P. AGERON

Limites projectives conditionnelles dans les catégories accessibles

Diagrammes, tome 38 (1997), p. 3-18
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1997__38__3_0>

DIAGRAMMES VOLUME 38 , 1998

LIMITES PROJECTIVES CONDITIONNELLES DANS LES CATEGORIES ACCESSIBLES

P. Ageron

RESUME. Soit β un cardinal régulier. Nous caractérisons comme catégories de modèles d'esquisses particulières les catégories β-accessibles possédant les limites projectives conditionnelles ; nous en déduisons que ces catégories sont les objets d'une catégorie cartésienne fermée (les morphismes étant les foncteurs préservant les limites inductives β-filtrantes). Nous indiquons des résultats analogues pour les catégories β-accessibles possédant les limites projectives conditionnelles d'indexation non vide [1] (resp. connexe, simplement connexe).

ABSTRACT. Let β be a regular cardinal. Those β-accessible categories that have consistent (= bounded) limits are characterised as the categories of models of specific sketches. It follows that they are the objects of a Cartesian closed category (where morphisms are functors preserving β-filtered colimits). Similar results are obtained in the more general case of β-accessible categories with non-empty (resp. connected, simply connected) consistent limits.

ZUSAMMENFASSUNG. Sei β eine reguläre Kardinalzahl. Diejenigen β-erreichbaren Kategorien, die alle konditionnellen Limites besitzen, werden als Modellkategorien besonderer Skizzen beschrieben. Daraus folgt, daß diese Kategorien die Objekte einer kartesischen abgeschlossenen Kategorie sind, deren Morphismen die β-filtrierende Kolimites erhaltenden Funktoren sind. Ähnliche Sätze gelten für β-erreichbare Kategorien mit nichtleeren (bzw. zusammenhängenden, einfach zusammenhängenden) konditionnellen Limiten.

[1] Elles ont déjà été caractérisées, un peu différemment, par C. Henry et C. Lair (exposé au "Séminaire Catégories et Structures" de l'Université Paris 7, le 6 Octobre 1995). Le présent travail a été exposé le 4 juillet 1997 au même séminaire.

1. Introduction.

La notion de catégorie ***accessible*** (ou ***modelable***), introduite dans [Lair81], est aujourd'hui bien connue. Il en va de même du résultat fondamental suivant, établi dans [Lair81] : les catégories accessibles sont exactement les catégories esquissables (on trouvera quelques rappels terminologiques succincts à la fin de cette Introduction).

Au-delà de cet énoncé général, un travail de classification des catégories accessibles a été entrepris. Il s'agit, pour diverses propriétés (P), de décrire une variété d'esquisses $\mathcal{E}$ de sorte que les catégories esquissables par une esquisse de $\mathcal{E}$ soient exactement les catégories accessibles qui vérifient la propriété (P). Ainsi, il est classique qu'à la propriété "être complète" correspond la variété des esquisses *projectives*. Si $\mathcal{J}$ est une classe de petites catégories et $(P_{\mathcal{J}})$ la propriété "posséder les limites projectives indexées par un élément de $\mathcal{J}$", on sait dans de nombreux cas décrire une variété d'esquisses (mixtes) correspondante : voir [Guitart-Lair80], [Lair87], [Ageron92], [Ageron95], [Lair96a], [Lair96b], [Lair96c], [Ageron96] et [Lair97].

Dans cet article, nous considérons une autre forme d'affaiblissement de la propriété de complétude : la complétude conditionnelle. Rappelons qu'une catégorie est dite ***conditionnellement complète*** lorsque tout diagramme [2] *qui est la base d'au moins un cône projectif* admet une limite projective. Ainsi, la catégorie des ensembles non vides [3] n'est pas complète, mais elle est conditionnellement complète.

Dans la Section 2, on décrit une variété d'esquisses qui correspond à la propriété (P^-) : "être conditionnellement complète". On montrera au passage que cette propriété est équivalente (pour une catégorie accessible) à "posséder les limites inductives non vides" (voir la remarque qui termine la Section 2).

En couplant ce résultat avec ceux des articles cités plus haut, il est possible de caractériser aussi les affaiblissements conditionnels $(P_{\mathcal{J}}^-)$ de diverses propriétés du type $(P_{\mathcal{J}})$ C'est ce qui est fait ici pour trois cas "classiques" dans les Sections 3 à 5 (seule la Section 5 contient les détails des démonstrations correspondantes).

Pour toutes ces nouvelles variétés d'esquisses, le rang d'accessibilité β de Mod($\boldsymbol{E}$) coïncide avec le plus petit cardinal régulier α qui majore strictement les tailles des indexations des cônes projectifs distingués dans $\boldsymbol{E}$ (on sait qu'en général, on a seulement $\beta \geq \alpha$). Une des conséquences de ce travail est alors l'obtention de nouvelles sous-catégories cartésiennes fermées de la catégorie β-***Acc*** qui a pour objets les

---

[2] Vide ou non vide, contrairement à la définition donnée dans [Adámek97].

[3] Cet exemple ressortit *aussi* à l'étude des catégories accessibles possédant tous les produits, effectuée dans [Lair87].

catégories β-accessibles et pour flèches les foncteurs "β-continus" (i.e. préservant les limites inductives β-filtrantes).

Comme convenu, précisons maintenant notre terminologie. Si $\boldsymbol{A}$ est une catégorie, l'expression "***diagramme*** dans $\boldsymbol{A}$ " désigne tout foncteur d'une *petite* catégorie (appelée ***indexation*** du diagramme) vers $\boldsymbol{A}$. Par abus de langage, on appellera "indexation d'un cône (projectif ou inductif)" l'indexation du diagramme qui lui sert de base. Une ***esquisse*** $\boldsymbol{E}$ est une *petite catégorie* dans laquelle on distingue certains cônes projectifs et/ou inductifs ; un ***modèle*** de $\boldsymbol{E}$ est un foncteur de $\boldsymbol{E}$ vers ***Ens*** qui transforme ces cônes en cônes limite. Une catégorie $\boldsymbol{A}$ est ***esquissable*** si elle est équivalente à la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E})$ des modèles et transformations naturelles d'une certaine esquisse $\boldsymbol{E}$. Pour qu'une catégorie localement petite $\boldsymbol{A}$ soit esquissable, il est nécessaire et suffisant qu'existe un cardinal régulier β tel que :

(a) $\boldsymbol{A}$ possède les limites inductives d'indexation β-filtrante,

(b) sa sous-catégorie pleine $\boldsymbol{A}_\beta$ constituée des objets β-présentables est :

- essentiellement petite [4],
- dense dans $\boldsymbol{A}$,

(c) pour tout objet A de $\boldsymbol{A}$, la catégorie $\boldsymbol{A}_\beta/\mathrm{A}$ est β-filtrante.

Se pliant à un usage qui s'est répandu, on dira que $\boldsymbol{A}$ est β-***accessible*** lorqu'elle vérifie (a), (b) et (c). Il est souvent utile de remplacer (c) par la clause équivalente :

(c') tout diagramme $\delta : \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{A}$ d'indexation β-petite, à valeurs dans $\boldsymbol{A}_\beta$, admet un diagramme localement limite inductive $\lambda : \boldsymbol{L} \to \boldsymbol{A}$, à valeurs dans $\boldsymbol{A}_\beta$,

(un diagramme λ étant dit ***localement limite inductive*** pour δ si, naturellement en tout objet A de $\boldsymbol{A}$, on a :

$$\underset{\mathrm{L} \in \boldsymbol{L}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{LimInd}} \, \mathrm{Hom}(\lambda(\mathrm{L}),\mathrm{A}) \cong \underset{\mathrm{D} \in \boldsymbol{D}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{LimProj}} \, \mathrm{Hom}(\delta(\mathrm{D}),\mathrm{A}) \ .$$

Pour plus de précisions sur ces notions et ces résultats, on renvoie le lecteur aux articles originaux : [Guitart-Lair80], [Lair81], [Lair87].

2. Catégories accessibles conditionnellement complètes.

Commençons par étudier l'existence de limites inductives dans une catégorie conditionnellement complète :

---

[4] Dans la suite, on notera abusivement $\boldsymbol{A}_\beta$ toute catégorie petite qui lui est équivalente.

LEMME 1. *Soient* β *un cardinal régulier et* A *une catégorie* β*-accessible. Supposons que* A *possède les limites projectives conditionnelles. Alors tout diagramme dans* A *d'indexation* β*-petite non vide et à valeurs* β*-présentables admet une limite inductive dans* A *et celle-ci est* β*-présentable.*

PREUVE. Soit δ un diagramme petit non vide. Considérons la catégorie $\mathrm{ConeInd}(\delta)$ dont les objets sont les cônes inductifs dans A de base δ. Alors $\mathrm{ConeInd}(\delta)$ possède les limites projectives quelconques. En effet, δ étant non vide, l'image par le foncteur "sommet" d'un diagramme quelconque dans $\mathrm{ConeInd}(\delta)$ est automatiquement base d'au moins un cône projectif dans A, et admet donc une limite projective, puisque A possède les limites projectives conditionnelles. Ceci crée alors une limite projective dans $\mathrm{ConeInd}(\delta)$. Par ailleurs, il est facile de voir que $\mathrm{ConeInd}(\delta)$ est accessible. Cette catégorie est donc localement présentable, et possède alors un objet initial. Mais un objet initial dans $\mathrm{ConeInd}(\delta)$ n'est rien d'autre qu'une limite inductive pour δ. Enfin, cette dernière est β-présentable si, de plus, δ est β-petit et à valeurs β-présentables, puisqu'elle apparaît comme limite inductive β-petite d'objets β-présentables. FIN DE LA PREUVE.

Pour alléger les énoncés, on conviendra dans cette section du vocabulaire suivant :

DEFINITION 1. Soient $\boldsymbol{I}$ une *petite* catégorie et β un cardinal régulier. On dira que $\boldsymbol{I}$ est β-***intelligente*** si et seulement si elle possède toutes les limites inductives d'indexation *non vide* et β-petite.

REMARQUE. Si $\beta = \aleph_0$, il est équivalent de dire que $\boldsymbol{I}$ admet les conoyaux et les sommes de deux objets.

DEFINITION 2. Soit $\boldsymbol{I}$ une catégorie β-*intelligente*. On dira qu'un diagramme $\iota : \boldsymbol{I} \to A$ est β-***intelligent*** si et seulement s'il préserve les limites inductives d'indexation non vide et β-petite. On dira qu'un foncteur $\gamma : \boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Ens}$ est β-***intelligent*** si et seulement s'il préserve les limites projectives d'indexation non vide et β-petite.

Le lemme suivant est alors essentiellement une réécriture du précédent :

LEMME 2. *Soient* β *un cardinal régulier et* A *une catégorie* β*-accessible. Supposons que* A *possède les limites projectives conditionnelles. Alors il existe un diagramme* $\iota : \boldsymbol{I} \to A$ *initial,* β*-intelligent et à valeurs* β*-présentables.*

PREUVE. D'après le LEMME 1 et les propriétés générales des catégories accessibles, il suffit de considérer la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{I} = A_\beta$ et le foncteur d'inclusion $\iota : \boldsymbol{I} \to A$. FIN DE LA PREUVE.

Si maintenant une catégorie accessible possède des propriétés analogues à celles établies dans les lemmes 1 et 2, alors il est possible (en suivant la méthode de [Lair81]) de l'esquisser d'une façon spécifique :

LEMME 3. *Soient* β *un cardinal régulier et* A *une catégorie* β*-accessible. Supposons que :*

(1) *tout diagramme dans* A, *d'indexation* β*-petite non vide, et à valeurs* β*-présentables, admet une limite inductive (nécessairement* β*-présentable),*

(2) *il existe un diagramme* $\iota : I \to A$ *initial,* β*-intelligent et à valeurs* β*-présentables.*

Alors A *est esquissable par une esquisse* $\mathbf{E}$ *dans laquelle :*

- *pour tout cône projectif distingué* $p = (p_J : \mathrm{S} \to B(\mathrm{J}))_{\mathrm{J} \in J^{\mathrm{op}}}$, *la catégorie* J *est* β*-petite,*
- *pour tout cône inductif distingué* $q = (q_{\mathrm{I}} : B(\mathrm{I}) \to \mathrm{S})_{\mathrm{I} \in I^{\mathrm{op}}}$ *:*
  - (i) *le cône projectif de base vide et de sommet* S *est distingué,*
  - (ii) *pour toute catégorie* J *non vide et* β*-petite et tout foncteur* $\delta : J \to I$, δ *a une limite inductive et le cône projectif* $B(\mathrm{LimInd}\ \delta)$ *est distingué.*

PREUVE. Nous allons mettre en oeuvre la méthode générale de [Lair81] pour esquisser une catégorie β-accessible A donnée. Rappellons qu'elle consiste, pour tout diagramme δ dans A d'indexation β-petite et à valeurs β-présentables, à choisir un diagramme λ dans A, à valeurs β-présentables, qui soit localement limite inductive pour δ. On peut alors, en agrandissant $A_\beta{}^{\mathrm{op}}$, construire une esquisse $\mathbf{E}$ dans laquelle les indexations des cônes projectifs distingués sont celles des différents diagrammes δ (donc β-petites) et les indexations des cônes inductifs distingués sont duales de celles des diagrammes λ correspondants. Ici, on dispose d'informations précises : d'après (1), si δ est non vide, son diagramme localement limite inductive peut être choisi réduit à un objet ; d'après (2), si δ est vide, son diagramme limite inductive peut être choisi indexé par une petite catégorie β-intelligente I. Les cônes inductifs à distinguer dans l'esquisse sont donc tous d'indexation $\mathbf{1}$ (et peuvent alors être omis), à l'exception d'un seul dont le sommet S spécifie un objet final et dont la base B est indexée par I^{op}. De plus, on voit facilement que l'hypothèse (2) assure que, pour tout modèle M de $\mathbf{E}$, le foncteur $M \circ B$ préserve les limites projectives d'indexation β-petite non vide. On peut donc spécifier dans $\mathbf{E}$ la condition supplémentaire de préservation de ces limites sans restreindre la classe de ses modèles : c'est exactement ce qui est exprimé dans (ii). FIN DE LA PREUVE.

Il s'agit ensuite de montrer que, réciproquement, la catégorie des modèles d'une telle esquisse est β-accessible (et non pas seulement accessible) et qu'elle possède les limites projectives conditionnelles. Pour cela, on va la décrire en termes d'objets validant des cônes projectifs, selon le point de vue introduit dans [Guitart-Lair80] et systématisé dans [Lair87].

DEFINITION 3. Soient $p = (p_I : S \to \iota(I))_{I \in \boldsymbol{I}}$ un cône projectif dans une catégorie localement petite $\boldsymbol{C}$ et C un objet de $\boldsymbol{C}$. On dit (classiquement) que C ***valide*** p si et seulement si l'application canonique de $\underset{I \in \boldsymbol{I}^{op}}{\mathrm{LimInd}}\ \mathrm{Hom}(\iota(I),C)$ dans $\mathrm{Hom}(S,C)$ est bijective. On dira que C ***valide β-intelligemment*** p si et seulement si, de plus, la catégorie $\boldsymbol{I}$ et le foncteur $\mathrm{Hom}(\iota(-),C)$ sont β-intelligents.

REMARQUE. Compte tenu du calcul des limites inductives dans ***Ens***, il est possible de donner une forme plus concrète à cette définition. En effet, dire que C valide β-intelligemment p signifie que :

(1) toute flèche f de S vers C s'écrit au moins d'une façon sous la forme $f = h\, p_I$ (avec I objet de $\boldsymbol{I}$ et $h : \iota(I) \to C$),

(2) si on dispose d'un diagramme de flèches $(h_J : \iota(\delta(J)) \to C)_{J \in \boldsymbol{J}^{op}}$ ($\boldsymbol{J}$ étant une catégorie β-petite non vide et δ un foncteur de $\boldsymbol{J}$ vers $\boldsymbol{I}$) tel que $f = h_J\, p_{\delta(J)}$ pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, alors il existe une unique flèche $h : \iota(\mathrm{LimInd}\ \delta) \to C$ telle que, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, la coprojection j_J vérifie $h\ \iota(j_J) = h_J$.

Lorsque la seule clause (1) est réalisée, il sera commode de dire que C ***valide faiblement*** p.

Il est établi dans [Lair87] que la catégorie des modèles d'une esquisse peut toujours être vue comme la sous-catégorie pleine d'une catégorie localement présentable dont les objets sont ceux qui valident certains cônes projectifs. Dans le contexte "β-intelligent", ce principe a la traduction suivante :

LEMME 4. *Soit* $\boldsymbol{E}$ *une esquisse vérifiant (pour un certain cardinal régulier* β*) les propriétés énoncées au lemme 3. Alors il existe une catégorie* $\boldsymbol{C}$ *localement petite et complète et un ensemble de cônes projectifs dans* $\boldsymbol{C}$*, dont le sommet est un objet initial de* $\boldsymbol{C}$ *et l'indexation est une petite catégorie possédant les limites inductives β-petites non vides, tels que la catégorie* $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E})$ *soit équivalente à la sous-catégorie pleine de* $\boldsymbol{C}$ *dont les objets sont ceux qui valident β-intelligemment ces cônes.*

PREUVE. Posons $\boldsymbol{C} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}^-)$ où $\boldsymbol{E}^-$ est l'esquisse obtenue à partir de $\boldsymbol{E}$ en supprimant tous les cônes inductifs distingués, ainsi que [5] les cônes projectifs distingués dont la présence est requise par la condition (ii).

Alors $\boldsymbol{C}$ est localement β-présentable, donc en particulier localement petite et complète.

Considérons dans $\boldsymbol{C}$ l'ensemble des cônes projectifs de la forme $Y(q)$, où Y est le modèle canonique de $(\boldsymbol{E}^-)^{op}$ dans $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}^-) = \boldsymbol{C}$ et où q est un cône inductif distingué de $\boldsymbol{E}$. Il est classique (et facile à vérifier) qu'un modèle M de $\boldsymbol{E}^-$ dans ***Ens*** valide les $Y(q)$ si et seulement si les $M(q)$ sont des limites inductives dans ***Ens***. Il est

[5] L'expression qui suit présente une certaine ambiguïté, de peu d'importance puisque le lemme reste vrai si on se borne à supprimer les cônes inductifs ! L'exposition nous a semblé plus claire ainsi.

alors clair que M valide β-*intelligemment* ces mêmes $Y(q)$ si et seulement si M est un modèle de $\boldsymbol{E}$. FIN DE LA PREUVE.

Il ne reste donc plus, pour conclure, qu'à établir les deux lemmes suivants :

LEMME 5. *Soient* $\boldsymbol{C}$ *une catégorie localement petite complète et* p *un cône projectif dans* $\boldsymbol{C}$, *dont le sommet est un objet initial de* $\boldsymbol{C}$ *et l'indexation une catégorie β-intelligente. Alors la sous-catégorie pleine de* $\boldsymbol{C}$ *dont les objets sont ceux qui valident β-intelligemment* p *est fermée dans* $\boldsymbol{C}$ *par limites projectives conditionnelles.*

PREUVE. Posons $p = (p_{\mathrm{I}} : 0 \to \iota(\mathrm{I}))_{\mathrm{I} \in \boldsymbol{I}}$ (où $\boldsymbol{I}$ est une petite catégorie β-intelligente). Soient $\boldsymbol{G}$ une petite catégorie et $\gamma : \boldsymbol{G} \to \boldsymbol{C}$ un diagramme d'objets qui valident β-intelligemment p. Supposons que la limite projective C de γ existe et notons $\pi_{\mathrm{G}} : \mathrm{C} \to \gamma(\mathrm{G})$ les projections correspondantes. Supposons par ailleurs qu'il existe un cône projectif de base γ dont le sommet N valide β-intelligemment p. Nous allons montrer que, dans ces conditions, C valide β-intelligemment p.

Commençons par étudier la clause (1). Remarquons d'abord qu'il n'existe qu'une seule flèche $f : 0 \to \mathrm{C}$. D'après la clause (1) pour N, il existe un objet I de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $h : \iota(\mathrm{I}) \to \mathrm{N}$. Par la propriété universelle de la limite projective, on dispose d'une flèche ϕ de N vers C. Il suffit alors de considérer $\phi\, h$ pour conclure.

Etablissons ensuite la clause (2). On suppose que l'on dispose d'un diagramme de flèches $(h_{\mathrm{J}} : \iota(\delta(\mathrm{J})) \to \mathrm{C})_{\mathrm{J} \in \boldsymbol{J}}$ où $\boldsymbol{J}$ est une catégorie β-petite non vide et δ un foncteur de $\boldsymbol{J}$ vers $\boldsymbol{I}$. Pour chaque G, formons le diagramme $(\pi_{\mathrm{G}}\, h_{\mathrm{J}} : \iota(\delta(\mathrm{J})) \to \gamma(\mathrm{G}))_{\mathrm{J} \in \boldsymbol{J}}$. D'après la clause (2) pour $\gamma(\mathrm{G})$, il existe une unique flèche $g_{\mathrm{G}} : \iota(\mathrm{LimInd}\ \delta) \to \gamma(\mathrm{G})$ telle que, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, la coprojection j_{J} vérifie $g_{\mathrm{G}}\ \iota(j_{\mathrm{J}}) = \pi_{\mathrm{G}}\, h_{\mathrm{J}}$. D'après l'unicité de g_{G}, on voit qu'on construit ainsi un cône projectif de base γ et donc, par la propriété universelle de C, une flèche $g : \iota(\mathrm{LimInd}\ \delta) \to \mathrm{C}$ telle que $\pi_{\mathrm{G}}\, g = g_{\mathrm{G}}$ pour tout G. Pour tout J et tout G, on a alors $\pi_{\mathrm{G}}\, g\ \iota(j_{\mathrm{J}}) = g_{\mathrm{G}}\ \iota(j_{\mathrm{J}}) = \pi_{\mathrm{G}}\, h_{\mathrm{J}}$, donc $g\ \iota(j_{\mathrm{J}}) = h_{\mathrm{J}}$ pour tout J FIN DE LA PREUVE.

LEMME 6. *Soient* β *un cardinal régulier,* $\boldsymbol{C}$ *une catégorie localement β-présentable,* 0 *un objet initial de* $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{I}$ *une catégorie β-intelligente,* $\iota : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{C}$ *un foncteur à valeurs β-présentables et* p *le cône projectif* $(p_{\mathrm{I}} : 0 \to \iota(\mathrm{I}))_{\mathrm{I} \in \boldsymbol{I}}$. *Alors la sous-catégorie pleine* $\boldsymbol{A}$ *de* $\boldsymbol{C}$ *dont les objets sont ceux qui valident β-intelligemment* p *est β-accessible.*

PREUVE. On va vérifier successivement les clauses (a), (c') et (b).

La clause (a) résulte bien sûr de la commutation dans ***Ens*** entre limites inductives β-filtrantes et limites projectives β-petites (commutation qui montre que, de plus, le foncteur injection canonique $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ crée les limites inductives.d'indexation β-filtrante).

Montrons (c'). Soit δ un diagramme d'indexation β-petite à valeurs dans A_β : admet-il un diagramme localement limite inductive dans A, à valeurs dans A_β? Commençons par calculer dans C la limite inductive $\mathrm{L} = \mathrm{LimInd}\,\delta$. On va en quelque sorte "forcer" L à valider β-intelligemment p, ou plus précisément engendrer à partir de L un "diagramme β-intelligemment libre" λ_L d'objets qui valident p. Remarquons ici qu'il est équivalent, pour un objet de C, de demander qu'il valide β-intelligemment p, ou bien de demander qu'il valide faiblement p tout en validant (au sens ordinaire) les cônes projectifs canoniques p_μ d'indexation $\mathbf{1}$, de base $\mathrm{LimInd}\,\mu$ et de sommet $\mathrm{LimInd}(\imath \circ \mu)$ (pour tout $\mu : J \to I$, avec J non vide et β-petite). Construisons donc, dans un premier temps, le diagramme $(\mathrm{L} + \imath(\mathrm{I}))_{\mathrm{I} \in I}$: ses valeurs valident faiblement p (par construction). Dans un deuxième temps, on remarque que tout objet X de C engendre librement un objet $F(\mathrm{X})$ qui valide les cônes p_μ (noter que ceux-ci forment un ensemble). On construit alors le diagramme $\lambda_\mathrm{L} = (F(\mathrm{L} + \imath(\mathrm{I})))_{\mathrm{I} \in I}$: ces valeurs valident β-intelligemment p (par construction) et il est clair que λ_L est un diagramme localement limite inductive pour δ. Dans un dernier temps, on vérifie sans difficulté (par calcul de limites inductives et puisque le foncteur injection canonique $A \to C$ crée les limites inductives d'indexation β-filtrante) que les restrictions à la sous-catégorie pleine A de C des foncteurs $\mathrm{Hom}_C(\mathrm{L} + \imath(\mathrm{I}),\text{-})$ préservent les limites inductives d'indexation β-filtrante [6]. D'où l'on déduit ("par adjonction") que les foncteurs $\mathrm{Hom}_A(F(\mathrm{L} + \imath(\mathrm{I})),\text{-})$ les préservent aussi, autrement dit que λ_L est bien à valeurs β-présentables.

Terminons alors par (b) : il s'agit de montrer que $\mathrm{Mod}(E)_\beta$ est dense dans $\mathrm{Mod}(E)$. La théorie des esquisses projectives enseigne que le comodèle canonique $Y^{\mathrm{op}} : E^{-\,\mathrm{op}} \to \mathrm{Mod}(E^-)$ est dense et que ses valeurs sont β-présentables dans $\mathrm{Mod}(E^-)$ - donc aussi dans $\mathrm{Mod}(E)$. On considère alors la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}(E)$ dont les objets sont ceux des diagrammes $\lambda_{Y(\mathrm{E})}$ pour E objet de E. Cette catégorie est dense dans $\mathrm{Mod}(E)$; or elle est contenue dans $\mathrm{Mod}(E)_\beta$, qui est donc a fortiori dense dans $\mathrm{Mod}(E)$. FIN DE LA PREUVE.

En rassemblant les acquis des lemmes 1 à 6, nous pouvons conclure :

THEOREME 1. *Soient C une catégorie et β un cardinal régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *C est β-accessible et conditionnellement complète,*
- *C est esquissable par une esquisse E dans laquelle :*

---

[6] Bien entendu, rien n'assure que les objets β-présentables de la sous-catégorie pleine A de C sont des objets β-présentables de C. Si tel était le cas, on en déduirait immédiatement que les $\mathrm{L} + \imath(\mathrm{I})$ sont des objets β-présentables de C, mais ce ne sont - en général - que des objets de C "***relativement*** β-présentables", i.e. non vis-à-vis de la totalité de C, mais seulement vis-à-vis de sa sous-catégorie pleine A.

- *pour tout cône projectif distingué* $p = (p_J : S \to B(J))_{J \in J^{op}}$, *la catégorie* J *est β-petite,*
- *pour tout cône inductif distingué* $q = (q_I : B(I) \to S)_{I \in I^{op}}$:
  - (i) *le cône projectif de base vide et de sommet* S *est distingué,*
  - (ii) *pour toute catégorie* J *non vide et* β*-petite et tout foncteur* $\delta : J \to I$, δ *a une limite inductive et le cône projectif* $B(\mathrm{LimInd}\ \delta)$ *est distingué.*

COROLLAIRE 1. *La catégorie dont les objets sont les catégories* β*-accessibles conditionnellement complètes et dont les flèches sont les foncteurs préservant les limites inductives* β*-filtrantes est cartésienne fermée.*

PREUVE. Il suffit d'applique le théorème 4.3 de [Ageron92] : en effet, la classe des esquisses obtenues dans le théorème 1 ci-dessus satisfait manifestement les hypothèses de ce théorème 4.3. FIN DE LA PREUVE.

REMARQUE. Il résulte clairement des démonstrations précédentes que les catégories β-accessibles conditionnellement complètes sont exactement les catégories β-accessibles qui possèdent les limites inductives non vides. Or il est intéressant de remarquer qu'un résultat similaire au corollaire 1 a été prouvé dans [Ageron95] au sujet de la catégorie des catégories β-accessibles qui possèdent les limites *projectives* non vides. On a donc deux sous-catégories cartésiennes fermées, non comparables pour l'inclusion, de la catégorie de toutes les catégories β-accessibles (laquelle, rappelons-le, *n'est pas* cartésienne fermée). L'intersection de ces deux sous-catégories a pour objets la catégorie vide et les catégories localement β-présentables.

3. Catégories accessibles à limites projectives non vides conditionnelles.

Rappelons que les catégories β-accessibles possédant les limites projectives d'indexation non vides sont aussi celles qui possèdent les limites inductives conditionnelles. Elles ont été caractérisées en termes d'esquisses dans [Ageron95] [7]. De leur caractérisation résulte [8] qu'elles sont les objets d'une catégorie cartésienne fermée ([Ageron95]).

---

[7] L'idée essentielle de la démonstration a été donnée par C. Lair : une limite inductive conditionnelle peut être vue comme un diagramme localement limite inductive d'indexation vide ou ***1***.

[8] Ce résultat est démontré par une méthode directe dans [Adámek97].

Plus généralement, considérons les catégories β-accessibles possédant les limites projectives conditionnelles d'indexation non vide. Alors il est possible de montrer qu'elles sont aussi celles qui possèdent les limites inductives conditionnelles d'indexation non vide [9], de les caractériser en termes d'esquisses particulières et d'en déduire qu'elles sont les objets d'une catégorie cartésienne fermée.

Plus précisément, on laisse au lecteur le soin d'établir la caractérisation suivante, en s'inspirant du cas particulier traité dans la Section 2 et/ou du cas plus général traité dans la Section 5 :

THEOREME 2. *Soient* C *une catégorie et* β *un cardinal régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- C *est* β*-accessible et possède les limites projectives non vides conditionnelles,*
- C *est esquissable par une esquisse* $\mathbf{E}$ *dans laquelle :*
    - *pour tout cône projectif distingué* $p = (p_{\mathrm{J}} : \mathrm{S} \to B(\mathrm{J}))_{\mathrm{J} \in \mathcal{J}^{op}}$, *la catégorie* $\boldsymbol{J}$ *est β-petite,*
    - *pour tout cône inductif distingué* $q = (q_{\mathrm{I}} : B(\mathrm{I}) \to \mathrm{S})_{\mathrm{I} \in \mathcal{I}^{op}}$ *d'indexation* ***non vide :***

        (i) *le cône projectif de base vide et de sommet* S *est distingué,*

        (ii) *pour toute catégorie* $\boldsymbol{J}$ *non vide et* β*-petite et tout foncteur* $\delta : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$ *:*

        - *si* δ *est base d'un cône inductif dans* $\boldsymbol{I}$, *alors* δ *a une limite inductive et le cône projectif* $B(\mathrm{LimInd}\ \delta)$ *est distingué,*
        - *sinon, il y a un cône projectif distingué :*

$$(p_{\mathrm{J}} : \mathrm{S}' \to B(\delta(\mathrm{J})))_{\mathrm{J} \in \mathcal{J}^{op}}$$

et un cône inductif distingué d'indexation vide et de sommet S'.

Le lecteur pressé remarquera au moins que cette description explicite d'esquisses est cohérente, au sens où les cônes projectifs dont l'existence est requise dans (i) ou (ii) sont d'indexation β-petite et les cônes inductifs dont l'existence est requise dans (ii) sont d'indexation vide.

Enonçons aussi :

COROLLAIRE 2. *La catégorie dont les objets sont les catégories* β*-accessibles possédant les limites projectives non vides conditionnelles et dont les flèches sont les foncteurs préservant les limites inductives* β*-filtrantes est cartésienne fermée.*

---

[9] Ce résultat figure déjà dans [Adámek97].

4. Catégories accessibles à limites projectives connexes conditionnelles.

Rappelons que les catégories β-accessibles possédant les limites projectives d'indexation connexe sont aussi celles qui possèdent les multilimites inductives au sens de [Diers80]. Elles ont été caractérisées en termes d'esquisses dans [Guitart-Lair80]. De leur caractérisation résulte qu'elles sont les objets d'une catégorie cartésienne fermée ([Ageron95]).

Plus généralement, considérons les catégories β-accessibles possédant les limites projectives *conditionnelles* d'indexation connexe. Alors il est possible de montrer qu'elles sont aussi celles qui possèdent les multilimites inductives d'indexation non vide, de les caractériser en termes d'esquisses particulières et d'en déduire qu'elles sont les objets d'une catégorie cartésienne fermée.

Plus précisément, on laisse au lecteur le soin d'établir la caractérisation suivante, en s'inspirant du cas particulier traité dans la Section 2 et/ou du cas plus général traité dans la Section 5 :

THEOREME 3. *Soient C une catégorie et β un cardinal régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- *C est β-accessible et possède les limites projectives connexes conditionnelles,*
- *C est esquissable par une esquisse $\mathbf{E}$ dans laquelle :*
    - *pour tout cône projectif distingué $p = (p_J : S \to B(J))_{J \in \mathcal{J}^{op}}$, la catégorie $\mathcal{J}$ est β-petite,*
    - *pour tout cône inductif distingué $q = (q_I : B(I) \to S)_{I \in \mathcal{I}^{op}}$ d'indexation **non discrète** on a les propriétés suivantes :*
        - (i) *le cône projectif de base vide et de sommet S est distingué,*
        - (ii) *pour toute catégorie $\mathcal{J}$ non vide et β-petite et tout foncteur $\delta : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$, δ a une multilimite inductive $\lambda : \mathcal{L} \to \mathcal{I}$ et il y a un cône projectif distingué :*

$$(p_J : S' \to B(\delta(J)))_{J \in \mathcal{J}^{op}}$$

et un cône inductif distingué :

$$(q'_L : B(\delta(L)) \to S')_{L \in \mathcal{L}^{op}}$$

tels que, pour tout couple (J,L), la (duale de la) "multicoprojection" $j_{JL} : \delta(J) \to \lambda(L)$ soit égale (dans $\mathbf{E}$) à $p_J\, q'_L$.

Le lecteur pressé remarquera au moins que cette description explicite d'esquisses est cohérente, au sens où les cônes projectifs dont l'existence est requise dans (i) ou (ii) sont d'indexation β-petite et les cônes inductifs dont l'existence est requise dans (ii) sont d'indexation discrète.

Enonçons aussi :

COROLLAIRE 3. *La catégorie dont les objets sont les catégories β-accessibles possédant les limites projectives connexes conditionnelles et dont les flèches sont les foncteurs préservant les limites inductives β-filtrantes est cartésienne fermée.*

5. Catégories à grands produits fibrés conditionnels.

Rappelons que les catégories β-accessibles possédant les grands produits fibrés [10, 11] sont aussi celles qui possèdent les *polylimites inductives* au sens de [Lamarche88]. Elles ont été caractérisées en termes d'esquisses dans [Ageron92]. De leur caractérisation résulte qu'elles sont les objets d'une catégorie cartésienne fermée ([Ageron92]).

Plus généralement, nous allons étudier dans cette section les catégories β-accessibles possédant les grands produits fibrés *conditionnels*. Pour avoir un exemple assez représentatif [12] de cette classe de catégories, il suffit , ayant fixé un corps commutatif K_0 et un polynôme $P \in K_0[X]$, de considérer la catégorie des extensions de K_0 dans lesquelles P a au moins une racine.

Expliquons comment il est possible de montrer que ces catégories β-accessibles sont aussi celles qui possèdent les polylimites inductives d'indexation non vide, de les caréctériser en termes d'esquisses particulières et d'en déduire qu'elles sont les objets d'une catégorie cartésienne fermée. Le cas étant un peu plus complexe que les précédents, nous allons procéder ici à quelques rappels.

Rappelons d'abord qu'un diagramme λ est dit ***polylimite inductive*** pour δ si, naturellement en tout objet A de $\mathcal{A}$, on a :

---

[10] Un grand produit fibré est une limite projective indexée par une petite catégorie ayant un objet final - ou plus généralement par une petite catégorie "simplement connexe".

[11] Sur ces catégories, appelées localement β-polyprésentables, on pourra consulter : [Lamarche88], [Ageron92], [Hébert97], [Hu-Tholen96].

[12] Remarquons cependant que cette catégorie possède aussi (inconditionnellement) les limites projectives d'indexation cofiltrante.

$$\coprod^{\sim}_{L \in \boldsymbol{L}^{op}} \mathrm{Hom}(\lambda(L), A) \cong \mathop{\mathrm{LimProj}}_{D \in \boldsymbol{D}^{op}} \mathrm{Hom}(\delta(D), A)$$

où le symbole $\coprod^{\sim}$ désigne une limite inductive ***libre*** [13], ce qui signifie que :

- $\boldsymbol{L}$ est un groupoïde squelettique,
- pour tous objets A de $\boldsymbol{A}$ et L de $\boldsymbol{L}$, pour toute flèche $z : \lambda(L) \to A$, si $z\,\lambda(\ell) = z$ alors $\ell = \mathrm{id}_L$.

Il s'agit donc d'un cas particulier de diagramme localement limite inductive, dont l'intérêt est qu'il bénéficie des mêmes propriétés simples que celles connues pour les multilimites inductives. Ainsi la polylimite inductive d'un diagramme δ, si elle existe, est uniquement déterminée à un isomorphisme près (pour $\boldsymbol{L}$ et pour chaque $\lambda(L)$). De plus, la polylimite inductive d'un diagramme d'indexation β-petite et à valeurs β-présentables est encore à valeurs β-présentables.

On définit, par analogie, la notion de ***polyobjet librement engendré*** par un objet L donné, et on a aussi pour cette notion des propriétés d'unicité et de conservation de la β-présentabilité. [14]

Ceci étant précisé, il est clair que les lemmes 1 et 2 de la Section 2 restent valables, à condition de substituer aux définitions 1 et 2 celles qui suivent :

DEFINITION 1'. Soient $\boldsymbol{I}$ une *petite* catégorie et β un cardinal régulier. On dit que $\boldsymbol{I}$ est β-***polyintelligente*** si et seulement si elle possède toutes les polylimites inductives d'indexation *non vide* et β-petite.

DEFINITION 2'. Soit $\boldsymbol{I}$ une catégorie β-*polyintelligente*. On dit qu'un diagramme $\iota : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{A}$ est β-***polyintelligent*** si et seulement s'il préserve les polylimites inductives d'indexation non vide et β-petite. On dit qu'un foncteur $\gamma : \boldsymbol{I}^{op} \to \boldsymbol{Ens}$ est β-***polyintelligent*** si et seulement si, pour toute catégorie $\boldsymbol{J}$ non vide et β-petite et tout foncteur $\delta : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{I}$, on a :

$$\mathop{\mathrm{Lim\,Proj}}_{J \in \boldsymbol{J}^{op}} \gamma(\delta(J)) = \coprod^{\sim}_{L \in \boldsymbol{L}^{op}} \gamma(\lambda(L))$$

où λ est *le* diagramme polylimite inductive de δ.

Compte tenu de la manière de spécifier dans une esquisse des limites inductives libres qui est mise en oeuvre dans [Ageron92], on obtient aisément un analogue du lemme 3. Il est alors facile d'adapter les énoncés et les démonstrations des lemmes 4 à 6

---

[13] Ce type de limite inductive a été considéré d'abord dans [Ageron92], puis (sous le nom de "quasicoproduit") dans [Hu-Tholen96], auquel la notation $\coprod^{\sim}$ est empruntée. Il a été généralisé dans [Ageron95].

[14] Propriétés établies respectivement dans [Lair83] et [Ageron92].

(utilisant, pour ce dernier, le fait que les polyobjets libres conservent la présentabilité ne serait-ce que "relative" - au sens de la Note 6). On obtient finalement la caractérisation suivante :

THEOREME 4. *Soient* C *une catégorie et* β *un cardinal régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- C *est* β*-accessible et possède les grands produits fibrés conditionnels,*

- C *est esquissable par une esquisse* $\mathbf{E}$ *dans laquelle :*

    - *pour tout cône projectif distingué* $p = (p_J : \mathrm{S} \to B(\mathrm{J}))_{\mathrm{J} \in J^{op}}$, *la catégorie* J *est* β*-petite,*

    - *pour tout cône inductif distingué* $q = (q_\mathrm{I} : B(\mathrm{I}) \to \mathrm{S})_{\mathrm{I} \in I^{op}}$, *on a soit la propriété* (A), *soit les propriétés* (B)(i) *et* (B)(ii) *suivantes :*

        (A) *pour toute flèche* i *de* I *qui n'est pas une identité,* i *est un automorphisme d'un certain objet* I, *et il y a un cône projectif distingué de sommet* S' *et de base les flèches parallèles* $(B(\mathrm{i}), \mathrm{id}_{B(\mathrm{I})})$ *et un cône inductif distingué de sommet* S' *et de base vide,*

        (B) (i) *le cône projectif de base vide et de sommet* S *est distingué,*

        (ii) *pour toute catégorie* J *non vide et* β*-petite et tout foncteur* $\delta : J \to I$, δ *a une polylimite inductive* $\lambda : L \to I$ *et il y a un cône projectif distingué* $(q'_\mathrm{L} : B(\delta(\mathrm{L})) \to \mathrm{S}')_{\mathrm{L} \in L^{op}}$ *tels que, pour tout couple* (J,L), *la (duale de la) "polycoprojection"* $\mathrm{j}_{\mathrm{JL}} : \delta(\mathrm{J}) \to \lambda(\mathrm{L})$ *soit égale (dans* $\mathbf{E}$*) à* $p_\mathrm{J}\, q'_\mathrm{L}$.

Le lecteur pressé remarquera au moins que cette description explicite d'esquisses est cohérente, au sens où les cônes projectifs dont l'existence est requise dans (A), (B)(i) ou (B)(ii) sont d'indexation β-petite et les cônes inductifs dont l'existence est requise dans (A) ou (B)(ii) vérifient soit (A), soit la conjonction de (B)(i) et (B)(ii).

Enonçons aussi :

COROLLAIRE 4. *La catégorie dont les objets sont les catégories* β*-accessibles possédant les grands produits fibrés conditionnels et dont les flèches sont les foncteurs préservant les limites inductives* β*-filtrantes est cartésienne fermée.*

6. Bibliographie.

[Adámek97] **J. Adamek**, *A categorical generalization of Scott domains*, Mathematical Structures in Computer Science 5 (1997), 419-443.

[Ageron92] **P. Ageron**, *The logic of structures*, Journal of Pure and Applied Algebra 79 (1992), 15-34.

[Ageron95] **P. Ageron**, *Catégories accessibles à limites projectives non vides et catégories accessibles à limites projectives finies*, Diagrammes 34 (1995), 1-10.

[Ageron96] **P. Ageron**, *Catégories accessibles à produits fibrés*, Diagrammes 36 (1996), 1-11.

[Diers80] **Y. Diers**, *Catégories localement multiprésentables*, Archiv der Mathematik 64 (1980), 344-356.

[Guitart-Lair80] **R. Guitart et C. Lair**, *Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes*, Diagrammes 4 (1980), 1-106.

[Hébert97] **M. Hébert**, *Syntactic characterization of closure under pullbacks and of locally polypresentable categories*, Annals of Pure and Applied Logic 84 (1997), 73-96.

[Hu-Tholen96] **H. Hu and W. Tholen**, *Quasi-coproducts and accessible categories with wide pullbacks*, Applied Categorical Structures 4 (1996), 387-402.

[Lair81] **C. Lair**, *Catégories modelables et catégories esquissables*, Diagrammes 17 (1981), L1-L20.

[Lair83] **C. Lair**, *Diagrammes localement libres, extensions de corps et théorie de Galois*, Diagrammes 10 (1983), L1-L17.

[Lair87] **C. Lair**, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17 (1987), 1-153.

[Lair96a] **C. Lair**, *Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant un objet terminal*, Diagrammes 35 (1996), 3-23.

[Lair96b] **C. Lair**, *Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les produits de deux*, Diagrammes 35 (1996), 25-52.

[Lair96c] **C. Lair**, *Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les limites d'indexations finies (resp. finies et non vides, finies et connexes, finies et connexes et non vides)*, Diagrammes 35 (1996), 53-90.

[Lair97] **C. Lair**, *Sur le profil d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les noyaux*, Diagrammes 38 (1997), 19-78.

[Lamarche88] **F. Lamarche**, *Modelling polymorphism with categories*, thesis. McGill University, Montréal, 1988.

[Taylor90] **P. Taylor**. *Locally finitely polypresentable categories*, manuscript. Imperial College, London, 1990.

Equipe Structure Discrètes
et Analyse Diophantienne
(C.N.R.S. E.S.A. 6081)

Université de Caen
14032 CAEN CEDEX
FRANCE

ageron@math.unicaen.fr