C. LAIR

Sur le profil d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les noyaux

Diagrammes, tome 38 (1997), p. 19-78
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1997__38__19_0>

SUR LE PROFIL D'ESQUISSABILITE DES CATEGORIES MODELABLES (ACCESSIBLES [1]) POSSEDANT LES NOYAUX

C. Lair

1. Introduction.

Dans le présent travail, nous prouvons que les catégories modelables (accessibles) possédant les noyaux sont exactement (à l'équivalence près) les catégories de modèles d'esquisses petites où l'ensemble (a priori *épars*) des co-cônes distingués peut être *organisé* en "paquets" *spécifiques* et, ce, de telle manière que, pour les modèles, transformer chaque tel paquet de co-cônes distingués en un paquet de co-limites signifie exactement transformer l'un (bien précis) des co-cônes de ce paquet en une *sur-co-limite*, c'est-à-dire en une co-limite dont est *précisée* - à l'aide de formules du premier odre, i.e. à l'aide des *autres* co-cônes distingués du paquet, qui représentent ces formules - la *manière* dont elle est co-limite.

Pour obtenir ce résultat, il *suffit* d'utiliser *systématiquement* (comme préconisé en [C.Q.C.E.], notamment en son Appendice) les notions et méthodes générales antérieurement introduites en [C.M.C.F.] et/ou [C.M.C.E.] et/ou [C.Q.C.E.], fondamentalement :

---

[1] En américain, "catégories modelables" semble devoir se traduire par "accessible categories of Makkaï-Paré" ...

- celle de *diagramme* (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) *localement co-limite* (évidemment dérivée de celle de *diagramme localement libre*),
- celle d'objet d'une catégorie (localement petite) *satisfaisant* un cône (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) de cette catégorie,

puis, en ce qui concerne les regroupements par "paquets" (qui ne sont que des cas particuliers de ces "esquisses d'ordre supérieur", que sont les *trames* introduites en [T.S.S.T.]) :

- celle de *diagramme* (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) *localement sur-co-limite* (i.e. localement co-limite mais pour lequel est *précisée* - à l'aide de formules du premier ordre ayant un certain *profil* - la *manière* dont il est localement co-limite),
- celle d'objet d'une catégorie (localement petite) *sur-satisfaisant* un *sur-cône* (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) de cette catégorie (i.e. satisfaisant un cône, mais pour lequel est précisée - à l'aide de formules du premier ordre ayant un certain *profil*, ou encore à l'aide d'un certain paquet, associé, d'autres cônes à satisfaire - la manière dont il satisfait ce cône),

enfin :

- celle d'*invariance* (éventuelle), à la dualité près, du *profil* tant des paquets de cônes à satisfaire que de certains (parmi tous les possibles) diagrammes localement sur-co-limites existant dans la sous catégorie pleine des objets sur-satisfaisant ces sur-cônes.

Nous nous sommes donc évertué à les rappeler (une fois de plus ...) et à les détailler, tout au long du texte, avec le degré de généralité approprié, exactement là où leur usage s'impose.

2. Sur l'existence des noyaux dans certaines catégories qualifiables.

2.1. Catégories qualifiables.

Supposons que $\boldsymbol{I}$ est une catégorie.

On note $\mathrm{C}(\boldsymbol{I})$ la catégorie (*cône type d'indexation* $\boldsymbol{I}$) obtenue en adjoignant à $\boldsymbol{I}$ un objet initial (*sommet type*) $\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})$ et, par conséquent, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, une unique flèche (*projection type en* I) $\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}) : \mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}) \to \mathrm{I}$.

Alors, on désigne par $\mathrm{B}(\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \mathrm{C}(\boldsymbol{I})$ le foncteur (*base type*) injection canonique.

Si X est une catégorie, un foncteur $U : \mathrm{C}(I) \to X$ est appelé *cône d'indexation* I, de *base* $U \circ \mathrm{B}(I) : I \to X$, de *sommet* $U(\mathrm{Sm}(I))$ et ayant $U(\mathrm{p}(I)(\mathrm{I})) : U(\mathrm{Sm}(I)) \to U(\mathrm{I})$ pour *projection en* I, quand $\mathrm{I} \in \mathrm{Ob}(I)$.

En particulier, un tel cône peut évidemment être un *cône limite*.

Supposons que J est une catégorie.

On désigne par $\mathrm{CC}(J) = \mathrm{C}(J^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ la catégorie (*co-cône type de co-indexation* J) obtenue en adjoignant à J un objet terminal (*co-sommet type*) $\mathrm{CSm}(J) = \mathrm{Sm}(J^{\mathrm{op}})$ et, par conséquent, pour tout objet J de J, une unique flèche (*co-projection type en* J) $\mathrm{cp}(J)(\mathrm{J}) = \mathrm{p}(J^{\mathrm{op}})(\mathrm{J}) : \mathrm{J} \to \mathrm{CSm}(J)$.

Alors, on désigne par $\mathrm{CB}(J) : J \to \mathrm{CC}(J)$ le foncteur (*co-base type*) injection canonique.

Si X est une catégorie, un foncteur $V : \mathrm{CC}(J) \to X$ est appelé *co-cône de co-indexation* J, de *co-base* $V \circ \mathrm{CB}(J) : J \to X$, de *co-sommet* $V(\mathrm{CSm}(J))$ et ayant $V(\mathrm{cp}(J)(\mathrm{J})) : V(\mathrm{J}) \to V(\mathrm{CSm}(J))$ pour *co-projection en* J, quand $\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(J)$.

En particulier, un tel co-cône peut évidemment être un *co-cône co-limite*.

Supposons que X est une catégorie *localement petite*.

Comme en [C.Q.C.E.], si $U : \mathrm{C}(I) \to X$ est un cône d'indexation petite et si X est un objet de X, on dit que X *satisfait* U [2] si :

- le co-cône $X(U(-),\mathrm{X}) : \mathrm{CC}(I^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(I)^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Ens}$ est un co-cône co-limite.

Compte tenu du calcul des co-limites dans $\boldsymbol{Ens}$, il est facile de voir que X satisfait U si, et seulement si :

- (SAT 1) pour toute flèche $\mathrm{x} : U(\mathrm{Sm}(I)) \to \mathrm{X}$ de X, il existe un objet I de I et une flèche $\mathrm{y} : U(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de X telle que $\mathrm{y}.U(\mathrm{p}(I)(\mathrm{I})) = \mathrm{x}$ (alors, on pourra dire que y est une *factorisation de* x *par* U),
- (SAT 2) pour tous objets I' et I'' de I et pour toutes flèches $\mathrm{y}' : U(\mathrm{I}') \to \mathrm{X}$ et $\mathrm{y}'' : U(\mathrm{I}'') \to \mathrm{X}$ de X telles que $\mathrm{y}'.U(\mathrm{p}(I)(\mathrm{I}')) = \mathrm{y}''.U(\mathrm{p}(I)(\mathrm{I}''))$, il existe un entier $\mathrm{n} \geq 1$, un *zigzag* de flèches de I :

$$\xi^{\circ} = (\mathrm{z}^{\circ}_{\mathrm{k}})_{1 \leq \mathrm{k} \leq 2\mathrm{n}} : \mathrm{I}' = \mathrm{Z}^{\circ}_1 \xleftarrow[\mathrm{z}^{\circ}_1]{} \mathrm{Z}^{\circ}_2 \xrightarrow[\mathrm{z}^{\circ}_2]{} \mathrm{Z}^{\circ}_3 \ldots$$
$$\ldots \mathrm{Z}^{\circ}_{2\mathrm{n}-1} \xleftarrow[\mathrm{z}^{\circ}_{2\mathrm{n}-1}]{} \mathrm{Z}^{\circ}_{2\mathrm{n}} \xrightarrow[\mathrm{z}^{\circ}_{2\mathrm{n}}]{} \mathrm{Z}^{\circ}_{2\mathrm{n}+1} = \mathrm{I}''$$

et une famille $\mathrm{y}^{\circ} = (\mathrm{y}^{\circ}_{\mathrm{k}} : U(\mathrm{Z}^{\circ}_{\mathrm{k}}) \to \mathrm{X})_{1 \leq \mathrm{k} \leq 2\mathrm{n}+1}$ de flèches de X telles que :

---

[2] Evidemment, la notion de *satisfaction* généralise aux cas de cônes d'indexations non nécessairement discrètes tant la notion d'*orthogonalité* que celle d'*objet injectif* (voir [C.Q.C.E.] pour une discussion plus complète sur ce thème).

* $y' = y^\circ_1$ et $y^\circ_{2n+1} = y''$,
* $y^\circ_{2h-1}.U(z^\circ_{2h-1}) = y^\circ_{2h} = y^\circ_{2h+1}.U(z^\circ_{2h})$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$,

(alors, on pourra dire que la famille y° *connecte* y' *à* y'' *le long de* ξ°).

Si $\mathcal{U}$ est un ensemble de cônes de $\boldsymbol{X}$ d'indexations petites et si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, on dit qu'il *satisfait* $\mathcal{U}$ si :

* X satisfait tout cône appartenant à $\mathcal{U}$.

Comme en [C.Q.C.E.], on dit alors que $\mathcal{U}$ est une *qualification interne à* $\boldsymbol{X}$, on note Satisf($\mathcal{U}$,$\boldsymbol{X}$) *la sous-catégorie pleine de* $\boldsymbol{X}$ *qualifiable (ou qualifiée) par* $\mathcal{U}$, i.e. la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{X}$ dont les objets sont ceux qui satisfont $\mathcal{U}$, et on note :

$$\mathrm{inj}(\mathcal{U},\boldsymbol{X}) : \mathrm{Satisf}(\mathcal{U},\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$$

le foncteur injection canonique.

2.2. Catégories sur-qualifiables.

Supposons que $\boldsymbol{I}'$ est une catégorie.

On appelle *sur-formule de* $\boldsymbol{I}'$ toute formule, de la logique $L_{\infty,\infty}$, écrite dans le langage (sans symboles relationnels et où tous les symboles fonctionnels sont 1-aires) associé (au graphe sous-jacent) à CC($\boldsymbol{I}'$).

On dit qu'une telle sur-formule est *petite* si ses connexions et quantifications sont *petites*, i.e. indexées par des ensembles.

On appelle *surcharge de* $\boldsymbol{I}'$ toute classe Σ de sur-formules closes de $\boldsymbol{I}'$.

On dit qu'une telle surcharge est *petite* si c'est un ensemble et si ses éléments sont des sur-formules petites.

Si Σ est une surcharge de $\boldsymbol{I}'$, si $\boldsymbol{X}'$ est une catégorie et si $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}') \to \boldsymbol{X}'$ est un co-cône, on dit que (Σ,V) est un *sur-co-cône*.

On dit qu'un tel sur-co-cône est *petit* si $\boldsymbol{I}'$ et Σ sont petites.

En particulier, si $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{Ens}$ et si (Σ,V) est petit, on dit que c'est un *sur-co-cône sur-co-limite* ou encore que V est un *co-cône Σ-co-limite* si :

* $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}') \to \boldsymbol{Ens}$ est un co-cône co-limite,
* $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}') \to \boldsymbol{Ens}$ satisfait (en tant qu'interprétation du langage associé à CC($\boldsymbol{I}'$)) toutes les sur-formules de $\boldsymbol{I}'$ appartenant à Σ.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie *localement petite*.

Si $\boldsymbol{I}$ est une catégorie petite, si Σ est une surcharge petite de $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}$, si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône d'indexation $\boldsymbol{I}$ et si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, on dit que X *sur-satisfait* (Σ,U) ou encore que X *Σ-satisfait* U si :

- $(\Sigma,\boldsymbol{X}(U(\text{-}),\mathrm{X}) : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Ens})$ est un sur-co-cône sur-co-limite,

autrement dit, si :

- le co-cône $\boldsymbol{X}(U(\text{-}),\mathrm{X}) : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Ens}$ est un co-cône Σ-co-limite.

On appelle *sur-qualification interne à* $\boldsymbol{X}$ tout ensemble $\mathcal{SU}$ constitué de couples (Σ,U) tels que :

- $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}_U) \to \boldsymbol{X}$ est un cône d'indexation petite,
- Σ est une surcharge petite de $(\boldsymbol{I}_U)^{\mathrm{op}}$.

Alors, si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, on dit qu'il *sur-satisfait* $\mathcal{SU}$ si :

- X sur-satisfait tout couple (Σ,U) appartenant à $\mathcal{SU}$,

autrement dit, si :

- pour tout couple $(\Sigma,U) \in \mathcal{SU}$, X Σ-satisfait U.

Dans ces conditions, on désigne par $\mathrm{SurSatisf}(\mathcal{SU},\boldsymbol{X})$ la sous-catégorie (non nécessairement pleine) de $\boldsymbol{X}$, dite *sur-qualifiable* (ou *sur-qualifiée*) par $\mathcal{SU}$, telle que :

- ses objets sont les objets de $\boldsymbol{X}$ qui sur-satisfont $\mathcal{SU}$,
- ses flèches sont les flèches $\mathrm{x} : \mathrm{X} \to \mathrm{X'}$ de $\boldsymbol{X}$ telles que :
    - X et X' sur-satisfont $\mathcal{SU}$,
    - pour tout couple $(\Sigma,U) \in \mathcal{SU}$ et toute formule $\varphi \in \Sigma$, l'homomorphisme $\mathrm{Hom}(U(\text{-}),\mathrm{x}) : \mathrm{Hom}(U(\text{-}),\mathrm{X}) \to \mathrm{Hom}(U(\text{-}),\mathrm{X'})$ (entre interprétations du langage associé à $\mathrm{CC}((\boldsymbol{I}_U)^{\mathrm{op}})$) "commute" avec la satisfaction des sous-formules de φ,

et on note :

$$\mathrm{surinj}(\mathcal{SU},\boldsymbol{X}) : \mathrm{SurSatisf}(\mathcal{SU},\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$$

le foncteur injection canonique.

2.3. Qualifiabilité des catégories positivement sur-qualifiables.

Si I' est une catégorie petite, on dira qu'une sur-formule petite de I' est *positive* si elle est de la forme [3] :

$$\forall_{a\in A}\ \omega_a:\Gamma_a$$

$$[\bigwedge_{b\in B} (t_{b,1}(\omega_{b,1}):\Gamma_b) = (t_{b,2}(\omega_{b,2}):\Gamma_b)\ ]$$

$$\Rightarrow$$

$$\bigvee_{c\in C}\ [\ \bigwedge_{d\in D(c)} (t_{c,d,1}(\omega_{c,d,1}):\Gamma_{c,d}) = (t_{c,d,2}(\omega_{c,d,2}):\Gamma_{c,d})\ ]$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{e\in E}\ [\ \exists_{f\in F(e)}\ \omega_{e,f}:\Gamma_{e,f}\ (\ \bigwedge_{g\in G(e)} (t_{e,g,1}(\omega_{e,g,1}):\Gamma_{e,g}) = (t_{e,g,2}(\omega_{e,g,2}):\Gamma_{e,g})\ )\ ]$$

où :

- A est un ensemble,
- pour tout $a \in A$, Γ_a est un objet de I',
- pour tout $a \in A$, ω_a est une variable de sorte Γ_a,
- B est un ensemble,
- pour tout $b \in B$, Γ_b est un objet de $CC(I')$
- pour tout $b \in B$ et pour tout $k \in \{1,2\}$, $t_{b,k}(\omega_{b,k})$ est un terme, de sorte Γ_b, où la (nécessairement seule) variable $\omega_{b,k}$ figure,
- C est un ensemble,
- pour tout $c \in C$, $D(c)$ est un ensemble,
- pour tout $c \in C$ et pour tout $d \in D(c)$, $\Gamma_{c,d}$ est un objet de $CC(I')$,
- pour tout $c \in C$, pour tout $d \in D(c)$ et pour tout $k \in \{1,2\}$, $t_{c,d,k}(\omega_{c,d,k})$ est un terme, de sorte $\Gamma_{c,d}$, où la (nécessairement seule) variable $\omega_{c,d,k}$ figure,

---

[3] Pour faire court (et rester "classique"), nous nous contentons de connecteurs et quantificateurs *très* usuels. Cependant, on pourrait aussi utiliser le connecteur $\vee!$ ("ou bien") et le quantificateur $\exists!$ ("il existe un et un seul") :

• soit *en lieu et place* du $\vee$ et du $\exists$, pour constituer des formules positives "exclusives" (voir la Note 5),

• soit *en même temps* que ce $\vee$ et ce $\exists$ (et aux mêmes types de "places"), pour constituer des formules positives "localement exclusives", un peu plus générales que les seules, "classiques", que nous utiliserons dans la suite.

- E est un ensemble,
- pour tout $e \in E$, $F(e)$ est un ensemble,
- pour tout $e \in E$ et tout $f \in F(e)$, $\Gamma_{e,f}$ est un objet de $\boldsymbol{I}'$,
- pour tout $e \in E$ et tout $f \in F(e)$, $\omega_{e,f}$ est une variable de sorte $\Gamma_{e,f}$,
- pour tout $e \in E$, $G(e)$ est un ensemble,
- pour tout $e \in E$ et tout $g \in G(e)$, $\Gamma_{e,g}$ est un objet de $CC(\boldsymbol{I}')$,
- pour tout $e \in E$, tout $g \in G(e)$ et tout $k \in \{1,2\}$, $t_{e,g,k}(\omega_{e,g,k})$ est un terme, de sorte $\Gamma_{e,g}$, où la (nécessairement seule) variable $\omega_{e,g,k}$ figure,
- pour tout $e \in E$, on a :

  $$\Omega_{e,F(e)} \subseteq \Omega_{e,G(e)},$$

  lorsqu'on pose :

  $$\Omega_{e,F(e)} = \{\omega_{e,f} \mid f \in F(e)\}$$

  et :

  $$\Omega_{e,G(e)} = \{\omega_{e,g,k} \mid g \in G(e) \text{ et } k \in \{1,2\}\},$$

- on a :

  $$\Omega_A = \Omega_B \cup \left(\bigcup_{c \in C} \Omega_{c,D(c)}\right) \cup \left(\bigcup_{e \in E} [\Omega_{e,G(e)} - \Omega_{e,F(e)}]\right),$$

  lorsqu'on on pose :

  $$\Omega_A = \{\omega_a \mid a \in A\},$$

  $$\Omega_B = \{\omega_{b,k} \mid b \in B \text{ et } k \in \{1,2\}\}$$

  et, pour tout $c \in C$:

  $$\Omega_{c,D(c)} = \{\omega_{c,d,k} \mid d \in D(c) \text{ et } k \in \{1,2\}\}$$ [4].

Dans ces conditions, on dira qu'une surcharge Σ de $\boldsymbol{I}'$ est *positive* si toutes les surformules de $\boldsymbol{I}'$ qui appartiennent à Σ sont positives.

---

[4] Bien entendu, si $C \cup E = \varnothing$, la formule considérée "a valeur de négation", en ce sens qu'une interprétation ensembliste (du langage associé à $CC(\boldsymbol{I}')$)) la satisfait si, et seulement si, elle satisfait la formule :

$$\forall_{a \in A}\ \omega_a : \Gamma_a$$

$$\neg \left[\bigwedge_{b \in B} (t_{b,1}(\omega_{b,1}) : \Gamma_b) = (t_{b,2}(\omega_{b,2}) : \Gamma_b)\right]$$

Supposons que X est une catégorie localement petite.

Si $\mathcal{SU}$ est une sur-qualification interne à X, on dit qu'elle est *positive* si :

- pour tout couple $(\Sigma,U) \in \mathcal{SU}$, Σ est une surcharge positive de $(I_U)^{\mathrm{op}}$.

Alors, on dit que $\mathrm{SurSatisf}(\mathcal{SU},X)$ est *positivement* sur-qualifiable (ou *positivement* sur-qualifiée) par $\mathcal{SU}$ dans X.

Etablissons que :

LEMME. *Si X est une catégorie localement petite, ses sous-catégories positivement sur-qualifiables en sont nécessairement des sous-catégories pleines.*

De plus, si X est co-complète, ses sous-catégories positivement sur-qualifiables en sont nécessairement des sous-catégories qualifiables. Plus précisément, si $\mathcal{SU}$ est une sur-qualification positive, interne à X, on peut lui associer canoniquement une qualification $\mathrm{Qlf}(\mathcal{SU})$, *interne à X, de sorte que les deux sous-catégories (pleines)* $\mathrm{SurSatisf}(\mathcal{SU},X)$ *et* $\mathrm{Satif}(\mathrm{Qlf}(\mathcal{SU}),X)$ *de X soient égales.*

PREUVE. Il suffit évidemment de montrer que, si I est une catégorie petite, si φ est une sur-formule positive et petite de I^{op} et si $U : \mathrm{C}(I) \to X$ est un cône projectif, alors on peut associer à la sur-qualification $\{(\{\varphi\},U)\}$ une qualification $\mathrm{Qlf}(\{(\{\varphi\},U)\})$ telle que $\mathrm{SurSatisf}(\{(\{\varphi\},U)\},X) = \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qlf}(\{(\{\varphi\},U)\}),X)$.

a) Si Γ est une sorte du langage associé à $\mathrm{CC}(I^{\mathrm{op}})$ (i.e. si Γ est un objet de $\mathrm{CC}(I^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(I)^{\mathrm{op}}$), on lui associe l'objet de X :

$$[U](\Gamma) = U(\Gamma).$$

Si $\gamma : \Gamma \to \Gamma'$ est un symbole fonctionnel du langage associé à $\mathrm{CC}(I^{\mathrm{op}})$ (i.e. si $\gamma : \Gamma' \to \Gamma$ est une flèche de $\mathrm{C}(I)$), on lui associe la flèche de X :

$$[U](\gamma) = U(\gamma) : [U](\Gamma') \to [U](\Gamma).$$

b) Si $\omega{:}\Gamma$ est une variable de sorte Γ (alors, on notera aussi $\Gamma = \Gamma_\omega$, étant entendu qu'à chaque variable "utilisée" n'est associée qu'une seule sorte), on lui associe la flèche de X :

$$[U](\omega) = \mathrm{id}(U(\Gamma)) = \mathrm{id}([U](\Gamma)) : [U](\Gamma) \to [U](\Gamma).$$

Si $\mathrm{t}(\omega)$ est un terme de sorte Γ' et en la (nécessairement seule) variable ω de sorte Γ (alors on note, indifféremment, $\mathrm{t}(\omega) = \mathrm{t}(\omega{:}\Gamma) = \mathrm{t}(\omega){:}\Gamma' = \mathrm{t}(\omega{:}\Gamma){:}\Gamma'$), si on lui a associé la flèche de X :

$$[U](\mathrm{t}(\omega)) : [U](\Gamma') \to [U](\Gamma)$$

et si $\gamma' : \Gamma' \to \Gamma''$ est un symbole fonctionnel (i.e. si $\gamma' : \Gamma'' \to \Gamma'$ est une flèche de $\mathrm{C}(I)$), alors on associe au terme $\gamma'(\mathrm{t}(\omega{:}\Gamma)){:}\Gamma''$ la flèche de X :

$$[U](\gamma'(t(\omega)) = [U](t(\omega)).[U](\gamma') = [U](t(\omega)).U(\gamma') : [U](\Gamma'') \to [U](\Gamma).$$

De la sorte (i.e. récursivement), à tout terme $t'(\omega:\Gamma):\Gamma''$ (du langage associé à $CC(\boldsymbol{I}^{op})$) on sait associer une flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$[U](t'(\omega)) : [U](\Gamma'') \to [U](\Gamma).$$

c) Si $\alpha = (t_1(\omega_1:\Gamma_1):\Gamma = t_2(\omega_2:\Gamma_2):\Gamma)$ est une formule atomique, on note successivement :

- $VARAT(\alpha) = \{\omega_1, \omega_2\}$ l'ensemble des variables figurant dans α ,
- $TERM(\alpha) = \{t_1(\omega_1), t_2(\omega_2)\}$ l'ensemble des termes figurant dans α ,
- $CATAT(\alpha)$ la catégorie telle que :
  - ses objets sont les (symboles auxiliaires) S_α et $S_{\alpha,\omega}$, où $\omega \in VARAT(\alpha)$,
  - ses flèches non triviales sont les (symboles auxiliaires) $s_{\alpha,t(\omega)} : S_\alpha \to S_{\alpha,\omega}$, où $t(\omega) \in TERM(\alpha)$,
- $FCTAT(\alpha) : CATAT(\alpha) \to \boldsymbol{X}$ le foncteur tel que :

$$FCTAT(\alpha)(s_{\alpha,t(\omega)} : S_\alpha \to S_{\alpha,\omega}) = [U](t(\omega)) : [U](\Gamma) \to [U](\Gamma_\omega)$$

  pour toute flèche $s_{\alpha,t(\omega)} : S_\alpha \to S_{\alpha,\omega}$ de $CATAT(\alpha)$.

Dans ces conditions, on désigne par :

- $(\sum_{\omega \in VARAT(\alpha)} [U](\Gamma_\omega))$ une somme arbitrairement choisie dans $\boldsymbol{X}$ (et il en existe bien au moins une puisque $\boldsymbol{X}$ est, par hypothèse, co-complète) de la famille $([U](\Gamma_\omega))_{\omega \in VARAT(\alpha)}$,
- $(\sum_{\omega \in VARAT(\alpha)} [U](\Gamma_\omega))/\alpha$ une co-limite arbitrairement choisie dans $\boldsymbol{X}$ (et il en existe bien au moins une puisque $\boldsymbol{X}$ est, par hypothèse, co-complète) du foncteur $FCTAT(\alpha) : CATAT(\alpha) \to \boldsymbol{X}$ (ainsi, cette co-limite est :
  - une somme fibrée, si $\omega_1 \neq \omega_2$,
  - un co-noyau, si $\omega_1 = \omega_2$ et $t_1(\omega_1) \neq t_2(\omega_2)$,
  - une co-limite triviale, si $\omega_1 = \omega_2$ et $t_1(\omega_1) = t_2(\omega_2)$).

On dispose donc de l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$[U](\alpha) : (\sum_{\omega \in VARAT(\alpha)} [U](\Gamma_\omega)) \to (\sum_{\omega \in VARAT(\alpha)} [U](\Gamma_\omega))/\alpha$$

permettant de factoriser la co-limite considérée au travers de la somme considérée.

d) Si $\alpha = (t_1(\omega_1:\Gamma_1):\Gamma = t_2(\omega_2:\Gamma_2):\Gamma)$ est une formule atomique et si V est un ensemble de variables *contenant* $VARAT(\alpha)$, alors on dispose de l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$x_{\alpha,V} : (\sum_{\omega \in VARAT(\alpha)} [U](\Gamma_\omega)) \to (\sum_{\omega \in V} [U](\Gamma_\omega))$$

permettant de factoriser une somme "totale" $\left(\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega) \right)$ arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète) au travers de la somme "partielle" $\left(\sum_{\omega\in \mathrm{VARAT}(\alpha)} [U](\Gamma_\omega) \right)$.

Dès lors, on note :

$$[U](\alpha,V) : \left(\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega) \right) \to \left(\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega) \right)/\alpha$$

la flèche de X déduite de $[U](\alpha)$ par changement de co-base le long de $x_{\alpha,V}$, i.e. par une somme fibrée arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète).

e) Si $\beta = \bigwedge_{h\in H} \alpha_h$ est une conjonction de formules atomiques (où H est un ensemble qui peut être vide), on note :

- $\mathrm{VARCJ}(\beta) = \bigcup_{h\in H} \mathrm{VARAT}(\alpha_h)$,
- $\mathrm{CATCJ}(\beta)$ la catégorie telle que :
  - ses objets sont les (symboles auxiliaires) S_β et $S_{\beta,h}$, où $h \in H$,
  - ses flèches non triviales sont les (symboles auxiliaires) $s_{\beta,h} : S_\beta \to S_{\beta,h}$, où $h \in H$,
- $\mathrm{FCTCJ}(\beta) : \mathrm{CATCJ}(\beta) \to X$ le foncteur tel que :

$$\mathrm{FCTCJ}(\beta)(s_{\beta,h})$$

$$=$$

$$[U](\alpha_h,\mathrm{VARCJ}(\beta)) : \left(\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega) \right) \to \left(\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega) \right)/\alpha_h$$

  pour tout $h \in H$.

Dans ces conditions, on désigne par :

- $\left(\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega) \right)/\beta$ une co-limite arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète) du foncteur $\mathrm{FCTCJ}(\beta) : \mathrm{CATCJ}(\beta) \to X$.

On dispose donc de la co-projection relative à l'objet S_β :

$$[U](\beta) : \left(\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega) \right) \to \left(\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega) \right)/\beta .$$

f) Si β est une conjonction de formules atomiques et si V est un ensemble de variables *contenant* $\mathrm{VARCJ}(\beta)$, alors on dispose de l'unique flèche de X :

$$x_{\beta,V} : \left(\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega) \right) \to \left(\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega) \right)$$

permettant de factoriser une somme "totale" ($\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega)$) arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète) au travers de la somme "partielle" ($\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega)$).

Dès lors, on note :

$$[U](\beta,V) : (\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega)) \to (\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega))/\beta$$

la flèche de X déduite de $[U](\beta)$ par changement de co-base le long de $x_{\beta,V}$, i.e. par une certaine somme fibrée arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète).

g) Si β est une conjonction de formules atomiques et si W est un ensemble de variables *contenu* dans $\mathrm{VARCJ}(\beta)$, alors on dispose de l'unique flèche de X :

$$y_{\beta,W} : (\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)-W} [U](\Gamma_\omega)) \to (\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega))$$

permettant de factoriser la somme "totale" ($\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega)$) au travers d'une somme "partielle" ($\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)-W} [U](\Gamma_\omega)$) arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète).

Dès lors, on note :

$$[U](\exists_{\omega\in W} \omega{:}\Gamma_\omega \ \ \beta)$$

$$=$$

$$[U](\beta).y_{\beta,W} : (\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)-W} [U](\Gamma_\omega)) \to (\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)-W} [U](\Gamma_\omega))/(\exists_{\omega\in W} \omega{:}\Gamma_\omega \ \ \beta)$$

la flèche de X déduite de $[U](\beta)$ par *composition* avec $y_{\beta,W}$ (on a donc *choisi* de noter ici, pour plus de commodité :

$$(\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)-W} [U](\Gamma_\omega))/(\exists_{\omega\in W} \omega{:}\Gamma_\omega \ \ \beta) = (\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)} [U](\Gamma_\omega))/\beta)).$$

h) Si β est une conjonction de formules atomiques et si V est un ensemble *quelconque* de variables, alors on dispose de l'unique flèche de X :

$$z_{\beta,V} : (\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V} [U](\Gamma_\omega)) \to (\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega))$$

permettant de factoriser une somme "totale" ($\sum_{\omega\in V} [U](\Gamma_\omega)$) arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète) au travers d'une somme "partielle" ($\sum_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V} [U](\Gamma_\omega)$) arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète).

Dès lors, on note :

$$[U](\,(\exists_{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)\ \mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V}\ \omega{:}\Gamma_\omega\ \ \beta\,)\,,\,V\,)$$

$$\vdots$$

$$(\sum_{\omega\in V}[U](\Gamma_\omega)\,) \to (\sum_{\omega\in V}[U](\Gamma_\omega)\,)/(\exists_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)-\mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V}\ \omega{:}\Gamma_\omega\ \ \beta\,)$$

la flèche de X déduite de $[U](\exists_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)-\mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V}\ \omega{:}\Gamma_\omega\ \ \beta\,)$ par changement de co-base le long de $z_{\beta,V}$, i.e. par une certaine somme fibrée arbitrairement choisie dans X (et il en existe bien au moins une puisque X est, par hypothèse, co-complète).

i) Supposons que φ est la sur-formule positive (de la forme décrite plus haut, où on fait $I' = I^{op}$ et d'où on reprend toutes les notations et toutes les hypothèses) suivante :

$$\forall_{a\in A}\ \omega_a{:}\Gamma_a$$

$$[\bigwedge_{b\in B}\ (t_{b,1}(\omega_{b,1}){:}\Gamma_b) = (t_{b,2}(\omega_{b,2}){:}\Gamma_b)\,]$$

$$\Rightarrow$$

$$\bigvee_{c\in C}\ [\ \bigwedge_{d\in D(c)}\ (t_{c,d,1}(\omega_{c,d,1}){:}\Gamma_{c,d}) = (t_{c,d,2}(\omega_{c,d,2}){:}\Gamma_{c,d})\ ]$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{e\in E}\ [\ \exists_{f\in F(e)}\ \omega_{e,f}{:}\Gamma_{e,f}\ (\ \bigwedge_{g\in G(e)}\ (t_{e,g,1}(\omega_{e,g,1}){:}\Gamma_{e,g}) = (t_{e,g,2}(\omega_{e,g,2}){:}\Gamma_{e,g}\ )\ ]$$

et posons alors :

- $\beta^* = [\bigwedge_{b\in B}\ (t_{b,1}(\omega_{b,1}){:}\Gamma_b) = (t_{b,2}(\omega_{b,2}){:}\Gamma_b)\ ]$,
- $\beta_c = [\ \bigwedge_{d\in D(c)}\ (t_{c,d,1}(\omega_{c,d,1}){:}\Gamma_{c,d}) = (t_{c,d,2}(\omega_{c,d,2}){:}\Gamma_{c,d})\ ]$, pour tout $c \in C$,
- $\beta_e = [\ \bigwedge_{g\in G(e)}\ (t_{e,g,1}(\omega_{e,g,1}){:}\Gamma_{e,g}) = (t_{e,g,2}(\omega_{e,g,2}){:}\Gamma_{e,g}\ ]$, pour tout $e \in E$,

ainsi que, pour plus de commodité dans la suite :

- $\gamma_c = \beta_c$, pour tout $c \in C$,
- $\gamma_e = \exists_{f\in F(e)}\ \omega_{e,f}{:}\Gamma_{e,f}\ \ \beta_e$

Par hypothèse, on voit donc que :

- on a $\mathrm{VARCJ}(\beta^*) \subseteq \Omega_A$ et, par conséquent, on dispose de la flèche de X :

  $$[U](\beta^*,\Omega_A) : (\sum_{\omega\in\Omega_A}\Gamma_\omega\ ) \to (\sum_{\omega\in\Omega_A}\Gamma_\omega\ )/\beta^*\,,$$

- pour tout $c \in C$, on a $\mathrm{VARCJ}(\beta_c) \subseteq \Omega_A$ et, par conséquent, on dispose de la flèche de X :

  $$[U](\gamma_c,\Omega_A) : (\sum_{\omega\in\Omega_A}\Gamma_\omega\ ) \to (\sum_{\omega\in\Omega_A}\Gamma_\omega\ )/\gamma_c\,,$$

puis, par changement de co-base le long de $[U](\beta^*,\Omega_A)$, i.e. par une certaine somme fibrée arbitrairement choisie dans $\boldsymbol{X}$ (et il en existe bien au moins une puisque $\boldsymbol{X}$ est, par hypothèse, co-complète) d'une flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$[U](\beta^*,\Omega_A) * [U](\gamma_c,\Omega_A) : (\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\beta^* \to ((\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\beta^*)/\gamma_c ,$$

- pour tout $e \in E$, on a $\mathrm{VARCJ}(\beta_e) \cap \Omega_A = \Omega_e - \Omega_{e,F(e)}$ et, par conséquent, on dispose de la flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$[U](\gamma_e,\Omega_A) : (\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega) \to (\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\gamma_e ,$$

  puis, par changement de co-base le long de $[U](\beta^*,\Omega_A)$, i.e. par une certaine somme fibrée arbitrairement choisie dans $\boldsymbol{X}$ (et il en existe bien au moins une puisque $\boldsymbol{X}$ est, par hypothèse, co-complète) d'une flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$[U](\beta^*,\Omega_A) * [U](\gamma_e,\Omega_A) : (\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\beta^* \to ((\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\beta^*)/\gamma_c .$$

Dès lors, on note indifféremment $\mathrm{CATPO}(\varphi) = \boldsymbol{I}_\varphi$ la catégorie telle que :

- ses objets sont les éléments de $\Lambda \cup \Delta$, où $\Lambda = C \times \{1\} \cup E \times \{2\}$ et $\Delta = \Lambda \times \Lambda \times \{0\}$ (alors, on pose :
  - $c = |\lambda|$, pour tout $\lambda = (c,1) \in \Lambda$,
  - $e = |\lambda|$, pour tout $\lambda = (e,2) \in \Lambda$),
- ses flèches non triviales sont :
  - les $g_\delta : \lambda \to (\lambda,\lambda',0)$, pour tout $\delta = (\lambda,\lambda',0) \in \Delta$,
  - les $d_\delta : \lambda' \to (\lambda,\lambda',0)$, pour tout $\delta = (\lambda,\lambda',0) \in \Delta$,

et on désigne indifféremment par $[U](\varphi) = U_\varphi : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}_\varphi) \to \boldsymbol{X}$ le cône tel que :

- son sommet est :

$$U_\varphi(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}_\varphi)) = (\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\beta^* ,$$

- pour tout $\lambda \in \Lambda$, sa valeur en l'objet λ est :

$$U_\varphi(\lambda) = ((\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\beta^*)/\gamma_{|\lambda|}$$

  et sa projection relative à l'objet λ est :

$$U_\varphi(\mathrm{p}(\boldsymbol{I}_\varphi)(\lambda))$$

$$=$$

$$[U](\beta^*,\Omega_A)*[U](\gamma_{|\lambda|},\Omega_A) : (\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\beta^* \to ((\sum_{\omega \in \Omega_A} \Gamma_\omega)/\beta^*)/\gamma_{|\lambda|} ,$$

- pour tout $\delta = (\lambda, \lambda') \in \Delta$, sa valeur en l'objet δ est une somme fibrée arbitrairement choisie dans $\boldsymbol{X}$ (et il en existe bien au moins une puisque $\boldsymbol{X}$ est, par hypothèse, co-complète) des deux flèches :

$$U_\varphi(\lambda) \leftarrow U_\varphi(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}_\varphi) : U_\varphi(\mathrm{p}(\boldsymbol{I}_\varphi)(\lambda)) \quad \text{et} \quad U_\varphi(\mathrm{p}(\boldsymbol{I}_\varphi)(\lambda')) : U_\varphi(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}_\varphi)) \rightarrow U_\varphi(\lambda')$$

et, alors :

$$U_\varphi(\mathrm{g}_\delta) : U_\varphi(\lambda) \rightarrow U_\varphi(\delta) \quad \text{et} \quad U_\varphi(\delta) \leftarrow U_\varphi(\lambda') : U_\varphi(\mathrm{d}_\delta)$$

sont les deux co-projections.

j) Il est clair qu'un quelconque objet X de $\boldsymbol{X}$ sur-satisfait la sur-qualification $\{(\{\varphi\}, U)\}$ si, et seulement si, X satisfait la qualification $\{U, U_\varphi\} = \mathrm{Qlf}(\{(\{\varphi\}, U)\})$. D'où on déduit facilement que $\mathrm{SurSatif}(\{(\{\varphi\}, U)\}, \boldsymbol{X}) = \mathrm{Satisf}(\{U, U_\varphi\}, \boldsymbol{X})$ [5]. FIN DE LA PREUVE.

2.4. Profils élémentaires, qualifications et sur-qualifications.

On appelle *profil élémentaire (des co-cônes petits)* toute "application" R (entre des *classes* convenables, que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter) associant à toute catégorie petite $\boldsymbol{I}'$ une surcharge petite $\mathrm{R}(\boldsymbol{I}')$ de $\boldsymbol{I}'$.

On dit qu'un tel profil élémentaire est *positif* si, pour toute catégorie petite $\boldsymbol{I}'$, $\mathrm{R}(\boldsymbol{I}')$ est une surcharge positive.

Si $\boldsymbol{I}'$ est une catégorie petite, on dit (pour simplifier) qu'un co-cône $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}') \rightarrow \boldsymbol{Ens}$ est un co-cône R-*co-limite* si :

- $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}') \rightarrow \boldsymbol{Ens}$ est un co-cône $\mathrm{R}(\boldsymbol{I}')$-co-limite.

Supposons que R est un profil élémentaire (resp. un profil élémentaire positif) et que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite.

Si $\boldsymbol{I}$ est une catégorie petite, si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \rightarrow \boldsymbol{X}$ est un cône et si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, on dira (pour simplifier) que X R-*satisfait* U si :

---

[5] On laisse au lecteur le soin d'adapter la construction utilisée en i) (en remplaçant $\mathrm{CATPO}(\varphi)$ par la catégorie *discrète* $\mathrm{CATPO_D}(\varphi)$ ayant Λ pour ensemble d'objets) pour établir que, si φ est une formule positive "exclusive" (voir la Note 3), alors on peut substituer à $U\varphi$ un cône $U_{\mathrm{D},\varphi}$ d'indexation *discrète*.

De même, on lui laisse le soin de procéder aux adaptations (analogues) nécessaires pour établir que, si φ est une formule positive "localement exclusive" (voir la Note 3), on peut remplacer $U\varphi$ par un cône d'indexation "localement discrète".

• X $\mathrm{R}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}})$-satisfait U.

Si $\mathcal{U}'$ est une qualification interne à $\boldsymbol{X}$, on pose :

$$\mathrm{R}/\!/\mathcal{U}' = \{(\mathrm{R}((\boldsymbol{I}_U)^{\mathrm{op}}), U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}_U) \to \boldsymbol{X}) \mid U \in \mathcal{U}'\},$$

de sorte que $\mathrm{R}/\!/\mathcal{U}'$ est une sur-qualification (resp. une sur-qualification positive) interne à $\boldsymbol{X}$, *canoniquement associée à* $\mathcal{U}'$.

Alors, il est clair qu'un objet X de $\boldsymbol{X}$ sur-satisfait $\mathrm{R}/\!/\mathcal{U}'$ si, et seulement si, il R-satisfait tout cône $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}_U) \to \boldsymbol{X}$ appartenant à $\mathcal{U}'$.

Supposons que R est un profil élémentaire et que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite.

On dit qu'une sur-qualification $\mathcal{SU}$, interne à $\boldsymbol{X}$, est une R-*sur-qualification* si :

• il existe une qualification $\mathcal{U}'$, interne à $\boldsymbol{X}$, telle que $\mathcal{SU} = \mathrm{R}/\!/\mathcal{U}'$.

De même, si $\boldsymbol{X}$ est co-complète et si R est positif, on dit qu'une qualification $\mathcal{U}$, interne à $\boldsymbol{X}$, est une R-*qualification* si :

• il existe une qualification $\mathcal{U}'$, interne à $\boldsymbol{X}$, telle que $\mathcal{U} = \mathrm{Qlf}(\mathrm{R}/\!/\mathcal{U}')$.

2.5. Existence des noyaux dans certaines catégories sur-qualifiables.

Supposons que $\boldsymbol{I}'$ est une catégorie petite.

Pour tout objet I de $\boldsymbol{I}'$, on note (comme à l'habitude) $\mathrm{I}/\boldsymbol{I}'$ la catégorie (évidemment petite) telle que :

• ses objets sont les flèches de $\boldsymbol{I}'$ ayant I pour domaine,

• ses flèches sont les triplets $t = (\mathrm{i}' : \mathrm{I} \to \mathrm{I}', \mathrm{i}''' : \mathrm{I}' \to \mathrm{I}'', \mathrm{i}'' : \mathrm{I} \to \mathrm{I}'') : \mathrm{i}' \longrightarrow_{\Delta} \mathrm{i}''$ de flèches de $\boldsymbol{I}'$ telles que $\mathrm{i}'''.\mathrm{i}' = \mathrm{i}''$.

De même, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}'$ et toutes flèches i' et i'' de $\boldsymbol{I}'$ ayant I pour domaine, on note $\mathrm{ZZ}(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}')(\mathrm{i}',\mathrm{i}'')$ l'ensemble des zigzags de $\mathrm{I}/\boldsymbol{I}'$ reliant i' à i'', i.e. l'ensemble des diagrammes τ de $\mathrm{I}/\boldsymbol{I}'$ tels que ci-dessous (où $\mathrm{n} \geq 1$ est un entier, appelé la *longueur de* τ et noté $\mathrm{n} = \mathrm{long}(\tau)$) :

$$\tau : \mathrm{i}' = \tau(1) \xrightarrow[t_1]{} {}_{\Delta}\ \tau(2)\ {}_{\Delta} \xleftarrow[t_2]{} \tau(3) \cdots$$
$$\ldots \tau(2\mathrm{n}-1) \xrightarrow[t_{2\mathrm{n}-1}]{} {}_{\Delta}\ \tau(2\mathrm{n})\ {}_{\Delta} \xleftarrow[t_{2\mathrm{n}}]{} \tau(2\mathrm{n}+1) = \mathrm{i}''$$

Pour tout objet I de $\boldsymbol{I}'$, on pose :

$$\kappa_1(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}')$$
$$=$$
$$\underset{a\in\{1,2\}}{\forall}\ \omega_a{:}\mathrm{I}$$
$$(\ \mathrm{cp}(\boldsymbol{I}')(\mathrm{I})(\omega_1){:}\mathrm{CSm}(\boldsymbol{I}')\ ) = (\ \mathrm{cp}(\boldsymbol{I}')(\mathrm{I})(\omega_2){:}\mathrm{CSm}(\boldsymbol{I}')\ )$$
$$\Rightarrow$$
$$\bigvee_{\mathrm{i}'\in \mathrm{Ob}(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}')} (\mathrm{i}'(\omega_1){:}\mathrm{codom}(\mathrm{i}')) = (\mathrm{i}'(\omega_2){:}\mathrm{codom}(\mathrm{i}'))$$

de sorte que $\kappa_1(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}')$ est une sur-formule positive de $\boldsymbol{I}'$.

De même, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}'$ et toutes flèches i' et i" de $\boldsymbol{I}'$ ayant I pour domaine, on pose :

$$\kappa_2(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}')(\mathrm{i}',\mathrm{i}")$$
$$=$$
$$\underset{a\in\{1,2\}}{\forall}\ \omega_a{:}\mathrm{I}$$
$$\bigwedge_{\mathrm{i}\in\{\mathrm{i}',\mathrm{i}"\}} (\ \mathrm{i}(\omega_1){:}\mathrm{codom}(\mathrm{i})\ ) = (\ \mathrm{i}(\omega_2){:}\mathrm{codom}(\mathrm{i})\ )$$
$$\Rightarrow$$
$$\bigvee_{\tau\in ZZ(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}')(\mathrm{i}',\mathrm{i}")} [\ \bigwedge_{1\leq k\leq 2\mathrm{long}(\tau)+1} (\ \tau_k(\omega_1){:}\mathrm{codom}(\tau_k)\ ) = (\ \tau_k(\omega_2){:}\mathrm{codom}(\tau_k)\ )\ ]$$

de sorte que $\kappa_2(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}')(\mathrm{i}',\mathrm{i}")$ est une sur-formule positive de $\boldsymbol{I}'$.

Dans ces conditions, on pose :

- $\mathrm{K}_1(\boldsymbol{I}') = \{\kappa_1(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}') \mid \mathrm{I}\in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I}')\}$,
- $\mathrm{K}_2(\boldsymbol{I}') = \{\kappa_2(\mathrm{I}/\boldsymbol{I}')(\mathrm{i}',\mathrm{i}") \mid \mathrm{I}\in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I}'),\ \mathrm{i}',\mathrm{i}" \in \mathrm{Fl}(\boldsymbol{I}') \text{ et } \mathrm{dom}(\mathrm{i}') = \mathrm{I} = \mathrm{dom}(\mathrm{i}")\}$.

On note K le profil élémentaire positif qui associe à toute catégorie petite $\boldsymbol{I}'$ la surcharge (évidemment petite et positive) de $\boldsymbol{I}'$:

$$\mathrm{K}(\boldsymbol{I}') = \mathrm{K}_1(\boldsymbol{I}') \cup \mathrm{K}_2(\boldsymbol{I}').$$

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite, si $\boldsymbol{I}$ est une catégorie petite, si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône et si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, il est facile de vérifier que X K-satisfait U si, et seulement si :

- (K-SAT 0) X satisfait U (autrement dit, X vérifie (SAT 1) et (SAT 2)),

- (K-SAT 1) pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$ et toutes flèches $y_1, y_2 : U(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telles que $y_1.p(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}) = y_2.p(\boldsymbol{I})(\mathrm{I})$, il existe un objet S de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $s : S \to I$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $y_1.U(s) = y_2.U(s)$ (on dira que $p(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}) : \mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}) \to \mathrm{I}$ et $s : S \to I$ *égalisent* y_1 *et* y_2),
- (K-SAT 2) pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, toutes flèches $y_1, y_2 : U(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ et toutes flèches $s' : S' \to I$ et $s'' : S'' \to I$ de $\boldsymbol{I}$ égalisant y_1 et y_2 (ce qui implique que $p(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}) : \mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}) \to \mathrm{I}$ égalise aussi y_1 et y_2), il existe un entier $n \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^* = (z^*_k)_{1\leq k\leq 2n} : S' = Z^*_1 \xleftarrow[z^*_1]{} Z^*_2 \xrightarrow[z^*_2]{} Z^*_3 \cdots$$
$$\ldots Z^*_{2n-1} \xleftarrow[z^*_{2n-1}]{} Z^*_{2n} \xrightarrow[z^*_{2n}]{} Z^*_{2n+1} = S''$$

et une famille $s^* = (s^*_k : Z^*_k \to I)_{1\leq k\leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{I}$ égalisant y_1 et y_2 et telles que :

  - $s' = s^*_1$ et $s^*_{2n+1} = s''$,
  - $s^*_{2h-1} . z^*_{2h-1} = s^*_{2h} = s^*_{2h+1} . z^*_{2h}$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$,

(alors, on dira que c'est la famille s^* qui *égalise* y_1 et y_2 et qu'elle *connecte* s' *à* s'' *le long de* ξ^*).

Vérifions que :

PROPOSITION. *Si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et si* $\mathcal{U}'$ *est une qualification interne à* $\boldsymbol{X}$, *alors le foncteur injection canonique :*

$$\mathrm{surinj}(K/\mathcal{U}',\boldsymbol{X}) : \mathrm{SurSatisf}(K/\mathcal{U}',\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$$

crée les noyaux [6].

PREUVE. D'après le LEMME de 2.3, le foncteur :

---

[6] On déduit immédiatement de la PROPOSITION de 2.5 que :

COROLLAIRE. *Si* $\boldsymbol{I}'$ *est une catégorie petite, alors les* K*-co-limites de co-indexation* $\boldsymbol{I}'$ *commutent, dans* ***Ens***, *avec les noyaux.*

PREUVE. Désignons par $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}') = \mathrm{Fonct}(\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}'),\boldsymbol{Ens})$ la catégorie des co-cônes de ***Ens*** de co-indexation $\boldsymbol{I}'$ et par $\mathrm{K\text{-}CoLim}(\boldsymbol{I}')$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$ ayant pour objets les co-cônes K-co-limites.
Notons $\mathrm{Yon}(\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}')) : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}'^{\mathrm{op}}) = \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}')^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}'),\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$ le plongement de Yoneda (il s'agit donc d'un *cône* de $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$, d'indexation $\boldsymbol{I}'^{\mathrm{op}}$) et posons $\mathcal{U}'(\boldsymbol{I}') = \{\mathrm{Yon}(\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}'))\}$.
Il est clair que $\mathrm{K\text{-}CoLim}(\boldsymbol{I}') = \mathrm{SurSatisf}(K/\mathcal{U}'(\boldsymbol{I}'),\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}'))$ et la PROPOSITION de 2.5 s'applique donc. Mais $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$ *possède* les noyaux (qui se calculent, évidemment, "point par point"), ce qui permet de conclure facilement. FIN DE LA PREUVE.

$$\mathrm{surinj}(\mathrm{K}/\mathcal{U}',\boldsymbol{X}) : \mathrm{SurSatisf}(\mathrm{K}/\mathcal{U}',\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$$

est plein, puisque la sur-qualification $\mathrm{K}/\mathcal{U}'$ est positive. Il suffit donc de montrer que, si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône d'indexation petite, si $x'_1, x'_2 : X' \to X''$ sont deux flèches de $\boldsymbol{X}$, si $\ker(x'_1,x'_2) : \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2) \to X'$ en est un noyau dans $\boldsymbol{X}$ et si X' et X'' K-satisfont U, alors $\mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ K-satisfait U (à cet effet, pour tout objet Y de $\boldsymbol{X}$ et toute flèche $y : Y \to X'$ de $\boldsymbol{X}$ égalisant x'_1 et x'_2, on notera $[y] : Y \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$ telle que $\ker(x'_1,x'_2).[y] = y$).

a) Supposons, tout d'abord, que $x : U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})) \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ est une flèche de $\boldsymbol{X}$.

Alors :

- il existe (en vertu de (SAT 1), puisque X' satisfait U) un objet I de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $y : U(I) \to X'$ de $\boldsymbol{X}$ telle que $y.U(p(\boldsymbol{I})(I)) = \ker(x'_1,x'_2).x$.

Il en résulte que :

$$(x'_1.y).U(p(\boldsymbol{I})(I)) = x'_1.\ker(x'_1,x'_2).x = x'_2.\ker(x'_1,x'_2).x = (x'_2.y).U(p(\boldsymbol{I})(I)) .$$

Comme $(x'_1.y), (x'_2.y) : U(I) \to X''$ sont égalisées par $p(\boldsymbol{I})(I)$, il existe (en vertu de (K-SAT 1), puisque X'' K-satisfait U) une flèche $s : S \to I$ de $\boldsymbol{I}$ qui égalise $(x'_1.y)$ et $(x'_2.y)$.

Dès lors, il est facile de constater (par unicité) que $[y.U(s)].U(p(\boldsymbol{I})(S)) = x$, autrement dit que $\mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ vérifie (SAT 1).

b) Supposons, maintenant, que I' et I'' sont deux objets de $\boldsymbol{I}$ et que $y' : U(I') \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ et $y'' : U(I'') \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ sont deux flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que $y'.U(p(\boldsymbol{I})(I')) = y''.U(p(\boldsymbol{I})(I''))$.

On en déduit que :

- il existe (en vertu de (SAT 2), puisque X' satisfait U) un entier $n \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ = (z^\circ_k)_{1\leq k\leq 2n} : I' = Z^\circ_1 \xleftarrow[z^\circ_1]{} Z^\circ_2 \xrightarrow[z^\circ_2]{} Z^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots Z^\circ_{2n-1} \xleftarrow[z^\circ_{2n-1}]{} Z^\circ_{2n} \xrightarrow[z^\circ_{2n}]{} Z^\circ_{2n+1} = I''$$

et une famille $y^\circ = (y^\circ_k : U(Z^\circ_k) \to X')_{1\leq k\leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ qui connecte $\ker(x'_1,x'_2).y'$ à $\ker(x'_1,x'_2).\, y''$ le long de ξ° (en particulier, pour tous entiers $1 \leq h \leq k \leq 2n+1$, on a donc "par connexité" :

$$y^\circ_k.U(p(\boldsymbol{I})(Z^\circ_k)) = y^\circ_h.U(p(\boldsymbol{I})(Z^\circ_h))).$$

Il en résulte que, pour tout entier $1 \leq k \leq 2n+1$, on a :

$$\begin{aligned}(x'_1.y^\circ_k).U(p(\boldsymbol{I})(Z^\circ_k)) &= (x'_1.y^\circ_1).U(p(\boldsymbol{I})(Z^\circ_1))\\ &= x'_1.\ker(x'_1,x'_2).y'.U(p(\boldsymbol{I})(I'))\end{aligned}$$

$$= x'_2.\ker(x'_1,x'_2).y'.U(p(I)(I'))$$
$$= (x'_2.y^\circ_1).U(p(I)(Z^\circ_1)) = (x'_2.y^\circ_k).U(p(I)(Z^\circ_k))$$

et donc, comme $(x'_1.y^\circ_k), (x'_2.y^\circ_k) : U(Z^\circ_k) \to X''$ sont égalisées par $p(I)(Z^\circ_k)$, il existe (en vertu de (K-SAT 1), puisque X'' K-satisfait U) une flèche $s_k : S_k \to Z^\circ_k$ de I qui égalise $(x'_1.y^\circ_k)$ et $(x'_2.y^\circ_k)$ et, ce, de sorte qu'on peut même prendre $s_1 = id(I')$ (quand $k = 1$) et $s_{2n+1} = id(I'')$ (quand $k = 2n+1$).

Pour tout entier $1 \leq h \leq n$, on voit maintenant que :

- $s_{2h-1} : S_{2h-1} \to Z^\circ_{2h-1}$ égalise $(x'_1.y^\circ_{2h-1}), (x'_2.y^\circ_{2h-1}) : U(Z^\circ_{2h-1}) \to X''$ (par construction),
- $z^\circ_{2h-1}.s_{2h} : S_{2h} \to Z^\circ_{2h-1}$ égalise $(x'_1.y^\circ_{2h-1}), (x'_2.y^\circ_{2h-1}) : U(Z^\circ_{2h-1}) \to X''$ (puisque :

$$(x'_1.y^\circ_{2h-1}).(z^\circ_{2h-1}.s_{2h}) = x'_1.y^\circ_{2h}.s_{2h}$$
$$= x'_2.y^\circ_{2h}.s_{2h} = (x'_2.y^\circ_{2h-1}).(z^\circ_{2h-1}.s_{2h})\ )$$

et, par conséquent, on dispose (en vertu de (K-SAT 2), puisque X'' K-satisfait U) :

- d'un entier $m_{2h-1} \geq 1$, d'un zigzag de flèches de I :

$$\xi^*_{2h-1} = (z^*_{2h-1,r})_{1\leq r\leq 2m_{2h-1}} : S_{2h-1} = Z^*_{2h-1,1} \xleftarrow[z^*_{2h-1,1}]{} Z^*_{2h-1,2} \xrightarrow[z^*_{2h-1,2}]{} Z^*_{2h-1,3} \cdots$$
$$\cdots Z^*_{2h-1,2m_{2h-1}-1} \xleftarrow[z^*_{2h-1,2m_{2h-1}-1}]{} Z^*_{2h-1,2m_{2h-1}} \xrightarrow[z^*_{2h-1,2m_{2h-1}}]{} Z^*_{2h-1,2m_{2h-1}+1} = S_{2h}$$

  et d'une famille $s^*_{2h-1} = (s^*_{2h-1,r})_{1\leq r\leq 2m_{2h-1}+1}$ de flèches de I qui égalise $(x'_1.y^\circ_{2h-1}), (x'_2.y^\circ_{2h-1}) : U(Z^\circ_{2h-1}) \to X''$ et qui connecte s_{2h-1} à $z^\circ_{2h-1}.s_{2h}$ le long de ξ^*_{2h-1}.

De même, pour tout entier $1 \leq h \leq n$, on voit que :

- $s_{2h+1} : S_{2h+1} \to Z^\circ_{2h+1}$ égalise $(x'_1.y^\circ_{2h+1}), (x'_2.y^\circ_{2h+1}) : U(Z^\circ_{2h+1}) \to X''$ (par construction),
- $z^\circ_{2h}.s_{2h} : S_{2h} \to Z^\circ_{2h+1}$ égalise $(x'_1.y^\circ_{2h+1}), (x'_2.y^\circ_{2h+1}) : U(Z^\circ_{2h+1}) \to X''$ (puisque :

$$(x'_1 . y^\circ_{2h+1}).(z^\circ_{2h} . s_{2h-1}) = x'_1 . y^\circ_{2h} .s_{2h}$$
$$= x'_2 . y^\circ_{2h} .s_{2h} = (x'_2 . y^\circ_{2h+1}).(z^\circ_{2h} . s_{2h})\ )$$

et, par conséquent, on dispose (en vertu de (K-SAT 2), puisque X'' K-satisfait U) :

- d'un entier $m_{2h} \geq 1$, d'un zigzag de flèches de I :

$$\xi^*_{2h} = (z^*_{2h,r})_{1\leq r\leq 2m_{2h}} : S_{2h} = Z^*_{2h,1} \xleftarrow[z^*_{2h,1}]{} Z^*_{2h,2} \xrightarrow[z^*_{2h,2}]{} Z^*_{2h,3} \cdots$$
$$\cdots Z^*_{2h,2m_{2h}-1} \xleftarrow[z^*_{2h,2m_{2h}-1}]{} Z^*_{2h,2m_{2h}} \xrightarrow[z^*_{2h,2m_{2h}}]{} Z^*_{2h,2m_{2h}+1} = S_{2h+1}$$

et d'une famille $s^*_{2h} = (s^*_{2h,r})_{1\leq r\leq 2m_{2h}+1}$ de flèches de $\boldsymbol{I}$ qui égalise $(x'_1.y^\circ_{2h+1})$, $(x'_2.y^\circ_{2h+1}) : U(Z^\circ_{2h+1}) \to X''$ et qui connecte $z^\circ_{2h}.s_{2h}$ à s_{2h+1} le long de ξ^*_{2h}.

Dès lors, on dispose aussi :

- pour tout $1 \leq k \leq 2n+1$, de la flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$f_k = [y^\circ_k.U(s_k)] : U(S_k) \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$$

  et, ce, de sorte qu'on a, en particulier :

  - $f_1 = [\ker(x'_1,x'_2).y'.U(\mathrm{id}(I'))] = y'$,
  - $f_{2n+1} = [\ker(x'_1,x'_2).y''.U(\mathrm{id}(I''))] = y''$,

- pour tout $1 \leq h \leq n$ et tout $1 < r < 2m_{2h-1}+1$, de la flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$f^*_{2h-1,r} = [y^\circ_{2h-1}.U(s^*_{2h-1,r})] : U(Z^*_{2h-1,r}) \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2),$$

- pour tout $1 \leq h \leq n$ et tout entier $1 < r < 2m_{2h}+1$, de la flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$f^*_{2h,r} = [y^\circ_{2h+1}.U(s^*_{2h,r})] : U(Z^*_{2h,r}) \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2).$$

Dans ces conditions, il est facile de constater (par unicité) que la famille de flèches de $\boldsymbol{X}$:

$$\begin{aligned}
&(f_1,(f^*_{1,r})_{1<r<2m_1+1},f_2,(f^*_{2,r})_{1<r<2m_2+1},f_3,\ldots\\
&\ldots,f_{2h-1},(f^*_{2h-1,r})_{1<r<2m_{2h-1}+1},f_{2h},(f^*_{2h,r})_{1<r<2m_{2h}+1},f_{2h+1},\ldots\\
&\ldots,f_{2n-1},(f^*_{2n-1,r})_{1<r<2m_{2n-1}+1},f_{2n},(f^*_{2n,r})_{1<r<2m_{2n}+1},f_{2n+1})
\end{aligned}$$

permet de connecter $y' = f_1$ à $f_{2n+1} = y''$ le long du zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$(\xi^*_1,\ldots,\xi^*_k,\ldots,\xi^*_{2n}) = ((z^*_{1,r})_{1\leq r\leq 2m_1},\ldots,(z^*_{k,r})_{1\leq r\leq 2m_k},\ldots,(z^*_{2n,r})_{1\leq r\leq 2m_{2n}}),$$

de sorte que $\mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ vérifie (SAT 2).

c) De a) et b) résulte évidemment que $\mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ vérifie (K-SAT 0).

d) Si I est un objet de $\boldsymbol{I}$ et si $y_1, y_2 : U(I) \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ sont deux flèches de $\boldsymbol{X}$ égalisées par $U(p(\boldsymbol{I})(I))$, alors $\ker(x'_1,x'_2).y_1$, $\ker(x'_1,x'_2).y_2 : U(I) \to X'$ le sont a fortiori. Par conséquent, il existe (en vertu de (K-SAT 1), puisque X' K-satisfait U) une flèche $s : S \to I$ de $\boldsymbol{I}$ qui égalise $\ker(x'_1,x'_2).y_1$ et $\ker(x'_1,x'_2).y_2$. Alors, par unicité (i.e. parce que $\ker(x'_1,x'_2)$ est un mono!), on voit que s égalise nécessairement y_1 et y_2. Ainsi $\mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ vérifie (K-SAT 1).

e) Enfin, si I est un objet de $\boldsymbol{I}$, si $y_1, y_2 : U(I) \to \mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ sont deux flèches de $\boldsymbol{X}$ et si $s' : S' \to I$ et $s'' : S'' \to I$ sont deux flèches de $\boldsymbol{I}$ qui égalisent y_1 et y_2, a fortiori elles égalisent $\ker(x'_1,x'_2).y_1$, $\ker(x'_1,x'_2).y_2 : U(I) \to X'$. Donc il existe (en vertu de (K-SAT 2), puisque X' K-satisfait U) un entier $n \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^* = (z^*_k)_{1\leq k\leq 2n} : S' = Z^*_1 \xleftarrow[z^*_1]{} Z^*_2 \xrightarrow[z^*_2]{} Z^*_3 \cdots$$
$$\cdots Z^*_{2n-1} \xleftarrow[z^*_{2n-1}]{} Z^*_{2n} \xrightarrow[z^*_{2n}]{} Z^*_{2n+1} = S''$$

et une famille $s^* = (s^*_k : Z^*_k \to I)_{1 \leq k \leq 2n+1}$ de flèches de $\mathbf{I}$ qui égalise $\ker(x'_1,x'_2).y_1$ et $\ker(x'_1,x'_2).y_2$ et qui connecte s' à s'' le long de ξ^*. Alors, par unicité (i.e. parce que $\ker(x'_1,x'_2)$ est un mono!), on voit que la famille s^* égalise y_1 et y_2 tout en continuant à connecter s' à s'' le long de ξ^* ! Autrement dit, $\mathrm{Ker}(x'_1,x'_2)$ vérifie (K-SAT 2). FIN DE LA PREUVE.

2.6. Existence des noyaux dans certaines catégories qualifiables.

Il est clair que :

PROPOSITION. *Si $\mathcal{X}$ est une catégorie localement petite et co-complète et si $\mathcal{U}$ est une* K-*qualification interne à* $\mathcal{X}$, *alors le foncteur injection canonique* $\mathrm{inj}(\mathcal{U},\mathcal{X}) : \mathrm{Satif}(\mathcal{U},\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$ *crée les noyaux.*

PREUVE. Comme $\mathcal{U}$ est une K-qualification, il existe (par définition) une qualification $\mathcal{U}'$ telle que $\mathcal{U} = \mathrm{Qlf}(K/\mathcal{U}')$. Dès lors, on voit que :

$$\mathrm{inj}(\mathcal{U},\mathcal{X}) : \mathrm{Satisf}(\mathcal{U},\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$$

$$=$$

$$\mathrm{inj}(\mathrm{Qlf}(K/\mathcal{U}'),\mathcal{X}) : \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qlf}(K/\mathcal{U}'),\mathcal{X}) \to \mathcal{X}$$

$$=$$

$$\mathrm{surinj}(K/\mathcal{U}',\mathcal{X}) : \mathrm{SurSatisf}(K/\mathcal{U}',\mathcal{X}) \to \mathcal{X}.$$

Il suffit donc d'appliquer la PROPOSITION de 2.5. FIN DE LA PREUVE.

3. Sur l'existence des noyaux dans les catégories de modèles de certaines esquisses.

3.1. Esquisses.

Comme en [E.T.S.A.] et en [C.Q.C.E.] (notamment), on dit que $\boldsymbol{E} = (\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}), \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E}), \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E}))$ est une *esquisse* si :

- $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ est une catégorie [7], appelée le *support* de $\boldsymbol{E}$,
- $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ est une classe de cônes de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *distingués dans* $\boldsymbol{E}$,
- $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ est une classe de co-cônes de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *co-distingués* dans $\boldsymbol{E}$.

Alors, on dit que $\boldsymbol{E}$ est *petite* si "tout y est petit", i.e. si :

- $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ est un *ensemble* et l'indexation de tout cône distingué est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ est un *ensemble* et la co-indexation de tout co-cône co-distingué est une catégorie *petite*.

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisses, on dit qu'un foncteur $H : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ *définit un homomorphisme* (encore noté) $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ *de* $\boldsymbol{E}$ *vers* $\boldsymbol{E}'$ et de *support* (le foncteur) H si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le cône composé $H \circ P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ est distingué dans $\boldsymbol{E}'$,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le co-cône composé $H \circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ est co-distingué dans $\boldsymbol{E}'$.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, on dit qu'un foncteur $M : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{X}$ *définit* un *modèle* (encore noté) $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{X}$ *de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{X}$ et de *support* (le foncteur) M si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le cône composé $M \circ P : \mathrm{C}(A) \to \boldsymbol{X}$ est un cône limite dans $\boldsymbol{X}$,

---

[7] Nous supposons (pour simplifier l'exposé - et la lecture), que les supports des esquisses sont des catégories et non des "présentations de catégories", i.e. des *graphes multiplicatifs* (voir [E.T.S.A.]). Cependant, il est clair que, dans ce cadre plus général, les différents résultats énoncés ici demeurent tout aussi valables (à une simple adaptation près concernant le "plongement" - qui, en général, n'en est plus un - de Yoneda).

- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le co-cône composé $M \circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{X}$ est un co-cône co-limite dans $\boldsymbol{X}$.

Alors, on note $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$ la catégorie de ces modèles, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{X})$ ayant pour objets les modèles de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{X}$.

Si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ est un homomorphisme entre deux esquisses et si $M' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{X}$ est un modèle de $\boldsymbol{E}'$, il est clair que $M' \circ H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{X}$ est un modèle de $\boldsymbol{E}$. Ainsi, on dispose d'un foncteur "composition à droite par H" :

$$\mathrm{Mod}(H,\boldsymbol{X}) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}) .$$

Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite.

On note $\mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})) : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le plongement de Yoneda.

Pour tout *cône* $P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, distingué dans $\boldsymbol{E}$, on note successivement :

- $\mathrm{CCA}(P) = \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})) \circ P^{\mathrm{op}} : \mathrm{CC}(A^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(A)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *co-cône associé* (par dualité, puis composition avec le plongement de Yoneda) au cône P,
- $\mathrm{CSCCA}(P)$ le co-sommet du co-cône associé à P,
- $\mathrm{CLA}(P)$ le *co-cône co-limite associé à* P, i.e. un co-cône co-limite arbitrairement choisi parmi ceux de même co-base que le co-cône associé à P (il en existe au moins un puisque $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ est, évidemment, co-complète),
- $\mathrm{CSCLA}(P)$ le co-sommet du co-cône co-limite $\mathrm{CLA}(P)$ associé à P,
- $\mathrm{f}(P) : \mathrm{CSCLA}(P) \to \mathrm{CSCCA}(P)$ l'unique flèche de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ permettant de factoriser le co-cône $\mathrm{CCA}(P)$ au travers du co-cône co-limite $\mathrm{CLA}(P)$ (puisqu'ils ont même co-base),
- $\mathrm{U}(P) : \mathrm{C}(\boldsymbol{1}) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *cône associé à* P, d'indexation la catégorie $\boldsymbol{1}$ (à un seul objet 0 et une seule flèche $\mathrm{id}(0)$) et ayant pour (seule) projection la flèche :

$$\mathrm{U}(P)(\mathrm{p}(\boldsymbol{1})(0)) = \mathrm{f}(P) : \mathrm{CSCLA}(P) \to \mathrm{CSCCA}(P) .$$

Maintenant, pour tout *co-cône* $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, co-distingué dans $\boldsymbol{E}$, on note :

- $\mathrm{U}(Q) = \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})) \circ Q^{\mathrm{op}} : \mathrm{C}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{CC}(\boldsymbol{B})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *cône associé* (par dualité, puis composition avec le plongement de Yoneda) au co-cône Q.

De la sorte, on obtient une qualification interne à $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ *canoniquement associée à* $\boldsymbol{E}$:

$$\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}) = \{\mathrm{U}(P) \mid P \in \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})\} \cup \{\mathrm{U}(Q) \mid Q \in \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})\}$$

et, comme en [C.Q.C.E.], il est facile de constater (compte tenu des propriétés du plongement de Yoneda) que :

$$\mathrm{Mod}(E,\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qualif}(E),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(E),\boldsymbol{Ens})) .$$

3.2. Sur-esquisses.

On dit que $SE = (\mathrm{Supp}(SE),\mathrm{CDist}(SE),\mathrm{SCCDist}(SE))$ est une *sur-esquisse* si :

- $\mathrm{Supp}(SE)$ est une catégorie [8], appelée le *support* de SE,
- $\mathrm{CDist}(SE)$ est une classe de cônes de $\mathrm{Supp}(SE)$, dits *distingués dans* SE,
- $\mathrm{SCCDist}(SE)$ est une classe de sur-co-cônes de $\mathrm{Supp}(SE)$, dits *co-distingués* dans SE.

Alors, on dit que SE est *petite* si "tout y est petit", i.e. si :

- $\mathrm{Supp}(SE)$ est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CDist}(SE)$ est un *ensemble* et l'indexation de tout cône distingué est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{SCCDist}(SE)$ est un *ensemble* de sur-co-cônes *petits*.

Si SE et SE' sont deux sur-esquisses, on dit qu'un foncteur $H : \mathrm{Supp}(SE) \to \mathrm{Supp}(SE')$ *définit un homomorphisme* (encore noté) $H : SE \to SE'$ *de* SE *vers* SE' et de *support* (le foncteur) H si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(SE)$ dans SE, le cône composé $H \circ P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(SE')$ est distingué dans SE',
- pour tout sur-co-cône co-distingué $(\Sigma,Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(SE))$ dans SE, le sur-co-cône "composé" $(\Sigma,H \circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(SE'))$ est co-distingué dans SE'.

Si SE est une sur-esquisse petite, on dit qu'un foncteur $M : \mathrm{Supp}(SE) \to \boldsymbol{Ens}$ *définit* un *sur-modèle* (encore noté) $M : SE \to \boldsymbol{Ens}$ *de* SE *dans* $\boldsymbol{Ens}$ et de *support* (le foncteur) M si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(SE)$ dans SE, le cône composé $M \circ P : \mathrm{C}(A) \to \boldsymbol{Ens}$ est un cône limite dans $\boldsymbol{Ens}$,

---

[8] Comme pour les esquisses, nous supposons (pour simplifier l'exposé - et la lecture), que les supports des sur-esquisses sont des catégories et non des "présentations de catégories", i.e. des *graphes multiplicatifs* (voir [E.T.S.A.]). Cependant, il est clair que, dans ce cadre plus général, les différents résultats énoncés ici demeurent tout aussi valables (à une simple adaptation près concernant le "plongement" - qui, en général, n'en est plus un - de Yoneda).

- pour tout sur-co-cône co-distingué $(\Sigma,Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}))$ dans $\boldsymbol{SE}$, le sur-co-cône "composé" $(\Sigma,M\circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{Ens})$ est un sur-co-cône sur-co-limite dans $\boldsymbol{Ens}$.

Alors, on note $\mathrm{SurMod}(\boldsymbol{SE},\boldsymbol{Ens})$ la catégorie de ces sur-modèles, i.e. la sous-catégorie (non nécessairement pleine) de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens})$ telle que :

- ses objets sont les sur-modèles $M : \boldsymbol{SE} \to \boldsymbol{Ens}$ de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{Ens}$,

- ses flèches sont les transformations naturelles $\mathrm{T} : M_1 \Rightarrow M_2 : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}) \to \boldsymbol{Ens}$ telles que :

    - $M_1 , M_2 : \boldsymbol{SE} \to \boldsymbol{Ens}$ sont des sur-modèles de $\boldsymbol{SE}$ dans $\boldsymbol{Ens}$,

    - pour tout sur-co-cône co-distingué $(\Sigma,Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}))$ dans $\boldsymbol{SE}$ et toute formule $\varphi \in \Sigma$, la transformation naturelle :

    $$\mathrm{T}\circ Q : M_1\circ Q \Rightarrow M_2\circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{Ens}$$

    (i.e. l'homomorphisme entre interprétations du langage associé à $\mathrm{CC}(\boldsymbol{B})$) "commute" avec la satisfaction des sous-formules de φ.

Si $H : \boldsymbol{SE} \to \boldsymbol{SE}'$ est un homomorphisme entre deux sur-esquisses petites et si $M' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle de $\boldsymbol{SE}'$, il est clair que $M'\circ H : \boldsymbol{SE} \to \boldsymbol{Ens}$ est un modèle de $\boldsymbol{SE}$. Ainsi, on dispose d'un foncteur "composition à droite par H" :

$$\mathrm{SurMod}(H,\boldsymbol{Ens}) : \mathrm{SurMod}(\boldsymbol{SE}',\boldsymbol{Ens}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{SE},\boldsymbol{Ens}) .$$

Si $\boldsymbol{SE}$ est une sur-esquisse petite, on pose (en reprenant des notations analogues à celles de 3.1.) :

$$\mathrm{SurQualif}(\boldsymbol{SE})$$

$$=$$

$$\{(\varnothing,\mathrm{U}(P)) \mid P \in \mathrm{CDist}(\boldsymbol{SE})\} \cup \{(\Sigma,\mathrm{U}(Q)) \mid (\Sigma,Q) \in \mathrm{SCCDist}(\boldsymbol{SE})\} .$$

De la sorte, on obtient une sur-qualification interne à $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens})$, dite *canoniquement associée à* $\boldsymbol{SE}$.

Alors, il est facile de constater (compte tenu des propriétés du plongement de Yoneda) que :

$$\mathrm{SurMod}(\boldsymbol{SE},\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{SurSatisf}(\mathrm{SurQualif}(\boldsymbol{SE}),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens})) .$$

3.3. Esquissabilité des catégories positivement sur-esquissables.

Si $\boldsymbol{SE}$ est une sur-esquisse, on dit qu'elle est *positive* si :

- pour tout sur-co-cône $(\Sigma,Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}))$ co-distingué dans $\boldsymbol{SE}$, Σ est une surcharge positive de $\boldsymbol{B}$.

Etablissons que :

LEMME. *Si* $\boldsymbol{SE}$ *est une sur-esquisse positive, la catégorie* $\mathrm{SurMod}(\boldsymbol{SE},\boldsymbol{Ens})$ *est une sous-catégorie pleine de la catégorie* $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens})$.

De plus, on peut canoniquement associer à la sur-esquisse positive $\boldsymbol{SE}$ *une esquisse petite* $\mathrm{Esq}(\boldsymbol{SE})$ *de sorte que :*

- *on dispose d'un foncteur injection canonique :*

$$\mathrm{inj}(\boldsymbol{SE}) : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}) \to \mathrm{Supp}(\mathrm{Esq}(\boldsymbol{SE}))$$

  entre les supports,

- *le foncteur :*

$$\mathrm{Fonct}(\mathrm{inj}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens}) : \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\mathrm{Esq}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens}) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens})$$

  se restreint en une équivalence :

$$\mathrm{eq}(\boldsymbol{SE}) : \mathrm{Mod}(\mathrm{Esq}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens}) \xrightarrow{\approx} \mathrm{SurMod}(\boldsymbol{SE},\boldsymbol{Ens}).$$

PREUVE. Il suffit évidemment d'établir ce LEMME lorsque :

$$\boldsymbol{SE} = (\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}),\mathrm{CDist}(\boldsymbol{SE}),\{(\varphi,Q : \boldsymbol{B} \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}))\})$$

est une sur-esquisse positive (n'ayant qu'un sur-co-cône distingué) où $\boldsymbol{B}$ est une catégorie petite et φ est une sur-formule positive et petite de $\boldsymbol{B}$.

La formule φ *ne contenant pas explicitement* de négations (quand bien même elle peut "avoir valeur de négation" - voir la Note 4), il est immédiat de vérifier que $\mathrm{SurMod}(\boldsymbol{SE},\boldsymbol{Ens})$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}),\boldsymbol{Ens})$.

Pour construire $\mathrm{Esq}(\boldsymbol{SE})$, on procède par étapes comme suit.

a) Si Γ est une sorte du langage associé à $\mathrm{CC}(\boldsymbol{B})$ (i.e. si Γ est un objet de $\mathrm{CC}(\boldsymbol{B})$), on lui associe l'objet de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})$:

$$[Q](\Gamma) = Q(\Gamma).$$

Si $\gamma : \Gamma \to \Gamma'$ est un symbole fonctionnel du langage associé à $\mathrm{CC}(\boldsymbol{B})$, on lui associe la flèche de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})$:

$$[Q](\gamma) = Q(\gamma) : [Q](\Gamma) \to [Q](\Gamma').$$

b) Si $\omega{:}\Gamma$ est une variable figurant dans φ et de sorte Γ (alors, on notera aussi $\Gamma = \Gamma_\omega$, étant entendu qu'à chaque variable "utilisée" n'est associée qu'une seule sorte), on lui associe la flèche de Supp($\boldsymbol{SE}$) :

$$[\mathcal{Q}](\omega) = \mathrm{id}(\mathcal{Q}(\Gamma)) = \mathrm{id}([\mathcal{Q}](\Gamma)) : [\mathcal{Q}](\Gamma) \to [\mathcal{Q}](\Gamma)\,.$$

Si $t(\omega)$ est un terme, figurant dans φ, de sorte Γ' et en la (nécessairement seule) variable ω de sorte Γ (alors on note, indifféremment, $t(\omega) = t(\omega{:}\Gamma) = t(\omega){:}\Gamma' = t(\omega{:}\Gamma){:}\Gamma'$), si on a ajouté à Supp($\boldsymbol{SE}$) une flèche associée à $t(\omega)$:

$$[\mathcal{Q}](t(\omega)) : [\mathcal{Q}](\Gamma) \to [\mathcal{Q}](\Gamma')$$

et si $\gamma' : \Gamma' \to \Gamma''$ est un symbole fonctionnel, alors on ajoute à Supp($\boldsymbol{SE}$) la flèche (et l'équation) associée(s) au terme $\gamma'(t(\omega{:}\Gamma)){:}\Gamma''$:

$$[\mathcal{Q}](\gamma'(t(\omega)) = [\mathcal{Q}](\gamma').[\mathcal{Q}](t(\omega)) = \mathcal{Q}(\gamma').[\mathcal{Q}](t(\omega)) : [\mathcal{Q}](\Gamma) \to [\mathcal{Q}](\Gamma'')\,.$$

De la sorte (i.e. récursivement), à tout terme $t'(\omega{:}\Gamma){:}\Gamma''$ (du langage associé à CC($\boldsymbol{B}$)) figurant dans φ, on sait associer une flèche (et une équation) ajoutée(s) à Supp($\boldsymbol{SE}$) :

$$[\mathcal{Q}](t'(\omega)) : [\mathcal{Q}](\Gamma) \to [\mathcal{Q}](\Gamma'')\,.$$

On génère ainsi une catégorie $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,0}$, contenant Supp($\boldsymbol{SE}$), et une esquisse $\boldsymbol{SE}_{\varphi,0} = (\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,0}, \mathrm{CDIST}(\boldsymbol{SE}), \{\mathcal{Q}\})$ de support $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,0}$ (en identifiant les cônes et co-cônes à valeurs dans Supp($\boldsymbol{SE}$) à des cônes et co-cônes à valeurs dans $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,0}$).

c) Si $\alpha = (t_1(\omega_1{:}\Gamma_1){:}\Gamma = t_2(\omega_2{:}\Gamma_2){:}\Gamma)$ est une formule atomique figurant dans φ, on note successivement :

- $\mathrm{VARAT}(\alpha) = \{\omega_1, \omega_2\}$ l'ensemble des variables figurant dans α,
- $\mathrm{TERM}(\alpha) = \{t_1(\omega_1), t_2(\omega_2)\}$ l'ensemble des termes figurant dans α,
- $\mathrm{CATAT}(\alpha)$ la catégorie telle que :
    - ses objets sont les (symboles auxiliaires) S_α et $S_{\alpha,\omega}$, où $\omega \in \mathrm{VARAT}(\alpha)$,
    - ses flèches non triviales sont les (symboles auxiliaires) $s_{\alpha,t(\omega)} : S_\alpha \to S_{\alpha,\omega}$, où $t(\omega) \in \mathrm{TERM}(\alpha)$,
- $\mathrm{ATFCT}(\alpha) : \mathrm{CATAT}(\alpha)^{op} \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})$ le foncteur tel que :

  $$\mathrm{ATFCT}(\alpha)(s_{\alpha,t(\omega)}) = [\mathcal{Q}](t(\omega)) : [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega) \to [\mathcal{Q}](\Gamma)$$

  pour toute flèche $s_{\alpha,t(\omega)} : S_\alpha \to S_{\alpha,\omega}$ de $\mathrm{CATAT}(\alpha)$.

Dans ces conditions, pour toute telle formule atomique α, on ajoute successivement à $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,0}$ (et à $\boldsymbol{SE}_{\varphi,0}$) :

- un "produit potentiel" ($\widetilde{\prod_{\omega\in \mathrm{VARAT}(\alpha)}}[\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)$) de la famille $([\mathcal{Q}](\Gamma_\omega))_{\omega \in \mathrm{VARAT}(\alpha)}$ (i.e. un objet et un cône distingué d'indexation discrète et de sommet cet objet),

- $\alpha/(\widetilde{\prod_{\omega\in \mathrm{VARAT}(\alpha)}} [Q](\Gamma_\omega))$ une "limite potentielle" du foncteur $\mathrm{ATFCT}(\alpha)$ (i.e. un objet et un cône distingué de base $\mathrm{ATFCT}(\alpha)$ et de sommet cet objet, de sorte que cette "limite potentielle" est :
  - un "produit fibré potentiel", si $\omega_1 \neq \omega_2$,
  - un "noyau potentiel", si $\omega_1 = \omega_2$ et $t_1(\omega_1) \neq t_2(\omega_2)$,
  - une "limite triviale potentielle", si $\omega_1 = \omega_2$ et $t_1(\omega_1) = t_2(\omega_2)$),
- une flèche :

$$[Q](\alpha) : \alpha/(\widetilde{\prod_{\omega\in \mathrm{VARAT}(\alpha)}} [Q](\Gamma_\omega)) \to (\widetilde{\prod_{\omega\in \mathrm{VARAT}(\alpha)}} [Q](\Gamma_\omega))$$

  permettant de factoriser la "limite potentielle" considérée au travers du "produit potentiel" considéré.

On génère ainsi une catégorie $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,1}$, contenant $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,0}$, et une esquisse $\boldsymbol{SE}_{\varphi,1}$, de support $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,1}$ et contenant $\boldsymbol{SE}_{\varphi,0}$.

d) Pour toute formule atomique $\alpha = (t_1(\omega_1:\Gamma_1):\Gamma = t_2(\omega_2:\Gamma_2):\Gamma)$, figurant dans φ , et pour tout ensemble de variables V *utilisé par* φ *pour* α (voir le i) plus loin) et *contenant* $\mathrm{VARAT}(\alpha)$, on ajoute successivement à $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,1}$ (et à $\boldsymbol{SE}_{\varphi,1}$) :

- un "produit potentiel" $(\widetilde{\prod_{\omega\in V}} [Q](\Gamma_\omega))$ de la famille $([Q](\Gamma_\omega))_{\omega\in V}$ (i.e. un objet et un cône distingué d'indexation discrète et de sommet cet objet),
- une flèche :

$$x'_{\alpha,V} : (\widetilde{\prod_{\omega\in V}} [Q](\Gamma_\omega)) \to (\widetilde{\prod_{\omega\in \mathrm{VARAT}(\alpha)}} [Q](\Gamma_\omega))$$

  permettant de factoriser le "produit potentiel" (total) $(\widetilde{\prod_{\omega\in V}} [Q](\Gamma_\omega))$ au travers du "produit potentiel (partiel)" $(\widetilde{\prod_{\omega\in \mathrm{VARAT}(\alpha)}} [Q](\Gamma_\omega))$,
- une flèche :

$$[Q](\alpha,V) : \alpha/(\widetilde{\prod_{\omega\in V}} [Q](\Gamma_\omega)) \to (\widetilde{\prod_{\omega\in V}} [Q](\Gamma_\omega))$$

  "potentiellement déduite" de $[Q](\alpha)$ par "changement de base potentiel" le long de $x'_{\alpha,V}$ (i.e. un "produit fibré potentiel", c'est-à-dire un certain cône distingué).

On génère ainsi une catégorie $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,2}$, contenant $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,1}$, et une esquisse $\boldsymbol{SE}_{\varphi,2}$, de support $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,2}$ et contenant $\boldsymbol{SE}_{\varphi,1}$.

e) Si $\beta = \bigwedge_{h \in H} \alpha_h$ est une conjonction, figurant dans φ, de formules atomiques, on note :

- $\mathrm{VARCJ}(\beta) = \bigcup_{h \in H} \mathrm{VARAT}(\alpha_h)$,
- $\mathrm{CATCJ}(\beta)$ la catégorie telle que :
  - ses objets sont les (symboles auxiliaires) S_β et $S_{\beta,h}$, où $h \in H$,
  - ses flèches non triviales sont les (symboles auxiliaires) $s_{\beta,h} : S_\beta \to S_{\beta,h}$, où $h \in H$,
- $\mathrm{CJFCT}(\beta) : \mathrm{CATCJ}(\beta)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,2}$ le foncteur tel que :

$$\mathrm{CJFCT}(\beta)(s_{\beta,h})$$
$$=$$
$$[\mathcal{Q}](\mathrm{VARCJ}(\beta),\alpha_h) : \alpha_h/(\tilde{\prod_{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)) \to (\tilde{\prod_{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega))$$

  pour tout $h \in H$.

Dans ces conditions, pour toute telle formule β, on ajoute à $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,2}$:

- une "limite potentielle" $\beta/(\tilde{\prod_{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega))$ du foncteur $\mathrm{CJFCT}(\beta) : \mathrm{CATCJ}(\beta)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,2}$ (i.e. un objet et un cône distingué de base le foncteur $\mathrm{CJFCT}(\beta)$ et de sommet cet objet),

de sorte qu'on dispose aussi de la projection relative à l'objet S_β :

$$[\mathcal{Q}](\beta) : \beta/(\tilde{\prod_{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)) \to (\tilde{\prod_{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)).$$

On génère ainsi une catégorie $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,3}$, contenant $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,2}$, et une esquisse $\boldsymbol{SE}_{\varphi,3}$, de support $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,3}$ et contenant $\boldsymbol{SE}_{\varphi,2}$.

f) Pour toute conjonction β, figurant dans φ, de formules atomiques et pour tout ensemble de variables V *utilisé par* φ *pour* β - donc utilisé par φ pour chacune des formules atomiques dont β est la conjonction - (voir plus loin le i)) et *contenant* $\mathrm{VARCJ}(\beta)$, on ajoute successivement à $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,3}$ (et à $\boldsymbol{SE}_{\varphi,3}$) :

- un "produit potentiel" $(\tilde{\prod_{\omega \in V}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega))$ de la famille $([\mathcal{Q}](\Gamma_\omega))_{\omega \in V}$ (i.e. un objet et un cône distingué d'indexation discrète et de sommet cet objet),
- une flèche :

$$x'_{\beta,V} : (\tilde{\prod_{\omega \in V}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)) \to (\tilde{\prod_{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega))$$

permettant de factoriser le "produit potentiel" (total) ($\tilde{\prod}_{\omega\in V}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)$) au travers du "produit potentiel (partiel)" ($\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)$),

- une flèche :

$$[\underline{Q}](\beta,V) : \beta/(\tilde{\prod}_{\omega\in V}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)) \to (\tilde{\prod}_{\omega\in V}[\underline{Q}](\Gamma_\omega))$$

  "potentiellement déduite" de $[\underline{Q}](\beta)$ par "changement de base potentiel" le long de $x'_{\beta,V}$ (i.e. un "produit fibré potentiel", c'est-à-dire un certain cône distingué).

On génère ainsi une catégorie Supp(***SE***)$_{\varphi,4}$, contenant Supp(***SE***)$_{\varphi,3}$, et une esquisse ***SE***$_{\varphi,4}$, de support Supp(***SE***)$_{\varphi,4}$ et contenant ***SE***$_{\varphi,3}$.

g) Pour toute formule $\exists_{\omega\in W}\,\omega{:}\Gamma_\omega\ \beta$ figurant dans φ (où β est donc une conjonction, figurant dans φ, de formules atomiques et où W est donc un ensemble de variables *contenu* dans VARCJ(β)), on ajoute successivement à Supp(***SE***)$_{\varphi,4}$ (et à ***SE***$_{\varphi,4}$) :

- un "produit potentiel" ($\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\ W}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)$) de la famille $([\underline{Q}](\Gamma_\omega))_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\text{-}W}$ (i.e. un objet et un cône distingué d'indexation discrète et de sommet cet objet),
- une flèche :

$$y'_{\beta,W} : (\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)) \to (\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\text{-}W}[\underline{Q}](\Gamma_\omega))$$

  permettant de factoriser le "produit potentiel" (total) ($\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)$) au travers du "produit potentiel (partiel)" ($\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\text{-}W}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)$),

de sorte qu'on dispose de la flèche composée :

$$[\underline{Q}](\exists_{\omega\in W}\,\omega{:}\Gamma_\omega\ \beta)$$

$$=$$

$$y'_{\beta,W}\cdot[\underline{Q}](\beta) : (\exists_{\omega\in W}\,\omega{:}\Gamma_\omega\ \beta)/(\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\text{-}W}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)) \to (\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\text{-}W}[\underline{Q}](\Gamma_\omega))$$

(on a donc *choisi* de noter ici, pour plus de commodité :

$$(\exists_{\omega\in W}\,\omega{:}\Gamma_\omega\ \beta)/(\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)\ W}[\underline{Q}](\Gamma_\omega)) = \beta/(\tilde{\prod}_{\omega\in \mathrm{VARCJ}(\beta)}[\underline{Q}](\Gamma_\omega))\ ).$$

On génère ainsi une catégorie Supp(***SE***)$_{\varphi,5}$, contenant Supp(***SE***)$_{\varphi,4}$, et une esquisse ***SE***$_{\varphi,5}$, de support Supp(***SE***)$_{\varphi,5}$ et contenant ***SE***$_{\varphi,4}$.

h) Pour toute formule $\gamma = \underset{\omega \in W}{\exists}\ \omega{:}\Gamma_\omega\ \beta$ figurant dans φ (où β est donc une conjonction, figurant dans φ, de formules atomiques et où W est donc un ensemble de variables *contenu* dans VARCJ(β)) et pour tout ensemble de variables V *utilisé par* φ *pour* γ - donc utilisé par φ pour β - (voir plus loin le i)) et tel que VARCJ(β)-W = VARCJ(β)$\cap$V, on ajoute successivement à Supp($\boldsymbol{SE}$)$_{\varphi,5}$ (et à $\boldsymbol{SE}_{\varphi.5}$) :

- un "produit potentiel" ($\underset{\omega \in V}{\tilde{\Pi}}\ [Q](\Gamma_\omega)$) de la famille $([Q](\Gamma_\omega))_{\omega \in V}$ (i.e. un objet et un cône distingué d'indexation discrète et de sommet cet objet),
- une flèche :

$$z'_{\beta,V} : (\underset{\omega \in V}{\tilde{\Pi}}\ [Q](\Gamma_\omega))(\underset{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V}{\Sigma} [U](\Gamma_\omega)) \to (\underset{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)\text{-}W}{\tilde{\Pi}} [Q](\Gamma_\omega))$$

  permettant de factoriser le "produit potentiel" (total) ($\underset{\omega \in V}{\tilde{\Pi}}\ [Q](\Gamma_\omega)$) au travers du "produit potentiel (partiel)" ($\underset{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)\ W}{\tilde{\Pi}} [Q](\Gamma_\omega)$),
- une flèche :

$$[Q]((\underset{\omega \in W}{\exists}\ \omega{:}\Gamma_\omega\ \beta), V)$$

$$=$$

$$[Q]((\underset{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)-\mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V}{\exists} \omega{:}\Gamma_\omega\ \beta), V)$$

$$:$$

$$(\underset{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)-\mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V}{\exists} \omega{:}\Gamma_\omega\ \beta)/(\underset{\omega \in V}{\tilde{\Pi}}\ [Q](\Gamma_\omega)) \to (\underset{\omega \in V}{\tilde{\Pi}}\ [Q](\Gamma_\omega))$$

  "potentiellement déduite" de :

$$[Q](\underset{\omega \in \mathrm{VARCJ}(\beta)-\mathrm{VARCJ}(\beta)\cap V}{\exists} \omega{:}\Gamma_\omega\ \beta) = [Q](\underset{\omega \in W}{\exists}\ \omega{:}\Gamma_\omega\ \beta)$$

  par "changement de base potentiel" le long de $z'_{\beta.V}$ (i.e. un "produit fibré potentiel", c'est-à-dire un certain cône distingué).

On génère ainsi une catégorie Supp($\boldsymbol{SE}$)$_{\varphi,6}$, contenant Supp($\boldsymbol{SE}$)$_{\varphi,5}$, et une esquisse $\boldsymbol{SE}_{\varphi.6}$, de support Supp($\boldsymbol{SE}$)$_{\varphi,6}$ et contenant $\boldsymbol{SE}_{\varphi,5}$.

i) Supposons, précisément, que la sur-formule positive φ s'écrit (comme en 2.3 où on fait $\boldsymbol{I}' = \boldsymbol{B}$ et d'où on reprend toutes les notations et toutes les hypothèses) :

$$\forall_{a\in A} \omega_a : \Gamma_a$$

$$[\bigwedge_{b\in B} (t_{b,1}(\omega_{b,1}) : \Gamma_b) = (t_{b,2}(\omega_{b,2}) : \Gamma_b)]$$

$$\Rightarrow$$

$$\bigvee_{c\in C} [\bigwedge_{d\in D(c)} (t_{c,d,1}(\omega_{c,d,1}) : \Gamma_{c,d}) = (t_{c,d,2}(\omega_{c,d,2}) : \Gamma_{c,d})]$$

$$\vee$$

$$\bigvee_{e\in E} [\exists_{f\in F(e)} \omega_{e,f} : \Gamma_{e,f} \ (\bigwedge_{g\in G(e)} (t_{e,g,1}(\omega_{e,g,1}) : \Gamma_{e,g}) = (t_{e,g,2}(\omega_{e,g,2}) : \Gamma_{e,g})\ )]$$

et posons alors :

- $\beta^* = [\bigwedge_{b\in B} (t_{b,1}(\omega_{b,1}) : \Gamma_b) = (t_{b,2}(\omega_{b,2}) : \Gamma_b)]$,
- $\beta_c = [\bigwedge_{d\in D(c)} (t_{c,d,1}(\omega_{c,d,1}) : \Gamma_{c,d}) = (t_{c,d,2}(\omega_{c,d,2}) : \Gamma_{c,d})]$, pour tout $c \in C$,
- $\beta_e = [\bigwedge_{g\in G(e)} (t_{e,g,1}(\omega_{e,g,1}) : \Gamma_{e,g}) = (t_{e,g,2}(\omega_{e,g,2}) : \Gamma_{e,g}]$, pour tout $e \in E$,

ainsi que, pour plus de commodité dans la suite :

- $\gamma_c = \beta_c$, pour tout $c \in C$,
- $\gamma_e = \exists_{f\in F(e)} \omega_{e,f} : \Gamma_{e,f} \ \beta_e$

Par hypothèse, on voit donc que :

- on a $\mathrm{VARCJ}(\beta^*) \subseteq \Omega_A$ et, par conséquent (si, au point f) précédent, on *utilise* $V = \Omega_A$ pour $\beta = \beta^*$), on dispose de la flèche de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}_{\varphi,6})$ (ou de $\boldsymbol{SE}_{\varphi,6}$) :

$$[\mathcal{Q}](\beta^*,\Omega_A) : \beta^*/(\ \tilde{\prod_{\omega\in\Omega_A}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)\ ) \to \tilde{\prod_{\omega\in\Omega_A}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega) ,$$

- pour tout $c \in C$, on a $\mathrm{VARCJ}(\beta_c) \subseteq \Omega_A$ et, par conséquent (si, au point f) précédent, on *utilise* $V = \Omega_A$ pour $\beta = \beta_c$), on dispose de la flèche de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}_{\varphi,6})$ (ou de $\boldsymbol{SE}_{\varphi,6}$) :

$$[\mathcal{Q}](\gamma_c,\Omega_A) : \gamma_c/(\ \tilde{\prod_{\omega\in\Omega_A}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)\ ) \to \tilde{\prod_{\omega\in\Omega_A}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega) ,$$

  de sorte qu'on peut ajouter à $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}_{\varphi,6})$ (et à $\boldsymbol{SE}_{\varphi,6}$) une flèche :

$$[\mathcal{Q}](\gamma_c,\Omega_A) * [\mathcal{Q}](\beta^*,\Omega_A) : \gamma_c/\beta^*/ \tilde{\prod_{\omega\in\Omega_A}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega) \to \beta^*/ \tilde{\prod_{\omega\in\Omega_A}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega) ,$$

  "potentiellement déduite" de $[\mathcal{Q}](\gamma_c,\Omega_A)$ par "changement de base potentiel" le long de $[\mathcal{Q}](\beta^*,\Omega_A)$ (i.e. en ajoutant un "produit fibré potentiel", c'est-à-dire un certain cône distingué),

- pour tout $e \in E$, on a $\mathrm{VARCJ}(\beta_e) \cap \Omega_A = \Omega_e - \Omega_{e,F(e)}$ et, par conséquent (si, au point h) précédent, on *utilise* $V = \Omega_A$ pour $\gamma = \gamma_e$), on dispose de la flèche de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}_{\varphi,6})$ (ou de $\boldsymbol{SE}_{\varphi,6}$) :

$$[\mathcal{Q}](\gamma_e, \Omega_A) : \gamma_e / (\underset{\omega \in \Omega_A}{\tilde{\Pi}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)) \to \underset{\omega \in \Omega_A}{\tilde{\Pi}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega) ,$$

de sorte qu'on peut ajouter à $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}_{\varphi,6})$ (et à $\boldsymbol{SE}_{\varphi,6}$) une flèche :

$$[\mathcal{Q}](\gamma_e, \Omega_A) * [\mathcal{Q}](\beta^*, \Omega_A) : \gamma_e / \beta^* / \underset{\omega \in \Omega_A}{\tilde{\Pi}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega) \to \beta^* / \underset{\omega \in \Omega_A}{\tilde{\Pi}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega) ,$$

"potentiellement déduite" de $[\mathcal{Q}](\gamma_e, \Omega_A)$ par "changement de base potentiel" le long de $[\mathcal{Q}](\beta^*, \Omega_A)$ (i.e. en ajoutant un "produit fibré potentiel", c'est-à-dire un certain cône distingué).

On génère ainsi une catégorie $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,7}$, contenant $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,6}$, et une esquisse $\boldsymbol{SE}_{\varphi,7}$, de support $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,7}$ et contenant $\boldsymbol{SE}_{\varphi,6}$.

Dès lors, on note indifféremment $\mathrm{CATPO}(\varphi) = \boldsymbol{B}_\varphi^{\mathrm{op}}$ la catégorie telle que :

- ses objets sont les éléments de $\Lambda \cup \Delta$, où $\Lambda = C \times \{1\} \cup E \times \{2\}$ et $\Delta = \Lambda \times \Lambda \times \{0\}$ (alors, on pose :
  - $c = |\lambda|$, pour tout $\lambda = (c,1) \in \Lambda$,
  - $e = |\lambda|$, pour tout $\lambda = (e,2) \in \Lambda$),
- ses flèches non triviales sont :
  - les $g_\delta : \lambda \to (\lambda, \lambda', 0)$, pour tout $\delta = (\lambda, \lambda', 0) \in \Delta$,
  - les $d_\delta : \lambda' \to (\lambda, \lambda', 0)$, pour tout $\delta = (\lambda, \lambda', 0) \in \Delta$.

et on désigne par $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,8}$ la catégorie, contenant $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,7}$, et par $\boldsymbol{SE}_{\varphi,8}$ l'esquisse, de support $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,8}$ et contenant $\boldsymbol{SE}_{\varphi,7}$, qu'on génère en imposant que $[\mathcal{Q}](\varphi) = \mathcal{Q}_\varphi : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}_\varphi) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})_{\varphi,8}$ est le co-cône *distingué* tel que :

- son sommet est :

$$\mathcal{Q}_\varphi(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{B}_\varphi)) = \beta^* / (\underset{\omega \in \Omega_A}{\tilde{\Pi}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega)) ,$$

- pour tout $\lambda \in \Lambda$, sa valeur en l'objet λ est :

$$\mathcal{Q}_\varphi(\lambda) = \beta_{|\lambda|} / \beta^* / (\underset{\omega \in \Omega_A}{\tilde{\Pi}} [\mathcal{Q}](\Gamma_\omega))$$

et sa co-projection relative à l'objet λ est :

$$Q_\varphi(\mathrm{cp}(\boldsymbol{B}_\varphi)(\lambda))$$
$$=$$
$$[Q](\gamma_{|\lambda|},\Omega_A) * [Q](\beta^*,\Omega_A) : \gamma_{|\lambda|} / \beta^*/ \widetilde{\prod_{\omega\in\Omega_A}} [Q](\Gamma_\omega) \to \beta^*/ \widetilde{\prod_{\omega\in\Omega_A}} [Q](\Gamma_\omega)\ ,$$

- pour tout $\delta = (\lambda,\lambda') \in \Delta$, sa valeur en l'objet δ est un "produit fibré potentiel" (obtenu en ajoutant un cône distingué) des deux flèches :

  $Q_\varphi(\mathrm{cp}(\boldsymbol{B}_\varphi)(\lambda)) : Q_\varphi(\lambda) \to U_\varphi(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{B}_\varphi)$ et $Q_\varphi(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{B}_\varphi)) \leftarrow Q_\varphi(\lambda') : Q_\varphi(\mathrm{cp}(\boldsymbol{B}_\varphi)(\lambda'))$

  pour lequel :

  $$Q_\varphi(\lambda) \leftarrow Q_\varphi(\delta) : Q_\varphi(g_\delta) \ \text{ et } \ Q_\varphi(d_\delta) : Q_\varphi(\delta) \to Q_\varphi(\lambda')$$

  en sont les deux projections.

j) Il est clair que $\mathrm{Esq}(\boldsymbol{SE}) = \boldsymbol{SE}_{\varphi,8}$ vérifie les propriétés attendues. FIN DE LA PREUVE [9].

3.4. Profils élémentaires, esquisses et sur-esquisses.

Si R est un profil élémentaire (resp. un profil élémentaire positif) et si $\boldsymbol{E}'$ est une esquisse petite, on pose :

$$\mathrm{R}//\boldsymbol{E}' = (\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}'),\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E}'),\{(\mathrm{R}(\boldsymbol{B}),\mathrm{Q} : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')) \mid \mathrm{Q} \in \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E}')\})$$

de sorte que $\mathrm{R}//\boldsymbol{E}'$ est une sur-esquisse (resp. une sur-esquisse positive) petite, dite *canoniquement associée à* $\boldsymbol{E}'$.

Supposons que R est un profil élémentaire.

On dit qu'une sur-esquisse petite $\boldsymbol{SE}$ est une R-*sur-esquisse* si :

- il existe une esquisse petite $\boldsymbol{E}'$ telle que $\boldsymbol{SE} = \mathrm{R}//\boldsymbol{E}'$.

De plus, si R est positif, on dit qu'une esquisse petite $\boldsymbol{E}$ est une R-*esquisse* si :

---

[9] Bien entendu, cette PREUVE dualise (avec les adaptations nécessitées par le passage de considérations "sémantiques" à des considérations "syntaxiques") la PREUVE du LEMME de 2.3.

Elle peut aussi être vue comme fournissant une *systématique* de traduction des formules *positives* du 1er ordre en termes d'esquisses. Parmi nombre d'autres telles *systématiques* de traduction (voir [L.C.R.F.] et [T.T.E.T.], notamment) de types de formules du 1er ordre (à commencer par le type de "toutes" ces formules) en termes d'esquisses, c'est la seule qui ne nécessite pas de "changement de langage de départ" : c'est justement ce que la possibilité de dualiser la PREUVE du LEMME de 2.3 pour obtenir la présente PREUVE exprime.

- il existe une esquisse petite $\boldsymbol{E}'$ telle que $\boldsymbol{E} = \mathrm{Esq}(\mathrm{R}//\boldsymbol{E}')$.

3.5. Existence des noyaux dans les catégories de sur-modèles de certaines sur-esquisses.

On vérifie immédiatement (en reprenant les notations de 2.5) que :

PROPOSITION. *Si* $\boldsymbol{E}'$ *est une esquisse petite, alors la catégorie des sur-modèles dans* ***Ens*** *de la sur-esquisse positive petite* $\mathrm{K}//\boldsymbol{E}'$ *possède les noyaux.*

PREUVE. a) Il est immédiat de vérifier que, si X est une quelconque catégorie localement petite et si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{1}) \to X$ est un cône d'indexation la catégorie $\boldsymbol{1}$ (à un seul objet 0 et une seule flèche $\mathrm{id}(0)$), alors on a :

$$\mathrm{SurSatisf}(\{(\varnothing,U)\},X) = \mathrm{SurSatisf}(\{(\mathrm{K}(\boldsymbol{1}),U)\},X) .$$

b) Comme on a (par construction) :

$$\mathrm{SurQualif}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}')$$

$$=$$

$$\{(\varnothing,\mathrm{U}(P')) \mid P' \in \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E}')\}$$

$$\cup$$

$$\{(\mathrm{K}(\boldsymbol{B}'),\mathrm{U}(Q')) \mid (Q' : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}') \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')) \in \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E}')\}$$

et :

$$\mathrm{K}//\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}')$$

$$=$$

$$\{(\mathrm{K}(\boldsymbol{1}),\mathrm{U}(P')) \mid P' \in \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E}')\}$$

$$\cup$$

$$\{(\mathrm{K}(\boldsymbol{B}'),\mathrm{U}(Q')) \mid (Q' : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}') \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')) \in \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E}')\}$$

on voit, en utilisant a) (où on prend $X = \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})$), que la PROPOSITION de 2.5. s'applique au foncteur injection canonique :

$$\mathrm{SurMod}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}',\boldsymbol{Ens}) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})$$

$$=$$

$$\mathrm{SurSatisf}(\mathrm{SurQualif}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}'),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})$$

$$=$$

$$\mathrm{SurSatisf}(\mathrm{K}//\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}'),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})$$

qui crée donc les noyaux. Mais la catégorie $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})$ *possède* les noyaux (qui se calculent, évidemment, "point par point"). FIN DE LA PREUVE.

3.6. Existence des noyaux dans les catégories de modèles de certaines esquisses.

Il est clair que :

PROPOSITION. *Si* $\boldsymbol{E}$ *est une* K-*esquisse petite, alors la catégorie de ses modèles dans* $\boldsymbol{Ens}$ *possède les noyaux.*

PREUVE. Comme $\boldsymbol{E}$ est une K-esquisse petite, il existe (par définition) une esquisse petite $\boldsymbol{E}'$ telle que $\boldsymbol{E} = \mathrm{Esq}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}')$. Dès lors, on voit que :

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{Mod}(\mathrm{Esq}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens}) \approx \mathrm{SurMod}(\mathrm{K}//\boldsymbol{E}',\boldsymbol{Ens}).$$

La PROPOSITION de 3.5 s'applique donc. FIN DE LA PREUVE.

4. Sur les diagrammes localement co-limites saturés dans les catégories possédant les noyaux.

4.1. Diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites.

Si $\boldsymbol{J}'$ est une petite catégorie, si $F' : \boldsymbol{J}' \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ' est un ensemble, on dit (évidemment) que Λ' est une (ou un *objet*) *limite* de F' si :

- il existe un cône $U' : \mathrm{C}(\boldsymbol{J}') \to \boldsymbol{Ens}$ tel que :
    - U' a pour sommet Λ' et pour base F',

- U' est un cône limite.

Alors, on note (bien entendu) :

$$\Lambda' = \underset{J' \in \boldsymbol{J}'}{\mathrm{Lim}}\, F'(J') \ .$$

Si $\boldsymbol{I}'$ est une petite catégorie, si $D' : \boldsymbol{I}' \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ'' est un ensemble, on dit (évidemment) que Λ'' est une (ou un *objet*) *co-limite de* D' si :

- il existe un co-cône $V' : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}') \to \boldsymbol{Ens}$ tel que :
  - V' a pour co-sommet Λ'' et pour co-base D',
  - V' est un co-cône co-limite.

Alors, on note (bien entendu) :

$$\Lambda'' = \underset{I' \in \boldsymbol{I}'}{\mathrm{CoLim}}\, D'(I') \ .$$

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie *localement petite* et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories *petites*.

On dit qu'un foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *admet pour (petit) diagramme localement co-limite* le foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ si :

- naturellement en tout objet X de $\boldsymbol{X}$, on a (dans $\boldsymbol{Ens}$) :

$$\underset{I \in \boldsymbol{I}^{op}}{\mathrm{CoLim}}\, \boldsymbol{X}(D(I),X) \cong \underset{J \in \boldsymbol{J}^{op}}{\mathrm{Lim}}\, \boldsymbol{X}(F(J),X) \ .$$

Supposons que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites.

On désigne par $\mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ la catégorie (*tronc de co-cône type de co-indexation* $\boldsymbol{J}$ *et d'indexation* $\boldsymbol{I}$) obtenue en adjoignant à la réunion de $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ (supposées disjointes, pour simplifier) une unique flèche (*co-projection type en* (J,I)) $\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I) : J \to I$ et, ce, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$ et pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$.

Alors, on désigne par $\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ et $\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ les foncteurs (*co-base type* et *diagramme co-sommital type*) injections canoniques.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite, un foncteur $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé un *(petit) tronc de co-cône de* $\boldsymbol{X}$, *de co-indexation* $\boldsymbol{J}$, *d'indexation* $\boldsymbol{I}$, *de co-base* $W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *de diagramme co-sommital* $W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ et ayant $W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I)) : W(J) \to W(I)$ pour *co-projection en* (J,I), quand $J \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})$ et $I \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I})$.

En particulier, on dit qu'il s'agit d'un *tronc de co-cône localement co-limite* si :

- (LCOLIM 1) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$ et tout co-cône $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ de co-sommet X et de même co-base $V_{\circ}\mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) = W_{\circ}\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ que le tronc de co-cône $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, il existe (au moins) un objet I de $\boldsymbol{I}$ et (au moins) une flèche $y : W(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telle que :
    - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $y.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) = V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J}))$,
- (LCOLIM 2) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$, tous objets I' et I" de $\boldsymbol{I}$ et toutes flèches $y' : W(\mathrm{I}') \to \mathrm{X}$ et $y'' : W(\mathrm{I}'') \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telles que :
    - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $y'.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}')) = y''.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}''))$,

  alors il existe un entier $n \geq 1$, un *zigzag* de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^{\circ} = (z^{\circ}_{k})_{1 \leq k \leq 2n} : \mathrm{I}' = Z^{\circ}_{1} \xleftarrow[z^{\circ}_{1}]{} Z^{\circ}_{2} \xrightarrow[z^{\circ}_{2}]{} Z^{\circ}_{3} \ldots$$
$$\ldots Z^{\circ}_{2n-1} \xleftarrow[z^{\circ}_{2n-1}]{} Z^{\circ}_{2n} \xrightarrow[z^{\circ}_{2n}]{} Z^{\circ}_{2n+1} = \mathrm{I}''$$

  et une famille $y^{\circ} = (y^{\circ}_{k} : W(Z^{\circ}_{k}) \to \mathrm{X})_{1 \leq k \leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que :
    - $y' = y^{\circ}_{1}$ et $y^{\circ}_{2n+1} = y''$,
    - $y^{\circ}_{2h-1}.W(z^{\circ}_{2h-1}) = y^{\circ}_{2h} = y^{\circ}_{2h+1}.W(z^{\circ}_{2h})$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$.

Compte tenu du calcul des co-limites dans ***Ens***, il est facile de voir que :

LEMME. *Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites, alors :*

- *si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement co-limite, le diagramme (co-sommital de W) $D = W_{\circ}\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme localement co-limite du foncteur (co-base de W) $F = W_{\circ}\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,*
- *si $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme localement co-limite du foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, il leur est associé un tronc de co-cône localement co-limite $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, de co-base le foncteur $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ et de diagramme co-sommital le foncteur $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.*

4.2. Diagrammes et tronc de co-cônes localement sur-co-limites.

Si $\boldsymbol{I}'$ est une petite catégorie, si Σ est une surcharge petite de $\boldsymbol{I}'$, si $D' : \boldsymbol{I}' \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ'' est un ensemble, on dit que (Σ,Λ'') est une *sur-co-limite de* D' ou encore que Λ'' est une *Σ-co-limite de* D' si :

- il existe un co-cône $V' : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}') \to \boldsymbol{Ens}$ tel que :
  - V' a pour co-sommet Λ'' et pour co-base D'.
  - (Σ, V') est un co-cône sur-co-limite.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie *localement petite*, que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories *petites* et que Σ est une surcharge petite de $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}$.

On dit qu'un foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *admet* $(\Sigma, D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X})$ *pour (petit) diagramme localement sur-co-limite* ou encore qu'il *admet pour (petit) diagramme localement Σ-co-limite* le foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ si :

- $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ admet $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ pour (petit) diagramme localement co-limite,
- $(\Sigma, \underset{\mathrm{I} \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{CoLim}}\, \boldsymbol{X}(D(\mathrm{I}), \mathrm{X}))$ est une sur-co-limite du foncteur $\boldsymbol{X}(D(-), \mathrm{X}) : \boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Ens}$.

Supposons que $\boldsymbol{I}'$ et $\boldsymbol{J}'$ sont deux catégories petites.

On pose $\mathrm{TC}(\boldsymbol{J}', \boldsymbol{I}') = \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}'^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{I}'^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ (qu'on appelle la catégorie *tronc de cône type d'indexation* $\boldsymbol{J}'$ *et de co-indexation* $\boldsymbol{I}'$) et, pour tout objet $\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J}')$ et tout objet $\mathrm{I} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I}')$, on note $\mathrm{p}(\boldsymbol{J}', \boldsymbol{I}')(\mathrm{J}, \mathrm{I}) = \mathrm{cp}(\boldsymbol{J}', \boldsymbol{I}')(\mathrm{J}, \mathrm{I})$ (qu'on appelle la *projection type en* (J, I)).

On appelle *sur-formule de* $(\boldsymbol{J}', \boldsymbol{I}')$ toute formule de la logique $\mathrm{L}_{\infty,\infty}$, écrite dans le langage (sans symboles relationnels et où tous les symboles fonctionnels sont 1-aires) associé (au graphe sous-jacent) à $\mathrm{TC}(\boldsymbol{J}', \boldsymbol{I}')$.

On dit qu'une telle sur-formule est *petite* si ses connexions et quantifications sont *petites*, i.e. indexées par des ensembles.

On dit qu'une telle sur-formule ψ est *homogène* (*en* $\boldsymbol{J}'$) si :

- ψ est obtenue en remplaçant dans une (nécessairement unique) sur-formule φ de $\boldsymbol{I}'$ toute sous-formule (atomique) de la forme :

  $$(\mathrm{cp}(\boldsymbol{I}')(\mathrm{I}_1)(\mathrm{t}_1(\omega_1)) : \mathrm{CSm}(\boldsymbol{I}')) = (\mathrm{cp}(\boldsymbol{I}')(\mathrm{I}_2)(\mathrm{t}_2(\omega_2)) : \mathrm{CSm}(\boldsymbol{I}'))$$

  par la sous-formule :

  $$\bigwedge_{\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J}')} (\mathrm{p}(\boldsymbol{J}', \boldsymbol{I}')(\mathrm{J}, \mathrm{I}_1)(\mathrm{t}_1(\omega_1)) : \mathrm{J}) = (\mathrm{p}(\boldsymbol{J}', \boldsymbol{I}')(\mathrm{J}', \mathrm{I}_2)(\mathrm{t}_2(\omega_2)) : \mathrm{J})$$

  où :

  - pour tout $\mathrm{k} \in \{1,2\}$, I_k est un objet de $\boldsymbol{I}'$ et $\mathrm{t}_\mathrm{k}(\omega_\mathrm{k})$ est un terme, du langage associé à $\boldsymbol{I}'$ (et donc un terme *particulier* du langage associé à $\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}')$), de sorte $\mathrm{CSm}(\boldsymbol{I}')$, où la (nécessairement seule) variable ω_k figure,

et, alors, on pose $\psi = \mathrm{hmg}(\varphi)$ et $\varphi = \mathrm{gmh}(\psi)$.

On dit qu'une telle sur-formule ψ est *positivement homogène* si elle est homogène et si $\mathrm{gmh}(\psi)$ est positive (au sens du 2.3.).

On appelle *surcharge de* $(\boldsymbol{J}',\boldsymbol{I}')$ toute classe Δ de sur-formules closes de $(\boldsymbol{J}',\boldsymbol{I}')$.

On dit qu'une telle surcharge est *petite* si c'est un ensemble et si ses éléments sont des sur-formules petites.

On dit qu'une telle surcharge est *homogène* si ses éléments sont des sur-formules homogènes, autrement dit, s'il existe une (nécessairement unique) surcharge Σ de $\boldsymbol{I}'$ telle que $\Delta = \{\mathrm{hmg}(\varphi) \mid \varphi \in \Sigma\}$. Alors, on pose $\Delta = \mathrm{hmg}(\Sigma)$ et $\Sigma = \mathrm{gmh}(\Delta)$.

On dit qu'une telle surcharge est *positivement homogène* si ses éléments sont des sur-formules positivement homogènes. Alors, $\mathrm{gmh}(\Delta)$ est évidemment une surcharge positive de $\boldsymbol{I}'$.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite, si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites, si Δ est une surcharge petite de $(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}},\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}})$ et si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un (petit) tronc de co-cône de $\boldsymbol{X}$, on dit que (Δ,W) est un *tronc de co-cône localement sur-co-limite*, ou encore que W est un *tronc de co-cône localement Δ-co-limite* si :

- W est un tronc de co-cône localement co-limite,
- W satisfait (en tant qu'interprétation du langage associé à $\mathrm{TC}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}},\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}}$) toutes les sur-formules de $(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}},\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}})$ appartenant à Δ.

Compte tenu du LEMME de 4.1, il est facile d'établir que :

LEMME. *Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites, alors :*

- *si Δ est une surcharge petite et homogène de $(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}},\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}})$ et si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement Δ-co-limite, le diagramme (co-sommital de W) $D = W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme localement $\mathrm{gmh}(\Delta)$-co-limite du foncteur (co-base de W) $F = W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,*
- *si Σ est une surcharge petite de $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}$ et si $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme localement Σ-co-limite du foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, il leur est associé un tronc de co-cône localement $\mathrm{hmg}(\Sigma)$-co-limite $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, de co-base le foncteur $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ et de diagramme co-sommital le foncteur $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.*

4.3. Profils élémentaires, diagrammes localement co-limites et troncs de co-cônes localement co-limites.

Supposons que R est un profil élémentaire, que X est une catégorie localement petite et que I et J sont deux catégories petites..

On dit qu'un foncteur $F : J \to X$ admet un foncteur $D : I \to X$ pour *(petit) diagramme localement* R*-co-limite* si :

- $F : J \to X$ admet $D : I \to X$ pour (petit) diagramme localement R(I^{op})-co-limite.

On dit (par analogie et pour simplifier) qu'un foncteur W : TCC(J,I) $\to X$ est un *tronc de co-cône localement* R*-co-limite* si :

- W est un tronc de co-cône localement hmg(R(I^{op}))-co-limite.

Compte tenu du LEMME de 4.2, on voit immédiatement que :

LEMME. *Si* R *est un profil, si* X *est une catégorie localement petite et si* I *et* J *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* W : TCC(J,I) $\to X$ *est un tronc de co-cône localement* R*-co-limite, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W_\circ$CSm(J,I) : $I \to X$ *est un diagramme localement* R*-co-limite du foncteur (co-base de* W*)* $F = W_\circ$CB(J,I) : $J \to X$,
- *si* $D : I \to X$ *est un diagramme localement* R*-co-limite du foncteur* $F : J \to X$, *il leur est associé un tronc de co-cône localement* R*-co-limite* $W_{F,D}$: TCC(J,I) $\to X$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D}$ $_\circ$CB(J,I) $= F : J \to$ ***Ens*** *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D}$ $_\circ$CSm(J,I) $= D : I \to X$.

4.4. Diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites saturés.

Supposons que X est une catégorie localement petite.

Si I est une catégorie petite et si $D : I \to X$ est un foncteur, on dira que $D : I \to X$ est un *(petit) diagramme saturé* si :

- (DSATUR 1) D est fidèle,
- (DSATUR 2) pour tous objets I, Z et Z' de I, pour toutes flèches $\mathrm{i} : \mathrm{Z} \to \mathrm{I}$ et $\mathrm{z} : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}'$ de I et pour toute flèche $\mathrm{f} : D(\mathrm{Z}') \to D(\mathrm{I})$ de X telles que $\mathrm{f}.D(\mathrm{z}) = D(\mathrm{i})$, il existe une (nécessairement unique, par fidélité) flèche $\mathrm{i}' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{I}$ de I telle que $D(\mathrm{i}') = \mathrm{f}$ (d'où l'on déduit, par fidélité, que $\mathrm{i}'.\mathrm{z} = \mathrm{i}$).

Si $\boldsymbol{I}''$ est une catégorie petite et si $D'' : \boldsymbol{I}'' \to \boldsymbol{X}$ est un foncteur, notons $\mathrm{Satur}(D'')$ la catégorie, évidemment petite, telle que :

- ses objets sont ceux de $\boldsymbol{I}''$,
- ses flèches sont les $(Z',f,I) : Z' \to I$ tels que :
  - I et Z' sont deux objets de $\boldsymbol{I}''$,
  - $f : D''(Z') \to D''(I)$ est une flèche de $\boldsymbol{X}$,
  - il existe un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}''$:

$$\xi^{\#} = (z^{\#}_k)_{1 \le k \le 2n} : Z' = Z^{\#}_1 \xleftarrow[z^{\#}_1]{} Z^{\#}_2 \xrightarrow[z^{\#}_2]{} Z^{\#}_3 \ldots$$
$$\ldots Z^{\#}_{2n-1} \xleftarrow[z^{\#}_{2n-1}]{} Z^{\#}_{2n} \xrightarrow[z^{\#}_{2n}]{} Z^{\#}_{2n+1} = I$$

  et une famille $f^{\#} = (f^{\#}_k : D''(Z^{\#}_k) \to D''(I))_{1 \le k \le 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ permettant de connecter f à $\mathrm{id}(D''(I))$ le long de $\xi^{\#}$,
- on compose ces flèches (Z',f,I) "comme les f".

Alors, on dispose du foncteur canonique :

$$\mathrm{satur}(D'') : \mathrm{Satur}(D'') \to \boldsymbol{X}$$
$$(Z',f,I) \mapsto f$$

et il est facile de constater que $\mathrm{satur}(D'')$ est un diagramme saturé.

De plus, on vérifie aisément que, si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie petite, si $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ est un foncteur et si D'' en est un petit diagramme localement co-limite, alors $\mathrm{satur}(D'')$ en est *aussi* un petit diagramme localement co-limite, évidemment saturé.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite.

Si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites et si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône, on dira qu'il est *(co-sommitalement) saturé* si :

- (CSATUR 1) son diagramme co-sommital $W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est fidèle,
- (CSATUR 2) pour tous objets I et Z' de $\boldsymbol{I}$ et toute flèche $f : W(Z') \to W(I)$ de $\boldsymbol{X}$ tels que :
  - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $f.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,Z')) = W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I))$,

  il existe une (nécessairement unique, par fidélité) flèche $i' : Z' \to I$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $W(i') = f$.

Si $\boldsymbol{I}''$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites et si $W'' : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'') \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône, notons $\mathrm{Satur}(W'')$ la catégorie, évidemment petite, telle que :

- ses objets sont ceux de $\boldsymbol{I}$,

- ses flèches sont les $(Z',f,I) : Z' \to I$ tels que :
  - I et Z' sont deux objets de $\boldsymbol{I}''$,
  - $f : W''(Z') \to W''(I)$ est une flèche de $\boldsymbol{X}$,
  - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $f.W''(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'')(J,Z')) = W''(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'')(J,I))$,
- on compose ces flèches (Z',f,I) "comme les f".

Alors, on dispose du foncteur canonique :

$$\begin{aligned}
\mathrm{satur}(W'') : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\mathrm{Satur}(W'')) &\to \boldsymbol{X} \\
j &\mapsto W''(j) \\
\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\mathrm{Satur}(W''))(J,I) &\mapsto W''(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'')(J,I)) \\
(Z',f,I) &\mapsto f
\end{aligned}$$

et il est facile de constater que $\mathrm{satur}(W'')$ est un tronc de co-cône saturé de même co-base que le tronc de co-cône W''.

De plus, on vérifie aisément que, si W'' est un petit tronc de co-cône localement co-limite, alors $\mathrm{satur}(W'')$ est *aussi* un petit tronc de co-cône localement co-limite, évidemment saturé, de même co-base que le tronc de co-cône W''.

Compte tenu du LEMME de 4.1, il est facile de voir que :

LEMME. *Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites, alors :*

- *si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un petit tronc de co-cône localement co-limite et saturé, le diagramme (co-sommital de W) $D = W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un petit diagramme localement co-limite et saturé du foncteur (co-base de W) $F = W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,*
- *si $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un petit diagramme localement co-limite et saturé du foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, le tronc de co-cône associé $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un petit tronc de co-cône localement co-limité et saturé (de co-base le foncteur F et de diagramme co-sommital le foncteur D).*

4.5. Diagrammes et troncs de co-cônes localement sur-co-limites saturés.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite, que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites et que Σ est une surcharge petite de $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}$.

On dit (évidemment) qu'un foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *admet* $(\Sigma, D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X})$ *pour (petit) diagramme localement sur-co-limite saturé* ou encore qu'il *admet pour (petit) diagramme localement Σ-co-limite saturé* le foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ si :

- $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ admet $(\Sigma, D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X})$ pour (petit) diagramme localement sur-co-limite,
- $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme saturé.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite, que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites, que Δ est une surcharge petite de $(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{I}^{\mathrm{op}})$ et que $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône.

On dit (évidemment) que $(\Delta, W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X})$ est un *tronc de co-cône localement sur-co-limite saturé* ou encore que $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un *tronc de co-cône localement Δ-co-limite saturé*, si :

- $(\Delta, W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X})$ est un tronc de co-cône sur-co-limite,
- $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône saturé.

Compte tenu des LEMMES de 4.2 et 4.4, il est facile de voir que :

LEMME. *Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites, alors :*

- *si Δ est une surcharge petite et homogène de $(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}, \boldsymbol{I}^{\mathrm{op}})$ et si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement Δ-co-limite et saturé, le diagramme (co-sommital de W) $D = W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme localement* gmh(Δ)*-co-limite et saturé du foncteur (co-base de W) $F = W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,*
- *si Σ est une surcharge petite de $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}$ et si $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme localement Σ-co-limite et saturé du foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, il leur est associé un tronc de co-cône localement* hmg(Σ)*-co-limite saturé $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, de co-base le foncteur $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{J}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ et de diagramme co-sommital le foncteur $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}, \boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.*

4.6. Profils élémentaires, diagrammes localement co-limites saturés et troncs de co-cônes localement co-limites saturés.

Compte tenu des LEMMES de 4.3 et 4.5, il est facile de voir que :

LEMME. *Si* R *est un profil élémentaire, si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ *est un tronc de co-cône localement* R*-co-limite et saturé, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un diagramme localement* R*-co-limite et saturé du foncteur (co-base de* W*)* $F = W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,
- *si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un diagramme localement* R*-co-limite et saturé du foncteur* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$*, il leur est associé un tronc de co-cône localement* R*-co-limite et saturé* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$*, de co-base le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{J}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.

4.7. Diagrammes localement co-limites saturés dans les catégories possédant les noyaux.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites.

Il est facile de vérifier (en reprenant les notations de 2.5) qu'un foncteur $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement K-co-limite si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (K-LCOLIM 0) $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement co-limite (autrement dit, (LCOLIM 1) et (LCOLIM 2) sont vérifiées),
- (K-LCOLIM 1) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$ et pour toutes flèches $y_1, y_2 : W(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ *égalisées* par les $W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}))$ (i.e. telles que $y_1 . W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) = y_2 . W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}))$ quand J parcourt $\mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})$), il existe un objet S de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $s : \mathrm{S} \to \mathrm{I}$ de $\boldsymbol{I}$ qui *égalise* y_1 et y_2 (i.e. telle que $y_1 . W(s) = y_2 . W(s)$),
- (K-LCOLIM 2) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, pour toutes flèches $y_1, y_2 : U(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ et pour toutes flèches $s' : \mathrm{S}' \to \mathrm{I}$ et $s'' : \mathrm{S}'' \to \mathrm{I}$ de $\boldsymbol{I}$ qui égalisent y_1 et y_2 (ce qui implique que les $W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}))$ égalisent aussi y_1 et y_2), il existe un entier $n \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^* = (z^*_k)_{1 \leq k \leq 2n} : \mathrm{S}' = \mathrm{Z}^*_1 \xleftarrow[z^*_1]{} \mathrm{Z}^*_2 \xrightarrow[z^*_2]{} \mathrm{Z}^*_3 \cdots$$
$$\ldots \mathrm{Z}^*_{2n-1} \xleftarrow[z^*_{2n-1}]{} \mathrm{Z}^*_{2n} \xrightarrow[z^*_{2n}]{} \mathrm{Z}^*_{2n+1} = \mathrm{S}''$$

  et une famille $s^* = (s^*_k : \mathrm{Z}^*_k \to \mathrm{I})_{1 \leq k \leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{I}$ égalisant y_1 et y_2 et *connectant* s' *à* s'' *le long de* ξ^* (i.e. telle que :

  - $s' = s^*_1$ et $s^*_{2n+1} = s''$,
  - $s^*_{2h-1} . z^*_{2h-1} = s^*_{2h} = s^*_{2h+1} . z^*_{2h}$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$).

D'après le LEMME de 4.5, il est clair que :

LEMME. *Si* X *est une catégorie localement petite et si* I *et* J *sont deux catégories localement petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$ *est un tronc de co-cône localement* K-*co-limite, alors le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W_\circ\mathrm{CSm}(J,I) : I \to X$ *est un diagramme localement* K-*co-limite du foncteur (co-base de* W*)* $F = W_\circ\mathrm{CB}(J,I) : J \to X$,
- *si* $D : I \to X$ *est un diagramme localement* K-*co-limite du foncteur* $F : J \to X$, *alors il leur est associé un tronc de co-cône localement* K-*co-limite* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D}\ {}_\circ\mathrm{CB}(J,J) = F : J \to \mathbf{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D}\ {}_\circ\mathrm{CSm}(J,I) = D : I \to X$.

Etablissons, dans ces conditions, que :

PROPOSITION. *Si* X *est une catégorie localement petite et possédant les noyaux, si* J *est une catégorie petite, si* $F : J \to X$ *est un foncteur et si* $D : I \to X$ *en est un petit diagramme localement co-limite saturé, alors* $D : I \to X$ *en est nécessairement un (petit) diagramme localement* K-*co-limite (et saturé).*

PREUVE. D'après le LEMME précédent, il suffit d'établir que, si $W : \mathrm{TCC}(J,I) \to X$ est un tronc de co-cône localement co-limite saturé, alors c'est nécessairement un tronc de co-cône localement K-co-limite (et saturé).

Pour ce faire, pour tous objets X et X' et toutes flèches $\mathrm{x}_1 , \mathrm{x}_2 : \mathrm{X}' \to \mathrm{X}$ de X, on choisit un noyau $\ker(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) : \mathrm{Ker}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2) \to \mathrm{X}'$ dans X et, pour toute flèche $\mathrm{x} : \mathrm{X}'' \to \mathrm{X}'$ de X égalisant x_1 et x_2, on note (pour simplifier) $[\mathrm{x}] : \mathrm{X}'' \to \mathrm{Ker}(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2)$ l'unique flèche de X telle que $\ker(\mathrm{x}_1,\mathrm{x}_2).[\mathrm{x}] = \mathrm{x}$.

a) On voit tout d'abord que, si X est un objet de X, si I est un objet de I, si $\mathrm{y}_1 , \mathrm{y}_2 : W(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ sont deux flèches de X égalisées par les $W(\mathrm{cp}(J,I)(\mathrm{J},\mathrm{I}))$ quand J parcourt $\mathrm{Ob}(J)$, alors, pour tout objet J de J, on dispose de la flèche de X :

$$[W(\mathrm{cp}(J,I)(\mathrm{J},\mathrm{I}))] : W(\mathrm{J}) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2) .$$

Il en résulte (par unicité) que :

- pour toute flèche $\mathrm{j} : \mathrm{J} \to \mathrm{J}'$ de J, on a :

$$[W(\mathrm{cp}(J,I)(\mathrm{J}',\mathrm{I}))].W(\mathrm{j}) = [W(\mathrm{cp}(J,I)(\mathrm{J},\mathrm{I}))] .$$

En d'autres termes, on dispose ainsi d'un co-cône $V : \mathrm{CC}(J) \to X$, de co-sommet $\mathrm{Ker}(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2)$, de même co-base que W et ayant pour famille de co-projections :

$$(V(\mathrm{cp}(J)(\mathrm{J})))_{\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(J)} = ([W(\mathrm{cp}(J,I)(\mathrm{J},\mathrm{I}))])_{\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(J)} .$$

En vertu de (LCOLIM 1), il existe donc (au moins) un objet S de I et (au moins) une flèche $\mathrm{f} : W(\mathrm{S}) \to \mathrm{Ker}(\mathrm{y}_1,\mathrm{y}_2)$ de X telle que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$f.\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S)) = [\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I))] .$$

On en déduit que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$(\ker(y_1,y_2).f).\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S)) = \ker(y_1,y_2).[\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I))] = \mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I)) .$$

Mais, comme $\mathcal{W}$ est (par hypothèse) saturé, on peut affirmer (en vertu de (CSATUR 2)) que :

- il existe une (nécessairement unique, en vertu de (CSATUR 1)) flèche $s : S \to I$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $\mathcal{W}(s) = \ker(y_1,y_2).f$,

De la sorte, $s : S \to I$ est une flèche de $\boldsymbol{I}$ qui égalise y_1 et y_2 et (K-LCOLIM 1) est vérifiée.

b) Maintenant, supposons encore que X est un objet de $\boldsymbol{X}$, que I est un objet de $\boldsymbol{I}$, que $y_1, y_2 : \mathcal{W}(I) \to X$ sont deux flèches de $\boldsymbol{X}$ et, de plus, que $s' : S' \to I$ et $s'' : S'' \to I$ sont deux flèches de $\boldsymbol{I}$ égalisant y_1 et y_2 (ce qui implique que les $\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I))$ les égalisent aussi).

On voit immédiatement (par unicité, et en reprenant la notation précédente concernant $\mathcal{V}$) que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$[\mathcal{W}(s')].\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S')) = [\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I))] = \mathcal{V}(cp(\boldsymbol{J})(J)) ,$$

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$[\mathcal{W}(s'')].\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S'')) = [\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I))] = \mathcal{V}(cp(\boldsymbol{J})(J)) .$$

D'après (LCOLIM 2), il existe donc un entier $n \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^* = (z^*_k)_{1 \leq k \leq 2n} : S' = Z^*_1 \xleftarrow[z^*_1]{} Z^*_2 \xrightarrow[z^*_2]{} Z^*_3 \cdots$$
$$\ldots Z^*_{2n-1} \xleftarrow[z^*_{2n-1}]{} Z^*_{2n} \xrightarrow[z^*_{2n}]{} Z^*_{2n+1} = S''$$

et une famille $f^* = (f^*_k : \mathcal{W}(Z^*_k) \to \mathrm{Ker}(y_1,y_2))_{1 \leq k \leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ connectant $[\mathcal{W}(s')]$ à $[\mathcal{W}(s'')]$ le long de ξ^*.

Alors, on voit aussi (par connexité de triangles commutatifs) que :

- pour tout $1 \leq k \leq 2n+1$ et pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$(\ker(y_1,y_2).f^*_k).\mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,Z^*_k) = \mathcal{W}(cp(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I)) .$$

Comme $\mathcal{W}$ est (par hypothèse) saturé, on en déduit (en utilisant (CSATUR 2)) que :

- pour tout $1 \leq k \leq 2n+1$, il existe une (nécessairement unique, d'après (CSATUR 1)) flèche $s^*_k : Z^*_k \to I$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $\mathcal{W}(s^*_k) = \ker(y_1,y_2).f^*_k$.

puis (par fidélité, i.e. en utilisant de nouveau (CSATUR 1)) que la famille $s^* = (s^*_k)_{1 \leq k \leq 2n+1}$ égalise y_1 et y_2 et permet de connecter s' à s'' le long de ξ^*, autrement dit que (K-LCOLIM 2) est vérifiée. FIN DE LA PREUVE.

5. Sur le profil d'esquissabilité des catégories modelables possédant les noyaux.

5.1. Catégories modelables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite, que θ est un ordinal inaccessible et que $\beta < \theta$ est un ordinal régulier.

Comme en [C.M.C.E.], on dit que $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-*modelable* [10] si :

- $\boldsymbol{M}$ possède les co-limites de co-indexations petites et β-filtrantes,
- $\boldsymbol{M}$ contient une sous-catégorie $\boldsymbol{M}'$ telle que :
  - $\boldsymbol{M}'$ est pleine dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est dense dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite,
  - tout objet de $\boldsymbol{M}'$ est un objet β-présentable dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ possède les θ-petits diagrammes localement co-limites de co-indexations β-petites et le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$ les préserve (autrement dit, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, il existe une catégorie θ-petite $\boldsymbol{I}$ et un diagramme $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}'$, localement co-limite de F, de sorte que $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}$ est aussi un diagramme localement co-limite de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$).

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est θ-*modelable* s'il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable (alors, on pourra dire que θ est *un rang de modelabilité*, ou d'*inaccessibilité*, pour $\boldsymbol{M}$) [11].

---

[10] Il semble que " θ " n'admette aucune traduction en américain ...

Enfin, on dit que M est *modelable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel M est θ-modelable.

5.2. Profils élémentaires et catégories modelables.

Supposons que R est un profil élémentaire.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que R est θ-*petit* si :

- pour toute catégorie θ-petite I', la surcharge $R(I')$ est θ-petite et constituée de surformules θ-petites (dans un sens clair, que nous laissons au lecteur le soin de formuler) de I'.

On dit que R est *uniformément petit* si :

- pour tout ordinal inaccessible θ, R est θ-petit.

Supposons que M est une catégorie localement petite, que θ est un ordinal inaccessible, que $\beta < \theta$ est un ordinal régulier et que R est un profil élémentaire θ-petit.

On dit que M est (R,θ,β)-*modelable* si :

- M possède les co-limites de co-indexations petites et β-filtrantes,
- M contient une sous-catégorie M' telle que :
  - M' est pleine dans M,
  - M' est dense dans M,
  - M' est θ-petite,
  - tout objet de M' est un objet β-présentable dans M,
  - M' possède les θ-petits diagrammes localement R-co-limites de co-indexations β-petites et le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(M',M) : M' \to M$ les préserve (autrement dit, pour toute catégorie β-petite J et tout foncteur $F : J \to M'$, il existe une catégorie θ-petite I et un diagramme $D : I \to M'$ localement R-co-limite de F, de sorte que $\mathrm{inj}(M',M)\circ D : I \to M$ est aussi un diagramme localement R-co-limite de $\mathrm{inj}(M',M)\circ F : J \to M$).

---

[11] Si β est un ordinal régulier, il est facile de voir que M est une catégorie β-*accessible* ("au sens de Makkaï-Paré") si, et seulement si, il existe un ordinal inaccessible $\theta > \beta$ pour lequel M est (θ,β)-modelable : autrement dit, il y a parfaite identité entre catégories accessibles et catégories modelables.

Supposons que M est une catégorie localement petite..

Si θ est un ordinal inaccessible et si R est un profil élémentaire θ-petit, on dit que M est (R,θ)-*modelable* s'il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ pour lequel M est (R,θ,β)-modelable.

Si R est un profil élémentaire uniformément petit, on dit que M est R-*modelable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel M est (R,θ)-modelable.

5.3. Catégories esquissables.

Si E est une esquisse petite et si θ est un ordinal inaccessible, on dit que E est θ-*petite* si "tout y est θ-petit", i.e. si :

- l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathrm{Supp}(E))$ des objets (du support) de E est θ-petit,
- l'ensemble $\mathrm{Fl}(\mathrm{Supp}(E))$ des flèches (du support) de E est θ-petit,
- l'ensemble $\mathrm{CDist}(E)$ des cônes distingués dans E est θ-petit,
- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(E)$ dans E, la catégorie d'indexation A est θ-petite,
- l'ensemble $\mathrm{CCDist}(E)$ des co-cônes co-distingués dans E est θ-petit,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(B) \to \mathrm{Supp}(E)$ dans E, la catégorie d'indexation B est θ-petite.

Supposons que M est une catégorie localement petite.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que M est une *catégorie θ-esquissable*, s'il existe une esquisse θ-petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie M.

On dit que M est une *catégorie esquissable*, s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel M est θ-esquissable (autrement dit, s'il existe une esquisse *petite* dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à M).

5.4. Catégories sur-esquissables.

Si SE est une sur-esquisse petite et si θ est un ordinal inaccessible, on dit que SE est θ-*petite* si "tout y est θ-petit", i.e. si :

- l'ensemble Ob(Supp($\boldsymbol{SE}$)) des objets (du support) de $\boldsymbol{SE}$ est θ-petit,
- l'ensemble Fl(Supp($\boldsymbol{SE}$)) des flèches (du support) de $\boldsymbol{SE}$ est θ-petit,
- l'ensemble CDist($\boldsymbol{SE}$) des cônes distingués dans $\boldsymbol{SE}$ est θ-petit,
- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE})$ dans $\boldsymbol{SE}$, la catégorie d'indexation $\boldsymbol{A}$ est θ-petite,
- l'ensemble SCCDist($\boldsymbol{E}$) des sur-co-cônes co-distingués dans $\boldsymbol{SE}$ est θ-petit,
- pour tout sur-co-cône co-distingué $(\Sigma,Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{SE}))$ dans $\boldsymbol{SE}$, on a :
  - la catégorie d'indexation $\boldsymbol{B}$ est θ-petite,
  - l'ensemble Σ est θ-petit et constitué de sur-formules de $\boldsymbol{B}$ qui sont θ-petites.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est une *catégorie θ-sur-esquissable*, s'il existe une sur-esquisse θ-petite dont la catégorie des sur-modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est une *catégorie sur-esquissable*, s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est θ-sur-esquissable (autrement dit, s'il existe une sur-esquisse *petite* dont la catégorie des sur-modèles dans ***Ens*** est équivalente à $\boldsymbol{M}$).

5.5. Profils élémentaires, catégories esquissables et catégories sur-esquissables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite.

Si θ est un ordinal inaccessible et si R est un profil élémentaire θ-petit, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *(R,θ)-esquissable* s'il existe une R-esquisse θ-petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$ (ainsi, les catégories (R,θ)-esquissables sont des catégories θ-esquissables particulières).

Si R est un profil élémentaire uniformément petit, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *R-esquissable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est (R,θ)-esquissable (ainsi, les catégories R-esquissables sont des catégories esquissables particulières).

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite.

Si θ est un ordinal inaccessible et si R est un profil élémentaire θ-petit, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *(R,θ)-sur-esquissable* s'il existe une R-sur-esquisse θ-petite dont la catégorie des sur-modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$ (ainsi, les catégories (R,θ)-sur-esquissables sont des catégories θ-sur-esquissables particulières).

Si R est un profil élémentaire uniformément petit, on dit que $\boldsymbol{M}$ est R-*sur-esquissable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est (R,θ)-sur-esquissable (ainsi, les catégories R-sur-esquissables sont des catégories sur-esquissables particulières).

Montrons que :

LEMME. *Si* R *est un profil élémentaire positif et uniformément petit, les catégories* R-*sur-esquissables sont exactement les catégories* R-*esquissables.*

Plus précisément, si θ *est un ordinal inaccessible et si* R *est un profil élémentaire positif et* θ-*petit, alors les catégories* (R,θ)-*sur-esquissables sont exactement les catégories* (R,θ)-*esquissables.*

PREUVE. a) Si $\boldsymbol{M}$ est une catégorie (R,θ)-sur-esquissable, il existe une R-sur-esquisse θ-petite ***SE*** et une esquisse, nécessairement, θ-petite $\boldsymbol{E}'$ telles que :

- $R//\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{SE}$,
- $\boldsymbol{M}$ et SurMod(***SE***,***Ens***) sont des catégories équivalentes.

Mais :

- R étant positive, les catégories SurMod(***SE***,***Ens***) = SurMod(R//$\boldsymbol{E}'$,***Ens***) et Mod(Esq(***SE***),***Ens***) = Mod(Esq(R//$\boldsymbol{E}'$),***Ens***) sont (en vertu du LEMME de 3.3) équivalentes,
- Esq(R//$\boldsymbol{E}'$) est, par définition, une R-esquisse,
- R étant un profil élémentaire θ-petit et $\boldsymbol{E}'$ étant une esquisse θ-petite, il est facile de voir (en examinant la construction explicitée dans la PREUVE du LEMME de 3.3) que Esq(R//$\boldsymbol{E}'$) est θ-petite.

Par conséquent $\boldsymbol{M}$, qui est équivalente à Mod(Esq(R//$\boldsymbol{E}'$),***Ens***) est une catégorie (R,θ)-esquissable.

b) Réciproquement, si $\boldsymbol{M}$ est une catégorie (R,θ)-esquissable, il existe une R-esquisse θ-petite $\boldsymbol{E}$ et une esquisse nécessairement θ-petite $\boldsymbol{E}'$ telles que :

- Esq(R//$\boldsymbol{E}'$) = $\boldsymbol{E}$,
- $\boldsymbol{M}$ et Mod($\boldsymbol{E}$,***Ens***) = Mod(Esq(R//$\boldsymbol{E}'$),***Ens***) sont des catégories équivalentes.

Mais :

- R étant positive, les catégories Mod($\boldsymbol{E}$,***Ens***) = Mod(Esq(R//$\boldsymbol{E}'$),***Ens***) et SurMod(R//$\boldsymbol{E}'$,***Ens***) sont (en vertu du LEMME de 3.3) équivalentes,
- R//$\boldsymbol{E}'$ est, par définition, une R-sur-esquisse,

- R étant un profil élémentaire θ-petit et $\boldsymbol{E}'$ étant une esquisse θ-petite, il est facile de voir que $\mathrm{R}//\boldsymbol{E}'$ est θ-petite.

Par conséquent $\boldsymbol{M}$, qui est équivalente à $\mathrm{SurMod}(\mathrm{R}//\boldsymbol{E}',\boldsymbol{Ens})$, est une catégorie (R,θ)-sur-esquissable. FIN DE LA PREUVE.

5.6. Esquissabilité des catégories modelables.

Rappelons (en nous contentant d'une ... "esquisse" de preuve) le résultat fondamental suivant, établi en [C.M.C.E.] (où on trouvera une preuve complète) :

LEMME . *Les catégories modelables sont des catégories esquissables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible, les catégories* θ*-modelables sont des catégories* θ*-esquissables* [12].

PREUVE. Supposons que $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable. Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F:\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme $\mathrm{ch}(F):\mathrm{Ch}(F)\to\boldsymbol{M}'$ localement co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})$ (on dispose donc, ainsi, d'un *choix* ch de diagrammes localement co-limites convenables) . Alors, si on désigne par $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M})$ l'esquisse (évidemment θ-petite) obtenue comme suit :

- son support est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{Ens})$ dont les objets sont :
  - d'une part les foncteurs (représentés) $\boldsymbol{M}(\mathrm{M}',\text{-}):\boldsymbol{M}\to\boldsymbol{Ens}$, dès que M' est objet de $\boldsymbol{M}'$,
  - d'autre part, les foncteurs (limites β-petites - arbitrairement choisies - de foncteurs représentés) $L(F)=\underset{\mathrm{J}\in\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{Lim}}\ \boldsymbol{M}(F(\mathrm{J}),\text{-})$, dès que $F:\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M}$ est un foncteur à valeurs dans $\boldsymbol{M}'$, où $\boldsymbol{J}$ est une catégorie β-petite (en ne choisissant - arbitrairement - qu'une telle catégorie par composante connexe du sous-groupoïde de $\boldsymbol{Cat}$ ayant pour flèches les seuls foncteurs inversibles),
- ses cônes distingués sont les limites $L(F)=\underset{\mathrm{J}\in\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{Lim}}\ \boldsymbol{M}(F(\mathrm{J}),\text{-})$ précédentes,
- ses co-cônes co-distingués sont les co-limites $L(F)=\underset{\mathrm{I}\in\mathrm{Ch}(F)^{\mathrm{op}}}{\mathrm{CoLim}}\ \boldsymbol{M}(\mathrm{ch}(F)(\mathrm{I}),\text{-})$, dès que $F:\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M}$ vérifie les conditions précédentes,

---

[12] La réciproque du LEMME de 5.6 est également valide (voir le LEMME de 5.8).

on établit que $\boldsymbol{M}$ et Mod(Esquiss(ch,$\boldsymbol{M}$),$\boldsymbol{Ens}$) sont équivalentes, ce qui permet de conclure. FIN DE LA PREUVE.

5.7. Profils élémentaires et esquissabilité des catégories modelables.

De la preuve du LEMME de 5.6, on déduit immédiatement que :

LEMME . *Si* R *est un profil élémentaire uniformément petit, les catégories* R-*modelables sont des catégories* R-*sur-esquissables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible et si* R *est un profil élémentaire* θ-*petit, les catégories* (R,θ)-*modelables sont des catégories* (R,θ)-*sur-esquissables* [13].

PREUVE. Supposons que $\boldsymbol{M}$ est (R,θ,β)-modelable. Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc tout particulièrement choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme ch(F) : Ch(F) $\to \boldsymbol{M}'$ localement R-co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique inj($\boldsymbol{M}'$,$\boldsymbol{M}$) (on dispose donc, ainsi, d'un R-*choix* ch de diagrammes localement R-co-limites) .

Alors, comme dans la PREUVE du LEMME de 5.6, $\boldsymbol{M}$ et Mod(Esquiss(ch,$\boldsymbol{M}$),$\boldsymbol{Ens}$) sont équivalentes, mais il est facile de vérifier (puisque les diagrammes localement co-limites choisis sont précisément des diagrammes localement R-colimites) que Mod(Esquiss(ch,$\boldsymbol{M}$),$\boldsymbol{Ens}$) = SurMod(R//Esquiss(ch,$\boldsymbol{M}$),$\boldsymbol{Ens}$) . FIN DE LA PREUVE.

On en déduit que :

PROPOSITION. *Si* R *est un profil élémentaire positif et uniformément petit, les catégories* R-*modelables sont des catégories* R-*esquissables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible et si* R *est un profil élémentaire positif et* θ-*petit, les catégories* (R,θ)-*modelables sont des catégories* (R,θ)-*esquissables* [14].

PREUVE. Supposons que $\boldsymbol{M}$ est (R,θ,β)-modelable. En procédant, comme dans la preuve du LEMME précédent, à un R-choix de diagrammes localement R-co-limites, on voit que $\boldsymbol{M}$ et SurMod(R//Esquiss(ch,$\boldsymbol{M}$),$\boldsymbol{Ens}$) sont équivalentes. Mais, R étant positif, SurMod(R//Esquiss(ch,$\boldsymbol{M}$),$\boldsymbol{Ens}$) et Mod(Esq(R//Esquiss(ch,$\boldsymbol{M}$)),$\boldsymbol{Ens}$) sont aussi (d'après le LEMME de 3.3) des catégories équivalentes. FIN DE LA PREUVE.

---

[13] La réciproque du LEMME de 5.7 *n'est pas*, en général, valide (voir 5.9).

[14] La réciproque de la PROPOSITION de 5.7 *n'est pas*, en général, valide (voir 5.9).

5.8. Modelabilité des catégories esquissables

Rappelons (en nous contentant de nouveau d'une ... "esquisse" de preuve) le résultat fondamental suivant, établi en [C.M.C.E.] (où on trouvera une preuve complète) :

LEMME . *Les catégories esquissables sont des catégories modelables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible, les catégories* θ*-esquissables sont des catégories* θ*-modelables* [15].

PREUVE . Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse θ-petite. On établit que $\boldsymbol{M} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ est (θ,β)-modelable en désignant par β l'ordinal régulier d'indice $\sup(\alpha,s,a',b,b')+1$, où :

- α est l'ordinal régulier d'indice $a+1$, lorsque :
    - a est la borne supérieure des cardinaux des (ensembles de flèches des) indexations des cônes distingués de $\boldsymbol{E}$,
- s est le cardinal de (l'ensemble des flèches du support de $\boldsymbol{E}$) $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$,
- a' est le cardinal de l'ensemble des cônes distingués de $\boldsymbol{E}$,
- b est la borne supérieure des cardinaux des (ensembles de flèches des) co-indexations des co-cônes co-distingués de $\boldsymbol{E}$,
- b' est le cardinal de l'ensemble des co-cônes co-distingués de $\boldsymbol{E}$,

puis en établissant que la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{M}_{<\beta}$ de $\boldsymbol{M}$, dont les objets sont les modèles de $\boldsymbol{E}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles de cardinaux strictement inférieurs à β , est "essentiellement θ-petite", i.e. équivalente (par l'injection canonique) à une de ses sous-catégories pleines θ-petites $\boldsymbol{M}'$ qui, dès lors, convient. FIN DE LA PREUVE.

---

[15] Evidemment, le LEMME de 5.8 est réciproque du LEMME de 5.6. On peut donc affirmer que, pour tout ordinal inaccessible θ , les catégories de modèles ensemblistes des esquisses θ-petites sont exactement (à l'équivalence près) les catégories θ-modelables.

Il en résulte que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique" correspondant à la dualité "esquisses-petites vs. catégories-de-modèles-ensemblistes", l'ordinal inaccessible θ est un *invariant* : dans le cas *général*, c'est le seul connu à ce jour (et il est donc particulièrement dommageable - pour ceux qui n'écrivent et/ou ne lisent que cette langue - que ce "θ" n'admette aucune traduction en américain ...). Cependant, dans un certain nombre de cas *particuliers*, on dispose aussi d'invariants *spécifiques* plus précis (voir la Note 17).

5.9. Profils élémentaires et modelabilité des catégories esquissables.

La réciproque de la PROPOSITION de 5.7 *n'est pas* (en général) valide. Plus précisément, si θ est un ordinal inaccessible et si R est un profil élémentaire positif et θ-petit (ou uniformément petit) *quelconque*, on ne peut affirmer (en général) que, pour *toute* R-esquisse θ-petite $\boldsymbol{E}$, la catégorie $\boldsymbol{M} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ de ses modèles est (R,θ)-modelable. D'après le LEMME de 5.8, elle est *seulement* (en général) θ-modelable : c'est que (en reprenant les notations de 5.1 et 5.8), il n'est pas possible (en général) de trouver parmi *tous* les diagrammes $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}' \approx \boldsymbol{M}_{<\beta}$, localement co-limites d'un *quelconque* foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux [16] qui soit un diagramme localement R-co-limite de F [17].

5.10. Profil d'esquissabilité des catégories modelables possédant les noyaux.

Etablissons que :

THEOREME. P*our toute catégorie localement petite* $\boldsymbol{M}$, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie modelable possédant les noyaux,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* K*-modelable,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* K*-esquissable,*

---

[16] Sauf cas particulier (voir [D.E.T.G.]), deux diagrammes localement co-limites (même saturés) d'un même foncteur F *ne sont pas* (en général) "isomorphes".

[17] A contrario (et c'est là un point de vue largement initié en [C.Q.C.E.], Appendices 1 et 2), on dispose *automatiquement* d'une réciproque de la PROPOSITION de 5.7, mais *spécifique* d'un profil élémentaire positif et θ-petit (ou uniformément petit) particulier R, *si et seulement si* on peut établir que, pour ce profil R, de tels choix sont rendus possibles (par toute procédure adéquate). Dans ce cas, on peut donc conclure que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique" correspondant à la dualité "esquisses-petites vs. catégories-de-modèles-ensemblistes", le couple (R,θ) est un *invariant*.

Par exemple, si on désigne par $\boldsymbol{\mathcal{O}}$ le *profil (évidemment élémentaire positif et uniformément petit !) vide* (i.e. le profil associant à toute catégorie petite $\boldsymbol{I}'$ l'ensemble vide de sur-formules $\boldsymbol{\mathcal{O}}(\boldsymbol{I}') = \varnothing$) et si on prend $\mathrm{R} = \boldsymbol{\mathcal{O}}$, on peut aussi dire (revoir la Note 15) que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique", ($\boldsymbol{\mathcal{O}}$,θ) est un invariant, puisque les LEMMES de 5.6 et 5.8 sont réciproques l'un de l'autre.

De même, des considérations de 5.10 résulte que, lorsque R = K, la réciproque de la PROPOSITION de 5.7 est valable. Autrement dit, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique", (K,θ) est aussi un invariant.

ainsi, en particulier, les catégories modelables possédant les noyaux sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans **Ens** *) des* K-*esquisses petites.*

Plus précisément encore, si θ *est un ordinal inaccessible et si* $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie localement petite, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* θ*-modelable possédant les noyaux,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* (K,θ)*-modelable,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* (K,θ)*-esquissable,*

ainsi, en particulier, les catégories θ*-modelables possédant les noyaux sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans* **Ens** *) des* K-*esquisses* θ*-petites.*

PREUVE. a) Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie (θ,β)-modelable et possédant les noyaux.

Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme θ-petit $\mathrm{ch}'(F) : \mathrm{Ch}'(F) \to \boldsymbol{M}'$ localement co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$.

Dès lors, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on voit (en reprenant les notations de 4.4) que :

- le diagramme :

  $$\mathrm{ch}(F) = \mathrm{satur}(\mathrm{ch}'(F)) : \mathrm{Ch}(F) = \mathrm{Satur}(\mathrm{ch}'(F)) \to \boldsymbol{M}'$$

  est un diagramme θ-petit (puisque $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite) localement co-limite et *saturé* de F,

- le diagramme :

  $$\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ \mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \xrightarrow[\mathrm{ch}(F)]{} \boldsymbol{M}' \xrightarrow[\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})]{} \boldsymbol{M}$$

  est un diagramme θ-petit localement co-limite et *saturé* de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ (puisque $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie *pleine* de $\boldsymbol{M}$).

Mais, $\boldsymbol{M}$ possédant (par hypothèse) les noyaux, les diagrammes localement co-limites *saturés* dans $\boldsymbol{M}$ sont (d'après la PROPOSITION de 4.7) des diagrammes localement K-co-limites. Par conséquent, $\boldsymbol{M}$ est (K,θ)-modelable.

b) Supposons, maintenant, que $\boldsymbol{M}$ est (K,θ)-modelable. D'après le LEMME de 5.7, elle est (K,θ)-esquissable (puisqu'évidemment le profil élémentaire K est uniformément petit et positif).

c) Supposons, enfin, que $\boldsymbol{E}'$ est une esquisse θ-petite.

En vertu du LEMME de 3.6, la catégorie $\text{Mod}(\text{Esq}(K//\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})$ est θ-modelable, puisque la K-esquisse $\text{Esq}(K//\boldsymbol{E}')$ est évidemment θ-petite (K étant un profil élémentaire positif et uniformément petit).

De plus, en vertu de la PROPOSITION de 3.5 ou de la PROPOSITION de 3.6, la catégorie $\text{SurMod}(K//\boldsymbol{E}',\boldsymbol{Ens}) = \text{Mod}(\text{Esq}(K//\boldsymbol{E}'),\boldsymbol{Ens})$ possède les noyaux. FIN DE LA PREUVE [18].

6. Bibliographie.

[C.M.C.E.] **C. Lair**, *Catégories modelables et catégories esquissables*, Diagrammes 6, Paris, 1981.

[C.M.C.F.] **R. Guitart** et **C. Lair**, *Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes*, Diagrammes 4, Paris 1980.

[C.Q.C.E.] **C. Lair**, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17, Paris, 1987.

[D.E.T.G.] **C. Lair**, *Diagrammes localement libres, extensions de corps et théorie de Galois*, Diagrammes 10, Paris, 1983.

[E.T.S.A.] **C. Ehresmann**, *Esquisses et types des structures algébriques*, Bul. Instit. Polit. Iasi, XIV, 1968.

[L.C.R.F.] **R. Guitart et C. Lair**, *Limites et co-limites pour représenter les formules*, Diagrammes 7, Paris, 1982.

[T.S.S.T.] **C. Lair**, *Trames et sémantiques catégoriques des systèmes de trames*, Diagrammes 18, Paris, 1987.

[T.T.E.T.] **C. Lair**, *Théories, triples et topos*, Cours du D.E.A. de Mathématiques (Chapitre II : Catégories Axiomatisables), Université Paris 7, multigraphié, Paris, 1986.

---

[18] De cette PREUVE il ressort que, si $R = K$, si θ est un ordinal inaccessible et si $\boldsymbol{E}$ est une quelconque R-esquisse θ-petite (et en reprenant les notations de 5.1 et 5.8), il existe une *procédure* (voir la Note 17) permettant de trouver, parmi *tous* les diagrammes $D : \boldsymbol{I} \to \text{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})_{<\beta} = \boldsymbol{M}_{<\beta} \approx \boldsymbol{M}'$ localement co-limites d'un *quelconque* foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux qui soit un diagramme localement R-co-limite : elle consiste à en *saturer* un quelconque !

7. Table.

Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
Tours 45-55-5ème étage
2, place Jussieu
75251 Paris CEDEX O5
FRANCE

lair@ufrp7.math.jussieu.fr