$$

- pour toute flèche $v$ de $\boldsymbol{V}_j$ et pour toute flèche $v'$ de $\boldsymbol{V}_{j'}$ :

$$v \otimes_{.} v'$$
$$=$$
$$v \otimes_{j,j'} v'$$
$$=$$
$$(- \otimes_{..} -)(v, v')$$
$$=$$
$$(- \otimes_{j,j'} -)(v, v')$$
$$=$$
$$\mathtt{Tens}(\boldsymbol{V},(j,j'))(v, v') \quad ].$$

---

[1] Pour toute catégorie $\mathcal{J}$, on note indifféremment $\mathtt{Pt}(\mathcal{J}) = \mathtt{Ob}(\mathcal{J})$ l'ensemble de ses *objets*, qu'on préfère appeler ses *points*.

**2.1.b.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel et si $(j : J \to J', j' : J' \to J'', j'' : J'' \to J''')$ est un triplet de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, on désigne par :

$$\texttt{TensIterG}\big(\mathcal{V}, ((j, j'), j'')\big) : (\mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_{j'}) \times \mathcal{V}_{j''} \to \mathcal{V}_{j''.j'.j}$$

le *foncteur de tensorisation itérée à gauche [à trois variables]* déduit des foncteurs de tensorisation précédents, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $V$ de $\mathcal{V}_j$, pour tout point $V'$ de $\mathcal{V}_{j'}$ et pour tout point $V''$ de $\mathcal{V}_{j''}$, on a :

$$\texttt{TensIterG}\big(\mathcal{V}, ((j, j'), j'')\big)\big((V, V'), V''\big)$$
$$=$$
$$(V \otimes_{j,j'} V') \otimes_{j'.j,j''} V'',$$

- pour toute flèche $v : V_1 \to V_2$ de $\mathcal{V}_j$, pour toute flèche $v' : V'_1 \to V'_2$ de $\mathcal{V}_{j'}$ et pour toute flèche $v'' : V''_1 \to V''_2$ de $\mathcal{V}_{j''}$, on a :

$$\texttt{TensIterG}\big(\mathcal{V}, ((j, j'), j'')\big)\big((v, v'), v''\big)$$
$$=$$
$$(v \otimes_{j,j'} v') \otimes_{j'.j,j''} v'',$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\big((- \otimes_{j,j'} -) \otimes_{j'.j,j''} -\big)$$
$$=$$
$$\texttt{TensIterG}\big(\mathcal{V}, ((j, j'), j'')\big) : (\mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_{j'}) \times \mathcal{V}_{j''} \to \mathcal{V}_{j''.j'.j},$$

ou même, bien souvent, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

$$\big((- \otimes_{...} -) \otimes_{..} -\big) = \big((- \otimes_{j,j'} -) \otimes_{j'.j,j''} -\big) \quad ].$$

De même, on désigne par :

$$\texttt{TensIterD}\big(\boldsymbol{V},(j,(j',j''))\big):(\boldsymbol{V}_j\times\boldsymbol{V}_{j'})\times\boldsymbol{V}_{j''}\to\boldsymbol{V}_{j''.j'.j}$$

le *foncteur de tensorisation itérée à droite [à trois variables]* déduit des foncteurs de tensorisation précédents, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $V$ de $\boldsymbol{V}_j$, pour tout point $V'$ de $\boldsymbol{V}_{j'}$ et pour tout point $V''$ de $\boldsymbol{V}_{j''}$, on a :

$$\texttt{TensIterD}\big(\boldsymbol{V},(j,(j',j''))\big)\big((V,V'),V''\big)$$
$$=$$
$$V\otimes_{j,j''.j'}(V'\otimes_{j',j''}V''),$$

- pour toute flèche $v:V_1\to V_2$ de $\boldsymbol{V}_j$, pour toute flèche $v':V'_1\to V'_2$ de $\boldsymbol{V}_{j'}$ et pour toute flèche $v'':V''_1\to V''_2$ de $\boldsymbol{V}_{j''}$, on a :

$$\texttt{TensIterD}\big(\boldsymbol{V},(j,(j',j''))\big)\big((v,v'),v''\big)$$
$$=$$
$$v\otimes_{j,j''.j'}(v'\otimes_{j',j''}v''),$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\big(-\otimes_{j,j''.j'}(-\otimes_{j',j''}-)\big)$$
$$=$$
$$\texttt{TensIterD}\big(\boldsymbol{V},(j,(j',j''))\big):(\boldsymbol{V}_j\times\boldsymbol{V}_{j'})\times\boldsymbol{V}_{j''}\to\boldsymbol{V}_{j''.j'.j},$$

ou même, bien souvent, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

$$\big(-\otimes_{..}(-\otimes\ -)\big)=\big(-\otimes_{j,j''.j'}(-\otimes_{j',j''}-)\big)\ \ ].$$

**2.1.c.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel, si $(j : J \to J', j' : J' \to J")$ est un couple de flèches consécutives de $\mathcal{J}$ et si $V$ est un point de $\mathcal{V}_j$, on désigne par :

$$\texttt{TensRedG}(\mathcal{V},(V,j,j')) : \mathcal{V}_{j'} \to \mathcal{V}_{j'.j}$$

le *foncteur de tensorisation réduite à gauche [au point* $V$*]* déduit du foncteur de tensorisation précédent, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $V'$ de $\mathcal{V}_{j'}$, on a :

$$\texttt{TensRedG}(\mathcal{V},(V,j,j'))(V') = V \otimes_{j,j'} V',$$

- pour toute flèche $v' : V'_1 \to V'_2$ de $\mathcal{V}_{j'}$, on a :

$$\texttt{TensRedG}(\mathcal{V},(V,j,j'))(v') = \texttt{Id}(V) \otimes_{j,j'} v',$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$V \otimes_{j,j'} - = \texttt{TensRedG}(\mathcal{V},(V,j,j')) : \mathcal{V}_{j'} \to \mathcal{V}_{j'.j},$$

ou même, bien souvent, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

$$V \otimes_{...} - = V \otimes_{j,j'} - \quad ].$$

De même, si $(j : J \to J', j' : J' \to J")$ est un couple de flèches consécutives de $\mathcal{J}$ et si $V'$ est un point de $\mathcal{V}_{j'}$, on désigne par :

$$\texttt{TensRedD}(\mathcal{V},(j,j',V')) : \mathcal{V}_j \to \mathcal{V}_{j'.j}$$

le *foncteur de tensorisation réduite à droite [au point* $V'$*]* déduit du foncteur de tensorisation précédent, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $V$ de $\mathcal{V}_j$, on a :

$$\mathtt{TensRedD}\big(\mathcal{V}(j,j',V')\big)(V) = V \otimes_{j,j'} V',$$

- pour toute flèche $v : V_1 \to V_2$ de $\mathcal{V}_j$, on a :

$$\mathtt{TensRedD}\big(\mathcal{V}(j,j',V')\big)(v) = v \otimes_{j,j'} \mathtt{Id}(V'),$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$- \otimes_{j,j'} V' = \mathtt{TensRedD}\big(\mathcal{V}(j,j',V')\big) : \mathcal{V}_j \to \mathcal{V}_{j'\cdot j},$$

ou même, bien souvent, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

$$- \otimes_{..} V' = - \otimes_{j,j'} V' \quad ].$$

**2.1.d.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel et si $(j : J \to J', j' : J' \to J'', j'' : J'' \to J''')$ est un triplet de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, on dit que :

- $\mathcal{V}$ est *quasi-associatif [avec déplacement des parenthèses] de gauche à droite*[2] *en* $(j,j',j'')$ si on dispose d'une *réécriture de quasi-associativité de gauche à droite*, i.e. d'une transformation naturelle :

---

[2] On laisse au lecteur le soin de définir la "quasi-associativité de droite à gauche" ... que nous n'utiliserons pas dans la suite.

$$\mathtt{ReecQAss}(\mathcal{V},(j,j',j''))$$
$$:$$
$$(-\otimes_{j,j'}-)\otimes_{j'.j,j''}-$$
$$\Downarrow$$
$$-\otimes_{j,j''.j'}(-\otimes_{j',j''}-)$$
$$:$$
$$(\mathcal{V}_j\times\mathcal{V}_{j'})\times\mathcal{V}_{j''}$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{V}_{j''.j'.j}$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\mathtt{ReecQAss}_{j,j',j''}=\mathtt{ReecQAss}(\mathcal{V},(j,j',j'')),$$

ou même, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

- sommairement :

$$\mathtt{ReecQAss}_{...}=\mathtt{ReecQAss}_{j,j',j''},$$

- plus elliptiquement encore, pour tout point $V$ de $\mathcal{V}_j$, pour tout point $V'$ de $\mathcal{V}_{j'}$ et pour tout point $V''$ de $\mathcal{V}_{j''}$ :

$$\mathtt{ReecQAss}_{...}(...)=\mathtt{ReecQAss}_{...}((V,V'),V'')$$ ],

- $\mathcal{V}$ est *associatif en* $(j,j',j'')$ si on dispose d'une *réécriture d'associativité*, i.e. d'une équivalence naturelle :

$$\mathtt{ReecAss}(\mathcal{V},(j,j',j''))$$
$$:$$

$$
\begin{array}{c}
(-\otimes_{j,j'}-)\otimes_{j'.j,j''}-\\
\Downarrow\\
-\otimes_{j,j''.j'}(-\otimes_{j',j''}-)\\
:\\
(\mathcal{V}_j\times\mathcal{V}_{j'})\times\mathcal{V}_{j''}\\
\downarrow\\
\mathcal{V}_{j''.j'.j}
\end{array}
$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\texttt{ReecAss}_{j,j',j''}=\texttt{ReecAss}(\mathcal{V},(j,j',j'')),$$

ou même, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

- sommairement :

$$\texttt{ReecAss}_{..}=\texttt{ReecAss}_{j,j',j''},$$

- plus elliptiquement encore, pour tout point $V$ de $\mathcal{V}_j$, pour tout point $V'$ de $\mathcal{V}_{j'}$ et pour tout point $V''$ de $\mathcal{V}_{j''}$ :

$$\texttt{ReecAss}_{.}(...)=\texttt{ReecAss}_{...}((V,V'),V'')\ \ ].$$

**2.1.e.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel et si $j:J\to J'$ est une flèche de $\mathcal{J}$, on dit que :

- $\mathcal{V}$ admet le point $V$ de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}$ pour *quasi-unité à gauche [de $j$]* si on dispose d'une *réécriture de quasi-unitarité à gauche*, i.e. d'une transformation naturelle :

$$\texttt{ReecQUnitG}(\mathcal{V},(V,j))$$

$$:$$

$$\begin{array}{c} \mathtt{Id}(\boldsymbol{V}_j) \\ \Downarrow \\ (V \otimes_{\mathrm{Id}(J),j} \text{-}) \\ : \\ \boldsymbol{V}_j \\ \downarrow \\ \boldsymbol{V}_j \end{array}$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\mathtt{ReecQUnitG}_{V,j} = \mathtt{ReecQUnitG}(\boldsymbol{V},(V,j)),$$

ou même, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

- sommairement :

$$\mathtt{ReecQUnitG}_{\dots} = \mathtt{ReecQUnitG}_{V,j},$$

- plus elliptiquement encore, pour tout point $W$ de $\boldsymbol{V}_j$ :

$$\mathtt{ReecQUnitG}_{\dots}(\dots) = \mathtt{ReecQUnitG}_{V,j}(W) \quad ],$$

- $\boldsymbol{V}$ admet le point $V$ de $\boldsymbol{V}_{\mathrm{Id}(J)}$ pour *unité à gauche [de $j$ ]* si on dispose d'une *réécriture d'unitarité à gauche*, i.e. d'une équivalence naturelle :

$$\begin{array}{c} \mathtt{ReecUnitG}(\boldsymbol{V},(V,j)) \\ : \\ \mathtt{Id}(\boldsymbol{V}_j) \\ \Downarrow \\ (V \otimes_{\mathrm{Id}(J),j} \text{-}) \\ : \end{array}$$

$$\mathcal{V}_j$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{V}_j$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\texttt{ReecUnitG}_{V,j} = \texttt{ReecUnitG}(\mathcal{V},(V,j)),$$

ou même, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

- sommairement :

$$\texttt{ReecUnitG}_{..} = \texttt{ReecUnitG}_{V,j},$$

- plus elliptiquement encore, pour tout point $W$ de $\mathcal{V}_j$ :

$$\texttt{ReecUnitG}_{...}(...) = \texttt{ReecUnitG}_{V,j}(W) \quad ].$$

De même, on dit que :

- $\mathcal{V}$ admet le point $V'$ de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J')}$ pour *quasi-unité à droite [de $j$ ]* si on dispose d'une *réécriture de quasi-unitarité à droite*, i.e. d'une transformation naturelle :

$$\texttt{ReecQUnitD}(\mathcal{V},(j,V'))$$
$$:$$
$$\texttt{Id}(\mathcal{V}_j)$$
$$\Downarrow$$
$$(- \otimes_{j,\mathrm{Id}(J')} V')$$
$$:$$
$$\mathcal{V}_j$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{V}_j$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\mathtt{ReecQUnitD}_{j,V'} = \mathtt{ReecQUnitD}(\boldsymbol{V},(j,V')),$$

ou même, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

- sommairement :

$$\mathtt{ReecQUnitD}_{\dots} = \mathtt{ReecQUnitD}_{j,V'},$$

- plus elliptiquement encore, pour tout point $W$ de $\boldsymbol{V}_j$ :

$$\mathtt{ReecQUnitD}_{\dots}(\dots) = \mathtt{ReecQUnitD}_{j,V'}(W) \quad ],$$

- $\boldsymbol{V}$ admet le point $V'$ de $\boldsymbol{V}_{\mathrm{Id}(J')}$ pour *unité à droite [de $j$ ]* si on dispose d'une *réécriture d'unitarité à droite*, i.e. d'une équivalence naturelle :

$$\begin{array}{c} \mathtt{ReecUnitD}(\boldsymbol{V},(j,V')) \\ : \\ \mathtt{Id}(\boldsymbol{V}_j) \\ \Downarrow \\ (- \otimes_{j,\mathrm{Id}(J')} V') \\ : \\ \boldsymbol{V}_j \\ \downarrow \\ \boldsymbol{V}_J \end{array}$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\mathtt{ReecUnitD}_{j,V'} = \mathtt{ReecUnitD}(\boldsymbol{V},(j,V')),$$

ou même, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

- sommairement :

$$\mathtt{ReecUnitD}_{\cdot} = \mathtt{ReecUnitD}_{J,V'},$$

- plus elliptiquement encore, pour tout point $W$ de $\mathcal{V}_J$ :

$$\mathtt{ReecUnitD}\ (\ldots) = \mathtt{ReecUnitD}_{J,V'}(W)\ ].$$

**2.1.f.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie et si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel, on dit que :

- $\mathcal{V}$ est *quasi-associatif de gauche à droite* si :
  - $\mathcal{V}$ est quasi-associatif de gauche à droite en tout triplet $(j,j',j'')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$,
  - "tous" les diagrammes de réécritures de quasi-associativité de gauche à droite commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement],
- $\mathcal{V}$ est *associatif* si :
  - $\mathcal{V}$ est associatif en tout triplet $(j,j',j'')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$,
  - "tous" les diagrammes de réécritures d'associativité commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement].

**2.1.g.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie et si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel, on dit que :

- $\mathcal{V}$ est *quasi-unitaire* et de *famille de quasi-unités* :

$$(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J))_{J \in \mathtt{Pt}(\mathcal{J})}$$

si :

- $\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)$ est, pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$, un point de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}$,
- $\mathcal{V}$ admet $\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)$ pour quasi-unité à gauche de toute flèche de $\mathcal{J}$ ayant pour domaine $J$,
- $\mathcal{V}$ admet $\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)$ pour quasi-unité à droite de toute flèche de $\mathcal{J}$ ayant pour codomaine $J$,
- "tous" les diagrammes de réécritures de quasi-unitarité commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement],

- $\mathcal{V}$ est *unitaire* et de *famille d'unités* :

$$(\mathtt{PtUnit}(\mathcal{V},J))_{J \in \mathtt{Pt}(\mathcal{J})}$$

si :

- $\mathtt{PtUnit}(\mathcal{V},J)$ est, pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$, un point de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}$,
- $\mathcal{V}$ admet $\mathtt{PtUnit}(\mathcal{V},J)$ pour unité à gauche de toute flèche de $\mathcal{J}$ ayant pour domaine $J$,
- $\mathcal{V}$ admet $\mathtt{PtUnit}(\mathcal{V},J)$ pour unité à droite de toute flèche de $\mathcal{J}$ ayant pour codomaine $J$,
- tous les diagrammes de réécritures d'unitarité commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement].

**2.1.h.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie et si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel, on dit que :

- $\mathcal{V}$ est *quasi-catégorique [de gauche à droite]* si :
  - $\mathcal{V}$ est quasi-associatif de gauche à droite,
  - $\mathcal{V}$ est quasi-unitaire,
  - "tous" les diagrammes de réécritures de quasi-associativité de gauche à droite et de réécritures de quasi-unitarité [éventuellement mélangées]

commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement],

- $\mathcal{V}$ est *catégorique* si :
    - $\mathcal{V}$ est associatif,
    - $\mathcal{V}$ est unitaire,
    - "tous" les diagrammes de réécritures d'associativité et de réécritures d'unitarité [éventuellement mélangées] commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement].

## 2.2. Morphismes de systèmes tensoriels.

**2.2.a.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie et si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes tensoriels, un *$\mathcal{J}$-morphisme tensoriel $\mathcal{p}$: $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ de $\mathcal{V}$ vers $\mathcal{W}$* est constitué par :

- la donnée, pour toute flèche $j$ de $\mathcal{J}$, d'un foncteur *composante de $\mathcal{p}$ en $j$* :

$$\mathtt{Cpste}(\mathcal{p},j) : \mathcal{V}_j \to \mathcal{W}_j$$

[alors, on note plus simplement et indifféremment :

$$\mathcal{p}_j(\text{-}) = \mathcal{p}_j = \mathtt{Cpste}(\mathcal{p},j) : \mathcal{V}_j \to \mathcal{W}_j \quad ],$$

- la donnée, pour tout couple $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, d'une *réécriture tensorielle en* $(j, j')$, i.e. d'une transformation naturelle :

$$\mathtt{ReecTens}(\mathcal{p},(j,j'))$$

$$:$$

$$\mathcal{p}_j(-) \otimes_{j,j'} \mathcal{p}_{j'}(-)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{p}_{j'.j}(- \otimes_{j,j'} -)$$
$$:$$
$$\mathcal{V}_j \times \mathcal{V}_{j'}$$
$$\downarrow$$
$$\mathcal{W}_{j'.j}$$

[alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\texttt{ReecTens}_{j,j'} = \texttt{ReecTens}(\mathcal{p},(j,j')),$$

ou même, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

- sommairement :

$$\texttt{ReecTens}_{..} = \texttt{ReecTens}_{j,j'},$$

- plus elliptiquement encore, pour tout point $V$ de $\mathcal{V}_j$ et pour tout point $V'$ de $\mathcal{V}_{j'}$ :

$$\texttt{ReecTens}_{...}(...) = \texttt{ReecTens}_{j,j'}(V, V') \;].$$

**2.2.b.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes tensoriels et si $\mathcal{p}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est un $\mathcal{J}$-morphisme tensoriel, on dit que :

- $\mathcal{p}\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est *quasi-associatif de gauche à droite* si :
  - $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont quasi-associatifs de gauche à droite,
  - "tous" les diagrammes de réécritures tensorielles et de réécritures de quasi-associativité de gauche à droite [éventuellement mélangées] commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des foncteurs

monoïdaux entre catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement],

- $p : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est *associatif* si :
  - $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont associatifs,
  - "tous" les diagrammes de réécritures tensorielles et de réécritures d'associativité [éventuellement mélangées] commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des foncteurs monoïdaux entre catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement].

**2.2.c.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes tensoriels et si $p : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est un $\mathcal{J}$-morphisme tensoriel, on dit que :

- $p : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est *quasi-unitaire* et de *famille de réécritures ponctuelles de quasi-unitarité* :

$$\left( \begin{array}{c} \mathtt{ReecPtQUnit}(p,J) \\ : \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W},J) \\ \downarrow \\ p_J(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)) \end{array} \right)_{J \in \mathtt{Pt}(\mathcal{J})}$$

  si :
  - $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont quasi-unitaires,
  - $\mathtt{ReecPtQUnit}(p,J) : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W},J) \to p_J(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J))$ est, pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$, une flèche de $\mathcal{W}_{\mathrm{Id}(J)}$,
  - "tous" les diagrammes de réécritures tensorielles, de réécritures ponctuelles de quasi-unitarité et de réécritures de quasi-unitarité [éventuellement mélangées] commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des foncteurs monoïdaux entre catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement],

- $p : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est *unitaire* et de *famille de réécritures ponctuelles d'unitarité* :

$$\left( \begin{array}{c} \mathtt{ReecPtUnit}(\boldsymbol{p},J) \\ : \\ \mathtt{PtUnit}(\boldsymbol{W},J) \\ \downarrow \\ \boldsymbol{p}_J(\mathtt{PtUnit}(\boldsymbol{V},J)) \end{array} \right)_{J \in \mathtt{Pt}(\boldsymbol{J})}$$

si :

- $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$ sont unitaires,
- $\mathtt{ReecPtUnit}(\boldsymbol{p},J) : \mathtt{PtUnit}(\boldsymbol{W},J) \to \boldsymbol{p}_J(\mathtt{PtUnit}(\boldsymbol{V},J))$ est, pour tout point $J$ de $\boldsymbol{J}$, une flèche de $\boldsymbol{W}_{\mathtt{Id}(J)}$,
- "tous" les diagrammes de réécritures tensorielles, de réécritures ponctuelles d'unitarité et de réécritures d'unitarité [éventuellement mélangées] commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des foncteurs monoïdaux entre catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement].

**2.2.d.** Si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie, si $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$ sont deux $\boldsymbol{J}$-systèmes tensoriels et si $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ est un $\boldsymbol{J}$-morphisme tensoriel, on dit que :

- $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ est *quasi-catégorique* si :
  - $\boldsymbol{V}$ et $\boldsymbol{W}$ sont quasi-catégoriques,
  - $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ est quasi-associatif de gauche à droite,
  - $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ est quasi-unitaire,
  - "tous" les diagrammes de réécritures tensorielles, de réécritures ponctuelles de quasi-unitarité, de réécritures de quasi-associativité de gauche à droite et de réécritures de quasi-unitarité [éventuellement mélangées] commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des foncteurs monoïdaux entre catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement],
- $\boldsymbol{p}$: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ est *catégorique* si :

- $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont catégoriques,
- $p$: $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est associatif,
- $p$: $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est unitaire,
- "tous" les diagrammes de réécritures tensorielles, de réécritures ponctuelles d'unitarité, de réécritures d'associativité et de réécritures d'unitarité [éventuellement mélangées] commutent [autrement dit, il y a "cohérence" de ces diverses réécritures, dans un sens généralisant celui utilisé - par exemple - pour l'axiomatisation des foncteurs monoïdaux entre catégories monoïdales, et que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter complètement].

## 2.3. Systèmes tensoriels déduits par changements d'indexations.

**2.3.a.** Si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ sont deux catégories, si $\lambda : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ est un foncteur et si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{K}$-système tensoriel, on désigne indifféremment par :

$$\texttt{SysTensDedChangIndex}(\mathcal{W}, \lambda) = \mathcal{W}_\lambda$$

le *système tensoriel déduit de* $\mathcal{W}$ *par changement d'indexation le long de* $\lambda$, i.e. le $\mathcal{J}$-système tensoriel évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour toute flèche $j$ de $\mathcal{J}$, on a :

$$(\mathcal{W}_\lambda)_j = \mathcal{W}_{\lambda(j)},$$

- pour tout couple $(j : J \to J', j' : J' \to J")$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, on a :

$$\texttt{Tens}(\mathcal{W}_\lambda, (j, j')) : (\mathcal{W}_\lambda)_j \times (\mathcal{W}_\lambda)_{j'} \to (\mathcal{W}_\lambda)_{j'.j}$$
$$=$$
$$\texttt{Tens}\big(\mathcal{W}, (\lambda(j), \lambda(j'))\big) : \mathcal{W}_{\lambda(j)} \times \mathcal{W}_{\lambda(j')} \to \mathcal{W}_{\lambda(j').\lambda(j)}.$$

**2.3.b.** Si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ sont deux catégories, si $\lambda : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ est un foncteur et si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{K}$-système tensoriel quasi-associatif de gauche à droite [resp. associatif], on voit facilement que $\mathcal{W}_\lambda$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-associatif de gauche à droite [resp. associatif].

De même, si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{K}$-système tensoriel quasi-unitaire [resp. unitaire], on voit facilement que $\mathcal{W}_\lambda$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-unitaire [resp. unitaire].

Enfin, si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{K}$-système tensoriel quasi-catégorique [resp. catégorique], alors $\mathcal{W}_\lambda$ est évidemment un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-catégorique [resp. catégorique].

---

# 3. Systèmes enrichis, morphismes de systèmes enrichis, systèmes enrichis déduits et compagnons.

## 3.1. Systèmes enrichis.

**3.1.a.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie et si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel, un *$\mathcal{J}$-système $\mathcal{V}$-enrichi* $\mathbf{A}$ est constitué par :

- la donnée, pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$, d'un ensemble *coordonnée de* $\mathbf{A}$ *en* $J$ :

$$\mathtt{Coord}(\mathbf{A},J)$$

  [alors, on note aussi :

$$\mathbf{A}_J = \mathtt{Coord}(\mathbf{A},J) \quad ],$$

- la donnée, pour toute flèche $j : J \to J'$ de $\mathcal{J}$, d'une application *enrichissement de* $\mathbf{A}$ *en* $j$ :

$$\mathtt{Enrich}(\mathbf{A},j) : \mathbf{A}_J \times \mathbf{A}_{J'} \to \mathtt{Pt}(\mathcal{V}_j),$$

  [alors, on note aussi :

$$\mathbf{A}_j(-,-) = \mathtt{Enrich}(\mathbf{A},j) : \mathbf{A}_J \times \mathbf{A}_{J'} \to \mathtt{Pt}(\mathcal{V}_j)$$

  et, par conséquent, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$ et pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$, on écrit également :

$\mathbf{A}_j(A,A') = \mathbf{A}_j(\text{-},\text{-})(A,A') = \mathtt{Enrich}(\mathbf{A},j)(A,A')$ ],

- la donnée, pour tout couple de flèches consécutives $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de $\mathcal{J}$, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$, pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$ et pour tout élément $A''$ de $\mathbf{A}_{J''}$, d'une flèche de $\mathcal{V}_{j'\cdot j}$, dite *composition locale de* $\mathbf{A}$ *en* $(A,j,A',j',A'')$ :

$$\mathtt{CompLoc}(\mathbf{A},(A,j,A',j',A''))$$
$$:$$
$$\mathbf{A}_j(A,A') \otimes_{j,j'} \mathbf{A}_{j'}(A',A'')$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{A}_{j'\cdot j}(A,A'')$$

[s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on note plus simplement :

$$\mathtt{CompLoc}_{A,j,A',j',A''} = \mathtt{CompLoc}(\mathbf{A},(A,j,A',j',A''))$$

et même, bien souvent, à charge au lecteur de compléter en fonction du contexte :

$$\mathtt{CompLoc}_{\ldots} = \mathtt{CompLoc}_{A,j,A',j',A''}$$ ].

**3.1.b.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-associatif de gauche à droite et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{V}$-enrichi, on dit que $\mathbf{A}$ est *[strictement] associatif [parallèlement à* $\mathcal{V}$*]* si :

- pour tout triplet $(j : J \to J', j' : J' \to J'', j'' : J'' \to J''')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$, pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$, pour tout élément $A''$ de $\mathbf{A}_{J''}$ et pour tout élément $A'''$ de $\mathbf{A}_{J'''}$, le diagramme [de $\mathcal{V}_{j''\cdot j'\cdot j}$] ci-dessous commute :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (\mathbf{A}_J(A,A')\otimes_{\cdot} \mathbf{A}_{J'}(A',A''))\otimes \mathbf{A}_{J''}(A'',A''') \arrow[dl, "\mathtt{ReecQass}\ (\ldots)"'] \arrow[ddr, "\mathtt{CompLoc}\ \otimes\ \mathtt{Id}(\mathbf{A}_{J''}(A'',A'''))"] & \\
\mathbf{A}_J(A,A')\otimes (\mathbf{A}_{J'}(A',A'')\otimes \mathbf{A}_{J''}(A'',A''')) \arrow[dd, "\mathtt{Id}(\mathbf{A}_J(A,A')\otimes\ \mathtt{CompLoc}"'] & & \\
 & & \mathbf{A}_{J'\cdot J}(A,A'')\otimes_{\cdot} \mathbf{A}_{J''}(A'',A''') \arrow[ddl, "\mathtt{CompLoc}\ \ldots"] \\
\mathbf{A}_J(A,A')\otimes_{\cdot} \mathbf{A}_{J''\cdot J'}(A',A''') \arrow[dr, "\mathtt{CompLoc}\ \ldots"'] & & \\
 & \mathbf{A}_{J''\cdot J'\cdot J}(A,A''') &
\end{tikzcd}
$$

**3.1.c.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-unitaire et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{V}$-enrichi, on dit que $\mathbf{A}$ est *[strictement] unitaire [parallèlement à* $\mathcal{V}$*]* et de *famille de flèches d'unitarité* :

$$
\left(\begin{array}{c}
\mathtt{FlUnit}(\mathbf{A},(J,A)) \\
: \\
\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \\
\downarrow \\
\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A)
\end{array}\right)_{J\in \mathrm{Pt}(\mathcal{J}),\, A\in \mathbf{A}J}
$$

si :

- pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$ et pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$ , la flèche :

$$\mathtt{FlUnit}(\mathbf{A},(J,A))$$

$$:$$

$$\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A)$$

est une flèche de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}$,

- pour tous points $J$ et $J'$ de $\mathcal{J}$, pour toute flèche $j : J \to J'$ [de domaine $J$] de $\mathcal{J}$, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$ et pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$, le diagramme [de $\mathcal{V}_j$] ci-dessous commute :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{A}_j(A,A') & \xrightarrow{\mathtt{ReecQunit}_{\dots}(\dots)} & \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \otimes_{\dots} \mathbf{A}_j(A,A') \\
\Big\downarrow \mathtt{Id}(\mathbf{A}_j(A,A')) & \mathtt{FlUnit}(\mathbf{A},(J,A)) \otimes_{\dots} \mathtt{Id}(\mathbf{A}_j(A,A')) & \Big\downarrow \\
\mathbf{A}_j(A,A') & \xleftarrow[\mathtt{CompLoc}_{\dots}]{} & \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A) \otimes_{\dots} \mathbf{A}_j(A,A')
\end{array}$$

- pour tous points $J$ et $J'$ de $\mathcal{J}$, pour toute flèche $j : J' \to J$ [de codomaine $J$] de $\mathcal{J}$, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$ et pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$, le diagramme [de $\mathcal{V}_j$] ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\mathbf{A}_J(A',A) \arrow[r, "\mathtt{ReecQunit}_{\ldots}(\ldots)"] \arrow[d, "\mathtt{Id}(\mathbf{A}_J(A',A))"'] & \mathbf{A}_J(A',A) \otimes \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \arrow[d, "\mathtt{Id}(\mathbf{A}_J(A',A)) \otimes_{\ldots} \mathtt{FlUnit}(\mathbf{A},(J,A))"'] \\
\mathbf{A}_J(A',A) & \mathbf{A}_J(A',A) \otimes_{..} \mathbf{A}_{\mathtt{Id}(J)}(A,A) \arrow[l, "\mathtt{CompLoc}_{..}"]
\end{tikzcd}$$

**3.1.d.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-catégorique [en particulier, catégorique] et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{V}$-enrichi, on dit que $\mathbf{A}$ est *[strictement] catégorique [parallèlement à $\mathcal{V}$]* si :

- $\mathbf{A}$ est [strictement] associatif,
- $\mathbf{A}$ est [strictement] unitaire.

## 3.2. Morphismes de systèmes enrichis.

**3.2.a.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel et si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes $\mathcal{V}$-enrichis, un *$\mathcal{J}$-morphisme $\mathcal{V}$-enrichi* $\mathbf{s} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est constitué par :

- la donnée, pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$, d'une application *coordonnée de* $\mathbf{s}$ *en* $J$ :

$$\mathtt{Coord}(\mathbf{s},J) : \mathbf{A}_J \to \mathbf{B}_J$$

[alors, on note aussi :

$$\mathbf{s}_J = \mathtt{Coord}(\mathbf{s},J) \quad ],$$

- la donnée, pour toute flèche $j : J \to J'$ de $\mathcal{J}$, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$ et pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$, d'une *comparaison enrichie*, i.e. d'une flèche de $\mathcal{V}_j$ :

$$\begin{array}{c} \mathtt{ComparEnrich}(\mathbf{s},j,A,A') \\ : \\ \mathbf{A}_j(A,A') \\ \downarrow \\ \mathbf{B}_j(\mathbf{s}_J(A),\mathbf{s}_{J'}(A')) \end{array}$$

[alors, on note aussi :

$$\mathbf{s}_j(A,A') = \mathtt{ComparEnrich}(\mathbf{s},j)(A,A') \;],$$

et, ce, de sorte que :

- pour tout couple $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$, pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$ et pour tout élément $A''$ de $\mathbf{A}_{J''}$, le diagramme [de $\mathcal{V}_{j'\cdot j}$] ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_j(A,A')\otimes_{...}\mathbf{A}_{j'}(A',A'') \arrow[r, "\mathtt{CompLoc}_{.}"] \arrow[d, "\mathbf{s}_j(A,A')\otimes_{..}\mathbf{s}_{j'}(A',A'')"'] & \mathbf{A}_{j'\cdot j}(A,A'') \arrow[d, "\mathbf{s}_{j'\cdot j}(A,A'')"] \\ \mathbf{B}_j(\mathbf{s}_J(A),\mathbf{s}_{J'}(A'))\otimes_{...}\mathbf{B}_{j'}(\mathbf{s}_{J'}(A'),\mathbf{s}_{J''}(A'')) \arrow[r, "\mathtt{CompLoc}_{..}"'] & \mathbf{B}_{j'\cdot j}(\mathbf{s}_J(A),\mathbf{s}_{J''}(A'')) \end{tikzcd}$$

**3.2.b.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-unitaire, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes $\mathcal{V}$-enrichis unitaires et si $\mathbf{s} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un *$\mathcal{J}$-morphisme $\mathcal{V}$-enrichi*, on dit que $\mathbf{s} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est *unitaire* si :

- pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$ et pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$, le diagramme [de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}$] ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A) \arrow[dd, "\mathbf{s}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A)"] \\
\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \arrow[ur, "\mathtt{FlUnit}(\mathbf{A},(J,A))"] \arrow[dr, "\mathtt{FlUnit}(\mathbf{B},(J,\mathbf{s}_J(A)))"'] & \\
 & \mathbf{B}_J(\mathbf{s}_J(A),\mathbf{s}_J(A))
\end{tikzcd}$$

**3.2.c.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-catégorique, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes $\mathcal{V}$-enrichis catégoriques et si $\mathbf{s} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un *$\mathcal{J}$-morphisme $\mathcal{V}$-enrichi*, on dit que $\mathbf{s} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est *catégorique* si :

- $\mathbf{s} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est unitaire,

[en constatant qu'il est légitime de considérer qu'un morphisme de systèmes enrichis qui sont, de plus, associatifs est "nécessairement associatif"].

## 3.3. Systèmes enrichis déduits par changements d'enrichissements.

**3.3.a.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes tensoriels, si $p$: $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est $\mathcal{J}$-morphisme tensoriel et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-sytème $\mathcal{V}$-enrichi, on désigne indifféremment par :

$$\mathtt{SysEnrichDedChangEnrich}(p,\mathbf{A}) = {}_p\mathbf{A}$$

le *système enrichi déduit de* $\mathbf{A}$ *par changement d'enrichissement le long de* $p$, i.e. le $\mathcal{J}$-système $\mathcal{W}$-enrichi évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$, on a :

$$({}_p\mathbf{A})_J = \mathbf{A}_J ,$$

- pour toute flèche $j : J \to J'$ de $\mathcal{J}$, pour tout élément $A$ de $({}_p\mathbf{A})_J$ [i.e. de $\mathbf{A}_J$] et pour tout élément $A'$ de $({}_p\mathbf{A})_{J'}$ [i.e. de $\mathbf{A}_{J'}$], on a :

$$({}_p\mathbf{A})_j(A, A') = p_j(\mathbf{A}_j(A, A')) ,$$

- pour tout couple $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, pour tout élément $A$ de $({}_p\mathbf{A})_J$ [i.e. de $\mathbf{A}_J$], pour tout élément $A'$ de $({}_p\mathbf{A})_{J'}$ [i.e. de $\mathbf{A}_{J'}$] et pour tout élément $A''$ de $({}_p\mathbf{A})_{J''}$ [i.e. de $\mathbf{A}_{J''}$], la flèche de $\mathcal{W}_{j' \cdot j}$ :

$$\begin{gathered}
\mathtt{CompLoc}\,({}_p\mathbf{A},(A,j,A',j',A'')) \\
\vdots \\
({}_p\mathbf{A})_j(A,A') \otimes_{j,j'} ({}_p\mathbf{A})_{j'}(A',A'') \\
= \\
p_j(\mathbf{A}_j(A,A')) \otimes_{j,j'} p_{j'}(\mathbf{A}_{j'}(A',A'')) \\
\downarrow \\
({}_p\mathbf{A})_{j' \cdot j}(A,A'') \\
= \\
p_{j' \cdot j}(\mathbf{A}_{j' \cdot j}(A,A''))
\end{gathered}$$

est la composée des flèches consécutives suivantes de $\mathcal{W}_{j' \cdot j}$ :

$$\begin{gathered}
\mathtt{ReecTens}_{\dots}(\dots) \\
\vdots
\end{gathered}$$

$$\begin{array}{c} p_j(\mathbf{A}_j(A,A')) \otimes_{\dots} p_{j'}(\mathbf{A}_{j'}(A',A'')) \\ \downarrow \\ p_{j'.j}(\mathbf{A}_j(A,A') \otimes_{\dots} \mathbf{A}_{j'}(A',A'')) \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{c} p_{j'.j}(\mathtt{CompLoc}_{\dots}) \\ : \\ p_{j'.j}(\mathbf{A}_j(A,A') \otimes_{\dots} \mathbf{A}_{j'}(A',A'')) \\ \downarrow \\ p_{j'.j}(\mathbf{A}_{j'.j}(A,A'')) \,. \end{array}$$

**3.3.b.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes tensoriels quasi-associatifs de gauche à droite, si $p$: $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est $\mathcal{J}$-morphisme tensoriel quasi-associatif de gauche à droite et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-sytème $\mathcal{V}$-enrichi associatif, alors il est clair que ${}_p\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{W}$-enrichi associatif.

**3.3.c.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes tensoriels quasi-unitaires, si $p$: $\mathcal{V} \to \mathcal{W}$ est $\mathcal{J}$-morphisme tensoriel quasi-unitaire et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-sytème $\mathcal{V}$-enrichi unitaire, de famille de flèches d'unitarité :

$$\left( \begin{array}{c} \mathtt{FlUnit}(\mathbf{A},(J,A)) \\ : \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \\ \downarrow \\ \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A) \end{array} \right)_{J \in \mathtt{Pt}(\mathcal{J}),\, A \in \mathbf{A}_J} ,$$

alors il est clair que ${}_{p}\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{W}$-enrichi unitaire, de famille d'unités :

$$\left( \begin{array}{c} \mathtt{FlUnit}({}_{p}\mathbf{A},(J,A)) \\ : \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W},J) \\ \downarrow \\ ({}_{p}\mathbf{A})_{\mathrm{Id}(J)}(A,A) \end{array} \right)_{J \in \mathrm{Pt}(\mathcal{J}),\, A \in ({}_{p}\mathbf{A})_{J}},$$

où :

- pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$ et pour tout élément $A$ de $({}_{p}\mathbf{A})_{J}$ [i.e. de $\mathbf{A}_{J}$], la flèche de $\mathcal{W}_{\mathrm{Id}(J)}$ :

$$\mathtt{FlUnit}({}_{p}\mathbf{A},(J,A)) : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W},J) \to ({}_{p}\mathbf{A})_{\mathrm{Id}(J)}(A,A)$$
$$=$$
$$\mathtt{FlUnit}({}_{p}\mathbf{A},(J,A)) : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W},J) \to \mathcal{p}_{J}(\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A))$$

  est la composée des flèches consécutives de $\mathcal{W}_{\mathrm{Id}(J)}$ suivantes :

$$\begin{array}{c} \mathtt{ReecPtQUnit}(\mathcal{p},J) \\ : \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W},J) \\ \downarrow \\ \mathcal{p}_{J}(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)) \end{array}$$

  et :

$$\begin{array}{c} \mathcal{p}_{J}(\mathtt{FlUnit}(\mathbf{A},(J,A)) \\ : \end{array}$$

$$p_J(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J))$$
$$\downarrow$$
$$p_J(\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A))\,.$$

**3.3.d.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes tensoriels quasi-catégoriques [a fortiori, catégoriques], si $p$: $\mathcal{V}\rightarrow\mathcal{W}$ est $\mathcal{J}$-morphisme tensoriel quasi-catégorique et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-sytème $\mathcal{V}$-enrichi catégorique, alors ${}_p\mathbf{A}$ est évidemment un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{W}$-enrichi catégorique.

## 3.4. Systèmes enrichis déduits par changements d'indexations.

**3.4.a.** Si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ sont deux catégories, si $\lambda:\mathcal{J}\rightarrow\mathcal{K}$ est un foncteur, si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{K}$-système tensoriel et si $\mathbf{B}$ est un $\mathcal{K}$-système $\mathcal{W}$-enrichi, on désigne par :

$$\mathtt{SysEnrichDedChangIndex}(\mathbf{B},\lambda)=\mathbf{B}_\lambda$$

le *système enrichi déduit de* $\mathbf{B}$ *par changement d'indexation le long de* $\lambda$, i.e. le $\mathcal{J}$-système $\mathcal{W}_\lambda$-enrichi évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $J$ de $\mathcal{J}$, on a :

$$(\mathbf{B}_\lambda)_J=\mathbf{B}_{\lambda(J)}\ ,$$

- pour toute flèche $j:J\rightarrow J'$ de $\mathcal{J}$, on a :

$$(\mathbf{B}_\lambda)_j(\text{-},\text{-}):(\mathbf{B}_\lambda)_J\times(\mathbf{B}_\lambda)_{J'}\rightarrow\mathtt{Pt}((\mathcal{W}_\lambda)_j)$$
$$=$$
$$\mathbf{B}_{\lambda(j)}(\text{-},\text{-}):\mathbf{B}_{\lambda(J)}\times\mathbf{B}_{\lambda(J')}\rightarrow\mathtt{Pt}(\mathcal{W}_{\lambda(j)})\,,$$

- pour tout couple $(j : J \to J', j' : J' \to J'')$ de flèches consécutives de $\mathcal{J}$, pour tout élément $B$ de $(\mathbf{B}_\lambda)_J$ [i.e. de $\mathbf{B}_{\lambda(J)}$], pour tout élément $B'$ de $(\mathbf{B}_\lambda)_{J'}$ [i.e. de $\mathbf{B}_{\lambda(J')}$] et pour tout élément $B''$ de $(\mathbf{B}_\lambda)_{J''}$ [i.e. de $\mathbf{B}_{\lambda(J'')}$], on a :

$$\begin{gathered}
\mathtt{CompLoc}(\mathbf{B}_\lambda,(B,j,B',j',B'')) \\
= \\
\mathtt{CompLoc}_{B,\lambda(j),B',\lambda(j'),B''} \\
\vdots \\
(\mathbf{B}_\lambda)_j(B,B') \otimes \ldots (\mathbf{B}_\lambda)_{j'}(B',B'') \\
= \\
\mathbf{B}_{\lambda(j)}(B,B') \otimes \ldots \mathbf{B}_{\lambda(j')}(B',B'') \\
\downarrow \\
(\mathbf{B}_\lambda)_{j'.j}(B,B'') = \mathbf{B}_{\lambda(j'.j)}(B,B'') \\
= \\
\mathbf{B}_{\lambda(j').\lambda(j)}(B,B'')\,.
\end{gathered}$$

**3.4.b.** Si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ sont deux catégories, si $\lambda : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ est un foncteur, si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{K}$-système tensoriel quasi-associatif de gauche à droite et si $\mathbf{B}$ est un $\mathcal{K}$-système $\mathcal{W}$-enrichi associatif, alors il est clair que $\mathbf{B}_\lambda$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{W}_\lambda$-enrichi associatif.

**3.4.c.** Si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ sont deux catégories, si $\lambda : \mathcal{J} \to \mathcal{K}$ est un foncteur, si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{K}$-système tensoriel quasi-unitaire et si $\mathbf{B}$ est un $\mathcal{K}$-système $\mathcal{W}$-enrichi unitaire, de famille d'unités :

$$\begin{gathered}
\Big(\ \mathtt{FlUnit}(\mathbf{B},(K,B)) \\
\vdots
\end{gathered}$$

$$\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W},K)$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{Id}(K)}(B,B)\quad)_{K\in\mathrm{Pt}(\mathcal{K}),B\in\mathbf{B}_K}$$

alors il est clair que $\mathbf{B}_\lambda$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{W}_\lambda$-enrichi unitaire, de famille d'unités :

$$(\quad\mathtt{FlUnit}(\mathbf{B}_\lambda,(J,B))$$

$$=$$

$$\mathtt{FlUnit}(\mathbf{B},(\lambda(J),B))$$

$$:$$

$$\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W}_\lambda,J)$$

$$=$$

$$\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{W},\lambda(J))$$

$$\downarrow$$

$$(\mathbf{B}_\lambda)_{\mathrm{Id}(J)}(B,B)$$

$$=$$

$$\mathbf{B}_{\mathrm{Id}(\lambda(J))}(B,B)\quad)_{J\in\mathrm{Pt}(\mathcal{J}),B\in(\mathbf{B}_\lambda)_J}.$$

**3.4.d.** Si $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ sont deux catégories, si $\lambda:\mathcal{J}\to\mathcal{K}$ est un foncteur, si $\mathcal{W}$ est un $\mathcal{K}$-système tensoriel quasi-catégorique (a fortiori, catégorique) et si $\mathbf{B}$ est un $\mathcal{K}$-système $\mathcal{W}$-enrichi catégorique, alors $\mathbf{B}_\lambda$ est évidemment un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{W}_\lambda$-enrichi catégorique.

## 3.5. Compagnons.

**3.5.a.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $J$ est un point de $\mathcal{J}$, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-catégorique et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{V}$-enrichi catégorique, on note indifféremment :

$$\mathtt{Compagn}(\mathbf{A},J)=\mathbf{A}^*_J$$

la *catégorie compagnon de* $\mathbf{A}$ *en* $J$, i.e. la catégorie évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- $\mathtt{Pt}(\mathbf{A}^*_J)=\mathbf{A}_J$,
- pour tous points $A_1$ et $A_2$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour tous éléments $A_1$ et $A_2$ de $\mathbf{A}_J$], on a :

$$\mathtt{Hom}_{\mathbf{A}^*_J}(A_1,A_2)$$
$$=$$
$$\mathbf{A}^*_J(A_1,A_2)$$
$$=$$
$$\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J),\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2))$$

  [dans la suite, pour indiquer qu'un même élément est interprété comme une flèche d'une catégorie telle $\mathbf{A}^*_J$, on utlisera le symbole $\to_{\mathbf{A}^*}$, tandis que pour indiquer qu'il est interprété comme une flèche d'une catégorie telle $\mathcal{V}j$, on utlisera le symbole $\to_{\mathcal{V}}$],
- pour tout point $A$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$], on a :

$$\mathtt{Id}(A):A\to_{\mathbf{A}^*}A$$
$$=$$
$$\mathtt{FlUnit}(\mathbf{A},(J,A)):\mathtt{PtQUnit}_J(\mathcal{V},J)\to_{\mathcal{V}}\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A,A),$$

- pour tous points $A_1$, $A_2$ et $A_3$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour tous éléments $A_1$, $A_2$ et $A_3$ de $\mathbf{A}_J$] et pour toutes flèches $a_1:A_1\to A_2$ et $a_2:A_2\to A_3$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour toutes flèches :

$$a_1 : \mathtt{PtQUnit}(\boldsymbol{V}, J) \to \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1, A_2)$$

et :

$$a_2 : \mathtt{PtQUnit}(\boldsymbol{V}, J) \to \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_2, A_3)$$

de $\boldsymbol{V}_{\mathrm{Id}(J)}$ ], la flèche :

$$a_2 \bullet a_1 : A_1 \to_{\mathbf{A}*} A_3$$
$$=$$
$$a_2 \bullet a_1 : \mathtt{PtQUnit}(\boldsymbol{V}, J) \to_{\boldsymbol{V}} \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1, A_3)$$

est la flèche obtenue par composition des flèches consécutives de $\boldsymbol{V}_{\mathrm{Id}(J)}$ suivantes :

- tout d'abord :

$$\mathtt{ReecQUnitG}_{\ldots}(\ldots)$$
$$:$$
$$\mathtt{PtQUnit}(\boldsymbol{V}, J)$$
$$\downarrow$$
$$\mathtt{PtQUnit}(\boldsymbol{V}, J) \otimes_{\ldots} \mathtt{PtQUnit}(\boldsymbol{V}, J),$$

[où, $\boldsymbol{V}$ étant quasi-unitaire, i.e. en vertu de la cohérence des réécritures de quasi-unitarité, on peut aussi bien lire :

$$\mathtt{ReecQUnitG}_{\ldots}(\ldots)$$
$$=$$
$$\mathtt{ReecQUnitG}_{\mathrm{Id}(J),\, \mathtt{PtQUnit}(\boldsymbol{V}, J)}\big(\mathtt{PtQUnit}(\boldsymbol{V}, J)\big)$$
$$=$$

$\mathtt{ReecQUnitG}_{\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J),\mathrm{Id}(J)}(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J))$ ],

- ensuite :

$$\begin{array}{c} a_1 \otimes_{\ldots} a_2 \\ : \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \otimes \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \\ \downarrow \\ \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2) \otimes_{..} \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_2,A_3) \end{array}$$

- enfin :

$$\begin{array}{c} \mathtt{CompLoc}_{..} \\ : \\ \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2) \otimes_{.} \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_2,A_3) \\ \downarrow \\ \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_3)\,. \end{array}$$

**3.5.b.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $j : J \to J'$ est une flèche de $\mathcal{J}$, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-catégorique et si $\mathbf{A}$ est un $\mathcal{J}$-système $\mathcal{V}$-enrichi catégorique, on note indifféremment :

$$\mathtt{Exp}(\mathbf{A},j) = \mathbf{A}^*{}_j(\text{-},\text{-}) : (\mathbf{A}^*{}_J)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A}^*{}_{J'} \to \mathcal{V}_j$$

le *foncteur exponentiation de* $\mathbf{A}$ *en* $j$, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $A$ de $\mathbf{A}^*{}_J$ [i.e. pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$] et pour tout point $A'$ de $\mathbf{A}^*{}_{J'}$ [i.e. pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$], on a :

$$\mathbf{A}^*{}_j(\text{-},\text{-})(A,A') = \mathbf{A}_j(A,A')$$

[et on note plus simplement :

$$\mathbf{A}^*_j(A, A') = \mathbf{A}^*_j(\text{-,-})(A, A')\ ],$$

- pour toute flèche $a : A_1 \to A_2$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour toute flèche :

$$a : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V}, J) \to \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1, A_2)$$

de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}$ ] et pour toute flèche $a' : A'_1 \to A'_2$ de $\mathbf{A}^*_{J'}$ [i.e. pour toute flèche :

$$a' : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V}, J') \to \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J')}(A'_1, A'_2)$$

de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J')}$ ], la flèche de $\mathcal{V}_j$ :

$$\begin{array}{c} \mathbf{A}^*_j(\text{-,-})(a, a') \\ : \\ \mathbf{A}^*_j(A_2, A'_1) = \mathbf{A}_j(A_2, A'_1) \\ \downarrow \\ \mathbf{A}_j(A_1, A'_2) = \mathbf{A}^*_j(A_1, A'_2) \end{array}$$

[qu'on note plus simplement :

$$\mathbf{A}^*_j(a, a') = \mathbf{A}^*_j(\text{-,-})(a, a')\ ]$$

est la flèche obtenue par composition des flèches consécutives de $\mathcal{V}_j$ suivantes [par exemple] :

- tout d'abord :

$$\begin{array}{c} \mathtt{ReecQUnitG}_{\ldots}(\ldots) \\ : \end{array}$$

$$\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\otimes_{.}\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J')$$

- ensuite :

$$\mathtt{ReecQUnitG}_{..}(\ldots)\otimes_{...}\mathtt{Id}\big(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J')\big)$$
$$:$$
$$\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\otimes_{..}\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J')$$
$$\downarrow$$
$$\big(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)\otimes_{...}\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\big)\otimes\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J')$$

- puis :

$$\big(a\otimes_{..}\mathtt{Id}(\mathbf{A}_j(A_2,A'_1))\big)\otimes_{..}a'$$
$$:$$
$$\big(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)\otimes_{..}\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\big)\otimes_{...}\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J')$$
$$\downarrow$$
$$\big(\mathbf{A}\,\mathtt{Id}_{(J)}(A_1,A_2)\otimes_{...}\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\big)\otimes_{..}\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J')}(A'_1,A'_2)$$

- et :

$$\mathtt{CompLoc}_{...}\otimes_{...}\mathtt{Id}\big(\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J')}(A'_1,A'_2)\big)$$
$$:$$
$$\big(\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2)\otimes_{...}\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\big)\otimes_{...}\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J')}(A'_1,A'_2)$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{A}_j(A_1,A'_1)\otimes_{..}\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J')}(A'_1,A'_2)$$

- enfin :

$$\begin{array}{c} \mathtt{CompLoc}_{..} \\ : \\ \mathbf{A}_j(A_1,A'_1)\otimes_{...}\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J')}(A'_1,A'_2) \\ \downarrow \\ \mathbf{A}_j(A_1,A'_2) \end{array}$$

[mais, $\mathcal{V}$ étant quasi-catégorique, en vertu de la cohérence des réécritures de quasi-unitarité et de quasi-associativité de gauche à droite, on obtient évidemment la même flèche par composition des cinq autres flèches consécutives de $\mathcal{V}_j$ suivantes :

- tout d'abord :

$$\begin{array}{c} \mathtt{ReecQUnitG}_{...}(...) \\ : \\ \mathbf{A}_j(A_2,A'_1) \\ \downarrow \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)\otimes_{..}\mathbf{A}_j(A_2,A'_1) \end{array}$$

- ensuite :

$$\begin{array}{c} \mathtt{Id}\big(\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)\big)\otimes_{...}\mathtt{ReecQUnitG}_{..}(...) \\ : \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)\otimes_{...}\mathbf{A}_j(A_2,A'_1) \\ \downarrow \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)\otimes_{...}\big(\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\otimes_{.}\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J')\big) \end{array}$$

- puis :

$$\begin{array}{c} a\otimes_{...}\big(\mathtt{Id}(\mathbf{A}_j(A_2,A'_1))\otimes_{...}a'\big) \\ : \\ \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J)\otimes_{..}\big(\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\otimes_{...}\mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J')\big) \\ \downarrow \end{array}$$

$$\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2)\otimes_{..}\big(\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\otimes_{...}\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J')}(A'_1,A'_2)\big)$$

- et :

$$\begin{array}{c}\mathtt{Id}\big(\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2)\big)\otimes_{..}\mathtt{CompLoc}_{..}\\ \vdots \\ \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2)\otimes_{...}\big(\mathbf{A}_j(A_2,A'_1)\big)\otimes_{...}\mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J')}(A'_1,A'_2)\big) \\ \downarrow \\ \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2)\otimes_{..}\mathbf{A}_j(A_2,A'_2)\end{array}$$

- enfin :

$$\begin{array}{c}\mathtt{CompLoc}_{..}\\ \vdots \\ \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2)\otimes_{...}\mathbf{A}_j(A_2,A'_2) \\ \downarrow \\ \mathbf{A}_j(A_1,A'_2)\quad ].\end{array}$$

**3.5.c.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $J$ est un point de $\mathcal{J}$, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-catégorique, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes $\mathcal{V}$-enrichis catégoriques et si $\mathbf{s}:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ est un $\mathcal{J}$-morphisme $\mathcal{V}$-enrichi catégorique, on note indifféremment :

$$\mathtt{Compagn}(\mathbf{s},J)=\mathbf{s}^*_J:\mathbf{A}^*_J\to\mathbf{B}^*_J$$

le *foncteur compagnon de* $\mathbf{s}$ *en* $J$, i.e. le foncteur évidemment obtenu lorsqu'on impose que :

- pour tout point $A$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$] on a :

$$\mathbf{s}^*_J(A)=\mathbf{s}_J(A),$$

- pour tous points $A_1$ et $A_2$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour tous éléments $A_1$ et $A_2$ de $\mathbf{A}_J$] et pour toute flèche $a : A_1 \to A_2$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour toute flèche :

$$a : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \to \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2)$$

de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}$], la flèche :

$$\mathbf{s}^*_J(a) : \mathbf{s}^*_J(A_1) \to_{\mathbf{B}^*} \mathbf{s}^*_J(A_2)$$
$$=$$
$$\mathbf{s}^*_J(a) : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \to_{\mathcal{V}} \mathbf{B}_{\mathrm{Id}(J)}\big(\mathbf{s}^*_J(A_1),\mathbf{s}^*_J(A_2)\big)$$
$$=$$
$$\mathbf{s}^*_J(a) : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \to_{\mathcal{V}} \mathbf{B}_{\mathrm{Id}(J)}\big(\mathbf{s}_J(A_1),\mathbf{s}_J(A_2)\big)$$

est la flèche obtenue par composition des flèches consécutives de $\mathcal{V}_{\mathrm{Id}(J)}$ suivantes :

$$a : \mathtt{PtQUnit}(\mathcal{V},J) \to \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2)$$

et :

$$\mathbf{s}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2) : \mathbf{A}_{\mathrm{Id}(J)}(A_1,A_2) \to \mathbf{B}_{\mathrm{Id}(J)}\big(\mathbf{s}_J(A_1),\mathbf{s}_J(A_2)\big).$$

**3.5.d.** Si $\mathcal{J}$ est une catégorie, si $j : J \to J'$ est une flèche de $\mathcal{J}$, si $\mathcal{V}$ est un $\mathcal{J}$-système tensoriel quasi-catégorique, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux $\mathcal{J}$-systèmes $\mathcal{V}$-enrichis catégoriques et si $\mathbf{s} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un $\mathcal{J}$-morphisme $\mathcal{V}$-enrichi catégorique, on note indifféremment :

$$\mathtt{Compagn}(\mathbf{s},j) = \mathbf{s}^*_j(-,-)$$
$$:$$

$$\mathbf{A}^*_j(\text{-},\text{-}) \Rightarrow \mathbf{B}^*_j(\text{-},\text{-}) \circ \left( (\mathbf{s}^*_J)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{s}^*_{J'} \right)$$

$$:$$

$$(\mathbf{A}^*_J)^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A}^*_{J'} \to \mathcal{V}_j$$

la *transformation naturelle compagnon de* $\mathbf{s}$ *en* $j$, i.e. la transformation naturelle évidemment obtenue lorsqu'on impose que :

- pour tout point $A$ de $\mathbf{A}^*_J$ [i.e. pour tout élément $A$ de $\mathbf{A}_J$] et pour tout point $A'$ de $\mathbf{A}^*_{J'}$ [i.e. pour tout élément $A'$ de $\mathbf{A}_{J'}$], on a :

$$\mathbf{s}^*_j(\text{-},\text{-})(A,A') : \mathbf{A}^*_j(A,A') \to \mathbf{B}^*_j\left(\mathbf{s}^*_J(A),\mathbf{s}^*_{J'}(A')\right)$$

$$=$$

$$\mathbf{s}_j(A,A') : \mathbf{A}_j(A,A') \to \mathbf{B}_j\left(\mathbf{s}_J(A),\mathbf{s}_{J'}(A')\right)$$

[et on note plus simplement :

$$\mathbf{s}^*_j(A,A') = \mathbf{s}_j(A,A') = \mathbf{s}^*_j(\text{-},\text{-})(A,A') \text{ ]}.$$

# 4. Bibliographie


(C.A.M.U.) **J. Bénabou**, Catégories avec multiplication, C.R.A.S. Paris 256, pp. 1887-1990, Paris, 1963.

(C.L.C.A.) **B. J. Day et G. M. Kelly**, Enriched functor categories, in Rep. of the Midwest Category Sem. III, Ed. by S. Mac Lane, Lect. Notes in Math. 106, Springer Verlag, 1969.

.(C.O.G.R.) **D. Duval et C. Lair**, Sketches and specifications : Reference manual, First Part · Compositive Graphs, Rapport de Recherhe du L.A.C.O., 2000, http://www.unilim.fr/laco/rapports.

(I.N.B.I.) **J. Bénabou**, Introduction to bicategories, Rep. of the Midwest Category Sem., Lect. Notes in Math. 47, Springer Verlag, 1967.

(P.T.E.A.) **A. Silga**, Sur les produits tensoriels extérieurs de structures algébriques, Diagrammes 14, Paris, 1985.

(S.E.E.S.) **C. Lair**, Systèmes enrichis d'esquisses, à paraître dans Diagrammes.

(S.T.G.C.) **C. Lair**, Systèmes tensoriels et systèmes enrichis de graphes à composition, à paraître dans Diagrammes.

# 5. Table.



**UNIVERSITE PARIS 7**
**U.F.R. de Mathématiques**
**Case 7012**
**2, place JUSSIEU**
**75251 PARIS CEDEX 05**
**FRANCE**

**lairchrist@aol.com**