J. WOIRY

Structures de contact, extension du calcul des jets (2ème partie)

Diagrammes, tome 37 (1997), p. 15-122
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1997__37__15_0>

DIAGRAMMES VOLUME 37 , 1997

STRUCTURES DE CONTACT, EXTENSION DU CALCUL DES JETS (2ème partie [□])

J. Woiry

RESUME. En 1953, lors du Colloque de Strasbourg, dans le but de fournir au Calcul Infinitésimal des moyens et des notations intrinsèques, deux réponses sont proposées : l'une - la Théorie des jets - est présentée par Charles Ehresmann, l'autre - la Théorie des Points Proches - est exposée par André Weil.

C'est cette même volonté d'algébriser le calcul différentiel qui m'a conduit, au travers des algèbres de contact, à une approche quelque peu différente. J'ai été ainsi amené à reformuler le calcul des jets indépendamment de toute structure infinitésimale. Si, accessoirement, au cours de ce cheminement, j'ai rencontré les algèbres locales et les points proches, c'est essentiellement dans l'esprit de la Théorie des Jets qu'est mené cet exposé.

Bon nombre de situations sont illustrées d'exemples issus de la Géométrie Différentielle, mais également tirés de domaines qui lui sont tout à fait étrangers. En cela, me semble-t-il, réside tout l'intérêt de cette étude.

ABSTRACT. With a view to bring Differential Calculus its own intrinsic ways and notations, two types of solutions were suggested at the Strasbourg Conference in 1953. On the one hand, Charles Ehresmann's Jets Theory and on the other, André Weil's Theory of Close Points.

The same endeavour to focus on differential calculus from an algebraical angle led me, through contact algebra, to make use of slightly different approach. This has meant the rephrasing of the jets theory out of any differential context. If I happened, in so doing, to touch on local algebras and close points, the spirit of the Jets Theory is nevertheless prevailing in this presentation.

Quite a number of points are illustrated with examples taken from Differential Geometry but also from radically different fields. In my opinion, it is this very aspect of things wich confers this study its relevance.

[□] La 1ère partie de ce travail a été publiée dans Diagrammes 36 (Paris, 1996).

A.M.S. Sub. Class : 18 F 99 , 18 F 15 , 58 A 99 , 58 A 20

INTRODUCTION

Pour l'essentiel -chapitres 1 et 4- la première partie présente les idées et les techniques illustrées au chapitre 6. Ce sont ces mêmes outils et ces mêmes idées qu'on retrouve dans cette seconde partie.

En premier lieu ils vont nous servir à développer dans une algèbre de contact un calcul différentiel (le mot « différentiel » n'étant employé ici que par pure analogie), et plus particulièrement un calcul différentiel qu'on pourrait qualifier d' « intrinsèque ».

Afin d'atteindre cet objectif trois techniques sont évoquées :

On rend compte de l'option choisie au travers d'une section de $[\beta,\alpha]$ à caractère fonctoriel dite *section admissible*. Une algèbre de contact sur laquelle est définie une telle section est dite *transitive*.

Ceci étant posé ; *différentielle*, *vitesse* (ou *codifférentielle*) et *dérivée* se définissent comme des jets particuliers. La particularité réside dans le choix d'une unité au but (resp. à la source, au but et à la source) du jet considéré. C'est le choix de cette unité qui gouverne le type de calcul développé, de même qu'elle détermine en géométrie différentielle le type de fibré tangent étudié. Ces notions sont introduites à la fois pour les morphismes de C et leurs jets.

Depuis la toute première définition, les contacts ont été abordés et décrits en termes de jets et plus particulièrement sous forme de différentielle, vitesse et dérivée. Ils le sont encore -au chapitre 8- sous forme *d'éléments de contact* (resp. *d'éléments d'enveloppe*) comme orbites particulières (c'est à dire classes de jets, où le groupe d'opérateurs est le groupe d'isotropie) à la source (resp. au but). A cette occasion on rappelle la *relation d'incidence* définie à la fois sur la catégorie des jets et celle des éléments de contact. A titre d'exemple on précise les liens entre les idées d'Ehresmann et la présentation algèbrique qui en est faite ici.

Si pour tout ce qui précède la structure d'algèbre de contact est omniprésente dans sa forme initiale, il est nécessaire, pour la suite (chapitre 9), d'en décrire quelques prolongements qui sont dans l'ordre :

1- l'algèbre de contact sur la catégorie des jets $J^{\varphi}C$,

2- l'algèbre sur la catégorie C^U des applications de U (U ensemble non vide) dans C,

3- l'algèbre sur la catégorie C_s des sections locales de α,

4- l'algèbre sur la catégorie C_b des sections locales de β,

5- l'algèbre sur la catégorie $C_{b\bullet}$ des sections locales pointées de β.

Noter qu'on peut enchaîner les deux premières extensions, ce qui conduit aux prolongements *holonomes* ou *non holonomes*. C'est d'ailleurs par un processus similaire qu'on étend les notions d'holonomie et de non holonomie aux jets construits par extensions successives sur C_s ou C_b. A ce propos notons l'isomorphisme d'algèbres entre les algèbres définies sur $\left(J^\varphi C\right)^U$ et $J^\varphi\left(C^U\right)$ déduites par extensions successives de l'algèbre de contact sur C. Autre isomorphisme important, celui de la catégorie $\left(J^\varphi C\right)_s$ des sections locales de α^φ avec la catégorie $J^\varphi\left(C_s\right)$ des jets de sections locales de α.

A ce stade les outils sont en place pour parachever l'ensemble en définissant, pour une algèbre de contact donnée, les *éléments de connexion* et la notion de *connexion*. Moyennant l'hypothèse de transitivité locale sur C, on montre qu'il existe sur l'ensemble des éléments de connexion une espèce de structures.

Les liens entre éléments de connexion et éléments de contact sont précisés, puis on montre que la *différentielle absolue* n'est autre qu'une différentielle au sens précédent calculée dans une algèbre de contact transitive déduite de l'algèbre initiale. Tout naturellement on termine en précisant le *groupoïde d'holonomie* et le *groupe d'holonomie* attachés à un élément de connexion.

7 CALCUL DIFFERENTIEL DANS (k, Φ, C)

7.1 DEFINITIONS

Dans tout ce qui suit on considère (k, φ, C) une algèbre de contact

7.1.1 φ-GROUPE D'ISOTROPIE

Notons $J^{\varphi}(e,e')$ l'ensemble des jets $X = J^{\varphi}f$ où $f \in C(e,e')$. $X \in J^{\varphi}(e,e')$ est **INVERSIBLE** si et seulement si il existe $X' \in J^{\varphi}(e',e)$ tel que $X.X' = J^{\varphi}e'$ et $X'.X = J^{\varphi}e$ un tel jet X' est alors unique. Nous noterons $H^{\varphi}(e,e')$ l'ensemble des jets inversibles de $J^{\varphi}(e,e')$. Puis nous noterons $H^{\varphi}(e) = H^{\varphi}(e,e)$ le groupe d'unité $J^{\varphi}e$, c'est le **φ-GROUPE D'ISOTROPIE** en e.

Il est clair que si $H^{\varphi}(e,e') \neq \varnothing$ alors $H^{\varphi}(e)$ et $H^{\varphi}(e')$ sont isomorphes et l'application $H^{\varphi}(e,e') \to H^{\varphi}(e)$, où $Z \in H^{\varphi}(e,e')$, définie par $X \mapsto Z^{-1}.X$ est bijective.

7.1.2 VITESSES ET COVITESSES

Soit e_0 une unité de C. $J^{\varphi}(e_0,e)$ est l'ensemble des **(e_0,φ)-VITESSES en e** et $J^{\varphi}(e,e_0)$ est l'ensemble des **(e_0,φ)-COVITESSES en e**.
Si A est une partie non vide de C_0,

$T^{\varphi}_{e_0}A = \bigcup_{a \in A} J^{\varphi}(e_0,a)$ est l'ensemble des **(e_0,φ)-VITESSES sur A** et
$T^{\varphi *}_{e_0}A = \bigcup_{a \in A} J^{\varphi}(a,e_0)$ est l'ensemble des **(e_0,φ)-COVITESSES sur A**.

Dans la mesure où $T^{\varphi}_{e_0}A$ et $T^{\varphi *}_{e_0}A$ ne sont pas vides, le φ-groupe d'isotropie $H^{\varphi}(e_0)$ opère à droite sur $T^{\varphi}_{e_0}A$ et à gauche sur $T^{\varphi *}_{e_0}A$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} T^{\varphi}_{e_0}A \times H^{\varphi}(e_0) &\to T^{\varphi}_{e_0}A \\ (Y,X) &\mapsto Y.X \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} H^{\varphi}(e_0) \times T^{\varphi *}_{e_0}A &\to T^{\varphi *}_{e_0}A. \\ (X,Y) &\mapsto X.Y \end{aligned}$$

7.1.3 REPERES ET COREPERES

Soit e_0 une unité de C. On note $H^{\varphi}(e_0, A)$ l'ensemble des jets inversibles de $T^{\varphi}_{e_0}A$. C'est l'ensemble des **(e_0, φ)-REPERES** de A.

On note $H^{\varphi^*}(e_0, A) = H^{\varphi}(A, e_0)$ l'ensemble des jets inversibles de $T^{\varphi^*}_{e_0}A$. C'est l'ensemble des **(e_0, φ)-COREPERES** de A.

Repères et corepères apparaissent ainsi comme des vitesses particulières.

Dans le cas des variétés différentiables A est alors l'ensemble des germes en un point quelconque d'une variété donnée (c.f. 6.1.3).

7.2 φ-TRANSFORMATIONS ET TRANSFORMATIONS

7.2.1 DEFINITION

Soit t un morphisme de C, t est une **φ-TRANSFORMATION A GAUCHE** (resp. à droite) si et seulement si t est une φ-constante à gauche (resp. à droite) et est **inversible**. (classiquement les transformations utilisées sont les translations qui permettent de « ramener l'affine au linéaire »).

Nous dirons que t est une φ-transformation si et seulement si c'est à la fois une φ-transformation à droite et à gauche.

Nous dirons que t est une transformation si et seulement si quelque soit φ de Φ c'est une φ-transformation.

7.2.2 PROPOSITION

Concernant les φ-transformations nous avons les résultats suivants.

1- Si t est une φ-transformation à gauche alors t^{-1} est également une φ-transformation à gauche.

2- Si t et t' sont deux φ-transformations à gauche et si $t.t'$ est défini alors $t.t'$ est une φ-transformation à gauche.

3- Les φ-transformations à gauche forment un sous-groupoïde de C_γ.

Les trois énoncés précédents restent vrais si on substitue à « φ-transformation à gauche » l'une des trois expressions suivantes :

- « φ-transformation à droite »
- « φ-transformation »
- « transformation ».

Δ 1- Pour tout f de C tel que $t^{-1}.f$ soit défini on a :

$$\begin{aligned} f = t.(t^{-1}.f) &\Rightarrow \varphi f = \varphi(t.(t^{-1}.f)) \\ &\Leftrightarrow \varphi f = t.\varphi(t^{-1}.f) \qquad (t \text{ est une } \varphi\text{-constante à gauche}) \\ &\Leftrightarrow t^{-1}.\varphi f = t^{-1}.t.\varphi(t^{-1}.f)) \\ &\Leftrightarrow t^{-1}.\varphi f = \varphi(t^{-1}.f)), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que t^{-1} est une φ-transformation à gauche.

2- Pour tout f de C tel que $t'.f$ soit défini on a :

$$\varphi(t.t'.f) = t.\varphi(t'.f) = t.t'.\varphi(f) \text{ et } (t.t')^{-1} = t'^{-1}.t^{-1}$$

ce qui établit le résultat annoncé.

3- Résulte de 1- et 2-. ∇

Le groupoïde des transformations de l'algèbre de contact (k,Φ,C) est non vide, car il contient au moins C_0. En effet soit $f \in C(e,e')$, on a $\varphi(e'.f) = \varphi f = e'.\varphi f$ en raison de 1.1.3.

On note C_τ le groupoïde des transformations de l'algèbre (k,Φ,C). Nous ne donnerons pas de notations spécifiques pour le groupoïde des φ-transformations à gauche, pour le groupoïde des φ-transformations à droite, pour le groupoïde des φ-transformations, pour le groupoïde des transformations à gauche, pour le groupoïde des transformations à droite.

Nous n'utiliserons que C_τ sachant que dans bien des cas il sera possible de substituer à C_τ un ou plusieurs des groupoïdes cités précédemment.

Soit e_0 une unité de C. On pose $E_0 = \{e \in C_0 / C_\tau(e_0,e) \neq \varnothing\}$. E_0 est encore la classe d'équivalence de e_0 pour la relation d'équivalence « ~ » définie par :

$$e \sim e' \Leftrightarrow C_\tau(e,e') \neq \varnothing.$$

Sur $E_0 \times E_0$ on définit entre couples la loi suivante :

$(e'',e_1).(e',e)$ défini ssi $e_1 = e'$, dans ce cas on a $(e'',e').(e',e) = (e'',e)$.

Ceci nous permet de munir $E_0 \times E_0$ d'une structure de groupoïde.

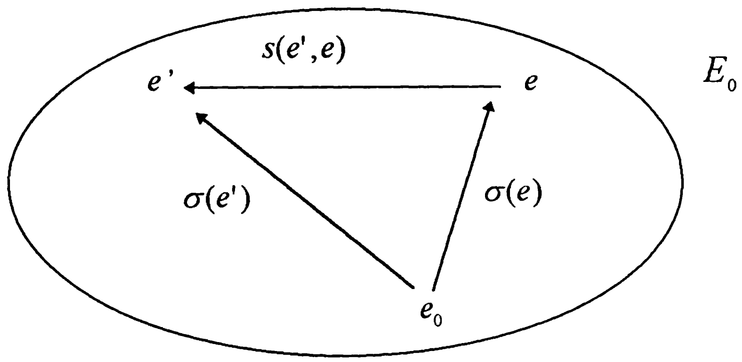
Soit $s\colon E_0 \times E_0 \to C_\tau$ une section de $[\beta,\alpha]$, c'est à dire une application telle que pour tout couple (e',e) de $E_0 \times E_0$ on ait $[\beta,\alpha](f) = (e',e)$ quand $s(e',e) = f$. Si de plus s est un foncteur du groupoïde des couples vers le groupoïde des transformations, nous dirons que s est une **SECTION ADMISSIBLE relative à E_0**.

Une telle section détermine l'application

$$\begin{aligned}\sigma: E_0 &\to C_\tau(e_0, E_0)\\ e &\mapsto s(e, e_0)\end{aligned}$$

qui est une section de β (c'est à dire $\beta(\sigma(e)) = e$). Inversement si on se donne une section de β de la forme $\begin{aligned}\sigma: E_0 &\to C_\tau(e_0, E_0)\\ e &\mapsto \sigma(e)\end{aligned}$

on peut définir $s: E_0 \times E_0 \to C_\tau$ par $s(e', e) = \sigma(e').\sigma(e)^{-1}$.



On vérifie $[\beta,\alpha](\sigma(e').\sigma(e)^{-1}) = (\beta(\sigma(e')), \beta(\sigma(e))) = (e', e)$, ce qui prouve que s est une section de $[\beta,\alpha]$. Deplus on a :

$$\begin{aligned}s((e'', e').(e', e)) &= s(e'', e)\\ &= \sigma(e'').\sigma(e)^{-1}\\ &= \sigma(e'').\sigma(e')^{-1}.\sigma(e').\sigma(e)^{-1}\\ &= s(e'', e').s(e', e)\ .\end{aligned}$$

s est donc un foncteur et par suite s devient une section admissible. Autrement dit se donner σ équivaut à se donner s.

Plus généralement, on fait choix sur chaque classe $\widetilde{e} \in C_0/\sim$ d'une unité de cette classe notée $c(\widetilde{e})$. On étend alors la définition de s à chacune de ces classes de telle sorte que $s_{|\widetilde{e} \times \widetilde{e}}: \widetilde{e} \times \widetilde{e} \to C_\tau$ soit une section admissible relative à $\widetilde{e}$. S'il en est ainsi nous dirons que s est une **SECTION ADMISSIBLE**.

7.2.3 DEFINITION

On dira que (k, Φ, C, s, c) est une algèbre de contact **TRANSITIVE** si et seulement si (k, Φ, C) est une algèbre de contact, s une section admissible et $c: C_0/\sim\ \to C_0$ une fonction de choix de représentant.

7.2.4 PROPOSITION

On considére l'algèbre de contact transitive (k,Φ,C,s,c), e_0 une unité de C et A une partie non vide de la classe de e_0, alors quelque soit φ, l'application suivante est bijective.

$$\begin{aligned}\Psi_\varphi : T^\varphi_{e_0} A &\to A \times J^\varphi(e_0,e_0)\\ X &\mapsto (a, s(e_0,a).X)\end{aligned}$$

avec $J^\varphi f = X$, $J^\varphi(e_0,e_0) = T^\varphi_{e_0} e_0$, $a = \beta(f)$, où $s(e_0,a).X$ met en jeu l'action de C définie en 4.2.1 telle que $s(e_0,a).X = J^\varphi(s(e_0,a).f)$. Avec les mêmes hypothèses l'application

$$\begin{aligned}\Psi_\varphi{}^* : T^{\varphi *}_{e_0} A &\to A \times J^\varphi(e_0,e_0)\\ Y &\mapsto (a, Y.s(a,e_0))\end{aligned}$$

est bijective quelque soit φ, avec $J^\varphi g = Y$ et $\alpha(g) = a$.

Δ Quand $g.f$ est défini, $X = J^\varphi f$ alors $g.X = J^\varphi g . J^\varphi f = J^\varphi(g.f)$ (c.f. 4.2.1).
Soit $X = J^\varphi f$ et $X' = J^\varphi f'$ avec $\beta(f) = a$ et $\beta(f') = a'$. On a alors :

$$\begin{aligned}\Psi_\varphi(X) = \Psi_\varphi(X') &\Rightarrow a = a' \text{ et } s(e_0,a).X = s(e_0,a').X'\\
&\Rightarrow s(e_0,a) = s(e_0,a') \text{ et } s(e_0,a).X = s(e_0,a).X'\\
&\Rightarrow \varphi(s(e_0,a).f) = \varphi(s(e_0,a).f')\\
&\Rightarrow s(e_0,a).\varphi f = s(e_0,a).\varphi f' \quad \text{(car } s(e_0,a) \text{ est constante)}\\
&\Rightarrow \varphi f = \varphi f' \quad \text{(car } s(e_0,a) \text{ est inversible)}\\
&\Rightarrow J^\varphi f = J^\varphi f'\\
&\Rightarrow X = X'.\end{aligned}$$

Par ailleurs si $(a,Y) \in A \times J^\varphi(e_0,e_0)$, on pose $X = s(a,e_0).Y$. Si $Y = J^\varphi g$ alors $X = J^\varphi(s(a,e_0).g)$ et $\beta(s(a,e_0).g) = a$, il est clair qu'on vérifie $\Psi(X) = (a,Y)$ ce qui achève la preuve de 1-. On démontre 2- de manière tout à fait analogue. ∇

7.2.5 REMARQUES

L'introduction des sections admissibles a pour unique but de rapporter le calcul des jets dans une algèbre de contact (tant à la source qu'au but) à un élément de C_0, au même titre qu'on considère les jets classiques de source $(\hat{\mathbf{R}}^p,0)$ et/ou de but $(\hat{\mathbf{R}}^q,0)$.Le recours aux transformations n'étant pas le seul, nous allons ici examiner deux autres recours possibles qui apparaissent naturellement ; à savoir :

1- les inversibles de C qui forment le groupoïde C_γ,

2- les éléments de $H^\varphi(C_0)$, c'est à dire les jets inversibles d'une unité de C vers une unité de C.

Pour chacune de ces deux options nous allons préciser les sections admissibles relatives respectivement à E'_0 et E''_0, sachant que la construction peut être étendue à toutes les classes d'équivalence.

1- Soit $e_0 \in C_0$, on définit E'_0 comme l'ensemble des unités e de C telles que $C_\gamma(e_0,e) \neq \varnothing$. Se donner une section admissible s', c'est se donner $s':E'_0 \times E'_0 \to C_\gamma$ une section de $[\beta,\alpha]$ telle que s' soit un foncteur du groupoïde des couples $E'_0 \times E'_0$ vers le groupoïde C_γ .

2- Soit $e_0 \in C_0$, on définit E''_0 comme l'ensemble des unités e de C telles que $H^\varphi(e_0,e) \neq \varnothing$. Se donner une section admissible s'', c'est se donner l'application :

$$\begin{aligned} s'':E''_0 \times E''_0 &\to H^\varphi(C_0) \\ (e',e) &\mapsto s''(e',e) = J^\varphi h \end{aligned}$$

telle que $[\beta,\alpha](h) = (e',e)$ quand $h \in C(e,e')$. Ce dernier résultat ne dépend pas du représentant choisi ; en effet on sait que si $h \in C(e,e')$ et si $h' \in J^\varphi h$ alors $\varphi h' = \varphi h \in C(e,e')$ et donc $h' \in C(e,e')$ (c.f.1.1.3 1-).De plus s'' doit être un foncteur du groupoïde des couples $E''_0 \times E''_0$ vers le groupoïde $H^\varphi(C_0)$.

Il est clair que l'existence d'une section admissible au sens de 7.2.2 entraîne l'existence d'une section admissible de type 1, qui elle-même entraîne l'existence d'une section admissible du type 2. Par ailleurs on a $E_0 \subset E'_0 \subset E''_0$.

Quelle que soit l'option choisie, l'énoncé de 7.2.4 subsiste. Par contre si on considère l'option 2 on doit se restreindre aux résultats énoncés de 7.3.1 à 7.3.6 inclus.

Au niveau des applications le choix entre ces trois options se fera en fonction de la simplicité recherchée dans les calculs. De ce point de vue le choix des transformations semble être le plus naturel dans la mesure où l'équation $\varphi(s(e'',e').f) = s(e'',e').\varphi f$ (quand $f \in C(e,e')$) permet d'établir -dans le calcul des jets infinitésimaux- un lien élémentaire entre le calcul du jet de f en a et celui de f en a'.

En remarquant qu'on a $C_\tau \subset C_\gamma$ et $J^\varphi C_\gamma \subset H^\varphi(C_0)$ (en effet si f est inversible dans C alors $J^\varphi f$ est inversible dans $J^\varphi C$) on en déduit $J^\varphi C_\tau \subset J^\varphi C_\gamma \subset H^\varphi(C_0)$. Le choix de la section ne peut être exclusif et autorise donc la mixité ; par exemple entre les transformations et les jets inversibles (que ce soit des jets de transformations ou non), autrement dit les repères.

Se donner les sections admissibles $s: E_0 \times E_0 \to C_\tau$ et $s': E'_0 \times E'_0 \to C_\gamma$ conduit à se
$(e',e) \mapsto s(e',e)$ $(e',e) \mapsto s'(e',e)$
donner pour tout φ de Φ les foncteurs suivants :

$$J^\varphi s: E_0 \times E_0 \to J^\varphi C_\tau \subset H^\varphi(C_0) \qquad J^\varphi s': E'_0 \times E'_0 \to J^\varphi C_\gamma \subset H^\varphi(C_0).$$
$$(e',e) \mapsto J^\varphi s(e',e) \qquad (e',e) \mapsto J^\varphi s'(e',e)$$

Bien entendu on étend les constructions précédentes à toutes les classes d'équivalence.

7.3 CALCUL DIFFERENTIEL DANS (k,Φ,C)

Soit (k,Φ,C,s,c) une algèbre de contact transitive. On pose pour tout e de C_0, $s(e,c(\tilde{e}))={}_e s$ et $s(c(\tilde{e}),e) = s_e$, on a évidemment $s_e = {}_e s^{-1}$. Selon l'option retenue on aura $s_e \in C_\tau$ ou $s_e \in C_\gamma$ ou $J^\varphi s_e \in H^\varphi(C_0)$.

7.3.1 DIFFERENTIELLE OU COVITESSE

Pour $f \in C(e,e')$ on pose :

$$d_s^\varphi f = J^\varphi s_{e'}.f = J^\varphi(s_{e'}.f) = J^\varphi s_{e'}.J^\varphi f,$$

c'est la (s,φ) **-DIFFERENTIELLE** de f.

En particulier on a $d_s^\varphi e' = J^\varphi s_{e'}.e' = J^\varphi s_{e'}$, ce qui donne $d_s^\varphi f = d_s^\varphi e'.J^\varphi f$.

Pour $X \in J^\varphi(e,e')$ on pose :

$$d_s^\varphi X = s_{e'}.X = J^\varphi s_{e'}.X = d_s^\varphi e'.X,$$

c'est la (s,φ) **-DIFFERENTIELLE** de X.

On peut indifféremment parler de (s,φ)-différentielle ou de (s,φ)-covitesse dans la suite nous n'utiliserons que la première locution.

7.3.2 VITESSE

Pour $f \in C(e,e')$ on pose :

$$\partial_s^\varphi f = f.J^\varphi{}_e s = J^\varphi(f._e s) = J^\varphi f.J^\varphi{}_e s,$$

c'est la (s,φ) **-VITESSE** de f.

En particulier on a $\partial_s^\varphi e = e.J^\varphi{}_e s = J^\varphi{}_e s$, ce qui donne $\partial_s^\varphi f = J^\varphi f.\partial_s^\varphi e$.

Pour $X \in J^{\varphi}(e,e')$ on pose :

$$\partial_s^{\varphi} X = X._e s = X.J^{\varphi}{}_e s = X.\partial_s^{\varphi} e\,,$$

c'est la (s,φ)-**VITESSE** de X.

Remarque

Si $X \in J^{\varphi}(e,e')$ et est inversible (c'est à dire si $X \in H^{\varphi}(e,e')$), il existe alors un unique jet $X^{-1} \in J^{\varphi}(e',e)$ tel que $X.X^{-1} = J^{\varphi}e'$ et $X^{-1}.X = J^{\varphi}e$. Dans ce cas on a $d_s^{\varphi} X = J^{\varphi} s_{e'}.X$ et $\partial_s^{\varphi} X^{-1} = X^{-1}.J^{\varphi}{}_{e'} s$ d'où l'on tire $d_s^{\varphi} X = (\partial_s^{\varphi} X^{-1})^{-1} \in H^{\varphi}(e,e'_0)$ ou $(d_s^{\varphi} X)^{-1} = \partial_s^{\varphi} X^{-1}$ avec e'_0 qui est l'image par la fonction de choix c de la classe de e'.

7.3.3 DERIVEE

Pour $f \in C(e,e')$ on pose :

$$f_s^{\varphi} = d_s^{\varphi} e'.f.\partial_s^{\varphi} e = d_s^{\varphi} e'.J^{\varphi} f.\partial_s^{\varphi} e\,,$$

c'est la (s,φ)-**DERIVEE** de f.

Comme $d_s^{\varphi} f = d_s^{\varphi} e'.J^{\varphi} f$ et $\partial_s^{\varphi} f = J^{\varphi} f.\partial_s^{\varphi} e$ on a donc $d_s^{\varphi} f = f_s^{\varphi}.d_s^{\varphi} e$ et $\partial_s^{\varphi} f = \partial_s^{\varphi} e'.f_s^{\varphi}$ d'où les notations $f_s^{\varphi} = \dfrac{d_s^{\varphi} f}{d_s^{\varphi} e}$ ou $f_s^{\varphi} = \dfrac{\partial_s^{\varphi} f}{\partial_s^{\varphi} e'}$.

Pour $X \in J^{\varphi}(e,e')$ on pose :

$$X_s^{\varphi} = d_s^{\varphi} e'.X.\partial_s^{\varphi} e\,,$$

c'est la (s,φ)-**DERIVEE** de X.

Comme $d_s^{\varphi} X = d_s^{\varphi} e'.X$ et $\partial_s^{\varphi} X = X.\partial_s^{\varphi} e$ on a donc $d_s^{\varphi} X = X_s^{\varphi}.d_s^{\varphi} e$ et $\partial_s^{\varphi} X = \partial_s^{\varphi} e'.X_s^{\varphi}$ d'où les notations $X_s^{\varphi} = \dfrac{d_s^{\varphi} X}{d_s^{\varphi} e}$ ou $X_s^{\varphi} = \dfrac{\partial_s^{\varphi} X}{\partial_s^{\varphi} e'}$.

Tout ce qui suit peut sembler n'être qu'un jeu de notations. Effectivement, c'est un jeu. Et si le calcul différentiel peut n'être qu'un jeu, c'est bien grâce aux notations et surtout grâce au concept de jet. On connaît bien les avantages et les inconvénients respectivement redevables aux notations de Leibnitz et de Newton.

C'est Leibnitz qui propose d'écrire le développement de $(x+y)^n$ afin d'exprimer $d^n(xy)$ en convenant de poser $d^0 x = x$ et $d^1 x = dx$.

En effet, sachant par exemple qu'on a

$$(x+y)^2 = 1x^2 + 2xy + y^2 = 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + x^0y^2 \ ,$$

il vient

$$\begin{aligned} d^2(xy) &= 1d^2xd^0y + 2d^1xd^1y + d^0xd^2y \\ &= (d^2x)y + 2dxdy + xd^2y \\ &= yd^2x + 2dxdy + xd^2y \,. \end{aligned}$$

Ces résultats suggèrent à Arbogast la notation $d = d^{'1} + d^{1'}$ telle que $d(xy) = d^{'1}(xy) + d^{1'}(xy) = xdy + (dx)y = xdy + ydx$, ce qui lui permet d'écrire $d^n = \left(d^{'1} + d^{1'}\right)^n$ afin d'aller au delà de la simple analogie observée par Leibnitz.

Finalement c'est à Boole que revient le mérite d'exploiter toute la richesse de cette notation en posant symboliquement :

$$e^{h\frac{d}{dx}} = 1 + \left(h\frac{d}{dx}\right) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{d}{dx}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(h\frac{d}{dx}\right)^3 + \frac{1}{4!}\left(h\frac{d}{dx}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots$$

puis d'appliquer cet opérateur à $f(x)$ pour finalement obtenir :

$$\left(e^{h\frac{d}{dx}}\right)(f(x)) = f(x) + \left(h\frac{df(x)}{dx}\right) + \frac{1}{2!}\left(h^2\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right) + \frac{1}{3!}\left(h^3\frac{d^3f(x)}{dx^3}\right) + \frac{1}{4!}\left(h^4\frac{d^4f(x)}{dx^4}\right) + \ldots$$

$$= f(x+h) \,.$$

On reconnaît ici le développement en série de Mac-laurin écrit sous une forme éminemment plus compacte.

Le choix de bonnes notations doit rendre compte des résultats avec simplicité et élégance.

7.3.4 PROPOSITION

Si $f \in C(e,e')$ et $g \in C(e',e'')$ alors on a :

1- $d_s^\varphi(g.f) = d_s^\varphi g.f = g_s^\varphi . d_s^\varphi f$,
2- $\partial_s^\varphi(g.f) = g.\partial_s^\varphi f = \partial_s^\varphi g.f_s^\varphi$,
3- $(g.f)_s^\varphi = g_s^\varphi . f_s^\varphi = d_s^\varphi g.\partial_s^\varphi f$.

Ces résultats sont encore vrais si on remplace *f* par *X* et *g* par *Y* avec $X \in J^\varphi(e,e')$ et $Y \in J^\varphi(e',e'')$.

Δ 1-

$$\begin{aligned} d_s^\varphi(g.f) &= d_s^\varphi e''.(g.f) \qquad \text{(c.f. 4.2.1)} \\ &= (d_s^\varphi e''.g).f \\ &= d_s^\varphi g.f \\ &= d_s^\varphi e''.g.\partial_s^\varphi e'.d_s^\varphi e'.f \\ &= (d_s^\varphi e''.g.\partial_s^\varphi e').d_s^\varphi e'.f \\ &= g_s^\varphi.d_s^\varphi f \end{aligned}$$

2-

$$\begin{aligned} \partial_s^\varphi(g.f) &= (g.f).\partial_s^\varphi e \\ &= g.(f.\partial_s^\varphi e) \\ &= g.\partial_s^\varphi f \\ &= g.\partial_s^\varphi e'.d_s^\varphi e'.f.\partial_s^\varphi e \\ &= g.\partial_s^\varphi e'.(d_s^\varphi e'.f.\partial_s^\varphi e) \\ &= \partial_s^\varphi g.f_s^\varphi \end{aligned}$$

3-

$$\begin{aligned} (g.f)_s^\varphi &= d_s^\varphi e''.g.f.\partial_s^\varphi e \\ &= d_s^\varphi e''.g.\partial_s^\varphi e'.d_s^\varphi e'.f.\partial_s^\varphi e \\ &= (d_s^\varphi e''.g.\partial_s^\varphi e').(d_s^\varphi e'.f.\partial_s^\varphi e) \\ &= g_s^\varphi.f_s^\varphi \end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned} (g.f)_s^\varphi &= d_s^\varphi e''.g.f.\partial_s^\varphi e \\ &= (d_s^\varphi e''.g).(f.\partial_s^\varphi e) \\ &= d_s^\varphi g.\partial_s^\varphi f \end{aligned}$$

∇

7.3.4 3- montre que la dérivation s'exerce de manière fonctorielle. Dans le calcul différentiel usuel $(g.f)_s^\varphi = g_s^\varphi.f_s^\varphi$ n'est rien d'autre que la dérivée de la composée de deux fonctions dérivables.

7.3.5 PROPOSITION

Si $f \in C(e,e')$ alors on a :

1- $d_s^\varphi(d_s^\varphi f) = d_s^\varphi f$,
2- $d_s^\varphi(\partial_s^\varphi f) = d_s^\varphi(f_s^\varphi) = f_s^\varphi$,
3- $\partial_s^\varphi(\partial_s^\varphi f) = \partial_s^\varphi f$,
4- $\partial_s^\varphi(d_s^\varphi f) = \partial_s^\varphi(f_s^\varphi) = f_s^\varphi$,
5- $(d_s^\varphi f)_s^\varphi = (\partial_s^\varphi f)_s^\varphi = (f_s^\varphi)_s^\varphi = f_s^\varphi$.

On note respectivement e_0 et e'_0 les images par la fonction de choix c des classes d'équivalence de e et de e'.

Il est clair que pour toute section admissible on a ${}_{e_0}s = s_{e_0} = s(e_0, e_0) = e_0$, s étant un foncteur. Finalement on a $d_s^\varphi e_0 = \partial_s^\varphi e_0 = J^\varphi e_0$ et $(e_0)_s^\varphi = d_s^\varphi e_0 . e_0 . \partial_s^\varphi e_0 = J^\varphi e_0$. Par conséquent $d_s^\varphi e_0 = \partial_s^\varphi e_0 = (e_0)_s^\varphi = J^\varphi e_0$ est une unité de $J^\varphi C$.

Δ 1- $d_s^\varphi(d_s^\varphi f) = d_s^\varphi e'_0 . d_s^\varphi f = d_s^\varphi f$ $\qquad (d_s^\varphi f \in J^\varphi(e, e'_0))$,

2- $d_s^\varphi(\partial_s^\varphi f) = d_s^\varphi e' . \partial_s^\varphi f = d_s^\varphi e' . f . \partial_s^\varphi e = f_s^\varphi$ $\qquad (\partial_s^\varphi f \in J^\varphi(e_0, e'))$,
$d_s^\varphi(f_s^\varphi) = d_s^\varphi e'_0 . f_s^\varphi = f_s^\varphi$ $\qquad (f_s^\varphi \in J^\varphi(e_0, e'_0))$,

3- $\partial_s^\varphi(\partial_s^\varphi f) = \partial_s^\varphi f . \partial_s^\varphi e_0 = \partial_s^\varphi f$ $\qquad (\partial_s^\varphi f \in J^\varphi(e_0, e'))$,

4- $\partial_s^\varphi(d_s^\varphi f) = d_s^\varphi f . \partial_s^\varphi e = d_s^\varphi e' . f . \partial_s^\varphi e = f_s^\varphi$ $\qquad (d_s^\varphi f \in J^\varphi(e, e'_0))$,
$\partial_s^\varphi(f_s^\varphi) = f_s^\varphi . \partial_s^\varphi e_0 = f_s^\varphi$ $\qquad (f_s^\varphi \in J^\varphi(e_0, e'_0))$,

5- $(d_s^\varphi f)_s^\varphi = d_s^\varphi e'_0 . d_s^\varphi f . \partial_s^\varphi e = d_s^\varphi f . \partial_s^\varphi e = d_s^\varphi e' . f . \partial_s^\varphi e = f_s^\varphi$ $\qquad (d_s^\varphi f \in J^\varphi(e, e'_0))$,
$(\partial_s^\varphi f)_s^\varphi = d_s^\varphi e' . \partial_s^\varphi f . \partial_s^\varphi e_0 = d_s^\varphi e' . \partial_s^\varphi f = d_s^\varphi e' . f . \partial_s^\varphi e = f_s^\varphi$ $\qquad (\partial_s^\varphi f \in J^\varphi(e_0, e'))$,
$(f_s^\varphi)_s^\varphi = d_s^\varphi e'_0 . f_s^\varphi . \partial_s^\varphi e_0 = f_s^\varphi$ $\qquad (f_s^\varphi \in J^\varphi(e_0, e'_0))$.

Ainsi s'achève cette démonstration. ∇

Dans la proposition suivante on reconsidère les résultats précédents en mettant en oeuvre deux sections admissibles s et s' liées à la même fonction de choix c. On considère donc les algèbres de contact transitives (k, Φ, C, s, c) et (k, Φ, C, s', c) .

7.3.6 <u>PROPOSITION</u>

Si $f \in C(e, e')$ alors on a :

1- $d_{s'}^\varphi(d_s^\varphi f) = d_s^\varphi f$,
2- $d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi f) = d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi e') . f_s^\varphi = f_{s'}^\varphi . d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi e)$,
3- $d_{s'}^\varphi(f_s^\varphi) = f_s^\varphi$,
4- $\partial_{s'}^\varphi(d_s^\varphi f) = f_s^\varphi . d_s^\varphi(\partial_{s'}^\varphi e) = d_s^\varphi(\partial_{s'}^\varphi e') . f_{s'}^\varphi$,
5- $\partial_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi f) = \partial_s^\varphi f$,
6- $\partial_{s'}^\varphi(f_s^\varphi) = f_s^\varphi$,
7- $(d_s^\varphi f)_{s'}^\varphi = f_s^\varphi . d_s^\varphi(\partial_{s'}^\varphi e) = d_s^\varphi(\partial_{s'}^\varphi e') . f_{s'}^\varphi$,
8- $(\partial_s^\varphi f)_{s'}^\varphi = d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi e') . f_s^\varphi = f_{s'}^\varphi . d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi e)$,
9- $(f_s^\varphi)_{s'}^\varphi = f_s^\varphi$.

Δ Comme en 7.3.5 on note respectivement e_0 et e'_0 les images par la fonction de choix c des classes d'équivalence de e et de e'. Dans ce qui suit on se reporte aux définitions de la différentielle, de la vitesse, de la dérivée d'un jet qui ont été données aux paragraphes 7.3.1, 7.3.2 et 7.3.3. Moyennant quoi les calculs qui suivent ne présentent aucune difficulté, ces résultats sont autant de règles de réécriture déduites des précédentes.

1- $d_{s'}^{\varphi}(d_s^{\varphi} f) = d_{s'}^{\varphi} e'_0 . d_s^{\varphi} f = d_s^{\varphi} f$.

2- On a :

$$\begin{aligned} d_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi} f) &= d_{s'}^{\varphi} e' . \partial_s^{\varphi} f \\ &= d_{s'}^{\varphi} e' . f . \partial_s^{\varphi} e \\ &= d_{s'}^{\varphi} e' . \partial_s^{\varphi} e' . d_s^{\varphi} e' . f . \partial_s^{\varphi} e \\ &= d_{s'}^{\varphi} e' . \partial_s^{\varphi} e' . f_s^{\varphi} \\ &= d_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi} e') . f_s^{\varphi} \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} d_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi} f) &= d_{s'}^{\varphi} e' . \partial_s^{\varphi} f \\ &= d_{s'}^{\varphi} e' . f . \partial_s^{\varphi} e \\ &= d_{s'}^{\varphi} e' . f . \partial_{s'}^{\varphi} e . d_{s'}^{\varphi} e . \partial_s^{\varphi} e \\ &= f_{s'}^{\varphi} . d_{s'}^{\varphi} e . \partial_s^{\varphi} e \\ &= f_{s'}^{\varphi} . d_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi} e) \end{aligned}$$

Les dernières égalités sont obtenues grâce au fait qu'on a $\partial_s^{\varphi} e' \in J^{\varphi}(e'_0, e')$ et $\partial_s^{\varphi} e \in J^{\varphi}(e_0, e)$.

3- $d_{s'}^{\varphi}(f_s^{\varphi}) = d_{s'}^{\varphi} e'_0 . f_s^{\varphi} = f_s^{\varphi}$

4- On a :

$$\begin{aligned} \partial_{s'}^{\varphi}(d_s^{\varphi} f) &= d_s^{\varphi} f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . f . \partial_s^{\varphi} e . d_s^{\varphi} e . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= f_s^{\varphi} . d_s^{\varphi} e . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= f_s^{\varphi} . d_s^{\varphi}(\partial_{s'}^{\varphi} e) \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} \partial_{s'}^{\varphi}(d_s^{\varphi} f) &= d_s^{\varphi} f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . \partial_{s'}^{\varphi} e' . d_{s'}^{\varphi} e' . f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . \partial_{s'}^{\varphi} e' . f_{s'}^{\varphi} \\ &= d_s^{\varphi}(\partial_{s'}^{\varphi} e') . f_{s'}^{\varphi} \end{aligned}$$

5- $\partial_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi} f) = \partial_s^{\varphi} f . \partial_{s'}^{\varphi} e_0 = \partial_s^{\varphi} f$

6- $\partial_{s'}^{\varphi}(f_s^{\varphi}) = f_s^{\varphi} . \partial_{s'}^{\varphi} e_0 = f_s^{\varphi}$

7- On a :

$$\begin{aligned} (d_s^{\varphi} f)_{s'}^{\varphi} &= d_{s'}^{\varphi} e'_0 . d_s^{\varphi} f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . f . \partial_s^{\varphi} e . d_s^{\varphi} e . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= f_s^{\varphi} . d_s^{\varphi} e . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= f_s^{\varphi} . d_s^{\varphi}(\partial_{s'}^{\varphi} e) \end{aligned}$$

On a également :

$$\begin{aligned} (d_s^{\varphi} f)_{s'}^{\varphi} &= d_{s'}^{\varphi} e'_0 . d_s^{\varphi} f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . \partial_{s'}^{\varphi} e' . d_{s'}^{\varphi} e' . f . \partial_{s'}^{\varphi} e \\ &= d_s^{\varphi} e' . \partial_{s'}^{\varphi} e' . f_{s'}^{\varphi} \\ &= d_s^{\varphi}(\partial_{s'}^{\varphi} e') . f_{s'}^{\varphi} \end{aligned}$$

8- On a :

$$
\begin{aligned}
(\partial_s^\varphi f)_{s'}^\varphi &= d_{s'}^\varphi e' . \partial_s^\varphi f . \partial_{s'}^\varphi e_0 \\
&= d_{s'}^\varphi e' . \partial_s^\varphi f \\
&= d_{s'}^\varphi e' . f . \partial_s^\varphi e \\
&= d_{s'}^\varphi e' . f . \partial_{s'}^\varphi e . d_{s'}^\varphi e . \partial_s^\varphi e \\
&= f_{s'}^\varphi . d_{s'}^\varphi e . \partial_s^\varphi e \\
&= f_{s'}^\varphi . d_{s'}^\varphi (\partial_s^\varphi e)
\end{aligned}
$$

On a également :

$$
\begin{aligned}
(\partial_s^\varphi f)_{s'}^\varphi &= d_{s'}^\varphi e' . \partial_s^\varphi f . \partial_{s'}^\varphi e_0 \\
&= d_{s'}^\varphi e' . \partial_s^\varphi f \\
&= d_{s'}^\varphi e' . f . \partial_s^\varphi e \\
&= d_{s'}^\varphi e' . \partial_s^\varphi e' . d_s^\varphi e' . f . \partial_s^\varphi e \\
&= d_{s'}^\varphi e' . \partial_s^\varphi e' . f_s^\varphi \\
&= d_{s'}^\varphi (\partial_s^\varphi e') . f_s^\varphi
\end{aligned}
$$

9- $(f_s^\varphi)_{s'}^\varphi = d_{s'}^\varphi e'_0 . f_s^\varphi . \partial_{s'}^\varphi e_0 = f_s^\varphi$. ∇

Nous allons maintenant étendre les calculs précédents à une partie de C, afin d'être en mesure de donner un sens (dans le cas où $\varphi \neq \varphi'$) à des expressions telles que $d_s^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f)$, $d_s^{\varphi'}(f_s^\varphi)$ etc, ces expressions ne mettant en jeu qu'une seule et même section admissible.

A étant une partie non vide de $C(e,e')$, on pose :

$$
\begin{aligned}
d_s^\varphi A &= \bigcup_{f \in A} d_s^\varphi f = \bigcup_{f \in A} J^\varphi(s_{e'} . f), \\
\partial_s^\varphi A &= \bigcup_{f \in A} \partial_s^\varphi f = \bigcup_{f \in A} J^\varphi(f ._e s), \\
(A)_s^\varphi &= \bigcup_{f \in A} f_s^\varphi = \bigcup_{f \in A} J^\varphi(s_{e'} . f ._e s).
\end{aligned}
$$

7.3.7 PROPOSITION

Si $f \in C(e,e')$, $\varphi \in \Phi$ et $\varphi' \in \Phi$ alors on a :

1- $d_s^{\varphi'}(d_s^\varphi f) = J^{\varphi'}(d_s^\varphi f)$,
2- $\partial_s^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f) = J^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f)$,
3- $(f_s^\varphi)_s^{\varphi'} = J^{\varphi'}(f_s^\varphi)$,
4- $d_s^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f) = d_s^{\varphi'}(f_s^\varphi) = \partial_s^{\varphi'}(d_s^\varphi f) = \partial_s^{\varphi'}(f_s^\varphi) = (d_s^\varphi f)_s^{\varphi'} = (\partial_s^\varphi f)_s^{\varphi'} = J^{\varphi'}(f_s^\varphi)$.

On note encore respectivement e_0 et e'_0 les images par la fonction de choix c des classes d'équivalence de e et de e'.

Δ 1- On a $d_s^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f) = \bigcup_{h \in d_s^{\varphi}f} d_s^{\varphi'}h$, or de $h \in d_s^{\varphi}f$ et $d_s^{\varphi}f \in J^{\varphi}(e,e'_0)$ on tire (en raison de 1.1.3) $h \in C(e,e'_0)$ d'où $d_s^{\varphi'}h = d_s^{\varphi'}e'_0.h = J^{\varphi'}h$ et $d_s^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f) = \bigcup_{h \in d_s^{\varphi}f} J^{\varphi'}h = J^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f)$.

2- On a $\partial_s^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi}f) = \bigcup_{h \in \partial_s^{\varphi}f} \partial_s^{\varphi'}h$, de même qu'en 1- on conclut $h \in C(e_0,e)$ d'où $\partial_s^{\varphi'}h = h.\partial_s^{\varphi'}e_0 = J^{\varphi'}h$ et $\partial_s^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi}f) = \bigcup_{h \in \partial_s^{\varphi}f} J^{\varphi'}h = J^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi}f)$.

3- On a $(f_s^{\varphi})_{s'}^{\varphi'} = \bigcup_{h \in f_s^{\varphi}} h_{s'}^{\varphi'}$ et $h \in C(e_0,e'_0)$ d'où $h_{s'}^{\varphi'} = d_s^{\varphi'}e'_0.h.\partial_s^{\varphi}e_0 = J^{\varphi'}h$ et $(f_s^{\varphi})_{s'}^{\varphi'} = \bigcup_{h \in f_s^{\varphi}} J^{\varphi'}h = J^{\varphi'}(f_s^{\varphi})$.

4- On a $d_s^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi}f) = \bigcup_{h \in \partial_s^{\varphi}f} d_s^{\varphi'}h$ et $h \in C(e_0,e')$ d'où $d_s^{\varphi'}h = d_s^{\varphi'}e'.h = J^{\varphi'}(s_{e'}.h)$. On en déduit les égalités $d_s^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi}f) = \bigcup_{h \in \partial_s^{\varphi}f} J^{\varphi'}(s_{e'}.h) = \bigcup_{h \in J^{\varphi}(f._e s)} J^{\varphi'}(s_{e'}.h) = \bigcup_{k \in s_{e'} \bullet J^{\varphi}(f._e s)} J^{\varphi'}k$, car d'après la proposition 4.2.2 3- ($s_{e'}$ étant inversible) on a $s_{e'} \bullet J^{\varphi}(f._e s) = J^{\varphi}(s_{e'}.f._e s) = f_s^{\varphi}$, d'où $d_s^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi}f) = \bigcup_{k \in f_s^{\varphi}} J^{\varphi'}k = J^{\varphi'}(f_s^{\varphi})$.

On a $d_s^{\varphi'}(f_s^{\varphi}) = \bigcup_{h \in f_s^{\varphi}} d_s^{\varphi'}h$ avec $h \in C(e_0,e'_0)$ d'où $d_s^{\varphi'}h = d_s^{\varphi'}e'_0.h = J^{\varphi'}h$ et $d_s^{\varphi'}(f_s^{\varphi}) = \bigcup_{h \in f_s^{\varphi}} J^{\varphi'}h = J^{\varphi'}(f_s^{\varphi})$.

On a $\partial_s^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f) = \bigcup_{h \in d_s^{\varphi}f} \partial_s^{\varphi'}h$ avec $h \in C(e,e'_0)$ d'où $\partial_s^{\varphi'}h = h.\partial_s^{\varphi'}e = J^{\varphi'}(h._e s)$. On a donc $\partial_s^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f) = \bigcup_{h \in d_s^{\varphi}f} J^{\varphi'}(h._e s) = \bigcup_{h \in J^{\varphi}(s_{e'}.f)} J^{\varphi'}(h._e s) = \bigcup_{k \in J^{\varphi}(s_{e'}.f) \bullet_e s} J^{\varphi'}k$. Toujours d'après la proposition 4.2.2 ($_e s$ étant inversible) on a $J^{\varphi}(s_{e'}.f) \bullet_e s = J^{\varphi}(s_{e'}.f._e s) = f_s^{\varphi}$ d'où $\partial_s^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f) = \bigcup_{k \in f_s^{\varphi}} J^{\varphi'}k = J^{\varphi'}(f_s^{\varphi})$.

On a $\partial_s^{\varphi'}(f_s^{\varphi}) = \bigcup_{h \in f_s^{\varphi}} \partial_s^{\varphi'}h$ et $h \in C(e_0,e'_0)$ d'où $\partial_s^{\varphi'}h = h.\partial_s^{\varphi'}e_0 = J^{\varphi'}h$. On a donc $\partial_s^{\varphi'}(f_s^{\varphi}) = \bigcup_{h \in f_s^{\varphi}} J^{\varphi'}h = J^{\varphi'}(f_s^{\varphi})$.

On a $(d_s^{\varphi}f)_s^{\varphi'} = \bigcup_{h \in d_s^{\varphi}f} h_s^{\varphi'}$ et $h \in C(e,e'_0)$ d'où $h_s^{\varphi'} = d_s^{\varphi'}e'_0.h.\partial_s^{\varphi'}e = J^{\varphi'}(h._e s)$.

On a donc $(d_s^\varphi f)_s^{\varphi'} = \bigcup_{h\in d_s^\varphi f} h_s^{\varphi'} = \bigcup_{h\in J^{\varphi'}(s_{e'}.f)} J^{\varphi'}(h._e s) = \bigcup_{k\in J^{\varphi'}(s_{e'}.f)\bullet_e s} J^{\varphi'}k$. Comme on l'a déjà vu, on a $J^{\varphi'}(s_{e'}.f)\bullet {}_e s = f_s^\varphi$ d'où $(d_s^\varphi f)_s^{\varphi'} = \bigcup_{k\in f_s^\varphi} J^{\varphi'}k = J^{\varphi'}(f_s^\varphi)$.

On a $(\partial_s^\varphi f)_s^{\varphi'} = \bigcup_{h\in\partial_s^\varphi f} h_s^{\varphi'}$ et $h\in C(e_0,e')$ d'où $h_s^{\varphi'} = d_s^{\varphi'}e'.h.\partial_s^{\varphi'}e_0 = J^{\varphi'}(s_{e'}.h)$. On a donc $(\partial_s^\varphi f)_s^{\varphi'} = \bigcup_{h\in\partial_s^\varphi f} h_s^{\varphi'} = \bigcup_{h\in J^{\varphi'}(f._e s)} J^{\varphi'}(s_{e'}.h) = \bigcup_{k\in s_{e'}\bullet J^{\varphi'}(f._e s)} J^{\varphi'}k$, or $s_{e'}\bullet J^{\varphi'}(f._e s) = f_s^\varphi$ d'où le résultat $(\partial_s^\varphi f)_s^{\varphi'} = \bigcup_{k\in f_s^\varphi} J^{\varphi'}k = J^{\varphi'}(f_s^\varphi)$. ∇

Dans la proposition qui suit nous établissons quelques résultats qui vont permettre de généraliser les résultats précédents, c'est à dire, de pouvoir composer les divers opérateurs indépendamment du choix des sections admissibles et du choix des éléments de Φ.

7.3.8 PROPOSITION

Si $f\in C(e,e')$, $\varphi'\in\Phi$ et $\varphi\in\Phi$ alors on a :

1- $d_s^{\varphi'}(J^\varphi f) = J^{\varphi'}(d_s^\varphi f)$,
2- $\partial_s^{\varphi'}(J^\varphi f) = J^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f)$,
3- $(J^\varphi f)_s^{\varphi'} = J^{\varphi'}(f_s^\varphi)$.

Δ 1- On a $d_s^{\varphi'}(J^\varphi f) = \bigcup_{h\in J^\varphi f} d_s^{\varphi'}h$ et $d_s^{\varphi'}h = d_s^{\varphi'}e'.h = J^{\varphi'}(s_{e'}.h)$ d'où

$$d_s^{\varphi'}(J^\varphi f) = \bigcup_{h\in J^\varphi f} J^{\varphi'}(s_{e'}.h) = \bigcup_{k\in s_{e'}\bullet J^\varphi f} J^{\varphi'}k = \bigcup_{k\in d_s^\varphi f} J^{\varphi'}k = J^{\varphi'}(d_s^\varphi f).$$

2- On a $\partial_s^{\varphi'}(J^\varphi f) = \bigcup_{h\in J^\varphi f} \partial_s^{\varphi'}h$ et $\partial_s^{\varphi'}h = J^{\varphi'}(h._e s)$ d'où

$$\partial_s^{\varphi'}(J^\varphi f) = \bigcup_{h\in J^\varphi f} J^{\varphi'}(h._e s) = \bigcup_{k\in J^\varphi f\bullet_e s} J^{\varphi'}k = \bigcup_{k\in\partial_s^\varphi f} J^{\varphi'}k = J^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f).$$

3- On a $(J^\varphi f)_s^{\varphi'} = \bigcup_{h\in J^\varphi f} h_s^{\varphi'}$ et $h_s^{\varphi'} = J^{\varphi'}(s_{e'}.h._e s)$ d'où

$$(J^\varphi f)_s^{\varphi'} = \bigcup_{h\in J^\varphi f} J^{\varphi'}(s_{e'}.h._e s) = \bigcup_{k\in s_{e'}\bullet J^\varphi f\bullet_e s} J^{\varphi'}k = \bigcup_{k\in f_s^\varphi} J^{\varphi'}k = J^{\varphi'}(f_s^\varphi).\ \nabla$$

Remarque

Nous allons montrer qu'entre les résultats établis en 7.3.8 et les définitions 7.3.1, 7.3.2, et 7.3.3 existe une complète cohérence.
Dans le cas particulier où $\varphi' = \varphi$ et $X = J^\varphi f$ avec $f \in C(e,e')$, d'aprés ce qui précède, on a :

$$d_s^\varphi X = J^\varphi(d_s^\varphi f)$$
$$\partial_s^\varphi X = J^\varphi(\partial_s^\varphi f)$$
$$(X)_s^\varphi = J^\varphi(f_s^\varphi)$$

or on a vu (7.3.1, 7.3.2 et 7.3.3)

$$d_s^\varphi X = s_{e'}.X = J^\varphi s_{e'}.X = d_s^\varphi e'.X$$
$$\partial_s^\varphi X = X._e s = X.J^\varphi{}_e s = X.\partial_s^\varphi e$$
$$(X)_s^\varphi = d_s^\varphi e'.X.\partial_s^\varphi e,$$

montrons que ces deux types de résultats sont compatibles.

$$J^\varphi(d_s^\varphi f) = J^\varphi(J^\varphi(s_{e'}.f)) = J^\varphi(s_{e'}.f) \qquad \text{(c.f. 4.2.3 1-)}$$
$$= J^\varphi s_{e'}.J^\varphi f = J^\varphi s_{e'}.X = d_s^\varphi e'.X = d_s^\varphi X$$

$$J^\varphi(\partial_s^\varphi f) = J^\varphi(J^\varphi(f._e s)) = J^\varphi(f._e s) \qquad \text{(c.f. 4.2.3 1-)}$$
$$= J^\varphi f.J^\varphi{}_e s = X.J^\varphi{}_e s = X.\partial_s^\varphi e = \partial_s^\varphi X$$

$$J^\varphi(f_s^\varphi) = J^\varphi(J^\varphi(s_{e'}.f._e s)) = J^\varphi(s_{e'}.f._e s) \qquad \text{(c.f. 4.2.3 1-)}$$
$$= J^\varphi s_{e'}.J^\varphi f.J^\varphi{}_e s = J^\varphi s_{e'}.X.J^\varphi{}_e s = d_s^\varphi e'.X.\partial_s^\varphi e = (X)_s^\varphi.$$

7.3.9 PROPOSITION

Si $f \in C(e,e')$, $\varphi' \in \Phi$ et $\varphi \in \Phi$ alors on a :

1- $d_{s'}^{\varphi'}(d_s^\varphi f) = J^{\varphi'}(d_s^\varphi f)$
2- $d_{s'}^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f) = J^{\varphi'}(d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi e').f_s^\varphi) = J^{\varphi'}(f_{s'}^\varphi.d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi e))$
3- $d_{s'}^{\varphi'}(f_s^\varphi) = J^{\varphi'}(f_s^\varphi)$
4- $\partial_{s'}^{\varphi'}(d_s^\varphi f) = J^{\varphi'}(f_s^\varphi.d_s^\varphi(\partial_{s'}^\varphi e)) = J^{\varphi'}(d_s^\varphi(\partial_{s'}^\varphi e').f_{s'}^\varphi)$
5- $\partial_{s'}^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f) = J^{\varphi'}(\partial_s^\varphi f)$
6- $\partial_{s'}^{\varphi'}(f_s^\varphi) = J^{\varphi'}(f_s^\varphi)$
7- $(d_s^\varphi f)_{s'}^{\varphi'} = J^{\varphi'}(f_s^\varphi.d_s^\varphi(\partial_{s'}^\varphi e)) = J^{\varphi'}(d_s^\varphi(\partial_{s'}^\varphi e').f_{s'}^\varphi)$
8- $(\partial_s^\varphi f)_{s'}^{\varphi'} = J^{\varphi'}(d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi e').f_s^\varphi) = J^{\varphi'}(f_{s'}^\varphi.d_{s'}^\varphi(\partial_s^\varphi e))$
9- $(f_s^\varphi)_{s'}^{\varphi'} = J^{\varphi'}(f_s^\varphi)$.

Comme en 7.3.6, s et s' sont deux sections admissibles liées à la même fonction de choix c.

On note encore respectivement e_0 et e'_0 les images par la fonction de choix c des classes d'équivalence de e et de e'.

Δ 1- On a :

$$\begin{aligned} d_{s'}^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f) &= d_{s'}^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}.f)) \\ &= J^{\varphi'}(d_{s'}^{\varphi}(s_{e'}.f)) && (7.3.8\ 1\text{-}) \\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s'_{e_0}.s_{e'}.f)) \\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}.f)) \\ &= J^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f). \end{aligned}$$

2- On a :

$$\begin{aligned} d_{s'}^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi}f) &= d_{s'}^{\varphi'}(J^{\varphi}(f._e s)) \\ &= J^{\varphi'}(d_{s'}^{\varphi}(f._e s)) && (7.3.8\ 1\text{-}) \\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s'_{e'}.f._e s)) && (\text{or } s'_{e'}.f._e s = (s'_{e'}._{e'}s).(s_{e'}.f._e s)) \\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}((s'_{e'}._{e'}s).(s_{e'}.f._e s))) \\ &= J^{\varphi'}(d_{s'}^{\varphi}e'.\partial_s^{\varphi}e'.f_s^{\varphi}) \\ &= J^{\varphi'}(d_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi}e').f_s^{\varphi}) && (\text{car } \partial_s^{\varphi}e' \in J^{\varphi}(e_0,e')). \end{aligned}$$

On montre de même :

$$d_{s'}^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi}f) = J^{\varphi'}(f_{s'}^{\varphi}.d_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi}e)).$$

3- On a :

$$\begin{aligned} d_{s'}^{\varphi'}(f_s^{\varphi}) &= d_{s'}^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}.f._e s)) \\ &= J^{\varphi'}(d_{s'}^{\varphi}(s_{e'}.f._e s)) && (7.3.8\ 1\text{-}) \\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s'_{e_0}.s_{e'}.f._e s)) \\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}). \end{aligned}$$

4- On a :

$$\begin{aligned} \partial_{s'}^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f) &= \partial_{s'}^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}.f)) \\ &= J^{\varphi'}(\partial_{s'}^{\varphi}(s_{e'}.f)) && (7.3.8\ 2\text{-}) \\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}.f._e s')) && (\text{or } s_{e'}.f._e s' = (s_{e'}.f._e s).(s_e._e s')) \\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}.J^{\varphi}(s_e._e s')) \\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}.d_s^{\varphi}e.\partial_{s'}^{\varphi}e) \\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}.d_s^{\varphi}(\partial_{s'}^{\varphi}e)) \end{aligned}$$

On montre de même :

$$\partial_{s'}^{\varphi'}(d_s^{\varphi}f) = J^{\varphi'}(d_s^{\varphi}(\partial_{s'}^{\varphi}e').f_{s'}^{\varphi}).$$

5- On a :

$$\begin{aligned}\partial_{s'}^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi} f) &= \partial_{s'}^{\varphi'}(J^{\varphi}(f\cdot_e s))\\ &= J^{\varphi'}(\partial_{s'}^{\varphi}(f\cdot_e s)) \qquad (7.3.8\ 2\text{-})\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(f\cdot_e s\cdot_{e_0} s'))\\ &= J^{\varphi'}(\partial_s^{\varphi} f).\end{aligned}$$

6- On a :

$$\begin{aligned}\partial_{s'}^{\varphi'}(f_s^{\varphi}) &= \partial_{s'}^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}\cdot f\cdot_e s))\\ &= J^{\varphi'}(\partial_{s'}^{\varphi}(s_{e'}\cdot f\cdot_e s)) \qquad (7.3.8\ 2\text{-})\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}\cdot f\cdot_e s\cdot_{e_0} s'))\\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}).\end{aligned}$$

7- On a :

$$\begin{aligned}(d_s^{\varphi} f)_{s'}^{\varphi'} &= (J^{\varphi}(s_{e'}\cdot f))_{s'}^{\varphi'}\\ &= J^{\varphi'}((s_{e'}\cdot f)_{s'}^{\varphi}) \qquad (7.3.8\ 3\text{-})\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s'_{e_0}.s_{e'}\cdot f\cdot_e s'))\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}\cdot f\cdot_e s')) \quad (\text{or } s_{e'}\cdot f\cdot_e s' = (s_{e'}\cdot f\cdot_e s).(s_e\cdot_e s'))\\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}.J^{\varphi}(s_e\cdot_e s'))\\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}.d_s^{\varphi} e.\partial_{s'}^{\varphi} e)\\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}.d_s^{\varphi}(\partial_{s'}^{\varphi} e)).\end{aligned}$$

On montre de même: $(d_s^{\varphi} f)_{s'}^{\varphi'} = J^{\varphi'}(d_s^{\varphi}(\partial_{s'}^{\varphi} e').f_{s'}^{\varphi})$.

8- On a :

$$\begin{aligned}(\partial_s^{\varphi} f)_{s'}^{\varphi'} &= (J^{\varphi}(f\cdot_e s))_{s'}^{\varphi'}\\ &= J^{\varphi'}((f\cdot_e s)_{s'}^{\varphi}) \qquad (7.3.8\ 3\text{-})\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s'_{e'}\cdot f\cdot_e s\cdot_{e_0} s'))\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s'_{e'}\cdot f\cdot_e s)) \quad (\text{or } s'_{e'}\cdot f\cdot_e s = (s'_{e'}\cdot_{e'} s).(s_{e'}\cdot f\cdot_e s))\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s'_{e'}\cdot_{e'} s).f_s^{\varphi})\\ &= J^{\varphi'}(d_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi} e').f_s^{\varphi}).\end{aligned}$$

On montre de même :

$$(\partial_s^{\varphi} f)_{s'}^{\varphi'} = J^{\varphi'}(f_{s'}^{\varphi}.d_{s'}^{\varphi}(\partial_s^{\varphi} e)).$$

9- On a :

$$\begin{aligned}(f_s^{\varphi})_{s'}^{\varphi'} &= (J^{\varphi}(s_{e'}\cdot f\cdot_e s))_{s'}^{\varphi'}\\ &= J^{\varphi'}((s_{e'}\cdot f\cdot_e s)_{s'}^{\varphi}) \qquad (7.3.8\ 3\text{-})\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s'_{e_0}.s_{e'}\cdot f\cdot_e s\cdot_{e_0} s'))\\ &= J^{\varphi'}(J^{\varphi}(s_{e'}\cdot f\cdot_e s))\\ &= J^{\varphi'}(f_s^{\varphi}). \qquad \nabla\end{aligned}$$

Résumons tous ces résultats dans le tableau de la page suivante où on peut lire à l'intersection d'une ligne et d'une colonne:

$$(\text{opérande } 2) \circ (\text{opérande } 1).$$

L'opérateur $J^{\varphi}({}^{\varphi'}_{s}.d^{\varphi'}_{s}\partial^{\varphi'}_{s'}\alpha)$ appliqué à f tel que f soit un élément de $C(e,e')$ donne :

$$J^{\varphi}(f^{\varphi'}_{s}.d^{\varphi'}_{s}(\partial^{\varphi'}_{s'}(\alpha(f)))).$$

opérateur 1 / opérateur 2	d^{φ}_{s}	$d^{\varphi}_{s'}$	∂^{φ}_{s}	∂^{φ}_{s}	${}^{\varphi}_{s}$	${}^{\varphi'}_{s}$	J^{φ}	$J^{\varphi'}$
d^{φ}_{s}	d^{φ}_{s}	$J^{\varphi}d^{\varphi'}_{s'}$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi}({}^{\varphi'}_{s}.d^{\varphi'}_{s}\partial^{\varphi}_{s'}\alpha)$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi\varphi'}_{s'}$	d^{φ}_{s}	$J^{\varphi}d^{\varphi}_{s}$
$d^{\varphi'}_{s'}$	$J^{\varphi'}d^{\varphi}_{s}$	$d^{\varphi'}_{s'}$	$J^{\varphi'}({}^{\varphi}_{s'}.d^{\varphi}_{s'}\partial^{\varphi}_{s}\alpha)$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi\,\varphi}_{s}$	${}^{\varphi'}_{s'}$	$J^{\varphi}d^{\varphi}_{s}$	$d^{\varphi}_{s'}$
∂^{φ}_{s}	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi}({}^{\varphi'}_{s}.d^{\varphi'}_{s'}\partial^{\varphi'}_{s}\alpha)$	∂^{φ}_{s}	$J^{\varphi}\partial^{\varphi}_{s'}$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi\varphi'}_{s'}$	∂^{φ}_{s}	$J^{\varphi}\partial^{\varphi'}_{s}$
$\partial^{\varphi'}_{s'}$	$J^{\varphi'}({}^{\varphi}_{s'}.d^{\varphi}_{s}\partial^{\varphi}_{s'}\alpha)$	${}^{\varphi'}_{s}$	$J^{\varphi'}\partial^{\varphi}_{s}$	$\partial^{\varphi'}_{s'}$	$J^{\varphi'\varphi}_{s}$	${}^{\varphi}_{s'}$	$J^{\varphi}\partial^{\varphi}_{s}$	∂^{φ}_{s}
${}^{\varphi}_{s}$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi}({}^{\varphi'}_{s'}.d^{\varphi'}_{s'}\partial^{\varphi'}_{s}\alpha)$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi}({}^{\varphi'}_{s}.d^{\varphi'}_{s}\partial^{\varphi'}_{s'}\alpha)$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi\varphi}_{s'}$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi\varphi}_{s}$
${}^{\varphi}_{s'}$	$J^{\varphi'}({}^{\varphi}_{s}.d^{\varphi}_{s}\partial^{\varphi}_{s'}\alpha)$	${}^{\varphi'}_{s}$	$J^{\varphi'}({}^{\varphi}_{s'}.d^{\varphi}_{s'}\partial^{\varphi}_{s}\alpha)$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi'\varphi}_{s}$	${}^{\varphi}_{s'}$	$J^{\varphi\,\varphi}_{s}$	${}^{\varphi}_{s}$
J^{φ}	d^{φ}_{s}	$J^{\varphi}d^{\varphi'}_{s'}$	∂^{φ}_{s}	$J^{\varphi}d^{\varphi}_{s}$	${}^{\varphi}_{s}$	$J^{\varphi\varphi'}_{s'}$	J^{φ}	
$J^{\varphi'}$	$J^{\varphi'}d^{\varphi}_{s}$	$d^{\varphi}_{s'}$	$J^{\varphi'}\partial^{\varphi}_{s}$	$\partial^{\varphi}_{s'}$	$J^{\varphi\,\varphi}_{s}$	${}^{\varphi'}_{s'}$		J^{φ}

7.4 EXTENSION

7.4.1 LA CATEGORIE $C^{\wedge}$

Soit (k,Φ,C,s,c) une algèbre de contact (s,c)-transitive où s est une section à valeurs dans C_{τ}.

On définit sur C la relation suivante :

$$f \sim f' \Leftrightarrow s(\beta(f),\beta(f')).f' = f.s(\alpha(f),\alpha(f')).$$

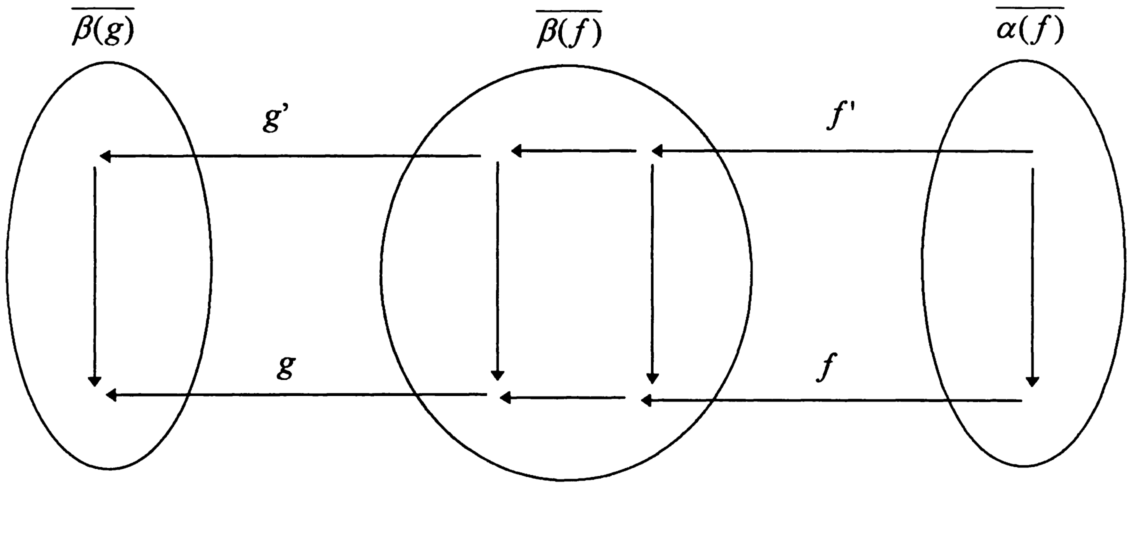
C'est une relation d'équivalence, on note $\overline{f}$ la classe de f. Restreinte aux unités, cette relation n'est autre que celle définie en 7.2.2. On a également :

$$f \sim f' \Leftrightarrow f' = s(\beta(f'),\beta(f)).f.s(\alpha(f),\alpha(f')).$$

Sur $C/\sim$ on définit une structure de catégorie en posant :

1- $\overline{g}\wedge\overline{f}$ défini si et seulement si $\overline{\alpha(g)} = \overline{\beta(f)}$,
2- et dans ce cas on a $\overline{g}\wedge\overline{f} = \overline{g.s(\alpha(g),\beta(f)).f}$.

Illustrons cette composition à l'aide du diagramme suivant où les morphismes non libellés sont des transformations de l'algèbre (k,Φ,C).



Montrons que la définition de $\overline{g}\wedge\overline{f}$ ne dépend pas des représentants choisis.

Soient $g' \in \overline{g}$ et $f' \in \overline{f}$, on a alors :

$$
\begin{aligned}
s(\beta(g),\beta(g')).g'.s(\alpha(g'),\beta(f')).f' &= g.s(\alpha(g),\alpha(g')).s(\alpha(g'),\beta(f')).f' \qquad (g'\in\overline{g})\\
&= g.s(\alpha(g),\beta(f')).f'\\
&= g.s(\alpha(g),\beta(f)).s(\beta(f),\beta(f')).f'\\
&= g.s(\alpha(g),\beta(f)).f.s(\alpha(f),\alpha(f')) \qquad (f'\in\overline{f}).
\end{aligned}
$$

Comme on a $h'=g'.s(\alpha(g'),\beta(f')).f'$, $h=g.s(\alpha(g),\beta(f)).f$, $\alpha(h')=\alpha(f')$, $\alpha(h)=\alpha(f)$ ainsi que $\beta(h')=\beta(g')$, $\beta(h)=\beta(g)$ on en déduit alors $s(\beta(h),\beta(h')).h'=h.s(\alpha(h),\alpha(h'))$ puis $h\sim h'$.

On montre facilement que la composition est associative. Si on note $\overline{\alpha}$ et $\overline{\beta}$ les rétractions source et but on a alors $\overline{\alpha}(\overline{f})=\overline{\alpha(f)}$ et $\overline{\beta}(\overline{f})=\overline{\beta(f)}$. On note $C^\wedge$ cette nouvelle catégorie dite catégorie quotient de C par la relation d'équivalence « ~ ».

7.4.2 PROPOSITION

(k,Φ,C) étant une algèbre de contact, on définit l'application :

$k^\wedge:\Phi\times C^\wedge \to C^\wedge$ où $k^\wedge(\varphi,\overline{f})$ est encore noté $\varphi\overline{f}$ et défini par $\varphi\overline{f}=\overline{\varphi f}$.

$(\varphi,\overline{f})\mapsto k^\wedge(\varphi,\overline{f})$

Cette application permet de définir sur $C^\wedge$ une structure d'algèbre de contact notée $(k^\wedge,\Phi,C^\wedge)$.

Δ Montrons que cette définition est indépendante du choix du représentant. Soit $f'\in\overline{f}$ on a alors :

$$
\begin{aligned}
s(\beta(f),\beta(f')).f'=f.s(\alpha(f),\alpha(f')) &\Rightarrow \varphi(s(\beta(f),\beta(f')).f')=\varphi(f.s(\alpha(f),\alpha(f')))\\
&\Leftrightarrow s(\beta(f),\beta(f')).\varphi f'=\varphi f.s(\alpha(f),\alpha(f')).
\end{aligned}
$$

Or on a -en raison de 1.1.3 1- $\beta(f)=\beta(\varphi f)$, $\beta(f')=\beta(\varphi f')$, $\alpha(f)=\alpha(\varphi f)$ et $\alpha(f')=\alpha(\varphi f')$ d'où $\varphi f'\sim\varphi f$ et $\overline{\varphi f'}=\overline{\varphi f}$.

On vérifie sans grande difficulté :

(1) $\forall(\varphi,\varphi')\in\Phi*\Phi\ \ \forall\overline{f}\in C^\wedge\ \ (\varphi.\varphi')\overline{f}=\varphi(\varphi'\overline{f})$

(2) $\forall(\overline{f},\overline{f'})\in C^\wedge*C^\wedge\ \ \forall\varphi\in\Phi$

$$
\begin{aligned}
(\overline{f},\overline{f'})\in C^\wedge*C^\wedge &\Leftrightarrow \overline{\alpha(f)}=\overline{\beta(f')}\\
&\Leftrightarrow \overline{\alpha(\varphi f)}=\overline{\beta(\varphi f')} \qquad (1.1.3\ 1\text{-})\\
&\Leftrightarrow \overline{\alpha}(\varphi\overline{f})=\overline{\beta}(\varphi\overline{f'})\\
&\Leftrightarrow (\varphi\overline{f},\varphi\overline{f'})\in C^\wedge*C^\wedge
\end{aligned}
$$

$$(3)\ \forall(\overline{f},\overline{f'}) \in C^{\wedge} * C^{\wedge} \quad \forall \varphi \in \Phi \quad \varphi(\overline{f} \wedge \overline{f'}) = \varphi(\overline{f.s(\alpha(f),\beta(f')).f'})$$
$$= \overline{\varphi(g.s(\alpha(g),\beta(f')).f')}$$
$$= \overline{\varphi(\varphi f.\varphi(s(\alpha(g),\beta(f')).f'))}$$
$$= \varphi(\overline{f.s(\alpha(g),\beta(f')).\varphi f'})$$
$$= \varphi(\varphi\overline{f} \wedge \varphi\overline{f'})$$

$(k^{\wedge},\Phi,C^{\wedge})$ est donc une algèbre de contact. ∇

L'existence de l'algèbre de contact précédente entraîne l'existence d'un calcul des jets et d'un calcul différentiel. Du fait même de la définition de la catégorie quotient les notions de différentielle, vitesse et dérivée coïncident avec celle de jet élémentaire puisqu'on a $\forall e' \in C_0\ \forall e \in C_0\ \left(C_{\tau}(e,e') \neq \varnothing \Rightarrow \overline{s(e,e')} = \overline{e} = \overline{e'}\right)$.

7.5 EXEMPLES

Tout au long de ce paragraphe, nous nous situons dans le cadre de l'exemple 1.1.2 8-b, c'est à dire celui de l'algèbre de contact notée (k,Φ,J^1C_p). Nous nous bornerons à examiner des situations extrêmement classiques et simples afin de montrer que les locutions « (s,φ)-différentielle », « (s,φ)-vitesse », « (s,φ)-dérivée » ne sont pas usurpées et donc en plein accord avec les notions usuelles quand les transformations utilisées sont les translations.

7.5.1 <u>EXEMPLE 1</u>

Soit $f \in C^{\infty}(\mathbf{R},\mathbf{R})$, on note $J^1(f,x_0) = (\hat{f},x_0)$ le germe de f en x_0 et $J^1(\hat{f},x_0) = J^1_{x_0}f$. On pose $e_0 = (\mathbf{R},0)$ et on a les translations :

$$_{x_0}s : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \qquad\qquad s_{x_0} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto x + x_0 \qquad\qquad x \mapsto x - x_0$$

On peut alors écrire successivement :

$$d^1_s(\hat{f},x_0) = J^1_{x_0}(s_{f(x_0)} \circ f)$$
$$= J^1_{x_0}(x \mapsto f(x) \mapsto f(x) - f(x_0))$$
$$= J^1_{x_0}(x \mapsto h(x) = f(x) - f(x_0))$$
$$= J^1_{x_0}(x \mapsto h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0))$$
$$= J^1_{x_0}(x \mapsto f'(x_0)(x - x_0))$$

$$\hat{\partial}_s^1(f, x_0) = J_0^1(f \circ_{x_0} s)$$
$$= J_0^1(x \mapsto x + x_0 \mapsto f(x + x_0))$$
$$= J_0^1(x \mapsto k(x) = f(x + x_0))$$
$$= J_0^1(x \mapsto k(0) + k'(0)x)$$
$$= J_0^1(x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)x)$$

$$\hat{(f, x_0)}_s^1 = J_0^1(s_{f(x_0)} \circ f \circ_{x_0} s)$$
$$= J_0^1(x \mapsto x + x_0 \mapsto f(x + x_0) - f(x_0))$$
$$= J_0^1(x \mapsto j(x) = f(x + x_0) - f(x_0))$$
$$= J_0^1(x \mapsto j(0) + j'(0)x)$$
$$= J_0^1(x \mapsto f'(x_0)x).$$

Avec $d_s^1(\hat{\mathbf{R}, x_0}) = d_s^1(\hat{Id_{\mathbf{R}}, x_0}) = J_{x_0}^1 \; s_{x_0} = J_{x_0}^1(x \mapsto x - x_0)$ on a :

$$d_s^1(\hat{f, x_0}) = \hat{(f, x_0)}_s^1 \circ d_s^1(\hat{\mathbf{R}, x_0})$$

ce résultat est évidemment le classique $df = f'dx$. La simplicité du résultat est due à l'existence d'un représentant canonique, ce qui n'est pas généralement le cas.

7.5.2 EXEMPLE 2

Soit $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$, on pose $z = (x, y)$, $z_0 = (x_0, y_0)$ et on reprend les notations explicitées au paragraphe précédent avec $e_0 = \left(\hat{\mathbf{R}^2, 0}\right)$. Il est clair que les transformations utilisées sont encore les translations.

On peut donc écrire :

$$d_s^1(\hat{f, z_0}) = J_{x_0}^1(s_{f(z_0)} \circ f)$$
$$= J_{z_0}^1(z \mapsto f(z) \mapsto f(z) - f(z_0))$$
$$= J_{z_0}^1(z \mapsto h(z) = f(z) - f(z_0))$$
$$= J_{z_0}^1(z \mapsto h(z_0) + h_x'(z_0)(x - x_0) + h_y'(z_0)(y - y_0))$$
$$= J_{z_0}^1\left(z \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y - y_0)\right)$$

On montre de la même manière :

$$\partial_s^1(\overset{\wedge}{f,z_0}) = J_0^1(z \mapsto f(z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y)$$

ainsi que

$$(\overset{\wedge}{f,x_0})_s^1 = J_0^1(z \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y)$$

Sachant que $d_s^1(\overset{\wedge}{\mathbf{R}^2,z_0}) = d_s^1(\overset{\wedge}{Id_{\mathbf{R}^2},z_0}) = J_{z_0}^1 s_{z_0} = J_{z_0}^1(z \mapsto z - z_0)$, reprenons le calcul de la $(s,1)$-différentielle.

$$\begin{aligned}
d_s^1(\overset{\wedge}{f,z_0}) &= (\overset{\wedge}{f,z_0})_s^1 \circ d_s^1(\overset{\wedge}{\mathbf{R}^2,z_0}) \\
&= J_0^1(z \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)y) \circ J_{z_0}^1(z \mapsto z - z_0) \\
&= J_{z_0}^1(z \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y - y_0)) \\
&= J_{z_0}^1(z \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x - x_0)) + J_{z_0}^1(z \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y - y_0))
\end{aligned}$$

Si on pose $\begin{aligned} f_{x_0} &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x,y) &\mapsto f_{x_0}(x,y) = f(x_0,y) \end{aligned}$ et $\begin{aligned} f_{y_0} &: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x,y) &\mapsto f_{y_0}(x,y) = f(x,y_0) \end{aligned}$

on a:

$$\begin{aligned}
J_{z_0}^1(z \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)(x - x_0)) &= J_0^1(z \mapsto \frac{\partial f_{y_0}}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial f_{y_0}}{\partial y}(z_0)y) \circ J_{z_0}^1(z \mapsto (x - x_0, y)) \\
&= (\overset{\wedge}{f_{y_0},z_0})_s^1 \circ d_s^1(\overset{\wedge}{\mathbf{R}^2,(x_0,0)})
\end{aligned}$$

de même on a :

$$J_{z_0}^1(z \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)(y - y_0)) = (\overset{\wedge}{f_{x_0},z_0})_s^1 \circ d_s^1(\overset{\wedge}{\mathbf{R}^2,(0,y_0)})$$

et finalement

$$d_s^1(\overset{\wedge}{f,z_0}) = (\overset{\wedge}{f_{y_0},z_0})_s^1 \circ d_s^1(\overset{\wedge}{\mathbf{R}^2,(x_0,0)}) + (\overset{\wedge}{f_{x_0},z_0})_s^1 \circ d_s^1(\overset{\wedge}{\mathbf{R}^2,(0,y_0)})$$

ce qui donne en notation simplifiée : $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

7.5.3 EXEMPLE 3

On considère a et b deux applications de $C^{\infty}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$, puis l'application $(a,b)\colon\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}\times\mathbf{R}$. On a donc :

$$d_s^1((a,\hat{b}),z_0) = ((a,\hat{b}),z_0)_s^1 \circ d_s^1(\hat{\mathbf{R}^2},z_0)$$

La $(s,1)$-dérivée de $((a,\hat{b}),z_0)$ est entièrement déterminée par la matrice jacobienne de (a,b) en z_0. En effet on a :

$$\begin{aligned}
((a,\hat{b}),z_0)_s^1 &= J_0^1(s_{(a,b)(z_0)} \circ (a,b) \circ_{z_0} s) \\
&= J_0^1(z \mapsto (a(z+z_0)-a(z_0), b(z+z_0)-b(z_0)) \\
&= J_0^1(z \mapsto \frac{\partial a}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial a}{\partial y}(z_0)y, \frac{\partial b}{\partial x}(z_0)x + \frac{\partial b}{\partial y}(z_0)y)) \\
&= J_0^1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \frac{\partial a}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial a}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial b}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial b}{\partial y}(z_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)
\end{aligned}$$

7.5.4 EXEMPLE 4

On considère l'application indéfiniment différentiable suivante :

$$\begin{aligned}
M\colon \mathbf{R} &\to \mathbf{R}^3 \\
t &\mapsto M(t) = (x(t), y(t), z(t))
\end{aligned}$$

M est alors regardé comme un point décrivant une trajectoire dans $\mathbf{R}^3$. Le calcul de la $(s,1)$-vitesse de M donne alors :

$$\begin{aligned}
\partial_s^1(\hat{f},t_0) &= J_0^1(M \circ s_{t_0}) \\
&= J_0^1(t \mapsto t+t_0 \mapsto (x(t+t_0), y(t+t_0), z(t+t_0)) \\
&= J_0^1(t \mapsto k(t) = (x(t+t_0), y(t+t_0), z(t+t_0)) \\
&= J_0^1(t \mapsto k(0) + k'(0)t).
\end{aligned}$$

Si on pose $\vec{V}(t_0) = k'(0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ on obtient alors :

$$\partial_s^1(\hat{f},t_0) = J_0^1(t \mapsto M(t_0) + t.\vec{V}(t_0))$$

ce qui détermine évidemment le vecteur vitesse du mobile à l'instant t_0.

Nous verrons au chapitre suivant que certaines classes de jets de la forme suivante : $T^1_{\left(\hat{\mathbf{R}}^p,0\right)}\left(\hat{\mathbf{R}}^q,0\right) = J^1\left(\left(\hat{\mathbf{R}}^p,0\right),\left(\hat{\mathbf{R}}^q,0\right)\right)$, s'identifient à l'espace des matrices à p lignes et q colonnes (c.f 8.3.3) dans ce cas le calcul des jets n'est autre que le calcul matriciel.

8 CONTACTS

Sauf s'il est fait mention contraire, C sera tout au long de ce chapitre une catégorie e_0-transitive (c.f. 4.5.1) afin d'être assuré de l'existence des objets, des morphismes et des espaces (e_0,φ)-tangents qui seront utilisés dans la suite.

8.1 ELEMENT DE CONTACT ELEMENT D'ENVELOPPE

Rappelons que $H^\varphi(e_0)=H^\varphi(e_0,e_0)$ est le groupe formé des jets inversibles de $J^\varphi(e_0,e_0)$. Soit A une partie non vide de C_0, $H^\varphi(e_0)$ opère à droite sur $T^\varphi_{e_0}A$:

$$\begin{aligned} T^\varphi_{e_0}A\times H^\varphi(e_0)&\to T^\varphi_{e_0}A \quad ,\\ (X,Z)&\mapsto X.Z \end{aligned}$$

et à gauche sur $T^{\varphi^*}_{e_0}A$:

$$\begin{aligned} H^\varphi(e_0)\times T^{\varphi^*}_{e_0}A&\to T^{\varphi^*}_{e_0}A\,.\\ (Z,X)&\mapsto Z.X \end{aligned}$$

L'orbite de $X\in T^\varphi_{e_0}A$ sous l'action de $H^\varphi(e_0)$ (soit $X.H^\varphi(e_0)$) est appelée (φ,e_0) **-ELEMENT DE CONTACT**, de même que l'orbite de $X\in T^{\varphi^*}_{e_0}A$ sous l'action de $H^\varphi(e_0)$ (c'est à dire $H^\varphi(e_0).X$) est appelée (φ,e_0) **-ELEMENT D'ENVELOPPE**.

Ces définitions semblent privilégier e_0, néanmoins si on suppose $H^\varphi(e_0,e)\neq\varnothing$ et si $Y\in H^\varphi(e_0,e)$ alors $H^\varphi(e)$ et $H^\varphi(e_0)$ sont isomorphes et $J^\varphi(e,A)$ est en bijection avec $T^\varphi_{e_0}A$.

En effet on a l'isomorphisme :

$$\begin{aligned} H^\varphi(e)&\to H^\varphi(e_0)\\ Z&\mapsto Y^{-1}.Z.Y \end{aligned}$$

et la bijection

$$\begin{aligned} J^\varphi(e,A)&\to T^\varphi_{e_0}A\,.\\ X&\mapsto X.Y \end{aligned}$$

De manière tout à fait analogue $J^\varphi(A,e)$ et $T^{\varphi^*}_{e_0}A$ sont en bijection. Nous énonçons donc.

8.1.1 DEFINITION

Pour tout $X \in J^{\varphi}(e,e')$, $X.H^{\varphi}(e)$ sera un (φ,e)**-ELEMENT DE CONTACT** et $H^{\varphi}(e).X$ sera un (φ,e)**-ELEMENT D'ENVELOPPE**.

Il est clair que $H^{\varphi}(e)$ opère à droite sur $J^{\varphi}(e,A)$ et à gauche sur $J^{\varphi}(A,e)$. On note encore pour $X \in J^{\varphi}(e,A)$ (resp. $X \in J^{\varphi}(A,e)$) $X.H^{\varphi}(e)$ (resp. $H^{\varphi}(e).X$) l'orbite de X sous l'action de $H^{\varphi}(e)$.

8.1.2 PROPOSITION

Si $H^{\varphi}(e,e_0) \neq \varnothing$ alors à tout (φ,e)-élément de contact (resp. élément d'enveloppe) on associe de manière bijective un (φ,e_0)-élément de contact (resp. élément d'enveloppe).

Δ Pour $e \in C_0$ tel que $H^{\varphi}(e_0,e) \neq \varnothing$, notons $J^{\varphi}(e,e')/H^{\varphi}(e)$ l'ensemble des orbites des jets X de $J^{\varphi}(e,e')$ et $\overline{X} = X.H^{\varphi}(e)$ l'orbite de X. On montre facilement que pour $Y \in H^{\varphi}(e_0,e)$ l'application

$$\begin{aligned}\Psi_Y : J^{\varphi}(e,A)/H^{\varphi}(e) &\to J^{\varphi}(e_0,A)/H^{\varphi}(e_0)\\ \overline{X} &\mapsto \overline{X.Y}\end{aligned}$$

est bijective et que le calcul de $\Psi_Y\left(\overline{X}\right)$ ne dépend pas du représentant choisi.

Définissons la relation « $\overset{\varphi}{\approx}$ » par :

$$X \overset{\varphi}{\approx} X' \Leftrightarrow \exists G \in H^{\varphi}(e)\ X' = X.G \qquad \text{(avec } X \in J^{\varphi}(e,e')\text{).}$$

On a alors :

$$\begin{aligned} X \overset{\varphi}{\approx} X' &\Leftrightarrow X' = X.G && \text{(avec } G \in H^{\varphi}(e)\text{)}\\ &\Rightarrow X'.Y = X.G.Y = (X.Y).(Y^{-1}.G.Y) &&\\ &\Leftrightarrow \overline{X'.Y} = \overline{X.Y} && \text{(car } Y^{-1}.G.Y \in H^{\varphi}(e_0)\text{).}\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\Psi_Y\left(\overline{X}\right)$ ne dépend pas du représentant choisi.

Montrons que Ψ_Y est injective.

Pour toute orbite $\overline{X'}$ et $\overline{X}$ on a :

$$
\begin{aligned}
\Psi_Y(\overline{X'}) = \Psi_Y(\overline{X}) &\Leftrightarrow \overline{X'.Y} = \overline{X.Y} \\
&\Leftrightarrow X'.Y = X.Y.G' \qquad \text{(avec } G' \in H^{\varphi}(e_0)\text{)} \\
&\Leftrightarrow X' = X.Y.G'.Y^{-1} \\
&\Leftrightarrow X' \overset{\varphi}{\approx} X \qquad \text{(car } Y.G'.Y^{-1} \in H^{\varphi}(e)\text{)} \\
&\Leftrightarrow \overline{X'} = \overline{X}.
\end{aligned}
$$

Montrons que Ψ_Y est surjective.

Soit $\overline{X'} \in J^{\varphi}(e_0, A)/H^{\varphi}(e_0)$, posons $X = X'.Y^{-1}$ on a alors $\Psi_Y(\overline{X}) = \overline{X'.Y^{-1}.Y} = \overline{X'}$ ce qui achève la démonstration. ∇

On a un résultat analogue dans le cas dual, à savoir que $J^{\varphi}(A,e)/H^{\varphi}(e)$ est en bijection avec $J^{\varphi}(A,e_0)/H^{\varphi}(e_0)$.

8.2 PROLONGEMENT

Notons plus simplement $P^{\varphi}_{e_0}e = T^{\varphi}_{e_0}e / H^{\varphi}(e_0)$ et $P^{\varphi}_{e_0}A = T^{\varphi}_{e_0}A / H^{\varphi}(e_0)$, où A est une partie non vide de C_0.

On considère $f \in C(e,e')$. Au morphisme f on associe l'application $P^{\varphi}_{e_0}f$ définie par :

$$
\begin{aligned}
P^{\varphi}_{e_0}f : P^{\varphi}_{e_0}e &\to P^{\varphi}_{e_0}e' \\
\overline{X} &\mapsto (P^{\varphi}_{e_0}f)(\overline{X}) = \overline{f.X} = \overline{J^{\varphi}f.X}.
\end{aligned}
$$

Montrons que cette définition ne dépend pas du représentant choisi dans l'élément de contact $\overline{X}$.

Pour $X \in \overline{X}$ et $X' \in \overline{X}$ on a :

$$
\begin{aligned}
\overline{X} = \overline{X'} &\Leftrightarrow X' = X.G \qquad \text{(avec } G \in H^{\varphi}(e_0)\text{)} \\
&\Rightarrow f.X' = f.X.G \\
&\Leftrightarrow J^{\varphi}f.X' = J^{\varphi}f.X.G \\
&\Leftrightarrow J^{\varphi}f.X' \overset{\varphi}{\approx} J^{\varphi}f.X \\
&\Leftrightarrow \overline{f.X'} = \overline{f.X}.
\end{aligned}
$$

Ceci étant acquis on peut énoncer.

8.2.1 PROPOSITION

Si on note $P^{\varphi}_{e_0}C$ l'ensemble formé par les applications de la forme $P^{\varphi}_{e_0}f$ où $f \in C$ alors $P^{\varphi}_{e_0}C$ est muni d'une structure de catégorie et $P^{\varphi}_{e_0}$ est alors un foncteur de C vers $P^{\varphi}_{e_0}C$.

Δ on montre facilement que l'application $P^{\varphi}_{e_0|C_0}$ est injective. En effet si on a $P^{\varphi}_{e_0}(e) = P^{\varphi}_{e_0}(e')$ cela implique que si $\overline{X} \in P^{\varphi}_{e_0}(e)$ alors $\overline{X} \in P^{\varphi}_{e_0}(e')$. Pour $X = J^{\varphi}h$ on aura donc, compte tenu de 1.1.3 1-, $\beta(h) = e$ et $\beta(h) = e'$ d'où $e = e'$ et finalement $P^{\varphi}_{e_0|C_0}$ injective.

On a alors si *g.f* et *f.h* sont définis :

$$\begin{aligned}(P^{\varphi}_{e_0}(g.f))(\overline{X}) &= \overline{(g.f).X}\\ &= \overline{J^{\varphi}(g.f).X}\\ &= \overline{J^{\varphi}(g.f).J^{\varphi}h}\\ &= \overline{J^{\varphi}(g.f.h)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}(P^{\varphi}_{e_0}g.P^{\varphi}_{e_0}f)(\overline{X}) &= (P^{\varphi}_{e_0}g)(\overline{f.X})\\ &= (P^{\varphi}_{e_0}g)(\overline{J^{\varphi}(f.h)})\\ &= \overline{g.J^{\varphi}(f.h)}\\ &= \overline{J^{\varphi}g.J^{\varphi}(f.h)}\\ &= \overline{J^{\varphi}(g.f.h)}\end{aligned}$$

d'où $P^{\varphi}_{e_0}(g.f) = P^{\varphi}_{e_0}g.P^{\varphi}_{e_0}f$ ce qui achève de montrer que $P^{\varphi}_{e_0}$ est un foncteur de C vers la catégorie $P^{\varphi}_{e_0}C$. ∇

On peut énoncer un résultat analogue en ce qui concerne les éléments d'enveloppe, en définissant le foncteur $P^{\varphi^*}_{e_0}$ par $P^{\varphi^*}_{e_0}e = T^{\varphi^*}_{e_0}e / H^{\varphi}(e)$ et pour $f \in C(e,e')$ par :

$$\begin{aligned}P^{\varphi^*}_{e_0}f : P^{\varphi^*}_{e_0}e &\to P^{\varphi^*}_{e_0}e'\\ \overline{X} &\mapsto (P^{\varphi^*}_{e_0}f)(\overline{X}) = \overline{X.f} = \overline{X.J^{\varphi}f}\,.\end{aligned}$$

8.3 RELATION D'INCIDENCE

8.3.1 DEFINITION

On considère $X \in J^{\varphi}(e,a)$ et $X' \in J^{\varphi}(e',a)$ et on définit :

$$X \prec X' \Leftrightarrow \exists Y \in J^{\varphi}(e,e')\ ;\ X = X'.Y.$$

Cette relation est une relation de préordre. Elle a été introduite par Charles Ehresmann sous le nom de relation d'incidence.

8.3.2 PROPOSITION

La relation d'incidence précédente induit une relation semblable entre éléments de contact définie pour $\overline{X} \in P^{\varphi}_{e}(a)$ et $\overline{X'} \in P^{\varphi}_{e'}(a)$ par :

$$\overline{X} \prec \overline{X'} \Leftrightarrow \exists Y \in J^{\varphi}(e,e')\ ;\ \overline{X} = \overline{X'.Y}.$$

Nous utilisons le même symbole relationnel car ces deux relations sont équivalentes puisque l'on a : $\overline{X} \prec \overline{X'} \Leftrightarrow X \prec X'$.

Δ Montrons que cette définition ne dépend pas du représentant choisi. Soit $X_1 \in \overline{X}$ et soit $X'_1 \in \overline{X'}$, on a $X_1 = X.G$ et $X'_1 = X'.G'$ avec $G \in H^{\varphi}(e)$ et $G' \in H^{\varphi}(e')$. De $X_1 = X.G$, $X'_1 = X'.G'$ et $X = X'.Y$ on déduit :

$$\begin{aligned} X_1 &= X'.Y.G \\ &= X'.G'.G'^{-1}.Y.G \\ &= X'_1.G'^{-1}.Y.G, \end{aligned}$$

or $G'^{-1}.Y.G \in J^{\varphi}(e,e')$ donc on a encore $X_1 \prec X'_1$.

Etablissons l'équivalence. Si $X \prec X'$ alors $X = X'.Y$ avec $Y \in J^{\varphi}(e,e')$. Or $\overline{X} = X.H^{\varphi}(e)$ et donc on a $\overline{X} = X'.Y.H^{\varphi}(e) = \overline{X'.Y}$ puis $\overline{X} \prec \overline{X'}$.

Si $\overline{X} \prec \overline{X'}$ alors $\overline{X} = \overline{X'.Y}$ ce qui est équivalent à $X = X'.Y.G$ avec $G \in H^{\varphi}(e)$, d'où l'on tire $X = X'.Y'$ avec $Y' = Y.G \in J^{\varphi}(e,e')$ puis $X \prec X'$ ce qui achève cette démonstration. ∇

8.3.3 EXEMPLE

Nous nous proposons, ici, d'établir la liaison entre les notations introduites précédemment et celles développées par Charles Ehresmann dans le cadre de la catégorie des jets locaux entre variétés différentiables pointées.

On se place dans l'algèbre de contact (k, Φ, J^1C_p) où k est l'application déjà maintes fois rencontrées (c.f. 1.1.2 8-b-). Soit $X = J^{\varphi}\left(J^1\left(f, 0_{\mathbf{R}^p}\right)\right) = J^{\varphi}_{0_{\mathbf{R}^p}} f$ avec $f : \mathbf{R}^p \to V_n$ (dim $V_n = n$). X est donc un élément de $J^{\varphi}\left(\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0_{\mathbf{R}^p}\right), \left(\hat{V}_n, x\right)\right) = T^{\varphi}_{\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0_{\mathbf{R}^p}\right)}\left(\hat{V}_n, x\right)$.

On convient d'écrire plus simplement 0 au lieu de $0_{\mathbf{R}^p}$; dans ce cas le contexte indique clairement s'il s'agit de $0_{\mathbf{R}^p}$ ou de $0_{\mathbf{R}^q}$.

$T^{\varphi}_{\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0_{\mathbf{R}^p}\right)}\left(\hat{V}_n, x\right)$ devient $T^{\varphi}_{\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0\right)}\left(\hat{V}_n, x\right)$, ce que Charles Ehresmann note $T^{\varphi}_{p,x}(V_n)$ et désigne comme l'ensemble des p^{φ}-vitesses d'origine x ou encore l'ensemble des φ-vitesses de dimension p en x dans V_n. De telles vitesses sont désignées dans cette étude comme étant des $\left(\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0\right), \varphi\right)$-vitesses.

On a donc :

$$T^{\varphi}_p(V_n) = \bigcup_{x \in V_n} T^{\varphi}_{p,x}(V_n) = J^{\varphi}\left(\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0\right), \hat{V}_n\right)$$

car avec $\hat{V}_n = \bigcup_{x \in V_n}\left(\hat{V}_n, x\right)$ on a :

$$\begin{aligned}
\bigcup_{x \in V_n} T^{\varphi}_{p,x}(V_n) &= \bigcup_{x \in V_n} J^{\varphi}\left(\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0\right), \left(\hat{V}_n, x\right)\right) \\
&= J^{\varphi}\left(\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0\right), \bigcup_{x \in V_n}\left(\hat{V}_n, x\right)\right) \\
&= J^{\varphi}\left(\left(\hat{\mathbf{R}}^p, 0\right), \hat{V}_n\right)
\end{aligned}$$

Soit $X' = J^\varphi\left(J^1(g,0)\right) = J_0^\varphi g$ avec $g{:}\mathbf{R}^q \to V_n$, on a $X' \in T_q^\varphi(V_n)$ et on peut donc écrire :

$$X \prec X' \Leftrightarrow \exists Y \in J^\varphi\left(\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right),\left(\hat{\mathbf{R}^q},0\right)\right) \text{ tel que } X = X'.Y$$

avec $Y = J_0^\varphi h$ et $h{:}\mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^q$ vérifiant $0_{\mathbf{R}^p} \mapsto 0_{\mathbf{R}^q}$.

$T^\varphi_{\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right)}\left(\hat{\mathbf{R}^q},0\right) = J^\varphi\left(\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right),\left(\hat{\mathbf{R}^q},0\right)\right)$ est noté $L^\varphi_{q,p}$ par Charles Ehresmann. En particulier le groupe $H^\varphi\left(\left(\hat{\mathbf{R}^n},0\right)\right) = H^\varphi\left(\left(\hat{\mathbf{R}^n},0\right),\left(\hat{\mathbf{R}^n},0\right)\right)$ est noté L_n^φ , c'est donc le groupe des jets inversibles contenus dans $L^\varphi_{n,n}$. De ce fait $L^1_{n,1}$ et est identifié canoniquement à $\mathbf{R}^n$ et L_n^1 s'identifie au groupe linéaire L_n.

$L^1_{q,p}$ s'identifie à l'espace des applications linéaires de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ et donc à l'espace des matrices à p lignes et q colonnes à coefficients réels.

Notons d'ores et déjà l'action de $L_p^\varphi \times L_q^\varphi$ sur $L^\varphi_{p,q}$ définie par $(X',X)Y = X'.Y.X^{-1}$. Nous allons la retrouver au paragraphe suivant (sous une forme analogue) en 8.4.3 7- et 8.4.3 12-.

Si $X \in T_p^\varphi(V_n) = J^\varphi\left(\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right),\hat{V_n}\right) = T^\varphi_{\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right)}\left(\hat{V_n}\right)$, $X.L_p^\varphi$ est un p^φ-élément de contact dans la terminologie de C. Ehresmann et si $Y \in T_p^{\varphi^*}(V_n) = J^\varphi\left(\hat{V_n},\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right)\right) = T^{\varphi^*}_{\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right)}\left(\hat{V_n}\right)$, $L_p^\varphi.Y$ est un p^φ-élément d'enveloppe ; ce que nous désignons respectivement comme $\left(\varphi,\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right)\right)$-élément de contact et $\left(\varphi,\left(\hat{\mathbf{R}^p},0\right)\right)$-élément d'enveloppe.

Dans le paragraphe suivant nous définissons la notion de « fibration » qui se présente comme une structure moins riche que celle d'espace fibré, faute d'y retrouver une structure différentiable compatible avec l'action définie par l'espèce de structures sous-jacente. Nous présentons donc cette notion puis nous dressons l'inventaire des fibrations les plus importantes.

8.4 FIBRATIONS

Rappelons la définition d'une **ESPECE DE STRUCTURES**. Soit C une catégorie, E un ensemble et $k':C\times E\to E$ la fonction définie par $(f,z)\mapsto fz$, si les propriétés suivantes sont vérifiées on dira que (C,E,k') est une espèce de structures.

1- $\forall f\in C\ \forall f'\in C\ \forall z\in E$
(fz, $f'.f$ et $f'.fz$ définis $\Rightarrow$ $(f'.f)z$ défini et $(f'.f)z=f'(fz)$)

2- $\forall z\in E\ \exists!\ e\in C_0$ ez défini et $ez=z$

3- $\forall f\in C\ \ \forall z\in E$ (fz défini $\Leftrightarrow$ $\alpha(f)z$ défini)

4- $\forall e\in C_0\ \exists z\in E$ ez défini.

On déduit de cette définition l'existence d'une application surjective $\Pi:E\to C_0$ dite « associée à (C,E,k') »

8.4.1 DEFINITIONS

Soit $\eta=(C,E,k')$ une espèce de structures à laquelle est associée la surjection $\Pi:E\to C_0$, où C est un groupoïde transitif, nous dirons que η définit une **FIBRATION** et cette fibration sera notée $E\left[\ B\ ,F\ ,G\ ,C\ \right]$, où B est généralement C_0 ou tout ensemble en bijection avec C_0. B est la **BASE** de $E\left[\ B\ ,F\ ,G\ ,C\ \right]$. En remarquant que pour tout e et pour tout e' de C_0, $\Pi^{-1}(e)$ et $\Pi^{-1}(e')$ sont en bijection, et que $C(e,e)$ et $C(e',e')$ sont deux groupes isomorphes, on pose $F=\Pi^{-1}(e)$ qui est la **FIBRE TYPE** de $E\left[\ B\ ,F\ ,G\ ,C\ \right]$ et $G=C(e,e)$ qui est le **GROUPE STRUCTURAL** de $E\left[\ B\ ,F\ ,G\ ,C\ \right]$.

$E\left[\ B\ ,F\ ,G\ ,C\ \right]$ étant une fibration, on note $H=C(e,C_0)$ et $H_{e'}=C(e,e')$, la fibration $H\left[\ C_0\ ,G\ ,{}_tG\ ,C\ \right]$ est alors désignée comme **FIBRATION PRINCIPALE** associée à $E\left[\ B\ ,F\ ,G\ ,C\ \right]$. La surjection associée à cette fibration principale est alors la rétraction but β de C, la base est C_0, la fibre type est G et le groupe structural est le groupe des translations à gauche de G car C opérant à gauche sur H , le groupe structural opère à gauche sur G. Noter que G opère à droite sur H.

Les morphismes entre fibrations forment une sous-catégorie de la catégorie des applications covariantes.

Dans le cas où une fibration est telle que l'espèce de structures sous-jacente η soit une espèce de structures différentiable sur un groupoïde de Lie localement trivial, on parle alors d'espace fibré différentiable.

Ces définitions étant posées, revenons à l'algèbre de contact (k,Φ,C) où C est une catégorie. Soient A et B deux parties non vides de C_0. On y distingue deux unités : $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$. On pose alors :

$$A_1 = \{a \in A \,/\, H^\varphi(a_0,a) \neq \varnothing\} \qquad \text{et} \qquad B_1 = \{b \in B \,/\, H^\varphi(b_0,b) \neq \varnothing\}.$$

A_1 (resp. B_1) est la classe de a_0 (resp. b_0) pour la relation d'équivalence :

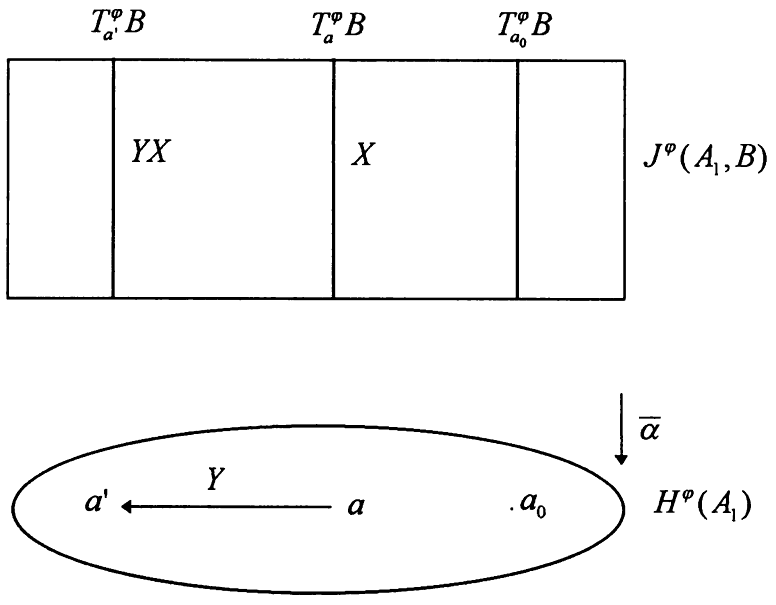
$$a \approx a_0 \Leftrightarrow H^\varphi(a_0,a) \neq \varnothing \qquad \text{(resp. } b \approx b_0 \Leftrightarrow H^\varphi(b_0,b) \neq \varnothing\text{).}$$

On note $H^\varphi(A_1)$ (resp. $H^\varphi(B_1)$) le groupoïde transitif des jets inversibles de morphismes appartenant à $C(A_1,A_1)$ (resp. $C(B_1,B_1)$). On peut alors énoncer.

8.4.2 PROPOSITION

Si $C(a_0,B) \neq \varnothing$ est non vide alors $J^\varphi(A_1,B)\left[\ A_1\ ,\ T^\varphi_{a_0}B\ ,\ H^\varphi(a_0)\ ,\ H^\varphi(A_1)\ \right]$ est une fibration.

Δ Considérons le diagramme suivant.



On pose:

$$H^\varphi(A_1) * J^\varphi(A_1,B) = \{(Y,X) \in H^\varphi(A_1) \times J^\varphi(A_1,B) \,/\, X = J^\varphi f, Y = J^\varphi g, \alpha(g) = \beta(f)\}.$$

On définit alors: $\quad k' : H^\varphi(A_1) * J^\varphi(A_1,B) \to J^\varphi(A_1,B)$

$$(Y,X) \mapsto k'(Y,X) = YX = X.Y^{-1}.$$

Il faut noter que dans la notation $k'(Y,X)=YX$ ne figure aucun symbole de composition, elle doit donc être interprétée comme l'action de $H^{\varphi}(A_1)$ sur $J^{\varphi}(A_1,B)$.

On définit également $$\overline{\alpha}: J^{\varphi}(A_1,B) \to A_1$$ $$X \mapsto \overline{\alpha}(X)=\alpha(f) \quad \text{si } X=J^{\varphi}f \ .$$
en raison de 1.1.3 1 la définition de $\overline{\alpha}$ est indépendante du choix de $f \in X$.

On vérifie alors:

1- si YX, $Y'(YX)$, $Y'.Y$ sont définis alors $(Y'.Y)X$ est défini et égal à $Y'(YX)$,

2- pour tout X de $J^{\varphi}(A_1,B)$ il existe un unique $a \in A_1$ tel que $k'(a,X)$ soit défini en posant $k'(a,X)=X.J^{\varphi}a=X.a=aX$,

3- YX est défini si et seulement si $\alpha^{\varphi}(Y)X$ est défini,

4- pour tout $a \in A_1$ il existe $X \in J^{\varphi}(A_1,B)$ tel que aX soit défini.

Examinons cela.

1- On peut écrire :
$(Y'.Y)X = X.(Y'.Y)^{-1} = X.(Y^{-1}.Y'^{-1}) = (X.Y^{-1}).Y'^{-1} = (YX).Y'^{-1} = Y'(YX)$ d'où le résultat.

2- Pour $X \in J^{\varphi}(A_1,B)$ tel que $X=J^{\varphi}f$ avec $f \in C(a,b)$, a est unique et ne dépend pas du représentant f choisi mais ne dépend que du jet X en raison de 1.1.3. On peut donc poser, moyennant ce qui a été dit en 4.2.1 :
$$k'(a,X)=X.J^{\varphi}a=X.a=aX .$$

3- $$\begin{aligned} YX \text{ défini} &\Leftrightarrow X.Y^{-1} && \text{défini} \\ &\Leftrightarrow X.\beta^{\varphi}(Y^{-1}) && \text{défini} \\ &\Leftrightarrow X.(\alpha^{\varphi}(Y))^{-1} && \text{défini} \\ &\Leftrightarrow \alpha^{\varphi}(Y)X && \text{défini.} \end{aligned}$$
En effet si $Y \in J^{\varphi}(a,a')$, alors $Y^{-1} \in J^{\varphi}(a',a)$ et $\beta^{\varphi}(Y^{-1})=J^{\varphi}a$ avec $J^{\varphi}a \in \Pi^{\varphi}(a)$. Or $\beta^{\varphi}(Y^{-1})=\alpha^{\varphi}(Y)=(\alpha^{\varphi}(Y))^{-1}$ car $J^{\varphi}a$ est inversible et tel que son inverse soit $J^{\varphi}a$ d'où ce qui précède.

4- Ce dernier point est évidemment satisfait sachant que $T^{\varphi}_{a_0}B \neq \varnothing$ car $C(a_0,B) \neq \varnothing$. Pour tout $a \in A_1$ il suffit de prendre $X' \in T^{\varphi}_{a_0}B$ puis de poser $X=X'.Y^{-1}$ où $Y \in J^{\varphi}(a_0,a')$ pour avoir $X \in J^{\varphi}(a,B)$ et aX défini. ∇

La proposition 8.4.3 dresse l'inventaire des fibrations usuelles. Pour chaque fibration nous nous bornerons à nommer l'espace, la base, la fibre type, le groupe structural et le groupoïde opérant sur cet espace. Nous préciserons l'action du groupoïde et la surjection associée. Chaque situation sera illustrée d'un diagramme.

8.4.3 PROPOSITION

1- $J^{\varphi}(A_1,B)\Big[\ A_1\ ,\ T^{\varphi}_{a_0}B\ ,\ H^{\varphi}(a_0)\ ,\ H^{\varphi}(A_1)\ \Big]$ si $C(a_0,B)\neq\varnothing$ (cf. proposition 8.4.2).

2- $J^{\varphi}(A,B_1)\Big[\ B_1\ ,\ T^{\varphi^*}_{b_0}A\ ,\ H^{\varphi}(b_0)\ ,\ H^{\varphi}(B_1)\ \Big]$ si $C(A,b_0)\neq\varnothing$.

3- $T^{\varphi}_{a_0}B_1\Big[\ B_1\ ,\ T^{\varphi}_{a_0}b_0\ ,\ H^{\varphi}(b_0)\ ,\ H^{\varphi}(B_1)\ \Big]$ si $C(a_0,b_0)\neq\varnothing$.

4- $T^{\varphi^*}_{b_0}A_1\Big[\ A_1\ ,\ T^{\varphi^*}_{b_0}a_0\ ,\ H^{\varphi}(a_0)\ ,\ H^{\varphi}(A_1)\ \Big]$ si $C(b_0,a_0)\neq\varnothing$.

5- $J^{\varphi}(A_1,B_1)\Big[\ A_1\ ,\ T^{\varphi}_{a_0}B_1\ ,\ H^{\varphi}(a_0)\ ,\ H^{\varphi}(A_1)\ \Big]$ si $C(a_0,B_1)\neq\varnothing$.

6- $J^{\varphi}(A_1,B_1)\Big[\ B_1\ ,\ T^{\varphi^*}_{b_0}A_1\ ,\ H^{\varphi}(b_0)\ ,\ H^{\varphi}(B_1)\ \Big]$ si $C(A_1,b_0)\neq\varnothing$.

7- $J^{\varphi}(A_1,B_1)\Big[A_1\times B_1, J^{\varphi}(a_0,b_0), H^{\varphi}(a_0)\times H^{\varphi}(b_0), H^{\varphi}(A_1)\times H^{\varphi}(B_1)\Big]$ si $C(a_0,b_0)\neq\varnothing$.

8- $P^{\varphi}_{a_0}B_1\Big[\ B_1\ ,\ P^{\varphi}_{a_0}b_0\ ,\ H^{\varphi}(a_0)\ ,\ H^{\varphi}(B_1)\ \Big]$ si $C(a_0,b_0)\neq\varnothing$.

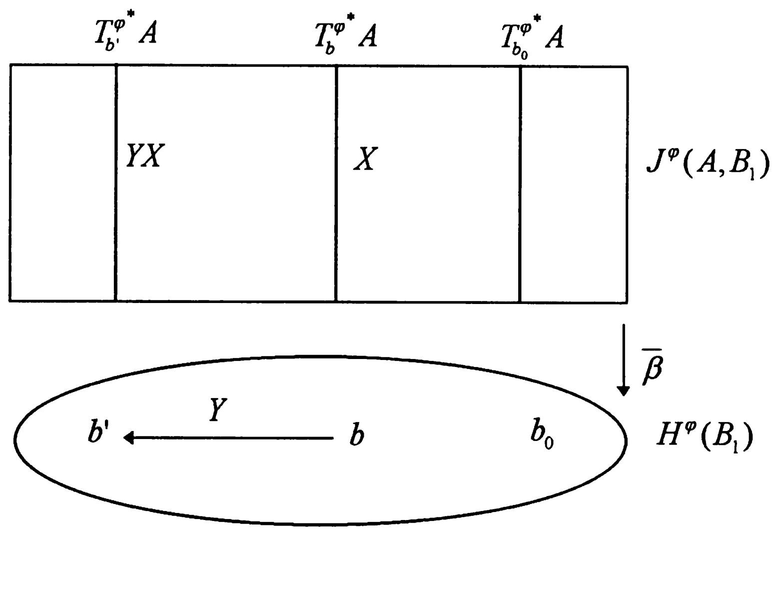
9- $P^{\varphi^*}_{b_0}A_1\Big[\ A_1\ ,\ P^{\varphi^*}_{b_0}a_0\ ,\ H^{\varphi}(b_0)\ ,\ H^{\varphi}(A_1)\ \Big]$ si $C(b_0,a_0)\neq\varnothing$.

10- $P^{\varphi}_{A_1}(B_1)\Big[\ A_1\ ,\ P^{\varphi}_{a_0}(B_1)\ ,\ H^{\varphi}(a_0)\ ,\ H^{\varphi}(A_1)\ \Big]$ si $C(a_0,B_1)\neq\varnothing$.

11- $P^{\varphi}_{A_1}(B_1)\Big[\ B_1\ ,\ P^{\varphi^*}_{b_0}(A_1)\ ,\ H^{\varphi}(b_0)\ ,\ H^{\varphi}(B_1)\ \Big]$ si $C(A_1,b_0)\neq\varnothing$.

12- $P^{\varphi}_{A_1}(B_1)\Big[A_1\times B_1, P^{\varphi}_{a_0}(b_0), H^{\varphi}(a_0)\times H^{\varphi}(b_0), H^{\varphi}(A_1)\times H^{\varphi}(B_1)\Big]$ si $C(a_0,b_0)\neq\varnothing$.

Δ 2- $J^{\varphi}(A,B_1)\Big[\ B_1\ ,\ T^{\varphi^*}_{b_0}A\ ,\ H^{\varphi}(b_0)\ ,\ H^{\varphi}(B_1)\ \Big]$

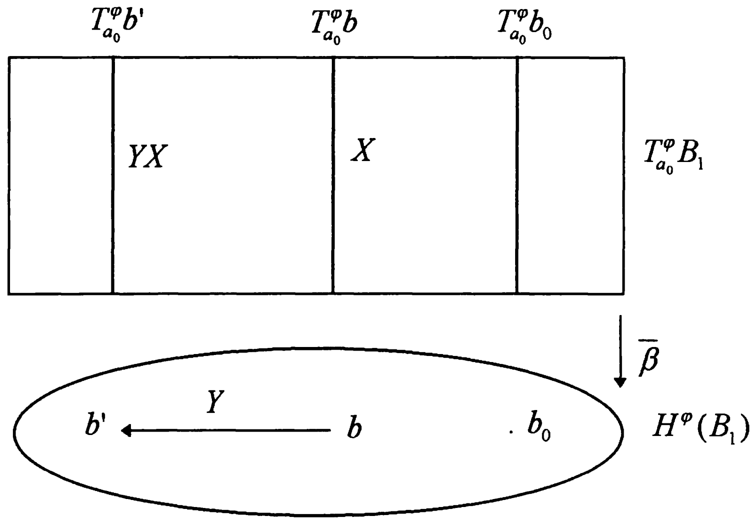


On a :

$$k': H^{\varphi}(B_1) * J^{\varphi}(A,B_1) \to J^{\varphi}(A,B_1) \quad \text{et} \quad \overline{\beta}: J^{\varphi}(A,B_1) \to B_1$$
$$(Y,X) \mapsto YX = Y.X \qquad\qquad X \mapsto \overline{\beta}(X) = \beta(f)$$

avec $X = J^{\varphi}f$.

3- $T_{a_0}^{\varphi}B_1 \left[\; B_1 \; , \; T_{a_0}^{\varphi}b_0 \; , \; H^{\varphi}(b_0) \; , \; H^{\varphi}(B_1) \; \right]$

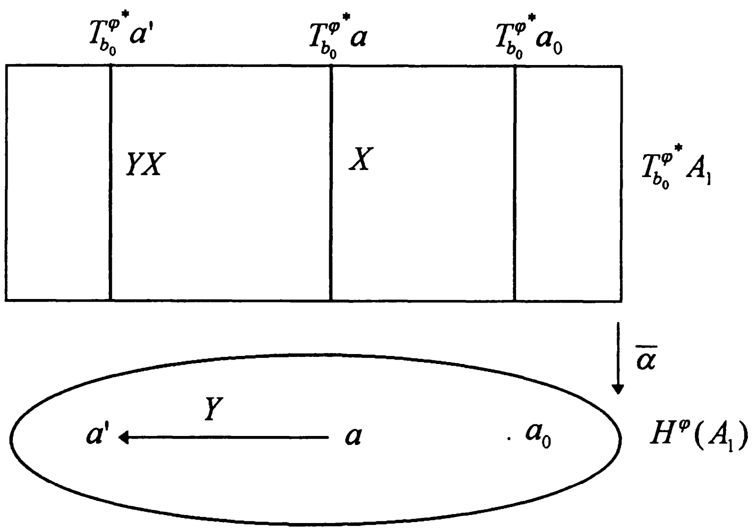


On a :

$$k' : H^{\varphi}(B_1) * T_{a_0}^{\varphi}B_1 \to T_{a_0}^{\varphi}B_1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\beta} : T_{a_0}^{\varphi}B_1 \to B_1 \qquad \text{avec } X = J^{\varphi}f .$$

$$(Y, X) \mapsto YX = Y.X \qquad\qquad X \mapsto \overline{\beta}(X) = \beta(f)$$

4- $T_{b_0}^{\varphi^*}A_1 \left[\; A_1 \; , \; T_{b_0}^{\varphi^*}a_0 \; , \; H^{\varphi}(a_0) \; , \; H^{\varphi}(A_1) \; \right]$

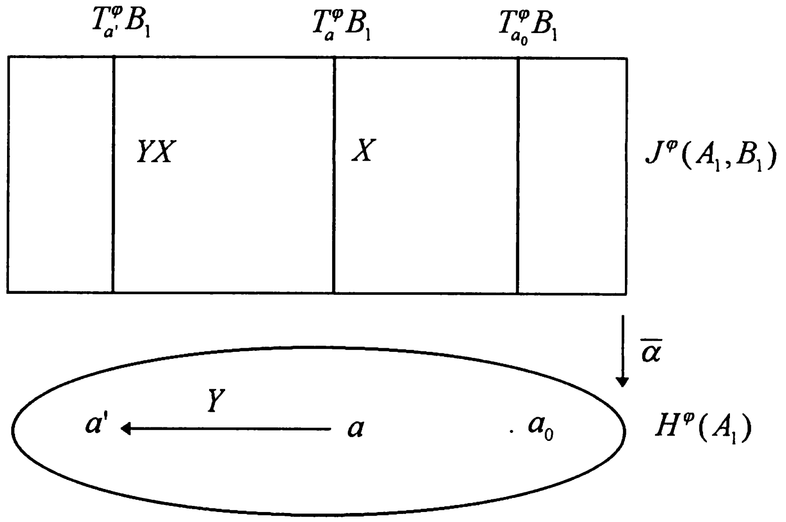


On a :

$$k' : H^{\varphi}(A_1) * T_{b_0}^{\varphi^*}A_1 \to T_{b_0}^{\varphi^*}A_1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\alpha} : T_{b_0}^{\varphi^*}A_1 \to A_1 \qquad \text{avec } X = J^{\varphi}f .$$

$$(Y, X) \mapsto YX = X.Y^{-1} \qquad\qquad X \mapsto \overline{\alpha}(X) = \alpha(f)$$

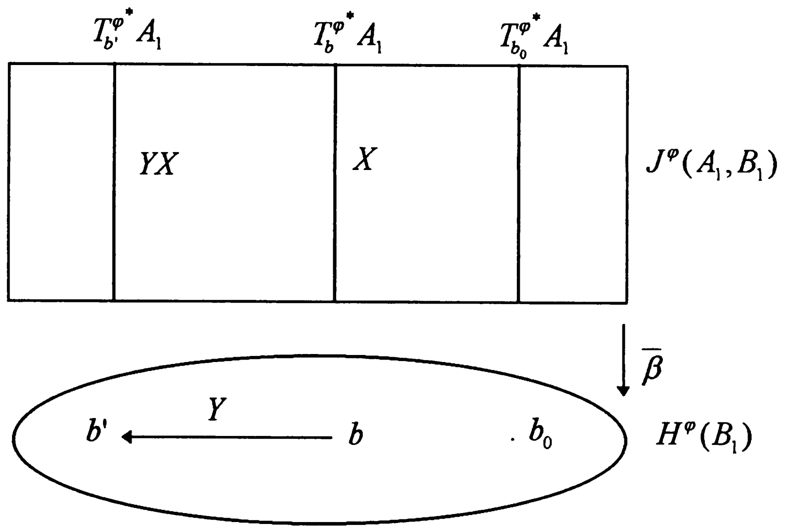
5- $J^{\varphi}(A_1,B_1)\Big[\ A_1\ ,\ T^{\varphi}_{a_0}B_1\ ,\ H^{\varphi}(a_0)\ ,\ H^{\varphi}(A_1)\ \Big]$ avec $J^{\varphi}(A_1,B_1)=\bigcup\limits_{a\in A_1}J^{\varphi}(a,B_1)$



On a :

$$k':H^{\varphi}(A_1)*J^{\varphi}(A_1,B_1)\to J^{\varphi}(A_1,B_1) \quad \text{et} \quad \overline{\alpha}:J^{\varphi}(A_1,B_1)\to A_1 \quad \text{avec} \quad X=J^{\varphi}f\ .$$
$$(Y,X)\mapsto YX=X.Y^{-1} \qquad\qquad X\mapsto\overline{\alpha}(X)=\alpha(f)$$

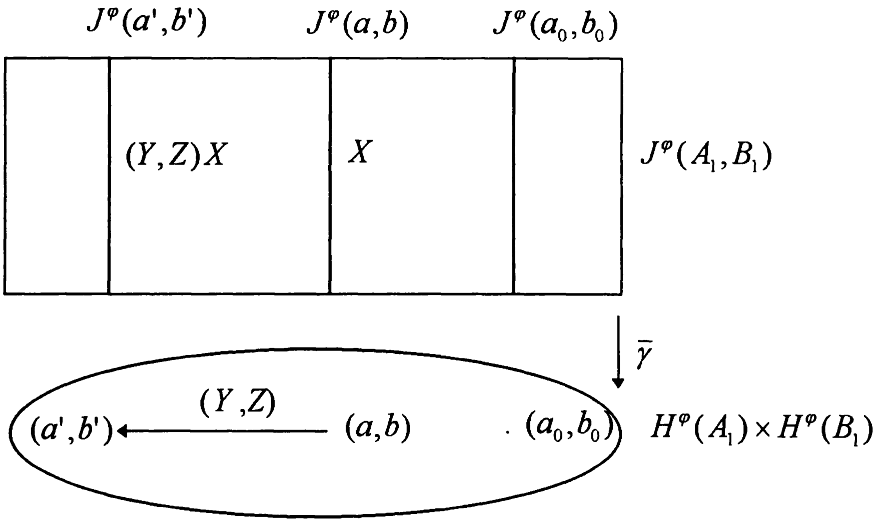
6- $J^{\varphi}(A_1,B_1)\Big[\ B_1\ ,\ T^{\varphi^*}_{b_0}A_1\ ,\ H^{\varphi}(b_0)\ ,\ H^{\varphi}(B_1)\ \Big]$ avec $J^{\varphi}(A_1,B_1)=\bigcup\limits_{b\in B_1}J^{\varphi}(A_1,b)$



On a :

$$k':H^{\varphi}(B_1)*J^{\varphi}(A_1,B_1)\to J^{\varphi}(A_1,B_1) \quad \text{et} \quad \overline{\beta}:J^{\varphi}(A_1,B_1)\to B_1 \quad \text{avec} \quad X=J^{\varphi}f\ .$$
$$(Y,X)\mapsto YX=Y.X \qquad\qquad X\mapsto\overline{\beta}(X)=\beta(f)$$

7- $J^{\varphi}(A_1,B_1)\left[A_1\times B_1, J^{\varphi}(a_0,b_0), H^{\varphi}(a_0)\times H^{\varphi}(b_0), H^{\varphi}(A_1)\times H^{\varphi}(B_1)\right]$



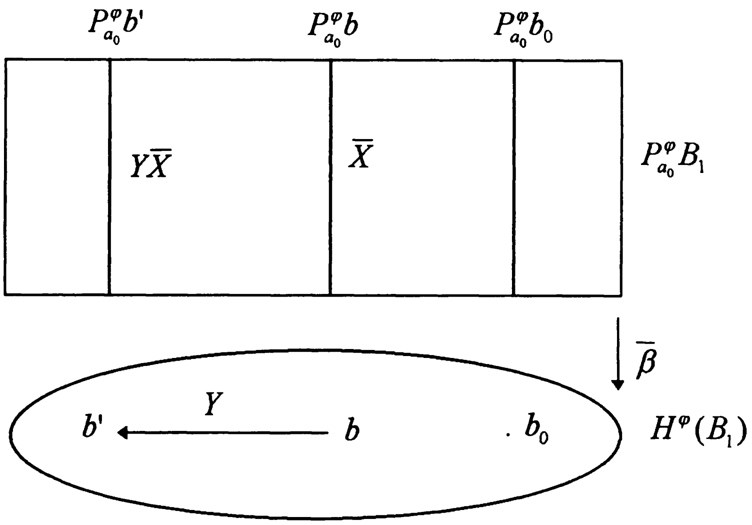
On a :

$$k' : (H^{\varphi}(A_1)\times H^{\varphi}(B_1)) * J^{\varphi}(A_1,B_1) \to J^{\varphi}(A_1,B_1)$$
$$((Y,Z),X) \mapsto (Y,Z)X = Z.X.Y^{-1},$$

et

$$\bar{\gamma} : J^{\varphi}(A_1,B_1) \to A_1\times B_1$$
$$X \mapsto \bar{\gamma}(X) = (\alpha(f),\beta(f)) \text{ avec } X = J^{\varphi}f \ .$$

8- $P^{\varphi}_{a_0}B_1 \left[B_1 \ , \ P^{\varphi}_{a_0}b_0 \ , \ H^{\varphi}(a_0) \ , \ H^{\varphi}(B_1) \right]$

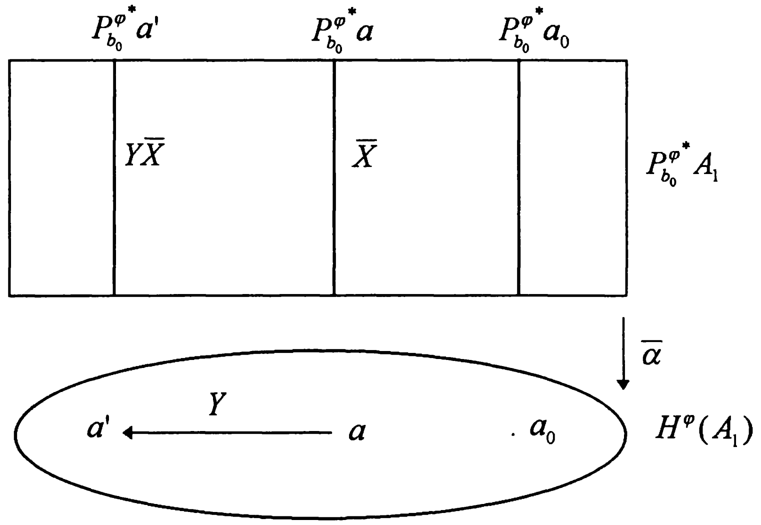


On a :

$k' : H^{\varphi}(A_1) * P^{\varphi}_{a_0}B_1 \to P^{\varphi}_{a_0}B_1$ et $\overline{\beta} : P^{\varphi}_{a_0}B_1 \to B_1$ avec $X = J^{\varphi}f$.

$(Y,\overline{X}) \mapsto Y\overline{X} = \overline{Y.X}$ $\qquad \overline{X} \mapsto \overline{\beta}(\overline{X}) = \beta(f)$

9- $P_{b_0}^{\varphi^*}A_1 \Big[\; A_1 \; , \; P_{b_0}^{\varphi^*}a_0 \; , \; H^{\varphi}(b_0) \; , \; H^{\varphi}(A_1) \; \Big]$

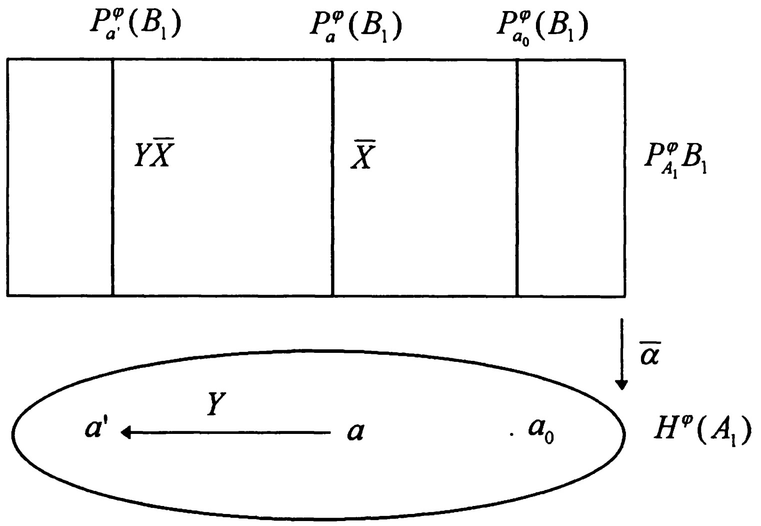


On a :

$$k' : H^{\varphi}(A_1) * P_{b_0}^{\varphi^*}A_1 \to P_{b_0}^{\varphi^*}A_1 \qquad \text{et} \qquad \overline{\alpha} : P_{b_0}^{\varphi^*}A_1 \to A_1 \qquad \text{avec } X = J^{\varphi}f \, .$$

$$(Y, \overline{X}) \mapsto Y\overline{X} = \overline{X.Y^{-1}} \qquad\qquad \overline{X} \mapsto \overline{\alpha}(\overline{X}) = \alpha(f)$$

10- $P_{A_1}^{\varphi}(B_1) \Big[\; A_1 \; , \; P_{a_0}^{\varphi}(B_1) \; , \; H^{\varphi}(a_0) \; , \; H^{\varphi}(A_1) \; \Big]$

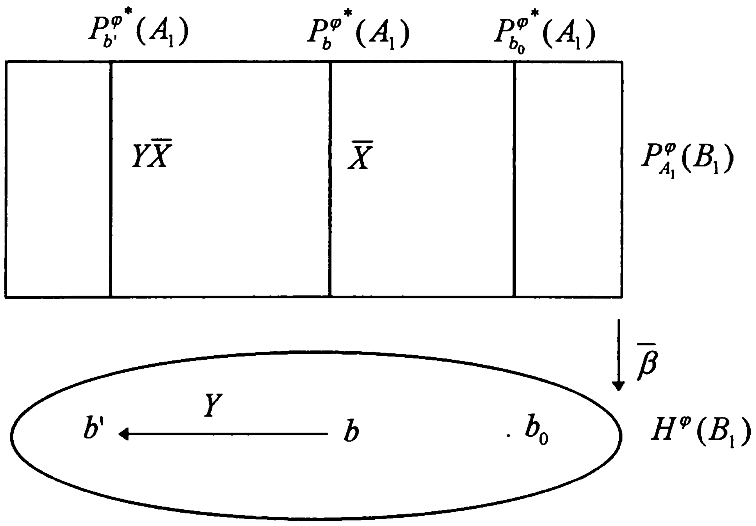


On a :

$$k' : H^{\varphi}(A_1) * P_{A_1}^{\varphi}(B_1) \to P_{A_1}^{\varphi}(B_1) \qquad \text{et} \qquad \overline{\alpha} : P_{A_1}^{\varphi}(B_1) \to A_1 \qquad \text{avec } X = J^{\varphi}f \, .$$

$$(Y, \overline{X}) \mapsto Y\overline{X} = \overline{X.Y^{-1}} \qquad\qquad \overline{X} \mapsto \overline{\alpha}(\overline{X}) = \alpha(f)$$

11- $P_{A_1}^{\varphi}(B_1)\left[\ B_1\ ,\ P_{b_0}^{\varphi^*}(A_1)\ ,\ H^{\varphi}(b_0)\ ,\ H^{\varphi}(B_1)\ \right]$

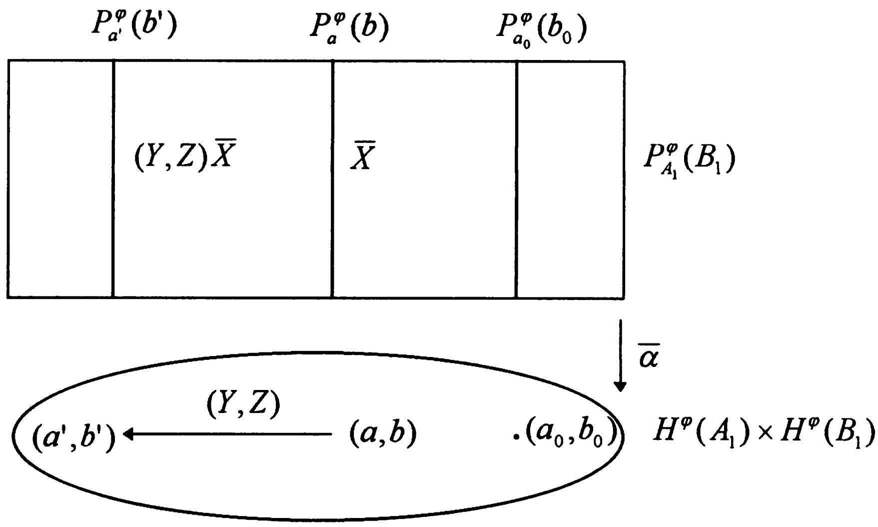


On a :

$k': H^{\varphi}(B_1) * P_{A_1}^{\varphi}(B_1) \to P_{A_1}^{\varphi}(B_1)$ et $\overline{\beta}: P_{A_1}^{\varphi}(B_1) \to B_1$ avec $X = J^{\varphi} f$.

$(Y, \overline{X}) \mapsto Y\overline{X} = \overline{Y.X}$ $\qquad$ $\overline{X} \mapsto \overline{\beta}(\overline{X}) = \beta(f)$

12- $P_{A_1}^{\varphi}(B_1)\left[\ A_1 \times B_1\ , P_{a_0}^{\varphi}(b_0), H^{\varphi}(a_0) \times H^{\varphi}(b_0), H^{\varphi}(A_1) \times H^{\varphi}(B_1)\ \right]$



On a :

$k': (H^{\varphi}(A_1) \times H^{\varphi}(B_1)) * P_{A_1}^{\varphi}(B_1) \to P_{A_1}^{\varphi}(B_1)$

$$((Y,Z), \overline{X}) \mapsto (Y,Z)\overline{X} = \overline{Z.X.Y^{-1}}$$

et

$$\overline{\gamma}: P_{A_1}^{\varphi}(B_1) \to A_1 \times B_1$$

$\overline{X} \mapsto \overline{\gamma}(\overline{X}) = (\alpha(f), \beta(f))$ avec $X = J^{\varphi} f$. ∇

8.5 OBJETS PLONGES

8.5.1 DEFINITION

Soit $F: A \to C(A,B)$ une section locale de α , où A et B sont deux parties non vides de C_0 (cf.4.5.3). Le couple (F,A) définit alors un **OBJET PLONGE** dans B (cet objet étant $\beta(f(A))$ plongé dans B).

C étant e_0-transitive, F se prolonge de manière naturelle à $P^{\varphi}_{e_0}(F)$ comme suit.

$$P^{\varphi}_{e_0}(F): P^{\varphi}_{e_0}(A) \to P^{\varphi}_{e_0}(B)$$
$$\overline{X} \mapsto \left(P^{\varphi}_{e_0}(F)\right)(X) = \overline{F(\beta(f)).X} = \overline{(J^{\varphi}F(\beta(f))).X}$$

avec $X = J^{\varphi}f$.

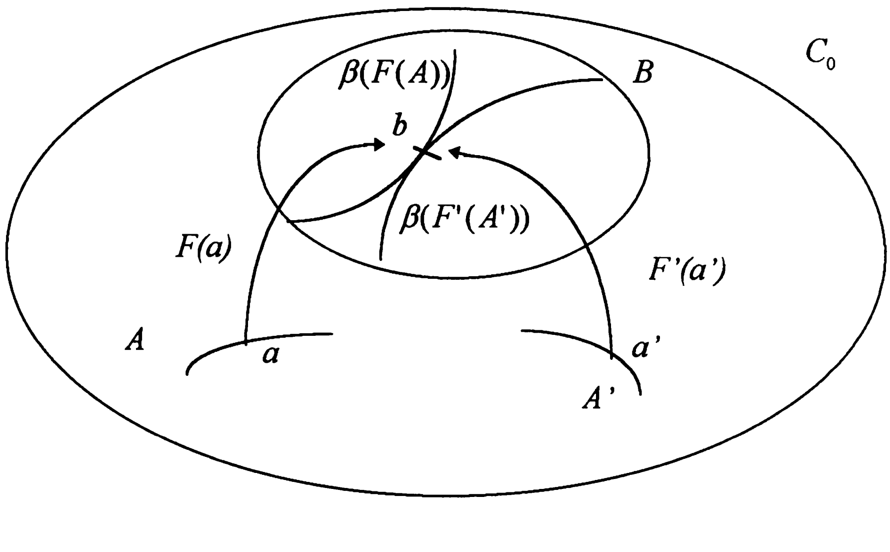
Montrons que la définition de $\left(P^{\varphi}_{e_0}(F)\right)(X)$ ne dépend pas du choix de f . En effet 1.1.3 1- assure que pour tout f du jet X, $\beta(f)$ est constant, d'où l'indépendance du choix de f dans l'expression de $\left(P^{\varphi}_{e_0}(F)\right)(X)$.

8.5.2 DEFINITION ET PROPOSITION

Soient (F,A) et (F',A') deux objets plongés dans B et $b \in \beta(F(A)) \cap \beta(F'(A'))$, on dit que (F,A) et (F',A') ont même φ-contact en b si et seulement si il existe $a \in A$ et $a' \in A'$ tels que $\beta(F(a)) = \beta(F'(a')) = b$ et vérifiant de plus :

$$J^{\varphi}F(a) \prec J^{\varphi}F'(a') \text{ et } J^{\varphi}F'(a') \prec J^{\varphi}F(a).$$

La relation définie ci-dessus est une relation d'équivalence.



Δ La réflexivité est évidente, la symétrie également compte tenu de l'aspect symétrique de la définition. Examinons la transitivité. Soient (F, A), (F', A'), (F'', A'') trois objets plongés dans B et $b \in \beta(F(A)) \cap \beta(F'(A')) \cap \beta(F''(A''))$. Si (F, A) et (F', A') ont même φ-contact en b ainsi que (F', A') et (F'', A''), cela signifie qu'il existe a, a', a'' respectivement dans A, A', A'' tels que $\beta(F(A)) = \beta(F'(A')) = b$ et $\beta(F'(A')) = \beta(F''(A'')) = b$. De plus on a $J^{\varphi}F(a) \prec J^{\varphi}F'(a')$ et $J^{\varphi}F'(a') \prec J^{\varphi}F(a)$ ainsi que $J^{\varphi}F'(a') \prec J^{\varphi}F''(a'')$ et $J^{\varphi}F''(a'') \prec J^{\varphi}F'(a')$. Il est alors aisé d'en déduire $\beta(F(A)) = \beta(F''(A'')) = b$ et $J^{\varphi}F(a) \prec J^{\varphi}F''(a'')$ et $J^{\varphi}F''(a'') \prec J^{\varphi}F(a)$, d'où (F, A) et (F'', A'') ont même φ-contact en b. ∇

9 PROLONGEMENTS

Dans ce chapitre nous allons présenter diverses extensions de la structure d'algèbre de contact. Ces extensions permettront à leur tour d'étendre le calcul des jets à la catégorie des applications d'un ensemble U vers la catégorie C, à celle des sections locales de α, puis à celle des sections locales de β. Nous préciserons également les notions de prolongements holonomes ainsi que les prolongements non holonomes.

9.1 ALGEBRE DE CONTACT SUR $J^{\varphi}C$

9.1.1 <u>PROPOSITION</u>

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact abélienne sur C alors pour tout φ de Φ, $(k^{\Phi},\Phi,J^{\varphi}C)$ est une algèbre de contact abélienne sur la catégorie des φ-jets de morphismes de C et k^{Φ} est défini par: $k^{\Phi}:\Phi\times J^{\varphi}C\to J^{\varphi}C$

$$(\varphi',J^{\varphi}f)\mapsto\varphi' J^{\varphi}f=J^{\varphi}(\varphi' f)$$

Δ Du fait que l'algèbre (k,Φ,C) est abélienne on déduit que la définition de k^{Φ} est indépendante du représentant choisi dans $J^{\varphi}f$. En effet, soit $f'\in J^{\varphi}f$ alors on a quelque soit g :

$$\begin{aligned}
g\in J^{\varphi}(\varphi' f') &\Leftrightarrow \varphi g=\varphi(\varphi' f') \\
&\Leftrightarrow \varphi g=\varphi'(\varphi f') &&((k,\Phi,C)\text{ abélienne})\\
&\Leftrightarrow \varphi g=\varphi'(\varphi f) &&(f'\in J^{\varphi}f)\\
&\Leftrightarrow \varphi g=\varphi(\varphi' f) &&((k,\Phi,C)\text{ abélienne})\\
&\Leftrightarrow g\in J^{\varphi}(\varphi' f),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $J^{\varphi}(\varphi' f)=J^{\varphi}(\varphi' f')$ et donc que la définition de $\varphi'(J^{\varphi}f)$ ne dépend pas du représentant choisi.

1- Pour tout $(\varphi'',\varphi')\in\Phi*\Phi$ et pour tout f de C on a :

$$\begin{aligned}
(\varphi''.\varphi')(J^{\varphi}f) &= J^{\varphi}((\varphi''.\varphi')f)\\
&= J^{\varphi}(\varphi''(\varphi' f))\\
&= \varphi''(J^{\varphi}(\varphi' f))\\
&= \varphi''(\varphi'(J^{\varphi}f)).
\end{aligned}$$

2- Pour tout φ' de Φ et pour tout $(f,g) \in C \times C$ on a :

$$\begin{aligned}
(J^{\varphi}f).(J^{\varphi}g) \text{ défini} &\Leftrightarrow J^{\varphi}(f.g) && \text{défini} \\
&\Leftrightarrow f.g && \text{défini} \\
&\Leftrightarrow \varphi' f.\varphi' g && \text{défini} \\
&\Leftrightarrow J^{\varphi}(\varphi' f.\varphi' g) && \text{défini} \\
&\Leftrightarrow J^{\varphi}(\varphi' f).J^{\varphi}(\varphi' g) && \text{défini} \\
&\Leftrightarrow \varphi'(J^{\varphi}f).\varphi'(J^{\varphi}g) && \text{défini.}
\end{aligned}$$

3- Pour tout $(\varphi',\varphi) \in \Phi \times \Phi$ et pour tout $(g,f) \in C * C$ on a :

$$\begin{aligned}
\varphi'(J^{\varphi}g.J^{\varphi}f) &= \varphi'(J^{\varphi}(g.f)) \\
&= J^{\varphi}(\varphi'(g.f)) \\
&= J^{\varphi}(\varphi'(\varphi' g.\varphi' f)) \\
&= \varphi'(J^{\varphi}(\varphi' g.\varphi' f)) \\
&= \varphi'(J^{\varphi}(\varphi' g).J^{\varphi}(\varphi' f)) \\
&= \varphi'(\varphi'(J^{\varphi}g).\varphi'(J^{\varphi}f)).
\end{aligned}$$

Des résultats précédents on déduit la structure d'algèbre de contact annoncée. Montrer que cette dernière est abélienne se fait sans difficulté. ∇

9.2 ALGEBRE DE CONTACT SUR C^U

Soit U un ensemble non vide et C une catégorie. On note C^U l'ensemble des applications de U vers C. Pour G et F de C^U on définit $G \bullet F$ par :

a) $G \bullet F$ est défini si et seulement si $\forall u \in U \ \ \alpha(G(u)) = \beta(F(u))$ et,

b) $$\begin{aligned} G \bullet F &: U \to C \\ u &\mapsto (G \bullet F)(u) = G(u).F(u) \end{aligned}$$

9.2.1 PROPOSITION

La composition précédente définie entre morphismes de C^U permet de munir C^U d'une structure de catégorie qu'on notera encore C^U. Les rétractions source et but sont notées respectivement α^U et β^U et définies par :

$$\begin{aligned} \alpha^U &: C^U \to C^U \\ F &\mapsto \alpha^U(F) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \beta^U &: C^U \to C^U \\ F &\mapsto \beta^U(F) \end{aligned}$$

avec $$\begin{aligned} \alpha^U(F) &: U \to C \\ u &\mapsto (\alpha^U(F))(u) = \alpha(F(u)) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} \beta^U(F) &: U \to C \\ u &\mapsto (\beta^U(F))(u) = \beta(F(u)) \end{aligned}$$

Δ L'associativité s'établit sans difficulté. Par ailleurs quand $G \bullet F$ est défini on a :

$$\forall u \in U \quad (\alpha^U(G \bullet F))(u) = \alpha(G(u).F(u)) = \alpha(F(u)) = (\alpha^U(F))(u).$$

d'où l'on déduit $\alpha^U(G \bullet F) = \alpha^U(F)$ et de manière analogue $\beta^U(G \bullet F) = \beta^U(F)$. ∇

Si (k, Φ, C) est une algèbre de contact, on définit :

$$\begin{aligned} k^U : \Phi \times C^U &\to C^U \\ (\varphi, F) &\mapsto k^U(\varphi, F) = \varphi F \end{aligned}$$

où φF est définie par : $\varphi F : U \to C$

$$u \mapsto (\varphi F)(u) = \varphi F(u).$$

On peut alors énoncer le résultat suivant.

9.2.2 <u>PROPOSITION</u>

Avec les hypothèses précédentes (k^U, Φ, C^U) est une algèbre de contact. Si (k, Φ, C) est abélienne alors (k^U, Φ, C^U) l'est également.

Δ 1- $\forall (\varphi, \varphi') \in \Phi * \Phi \quad \forall F \in C^U \quad \forall u \in U$ on a :

$$((\varphi.\varphi')F)(u) = (\varphi.\varphi')F(u) = \varphi(\varphi' F(u)) = \varphi((\varphi' F)(u)) = (\varphi(\varphi' F))(u),$$

d'où on tire $\forall (\varphi, \varphi') \in \Phi * \Phi \quad \forall F \in C^U \quad (\varphi.\varphi')F = \varphi(\varphi' F)$.

2- $\forall \varphi \in \Phi \quad \forall (G, F) \in C^U \times C^U$ on a :

$$\begin{aligned} (G,F) \in C^U * C^U &\Leftrightarrow G \bullet F && \text{défini} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in U \quad G(u).F(u) && \text{défini} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in U \quad (\varphi G(u)).(\varphi F(u)) && \text{défini} \\ &\Leftrightarrow \forall u \in U \quad (\varphi G)(u).(\varphi F)(u) && \text{défini} \\ &\Leftrightarrow (\varphi G) \bullet (\varphi F) && \text{défini} \\ &\Leftrightarrow (\varphi G, \varphi F) \in C^U * C^U \end{aligned}$$

3- $\forall \varphi \in \Phi \ \forall (G, F) \in C^U * C^U \quad \forall u \in U$ on a :

$$\begin{aligned} (\varphi(G \bullet F))(u) &= \varphi(G \bullet F)(u) \\ &= \varphi(G(u).F(u)) \\ &= \varphi(\varphi G(u).\varphi F(u)) \\ &= \varphi((\varphi G)(u).(\varphi F)(u)) \\ &= \varphi\left[((\varphi G) \bullet (\varphi F))(u)\right] \\ &= (\varphi(\varphi G \bullet \varphi F))(u) \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

$$\forall \varphi \in \Phi \ \forall (G,F) \in C^U * C^U \quad \varphi(G \bullet F) = \varphi[(\varphi G) \bullet (\varphi F)],$$

ce qui achève cette démonstration ; l'éventuel caractère abélien s'établit sans difficulté. ∇

Il résulte de la proposition précédente qu'un calcul des jets est possible en raison de la structure d'algèbre de contact (k^U, Φ, C^U). En conséquence l'application $J^\varphi : C^U \to J^\varphi(C^U)$ définie par $F \mapsto J^\varphi F$ devient un foncteur. En ce qui concerne $J^\varphi F$ on a le résultat suivant.

9.2.3 PROPOSITION

Pour tout φ de Φ et tout F de C^U on définit l'application $J^\varphi F : U \to J^\varphi C$ définie par $u \mapsto (J^\varphi F)(u) = J^\varphi(F(u))$. Cette définition est alors indépendante du choix du représentant pris dans $J^\varphi F$. Par ailleurs $\Psi : J^\varphi(C^U) \to \left(J^\varphi C\right)^U$ défini par $X = J^\varphi F \mapsto \begin{pmatrix} \Psi(X): U \to J^\varphi C \\ u \mapsto J^\varphi F(u) \end{pmatrix}$ est un foncteur injectif qui fait de $J^\varphi(C^U)$ une sous-catégorie de $\left(J^\varphi C\right)^U$. Si de plus φ est idempotent dans (k, Φ, C) alors Ψ est surjectif ; $J^\varphi(C^U)$ et $\left(J^\varphi C\right)^U$ sont deux catégories isomorphes.

Δ Montrons qu'effectivement $J^\varphi(F(u))$ ne dépend pas du choix de F dans $J^\varphi F$. Soit $F' \in J^\varphi F$ on a alors :

$$\begin{aligned} \varphi F' = \varphi F &\Leftrightarrow \forall u \in U \ (\varphi F')(u) = (\varphi F)(u) \\ &\Leftrightarrow \forall u \in U \ \varphi F'(u) = \varphi F(u) \\ &\Leftrightarrow \forall u \in U \ J^\varphi(F'(u)) = J^\varphi(F(u)). \end{aligned}$$

On notera « $\bullet$ » la composition dans C^U, dans $J^\varphi(C^U)$ ainsi que dans $\left(J^\varphi C\right)^U$. On considére les jets $Y = J^\varphi G$ et $X = J^\varphi F$ tels que $G \bullet F$ soit défini dans C^U. On a alors

$$Y \bullet X = J^\varphi G \bullet J^\varphi F = J^\varphi(G \bullet F)$$

et

$$\begin{aligned} \forall u \in U \ \left(\Psi(Y \bullet X)\right)(u) &= J^\varphi(G \bullet F)(u) \\ &= J^\varphi(G(u).F(u)) \\ &= J^\varphi G(u).J^\varphi F(u) \\ &= (\Psi(Y))(u).(\Psi(X))(u) \\ &= \left(\Psi(Y) \bullet \Psi(X)\right)(u) \end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\quad \Psi(Y \bullet X) = \Psi(Y) \bullet \Psi(X)$.

Ψ est donc un foncteur. Montrons qu'il est injectif. Si on a $\Psi(X') = \Psi(X)$ avec $X' = J^\varphi F'$ alors quelque soit u de U on écrit :

$$
\begin{aligned}
(\Psi(X'))(u) = (\Psi(X))(u) &\Leftrightarrow J^{\varphi}F'(u) = J^{\varphi}F(u)\\
&\Leftrightarrow \varphi F'(u) = \varphi F(u)\\
&\Leftrightarrow (\varphi F')(u) = (\varphi F)(u)
\end{aligned}
$$

d'où l'on déduit $\varphi F' = \varphi F \Leftrightarrow J^{\varphi}F' = J^{\varphi}F \Leftrightarrow X' = X$.

$\mathcal{J} : U \to J^{\varphi}C$ étant donnée, on considère l'application $\varpi : J^{\varphi}C \to C$ définie par $J^{\varphi}f \mapsto \varphi f$; ϖ ne dépend pas du représentant choisi dans le jet $J^{\varphi}f$. Définissons alors l'application $F : U \to C$ par $u \mapsto \varpi(\mathcal{J}(u))$. De ce fait on a $F = \varpi \circ \mathcal{J}$ et pour tout u de U il vient $\left(\Psi\left(J^{\varphi}F\right)\right)(u) = J^{\varphi}F(u) = J^{\varphi}\varpi(\mathcal{J}(u)) = \mathcal{J}(u)$ car φ étant idempotent ϖ est alors une section de J^{φ}. Il résulte de ce qui précède que Ψ est un foncteur bijectif, ce qui achève cette démonstration. ∇

9.3 PROLONGEMENTS

Dans tout ce paragraphe (k, Φ, C) est une algèbre de contact abélienne. La proposition 9.1.1 permet alors d'affirmer que $(k^{\Phi}, \Phi, J^{\varphi}C)$ est une algèbre de contact abélienne et la proposition 9.2.2 permet de dire que (k^{U}, Φ, C^{U}) l'est également.

1- Appliquons 9.1.1 à (k^{U}, Φ, C^{U}). On en déduit que $\left(\left(k^{U}\right)^{\Phi}, \Phi, J^{\varphi}\left(C^{U}\right)\right)$ est une algèbre de contact abélienne. Ceci nous autorise à parler de la catégorie des φ'-jets de $J^{\varphi}\left(C^{U}\right)$, soit $J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}\left(C^{U}\right)\right)$, où $J^{\varphi'}$ dépend de $\left(k^{U}\right)^{\Phi}$ et J^{φ} dépend de k^{Φ}.

2- Appliquons 9.2.2 à $(k^{\Phi}, \Phi, J^{\varphi}C)$. On en déduit que $\left(\left(k^{\Phi}\right)^{U}, \Phi, \left(J^{\varphi}C\right)^{U}\right)$ est une algèbre de contact abélienne. Ceci nous autorise à parler de la catégorie des φ'-jets de $\left(J^{\varphi}C\right)^{U}$, soit $J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^{U}\right)$, où $J^{\varphi'}$ dépend de $\left(k^{\Phi}\right)^{U}$ et J^{φ} dépend de k^{U}.

3- Enfin appliquons 9.2.2 à $\left(\left(k^{U}\right)^{\Phi}, \Phi, J^{\varphi}\left(C^{U}\right)\right)$. On en déduit alors que $\left(\left(\left(k^{U}\right)^{\Phi}\right)^{U}, \Phi, \left(J^{\varphi}\left(C^{U}\right)\right)^{U}\right)$ est une algèbre de contact abélienne. Ceci nous autorise à parler de la catégorie des φ'-jets de $\left(J^{\varphi}\left(C^{U}\right)\right)^{U}$, soit $J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}\left(C^{U}\right)\right)^{U}\right)$.

Les constructions précédentes conduisent à exposer le résultat suivant.

9.3.1 PROPOSITION

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact abélienne telle que φ soit idempotent alors $\left(\left(k^U\right)^\Phi,\Phi,J^\varphi\left(C^U\right)\right)$ et $\left(\left(k^\Phi\right)^U,\Phi,\left(J^\varphi C\right)^U\right)$ sont deux algèbres de contact isomorphes.

Δ Considérons le foncteur $Id_\Phi \times \Psi : \Phi \times J^\varphi C^U \to \Phi \times \left(J^\varphi C\right)^U$ qui est inversible de manière évidente. Il suffit alors de prouver que c'est un morphisme d'algèbres de contact (c.f. 1.4) et donc d'établir la commutativité du carré suivant.

$$\begin{tikzcd}
\Phi \times J^\varphi\left(C^U\right) \arrow[r, "Id_\Phi \times \Psi"] \arrow[d, "\left(k^U\right)^\Phi"'] & \Phi \times \left(J^\varphi C\right)^U \arrow[d, "\left(k^\Phi\right)^U"] \\
J^\varphi\left(C^U\right) \arrow[r, "\Psi"'] & \left(J^\varphi C\right)^U
\end{tikzcd}$$

Or pour tout u de U on a :

$$\begin{aligned}
\left(\varphi'\left(\Psi\left(J^\varphi F\right)\right)\right)(u) &= \varphi'\left(\left(\Psi\left(J^\varphi F\right)\right)(u)\right) \\
&= \varphi'\left(J^\varphi F(u)\right) \\
&= J^\varphi\left(\varphi'(F(u))\right) \\
&= J^\varphi\left((\varphi' F)(u)\right) \\
&= \left(\Psi\left(J^\varphi(\varphi' F)\right)\right)(u) \\
&= \left(\Psi\left(\varphi' J^\varphi F\right)\right)(u).
\end{aligned}$$

Autrement dit on a $\varphi'\left(\Psi\left(J^\varphi F\right)\right) = \Psi\left(\varphi' J^\varphi F\right)$ ce qui achève de prouver la commutativité du carré précédent. ∇

Désormais nous identifierons ces deux algèbres de contact, étant bien entendu que cette identification n'est possible qu'avec φ idempotent dans (k,Φ,C).

Les considérations précédentes nous amènent à poser les définitions suivantes.

9.3.2 DEFINITIONS

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact abélienne et idempotente alors on a :

1- $$J^{(\varphi',\varphi)}\left(C^U\right)=J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}\left(C^U\right)\right)=J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^U\right)$$

est le (φ',φ)-**prolongement HOLONOME** de C^U,

2- $$\tilde{J}^{(\varphi',\varphi)}\left(C^U\right)=J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}\left(C^U\right)\right)^U\right)$$

est le (φ',φ)-**prolongement NON HOLONOME** de C^U.

Précisons tout ceci dans le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
(k,\Phi,C) \arrow[r, "(\ )^U"] \arrow[dd, "J^{\varphi}"'] & (k^U,\Phi,C^U) \arrow[d, "J^{\varphi}"] & \\
& \left(\left(k^U\right)^{\Phi},\Phi,J^{\varphi}\left(C^U\right)\right)\ (1) \arrow[r, "(\ )^U"] \arrow[d, leftrightarrow, "iso"] & \left(\left(\left(k^U\right)^{\Phi}\right)^U,\Phi,\left(J^{\varphi}\left(C^U\right)\right)^U\right)\ (3) \\
(k^{\Phi},\Phi,J^{\varphi}C)\ (0) \arrow[r, "(\ )^U"] & \left(\left(k^{\Phi}\right)^U,\Phi,\left(J^{\varphi}C\right)^U\right)\ (2) \arrow[d, "J^{\varphi'}"] & \\
& \left(\left(\left(k^{\Phi}\right)^U\right)^{\Phi},\Phi,J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^U\right)\right)\ (4) &
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme
- J^{φ} et $J^{\varphi'}$ indiquent la construction évoquée en 9.1.1
- $(\ )^U$ indique la construction évoquée en 9.2.2.
- *iso* désigne l'isomorphisme d'algèbres défini en 9.3.1

Fixons les règles de « circulation » liées au diagramme précédent.

Règle 1

$$\begin{tikzcd}
(k,\Phi,C) \arrow[d, "J^{\varphi}"'] \\
{}
\end{tikzcd}$$

Permet d'obtenir le prolongement holonome de la catégorie C.

Règle 2

$$\begin{tikzcd}
(k,\Phi,C) \arrow[r, "(\,)^{U}"] \arrow[d, "J^{\varphi}"'] & (k^{U},\Phi,C^{U}) \arrow[d, "J^{\varphi}"] \\
{} \arrow[r, "(\,)^{U}"] & {}
\end{tikzcd}$$

Permet d'obtenir le prolongement non holonome de la catégorie C. Permet également d'obtenir le prolongement holonome de la catégorie C^U.

Ce dernier carré est bien entendu commutatif comme précisé en 9.3.1.

Enfin, il importe de ne pas confondre $J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C\right)$ (où les deux foncteurs jets sont liés à des algèbres distinctes) avec l'extension du calcul des jets aux parties de C.

Pour chaque algèbre de contact présente dans le diagramme nous proposons, pour les différentes catégories de jets qui s'en déduisent, les définitions qui suivent.

(0) conduit au (φ',φ)-prolongement holonome de C noté :

$$J^{(\varphi',\varphi)}C = J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C\right).$$

(1) et (2) conduisent au (φ',φ)-prolongement holonome de C^U noté :

$$J^{(\varphi',\varphi)}\left(C^U\right) = J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}\left(C^U\right)\right) = J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^U\right).$$

ou encore au (φ',φ)-prolongement non holonome de C noté :

$$\tilde{J}^{(\varphi',\varphi)}(C)=J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}\left(C^U\right)\right)=J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^U\right).$$

(3) conduit au (φ',φ)-prolongement non holonome de C^U noté :

$$\tilde{J}^{(\varphi',\varphi)}\left(C^U\right)=J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}\left(C^U\right)\right)^U\right)$$

(4) conduit au (φ'',φ')-prolongement holonome de $\left(J^{\varphi}C\right)^U$ noté :

$$J^{(\varphi'',\varphi')}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^U\right)=J^{\varphi''}\left(J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^U\right)\right).$$

Pour terminer ce paragraphe notons que les constructions précédentes peuvent être réitérées tant « horizontalement » que « verticalement ».

9.3.3 PROPOSITION

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact abélienne et si φ est idempotent alors la catégorie $J^{(\varphi',\varphi)}(C)$ (catégorie des (φ',φ)-jets holonomes de C) est isomorphe à une sous-catégorie de $\tilde{J}^{(\varphi',\varphi)}(C)$ (catégorie des (φ',φ)-jets non holonomes de C).

Δ On a vu en 9.2.3 que la catégorie $J^{\varphi}\left(C^U\right)$ est isomorphe à la catégorie $\left(J^{\varphi}C\right)^U$, il en résulte que les catégories $J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}\left(C^U\right)\right)$ et $J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^U\right)$ sont isomorphes. Or $J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)^U\right)$ est elle même isomorphe à la catégorie $\left(J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C\right)\right)^U$ d'où $J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}\left(C^U\right)\right)$ isomorphe à $\left(J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C\right)\right)^U$, ce qui revient à dire que $J^{(\varphi',\varphi)}\left(C^U\right)$ et $\left(J^{(\varphi',\varphi)}(C)\right)^U$ sont deux catégories isomorphes, soit à affirmer que $\tilde{J}^{(\varphi',\varphi)}(C)$ et $\left(J^{(\varphi',\varphi)}(C)\right)^U$ sont isomorphes. Si on identifie $J^{(\varphi',\varphi)}(C)$ à la sous-catégorie des applications constantes de U vers $J^{(\varphi',\varphi)}(C)$, cela revient à identifier $J^{(\varphi',\varphi)}(C)$ à une sous-catégorie de $\left(J^{(\varphi',\varphi)}(C)\right)^U$ et donc à établir l'isomorphisme de $J^{(\varphi',\varphi)}(C)$ avec une sous-catégorie de $\tilde{J}^{(\varphi',\varphi)}(C)$, ce qui achève cette démonstration. ∇

Si l'algèbre de contact (k,Φ,C) est complète Id_C est alors un opérateur idempotent. Si on pose $J^0=J^{Id_C}$ alors on aura $J^0f=\{f\}$ qu'on identifie alors à f, ainsi J^0C est identifié à C, d'où les remarques qui suivent.

Remarques

1- Si on considère $\left(k^{\Phi},\Phi,J^0C\right)$ on a :

$$k^{\Phi}:\Phi\times J^0C\to J^0C \qquad \text{avec } J^0(\varphi f) \text{ identifié à } \varphi f$$
$$(\varphi,J^0f)\mapsto J^0(\varphi f)$$

et par suite l'algèbre de contact $\left(k^{\Phi},\Phi,J^0C\right)$ est identifiée à (k,Φ,C).

2- Si on considère $\left(\left(k^{\Phi}\right)^U,\Phi,\left(J^0C\right)^U\right)$, cette algèbre de contact peut être identifiée à $\left(k^U,\Phi,C^U\right)$ et par suite le prolongement $(\varphi,0)$-non holonome de C est identifié à $J^{\varphi}\left(C^U\right)$, ce qu'on écrit $\tilde{J}^{(\varphi,0)}C=J^{\varphi}\left(C^U\right)$, et le prolongement $(\varphi,0)$-holonome de C^U est identifié à $J^{\varphi}\left(C^U\right)$, ce qu'on écrit $J^{(\varphi,0)}C^U=J^{\varphi}\left(C^U\right)$. On a donc :

$$J^{\varphi}\left(C^U\right)=J^{(\varphi,0)}C^U=\tilde{J}^{(\varphi,0)}C.$$

La proposition suivante permet de préciser le lien entre $J^{(\varphi',\varphi)}\left(C^U\right)$ et $J^{\varphi'\varphi}\left(C^U\right)$.

9.3.4 PROPOSITION

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact complète et idempotente alors pour tout φ de Φ et tout φ' de Φ la catégorie $J^{(\varphi',\varphi)}C$ est isomorphe à la catégorie $J^{\varphi'\varphi}C$.

Δ Précisons que $J^{(\varphi',\varphi)}(C)=J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C\right)$ est la catégorie des φ'-jets de morphismes de $J^{\varphi}C$.

Autrement dit on a :
$$Y\in J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C\right)\Leftrightarrow \exists X\in J^{\varphi}C \;\; Y=J^{\varphi'}X$$
$$\Leftrightarrow Y=\left\{X'\in J^{\varphi}C \;/\; \varphi'X'=\varphi'X\right\}.$$

Par ailleurs on a également :
$$X\in J^{\varphi}C\Leftrightarrow \exists f\in C \;\; X=J^{\varphi}f.$$

On définit l'application $\Psi: J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C\right)\to J^{\varphi'\varphi}C$ en posant pour tout Y de $J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C\right)$:

$$\Psi(Y)=J^{\varphi'\varphi}f \text{, où } Y=J^{\varphi'}X \text{ et } X=J^{\varphi}f.$$

Nous allons montrer que la définition de $\Psi(Y)$ est indépendante du choix de X dans $Y=J^{\varphi'}X$ et de celui de f dans $X=J^{\varphi}f$, puis nous montrerons que Ψ est une application bijective, qui de plus est un foncteur.

Soit $X' = J^{\varphi} f'$ tel que $\varphi' X' = \varphi' X$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
\varphi' X' = \varphi' X &\Leftrightarrow \varphi' J^{\varphi} f' = \varphi' J^{\varphi} f \\
&\Leftrightarrow J^{\varphi}(\varphi' f') = J^{\varphi}(\varphi' f) \\
&\Leftrightarrow \varphi(\varphi' f') = \varphi(\varphi' f) \\
&\Leftrightarrow (\varphi.\varphi') f' = (\varphi.\varphi') f \qquad \text{(l'algèbre étant complète)} \\
&\Leftrightarrow (\varphi'.\varphi) f' = (\varphi'.\varphi) f \qquad \text{(l'algèbre étant abélienne)} \\
&\Leftrightarrow J^{\varphi'\varphi} f' = J^{\varphi'\varphi} f .
\end{aligned}$$

Montrons que Ψ est injective.

Soit $Y' \in J^{\varphi'}\left(J^{\varphi} C\right)$ et $Y \in J^{\varphi'}\left(J^{\varphi} C\right)$ tels que $Y' = J^{\varphi'} X'$ et $Y = J^{\varphi'} X$ et tels que $X' = J^{\varphi} f'$ et $X = J^{\varphi} f$, f' et f étant deux morphismes de la catégorie C on peut alors écrire les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\Psi(Y') = \Psi(Y) &\Leftrightarrow (\varphi'.\varphi) f' = (\varphi'.\varphi) f \\
&\Leftrightarrow (\varphi.\varphi') f' = (\varphi.\varphi') f \qquad \text{(l'algèbre étant abélienne)} \\
&\Leftrightarrow \varphi(\varphi' f') = \varphi(\varphi' f) \\
&\Leftrightarrow J^{\varphi}(\varphi' f') = J^{\varphi}(\varphi' f) \\
&\Leftrightarrow \varphi' J^{\varphi} f' = \varphi' J^{\varphi} f \\
&\Leftrightarrow \varphi' X' = \varphi X \\
&\Leftrightarrow J^{\varphi'} X' = J^{\varphi'} X \\
&\Leftrightarrow Y' = Y \qquad \text{d'où } \Psi \text{ injective.}
\end{aligned}$$

Montrons que Ψ est surjective. On se donne $J^{\varphi'\varphi} f$. On pose $g = (\varphi'.\varphi) f$ puis $X = J^{\varphi} G$ et $Y = J^{\varphi'} X$ on a alors $\Psi(Y) = J^{\varphi'\varphi} g = J^{\varphi'\varphi}((\varphi'.\varphi) f)$. Comme l'algèbre est idempotente on a donc $\Psi(Y) = J^{\varphi'\varphi} g = J^{\varphi'\varphi}((\varphi'.\varphi) f) = J^{\varphi'\varphi} f$ (voir 4.1.4 3-).

Il nous reste à prouver que Ψ est un foncteur. Soit $(Y', Y) \in J^{\varphi'}(J^{\varphi} C) * J^{\varphi'}(J^{\varphi} C)$ tel que $Y' = J^{\varphi'} X'$, $Y = J^{\varphi'} X$, $X' = J^{\varphi} f'$ et $X = J^{\varphi} f$, on a donc :

$$Y' \bullet Y = (J^{\varphi'} X') \bullet (J^{\varphi'} X) = J^{\varphi'}(X' \bullet X)$$

puis $\qquad X' \bullet X = (J^{\varphi} f') \bullet (J^{\varphi} f) = J^{\varphi}(f' \bullet f)$

et donc $\qquad \Psi(Y' \bullet Y) = J^{\varphi'\varphi}(f' \bullet f) = (J^{\varphi'\varphi} f') \bullet (J^{\varphi'\varphi} f) = \Psi(Y') \bullet \Psi(Y)$, ce qui achève cette démonstration.

Ψ étant un isomorphisme on peut dès lors identifier la catégorie $J^{(\varphi',\varphi)} C = J^{\varphi'}\left(J^{\varphi} C\right)$ avec la catégorie $J^{\varphi'\varphi} C$. ∇

En conséquence, pour une algèbre de contact complète (donc abélienne) et idempotente, moyennant les isomorphismes précédents on a :

$$J^{\varphi'\varphi}\left(C^U\right) = J^{(\varphi',\varphi)}\left(C^U\right) \subset \tilde{J}^{(\varphi',\varphi)}\left(C^U\right)$$

9.4 ALGEBRE DE CONTACT SUR C_s

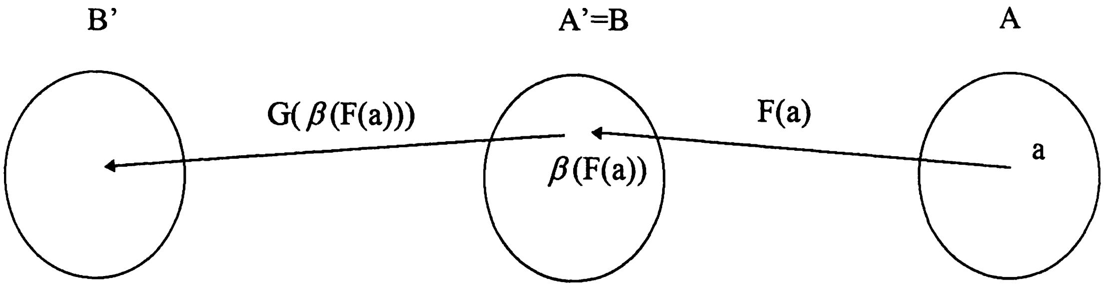
9.4.1 LA CATEGORIE C_s

On appelle **SECTION LOCALE DE** α sur la catégorie C toute application $F\colon A \to C(A,A')$ où A est une partie non vide de C_0, où $A' = \beta(F(A))$ (c'est une partie non vide de C_0) et où $C(A,A')$ est l'ensemble des morphismes de C dont la source est dans A et le but dans A'. De plus F est telle que pour tout a de A on a $\alpha(F(a)) = a$.

Si $F\colon A \to C(A,A')$ et $G\colon B \to C(B,B')$ sont deux telles sections locales de α on note $G°F$ leur composé. Il est défini par : $G°F\colon A \to C(A,B')$

$$a \mapsto (G°F)(a) = G(\beta(F(a))).F(a)$$

si et seulement si $A' = B$.



L'ensemble des sections locales de α sur C est alors muni d'une structure de catégorie notée C_s dont les rétractions source et but sont notées α_s et β_s et définies par $\alpha_s(F) = i_A$, $\beta_s(F) = i_{A'}$ où $F\colon A \to C(A,A')$ et $i_A\colon A \to C(A,A)$ est l'application définie par $a \mapsto i_A(a) = a$.

9.4.2 PROPOSITION

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact alors (k_s,Φ,C_s) est une algèbre de contact où k_s est défini par :

$$\begin{array}{lcl} k_s\colon \Phi \times C_s \to C_s & \text{avec} & \varphi F\colon A \to C(A,A') \ \text{(si on a } F\colon A \to C(A,A')\text{)} \\ (\varphi,F) \mapsto k_s(\varphi,F) = \varphi F & & a \mapsto (\varphi F)(a) = k(\varphi,F(a)) = \varphi F(a) \end{array}$$

Si de plus φ préserve les unités de C alors φ préserve les unités de C_s.

Δ 1- $\forall(\varphi,\varphi')\in\Phi*\Phi\ \ \forall a\in A$ on a :

$$\begin{aligned}((\varphi.\varphi')F)(a) &= (\varphi.\varphi')(F(a))\\ &= \varphi(\varphi'(F(a))\\ &= \varphi((\varphi' F)(a))\\ &= (\varphi(\varphi' F))(a)\end{aligned}$$

d'où l'on tire $(\varphi.\varphi')F = \varphi(\varphi' F)$.

2- $\forall\varphi\in\Phi\ \ \forall(G,F)\in C_s\times C_s$ on a :

$$\begin{aligned}(G,F)\in C_s*C_s &\Leftrightarrow \forall a\in A\ (G^\circ F)(a) = G(\beta(F(a))).F(a)\\ &\Leftrightarrow \forall a\in A\ G(\beta(F(a))).F(a) \quad \text{défini}\\ &\Leftrightarrow \forall a\in A\ \varphi G(\beta(F(a))).\varphi F(a) \quad \text{défini}\\ &\Leftrightarrow \forall a\in A\ (\varphi G)(\beta(F(a))).(\varphi F)(a) \quad \text{défini.}\end{aligned}$$

or on a $\beta((\varphi F)(a)) = \beta(\varphi F(a)) = \beta(F(a))$, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned}(G,F)\in C_s*C_s &\Leftrightarrow \forall a\in A\ ((\varphi G)^\circ(\varphi F))(a) \quad \text{défini}\\ &\Leftrightarrow (\varphi G)^\circ(\varphi F) \quad \text{défini}\\ &\Leftrightarrow (\varphi G,\varphi F)\in C_s*C_s\ .\end{aligned}$$

3- $\forall(G,F)\in C_s*C_s\ \forall\varphi\in\Phi\ \forall a\in A$ on a :

$$\begin{aligned}(\varphi(G^\circ F))(a)) &= \varphi((G^\circ F)(a))\\ &= \varphi[G(\beta(F(a))).F(a)]\\ &= \varphi[\varphi G(\beta(F(a))).\varphi F(a)]\\ &= \varphi[(\varphi G)(\beta(F(a))).(\varphi F)(a)]\\ &= \varphi[(\varphi G)(\beta((\varphi F)(a))).(\varphi F)(a)] \quad (\text{car } \beta(\varphi F(a)) = \beta(F(a)))\\ &= \varphi[((\varphi G)^\circ(\varphi F))(a)]\\ &= (\varphi[(\varphi G)^\circ(\varphi F)])(a)\end{aligned}$$

d'où l'on tire $\varphi(G^\circ F) = \varphi[(\varphi G)^\circ(\varphi F)]$.

Pour terminer montrons que si φ préserve les unités de C alors φ préserve les unités de C_s. Soit $\alpha_s(F)\in C_{s0}$ et $\varphi\in\Phi$ on a pour tout a de A :

$$(\varphi(\alpha_s(F)))(a) = (\varphi i_A)(a) = \varphi(i_A(a)) = \varphi a = a = i_A(a).$$

D'où l'on déduit $\varphi(\alpha_s(F)) = \alpha_s(F)$ ce qui termine cette démonstration. ∇

(k_s,Φ,C_s) étant une algèbre de contact, on peut donc introduire un calcul des jets ainsi que la catégorie $J^\varphi C_s$ et le foncteur $J^\varphi : C_s \to J^\varphi C_s$.

$J^\varphi C_s$ a alors pour rétractions source et but les applications $(\alpha_s)^\varphi$ et $(\beta_s)^\varphi$ définies par :

$$(\alpha_s)^\varphi(J^\varphi F) = J^\varphi(\alpha_s(F)) = J^\varphi(i_A) \text{ et } (\beta_s)^\varphi(J^\varphi F) = J^\varphi(\beta_s(F)) = J^\varphi(i_B)$$

pour $F: A \to C(A,B)$ avec $F \in C_s$.

Concernant les morphismes de $J^\varphi C_s$ on peut énoncer.

9.4.3 PROPOSITION

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact.

1- Si l'application $F: A \to C(A,B)$ est une section locale de α ($F \in C_s$, ici $F \in C_s(A,B)$) alors au morphisme $J^\varphi F$ de $J^\varphi C_s$ on associe l'application :

$$\Psi\left(J^\varphi F\right) : A \to J^\varphi(A,B)$$
$$a \mapsto J^\varphi F(a)$$

où, rappelons le, $J^\varphi(A,B)$ est l'ensemble des jets de la forme $J^\varphi f$ avec $\alpha(f) \in A$ et $\beta(f) \in B$.

2- Si de plus φ préserve les unités de C ($\varphi \in \Phi^0$ et de ce fait est idempotent) alors $J^\varphi(C_s)$ et $\left(J^\varphi C\right)_s$ sont deux catégories isomorphes.

Δ 1- Montrons que pour tout a de A $J^\varphi(F(a)) \in (J^\varphi C)(A,B)$. Si on pose $F(a) = f$ avec $f \in C(a,b)$ et $b \in B$, d'après 1.1.3 1- on est assuré que $\varphi f \in C(a,b)$ et donc que $J^\varphi(F(a))$ soit formé de morphismes dont la source est dans A et le but dans B, d'où pour tout a de A on a $J^\varphi F(a) \in J^\varphi(A,B)$.

Montrons que la définition de $\Psi\left(J^\varphi F\right)$ est indépendante du représentant choisi dans le jet $J^\varphi F$.

Soit $F' \in J^\varphi F$, nous pouvons donc écrire :

$$\begin{aligned} \varphi F' = \varphi F &\Leftrightarrow \forall a \in A \ (\varphi F')(a) = (\varphi F)(a) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A \ \varphi F'(a) = \varphi F(a) \\ &\Leftrightarrow \forall a \in A \ J^\varphi(F'(a)) = J^\varphi(F(a)) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la définition de $\Psi\left(J^\varphi F\right)$ ne dépend pas du représentant choisi.

2- Rappelons que $\left(J^\varphi C\right)_0$ est l'ensemble des unités de $J^\varphi C$. C'est donc l'ensemble des jets de la forme $J^\varphi e$ où $e \in C_0$. Considérons $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux parties non vides de $\left(J^\varphi C\right)_0$ définies par $\mathcal{A} = \left\{J^\varphi a \in \left(J^\varphi C\right)_0 \,/\, a \in A\right\}$ et $\mathcal{B} = \left\{J^\varphi b \in \left(J^\varphi C\right)_0 \,/\, b \in B\right\}$.

Soit $F\colon A \to C(A,B)$ une section locale de α. On a alors :

$\forall a \in A \;\; \alpha^{\varphi}\big(J^{\varphi}F(a)\big) = J^{\varphi}\alpha(F(a)) = J^{\varphi}a \in \mathcal{A}$ et $\beta^{\varphi}\big(J^{\varphi}F(a)\big) = J^{\varphi}\beta(F(a)) \in \mathcal{B}$

car $\beta(F(a)) \in B$ par définition de F.

On considère alors la composée des deux applications suivantes

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} \xrightarrow{\;\varpi\;} A \xrightarrow{\;\Psi(J^{\varphi}F)\;} J^{\varphi}(A,B) \\ J^{\varphi}a \mapsto \varpi\big(J^{\varphi}a\big) = \varphi a \mapsto J^{\varphi}F(\varphi a) \end{array}$$ et on pose $\Psi'\big(J^{\varphi}F\big) = \Psi\big(J^{\varphi}F\big) \circ \varpi$.

Il est clair que $\varpi\big(J^{\varphi}a\big)$ ne dépend que de $J^{\varphi}a$ car si $a' \in J^{\varphi}a$ on aura $\varphi a' = \varphi a$. Noter qu'on n'a $\varphi a = a$ (φ préservant les unités) que si $a \in A$ car il faut bien savoir que $J^{\varphi}a$ ne contient pas que des unités de C même si par définition $J^{\varphi}a$ contient au moins une unité prise dans A. Donc $\Psi'\big(J^{\varphi}F\big)$ ne dépend que de $J^{\varphi}F$ et la définition de $\big(\Psi'\big(J^{\varphi}F\big)\big)\big(J^{\varphi}a\big)$ ne dépend que de $J^{\varphi}a$.

Montrons que cette application est une section locale de α^{φ}. On a :

$$\begin{aligned} \forall a \in A \;\; \alpha^{\varphi}\Big(\big(\Psi'\big(J^{\varphi}F\big)\big)\big(J^{\varphi}a\big)\Big) &= \alpha^{\varphi}\big(J^{\varphi}F(\varphi a)\big) \\ &= J^{\varphi}\big(\alpha\big(F(\varphi a)\big)\big) \\ &= J^{\varphi}(\varphi a) && (F \text{ section locale de } \alpha) \\ &= J^{\varphi}a && (\varphi \in \Phi^{0}) \end{aligned}$$

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned} \forall a \in A \;\; \beta^{\varphi}\Big(\big(\Psi'\big(J^{\varphi}F\big)\big)\big(J^{\varphi}a\big)\Big) &= \beta^{\varphi}\big(J^{\varphi}F(\varphi a)\big) \\ &= J^{\varphi}\big(\beta\big(F(\varphi a)\big)\big) \\ &= J^{\varphi}\big(\beta\big(F(a)\big)\big) \end{aligned}$$

Ce dernier jet est de la forme $J^{\varphi}b$ avec $b \in B$ et donc appartient à $\mathcal{B}$, par conséquent on a :

$$\begin{array}{l} \Psi'\big(J^{\varphi}F\big)\colon \mathcal{A} \to \big(J^{\varphi}C\big)\big(\mathcal{A}, \mathcal{B}\big) \\ \qquad J^{\varphi}a \mapsto \big(\Psi'\big(J^{\varphi}F\big)\big)\big(J^{\varphi}a\big) \end{array}$$

On a donc $\Psi'\big(J^{\varphi}F\big) \in \big(J^{\varphi}C\big)_{s}$ et Ψ' permet alors d'associer à tout morphisme de $J^{\varphi}\big(C_{s}(A,B)\big)$ un morphisme de $\big(J^{\varphi}C\big)_{s}\big(\mathcal{A}, \mathcal{B}\big)$.

On étend « Hom » par « Hom » la construction précédente à $J^{\varphi}\big(C_{s}\big)$ ce qui permet de considérer Ψ' comme une application de $J^{\varphi}\big(C_{s}\big)$ dans $\big(J^{\varphi}C\big)_{s}$.

Montrons que Ψ' est injective.

Soient $F':A'\to C(A',B')$ et $F:A\to C(A,B)$ deux sections locales de α telles que l'on ait $\Psi'\left(J^{\varphi}F'\right)=\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)$. On a alors $\mathcal{A}'=\mathcal{A}$ et $J^{\varphi}(A',B')=J^{\varphi}(A,B)$, ce qui revient à dire que ces deux applications ont même source et même but.

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned}\forall a'\in A' \quad \left(\Psi'\left(J^{\varphi}F'\right)\right)\left(J^{\varphi}a'\right) &= \left(\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right)\left(J^{\varphi}a'\right)\\ &= J^{\varphi}F(\varphi a')\\ &= J^{\varphi}F(a') \qquad\qquad (\varphi\in\Phi^{0})\end{aligned}$$

$F(a')$ étant défini on en déduit que $a'\in A$ et par suite $A'\subset A$, de la même manière on établit $A\subset A'$ et finalement $A'=A$.

De $A'=A$ et $J^{\varphi}(A',B')=J^{\varphi}(A,B)$ on déduit $B'=B$ car ici tout élément de B est le but d'un morphisme de la forme $F(a)$ avec $a\in A$, même remarque pour B'. Il en résulte que pour tout a de A=A' on a $\left(\Psi'\left(J^{\varphi}F'\right)\right)(J^{\varphi}a)=J^{\varphi}F'(a)=J^{\varphi}F(a)$ d'où $J^{\varphi}F'=J^{\varphi}F$.

Montrons que Ψ' est surjective.

Soit $\mathcal{F}\in\left(J^{\varphi}C\right)_{s}$, on a donc $\mathcal{F}:\mathcal{A}\to J^{\varphi}(A,B)=\left(J^{\varphi}C\right)(\mathcal{A},\mathcal{B})$

$$J^{\varphi}a\mapsto \mathcal{F}\left(J^{\varphi}a\right)$$

On considère le carré suivant tel que $F=\varpi\circ\mathcal{F}\circ J^{\varphi}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F"] \arrow[d, "J^{\varphi}"'] & C(A,B) \arrow[d, "\varpi"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "\mathcal{F}"'] & J^{\varphi}(A,B) \end{tikzcd}$$

Montrons que $\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)=\mathcal{F}$. Pour tout $J^{\varphi}a$ de $\mathcal{A}$ on a :

$$\left(\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)=\left(\Psi\left(J^{\varphi}F\right)\circ\varpi\right)\left(J^{\varphi}a\right)$$

puis $$\begin{aligned}\left(\Psi\left(J^{\varphi}F\right)\circ\varpi\right)\left(J^{\varphi}a\right)&=J^{\varphi}F\left(\varpi\left(J^{\varphi}a\right)\right)\\&=J^{\varphi}F(a)\\&=J^{\varphi}\left(\left(\varpi\circ\mathcal{F}\circ J^{\varphi}\right)(a)\right)\\&=J^{\varphi}\left(\varpi\left(\mathcal{F}\left(J^{\varphi}a\right)\right)\right)\\&=\left(J^{\varphi}\circ\varpi\right)\left(\mathcal{F}\left(J^{\varphi}a\right)\right)\\&=\mathcal{F}\left(J^{\varphi}a\right)\ \ (\varphi \text{ étant idempotent } \varpi \text{ est une section de } J^{\varphi})\end{aligned}$$

On a donc $\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)=\mathcal{F}$.

Reste à montrer que Ψ' est un foncteur. Pour cela on considère deux sections locales de α qui soient composables, à savoir $F: A\to C(A,B)$ et $G: B\to C(B,D)$. On a donc
$$\forall a\in A\ \ (G^{\circ}F)(a)=G(\beta(F(a))).F(a).$$

D'aprés 9.4.2 on sait que (k_s,Φ,C_s) est une algèbre de contact, et J^{φ} est un foncteur de C_s vers $J^{\varphi}(C_s)$ d'où :
$$J^{\varphi}(G^{\circ}F)=\left(J^{\varphi}G\right)^{\circ}\left(J^{\varphi}F\right)$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}\forall\ J^{\varphi}a\in\mathcal{A}\ \ \left(\Psi'\left(J^{\varphi}(G^{\circ}F)\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)&=J^{\varphi}((G^{\circ}F)(\varphi a))\\&=J^{\varphi}\left[\left[G(\beta(F(\varphi a)))\right].\left[F(\varphi a)\right]\right]\\&=J^{\varphi}\left[G(\beta(F(\varphi a)))\right].J^{\varphi}\left[F(\varphi a)\right].\end{aligned}$$

Or on a $J^{\varphi}\left[F(\varphi a)\right]=\left(\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)$ ainsi que les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\beta^{\varphi}\left[\left(\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)\right]&=\beta^{\varphi}\left[J^{\varphi}\left[F(\varphi a)\right]\right]\\&=J^{\varphi}\left[\beta(F(\varphi a))\right]\end{aligned}$$

et $$\begin{aligned}J^{\varphi}\left[G(\beta(F(\varphi a)))\right]&=J^{\varphi}\left[G(\varphi\beta(F(\varphi a)))\right]\quad \text{car } \beta(F(\varphi a))\in C_0 \text{ et } \varphi\in\Phi^0\\&=\left(\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)\right)\left(J^{\varphi}\beta(F(\varphi a)\right)\\&=\left(\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)\right)\left(\beta^{\varphi}\left[\left(\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)\right]\right)\end{aligned}$$

Finalement on tire :
$$\begin{aligned}\left(\Psi'\left(J^{\varphi}(G^{\circ}F)\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)&=\left[\left(\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)\right)\left(\beta^{\varphi}\left[\left(\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)\right]\right)\right].\left[\left(\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)\right]\\&=\left(\left[\left(\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)\right)\left(\beta^{\varphi}\left[\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right]\right)\right]\left[\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right]\right)\left(J^{\varphi}a\right)\\&=\left[\left(\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)\right)^{\circ}\left(\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right)\right]\left(J^{\varphi}a\right).\end{aligned}$$

Sachant que pour tout $J^{\varphi}a \in \mathcal{A}$ on a :

$$\left(\Psi'\left(J^{\varphi}(G^{\circ}F)\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)=\left(\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)^{\circ}\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\right)\left(J^{\varphi}a\right)$$

et $$J^{\varphi}(G^{\circ}F)=J^{\varphi}G^{\circ}J^{\varphi}F\ ,$$

on déduit successivement

$$\Psi'\left(J^{\varphi}(G^{\circ}F)\right)=\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)^{\circ}\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)$$

puis $$\Psi'\left(J^{\varphi}G^{\circ}J^{\varphi}F\right)=\Psi'\left(J^{\varphi}G\right)^{\circ}\Psi'\left(J^{\varphi}F\right)\ .$$

Ceci achève d'établir que Ψ' est un foncteur. Compte tenu de ce qui précède Ψ' est donc un foncteur bijectif de $J^{\varphi}(C_s)$ vers $\left(J^{\varphi}C\right)_s$ et permet donc d'identifier $J^{\varphi}(C_s)$ à $\left(J^{\varphi}C\right)_s$. ∇

9.4.4 <u>PROLONGEMENTS</u>

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact telle que tout φ de Φ préserve les unités de C, d'après la proposition 9.4.2 on sait alors que (k_s,Φ,C_s) est encore une algèbre de contact telle que tout φ de Φ préserve encore les unités de C_s.

Si de plus (k,Φ,C) est abélienne alors on montre facilement que (k_s,Φ,C_s) l'est également, dans ce cas, et d'après la proposition 9.1.1, on sait alors que $\left(k^{\Phi},\Phi,J^{\varphi}C\right)$ est une algèbre de contact abélienne.

On peut alors reconsidérer le diagramme de la définition 9.3.2 sous la forme suivante.

$$\begin{tikzcd}
(k,\Phi,C) \arrow[rr, "(\ )_s"] \arrow[d, "J^{\varphi}"'] & & (k_s,\Phi,C_s) \arrow[d, "J^{\varphi}"] \\
(k^{\Phi},\Phi,J^{\varphi}C) \arrow[r, "(\ )_s"] & \left(\left(k^{\Phi}\right)_s,\Phi,\left(J^{\varphi}C\right)_s\right) \arrow[r, leftrightarrow, "iso"] & \left(\left(k_s\right)^{\Phi},\Phi,J^{\varphi}C_s\right)
\end{tikzcd}$$

La construction notée $(\ )_s$ n'est autre que l'extension de $(\ )^U$ pour tout U non vide contenu dans C_0 avec la volonté de ne considérer que des applications de U dans C qui aient la particularité d'être des sections locales de la rétraction source.

Comme en 9.3.2 nous définissons les différents prolongements suivants.

1- Le (φ',φ)-prolongement holonome de C_s défini par :

$$J^{(\varphi',\varphi)}(C_s) = J^{\varphi'}\left(J^{\varphi}C_s\right) = J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C\right)_s\right)$$

2- Le (φ',φ)-prolongement non holonome de C_s défini par :

$$\tilde{J}^{(\varphi',\varphi)}(C_s) = J^{\varphi'}\left(\left(J^{\varphi}C_s\right)_s\right).$$

9.4.5 EXEMPLE

C est la catégorie des applications indéfiniment différentiables entre variétés indéfiniment différentiables. C_p est alors la catégorie des applications pointées associée à la catégorie C (c.f. 1.1.2 8-a-). Ce qui signifie que si $f: A \to B$ est un morphisme de C alors $(A,a) \xrightarrow{(f,a)} (B,b)$ est un morphisme de C_p avec $a \in A$ et $b = f(a) \in B$. Il faut noter que si f est une application, (f,a) ne saurait en être une. Tout au long de ce paragraphe nous noterons $f: e \to e'$ une application et $e \xrightarrow{f} e'$ un morphisme, en sachant toutefois que certains morphismes peuvent avoir les deux statuts.

On note $\mathcal{C}$ la catégorie quotient de C_p par la relation d'équivalence définie en 1.1.2 8-b-. Les morphismes de $\mathcal{C}$ sont notés $J^1(f,a)$ ou $\widehat{(f,a)}$. Avec les notations précédentes l'unité à droite de $\widehat{(f,a)}$ est $J^1(Id_A,a)$ notée plus simplement $\hat{a}$, l'unité à gauche de $\widehat{(f,a)}$ est alors $J^1(Id_B,b)$ notée plus simplement $\hat{b}$. $\mathcal{C}$ est désignée comme étant la catégorie des jets locaux (ou germes) d'applications différentiables.

Nous ne considérons ici que des applications indéfiniment différentiables à seule fin de simplifier l'exposé qui va suivre, et ainsi de ne pas disserter sur les classes de différentiabilité dans lesquelles seront les différentes variétés et applications qu'on sera amené à considérer.

On se place dans le cadre décrit en 9.4.4 avec comme algèbre de contact abélienne $(k,\Phi,\mathcal{C})$ telle que tout φ de Φ préserve les unités de $\mathcal{C}$. L'action de Φ sur $\mathcal{C}$ est définie par :

$$k: \Phi \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$
$$\left(\varphi, \widehat{(f,a)}\right) \mapsto \widehat{(f_\varphi,a)}$$

où f_φ est (moyennant le recours à un couple de cartes locales et indépendamment du choix de ces cartes) l'application qui à x associe la partie principale du développement de Taylor à l'ordre φ de f en a.

On considère donc le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
(k,\Phi,C) \arrow[rr, "(\ )_s"] \arrow[d, "J^\varphi"] & & (k_s,\Phi,C_s) \arrow[d, "J^\varphi"] \\
(k^\Phi,\Phi,J^\varphi C) \arrow[r, "(\ )_s"] & \left((k^\Phi)_s,\Phi,(J^\varphi C)_s\right) \arrow[r, leftrightarrow, "iso"] & \left((k_s)^\Phi,\Phi,J^\varphi C_s\right)
\end{tikzcd}$$

Pour chacune des cinq algèbres de contact qui interviennent ici nous préciserons la nature des morphismes, les rétractions source et but et quand cela sera nécessaire nous noterons les différences entre les notions d'holonomie et de non holonomie développées ici et celles introduites par Charles Ehresmann.

1- C

Les morphismes sont de la forme $\hat{a} \xrightarrow{\widehat{(f,a)}} \hat{b}$ avec $f: A \to B$ un morphisme de C, $\hat{a} = J^1(Id_A, a) = \widehat{(Id_A, a)}$, $a \in A$, $b = f(a)$ et $\hat{b} = J^1(Id_B, b) = \widehat{(Id_B, b)}$.

Les rétractions sont notées α et β et définies naturellement par $\alpha\widehat{(f,a)} = \hat{a}$ et $\beta\widehat{(f,a)} = \hat{b}$.

2- C_s

Avec les notations précédentes on pose : $\hat{A} = \{\hat{a} \in C_0 \,/\, a \in A\}$ et $\hat{B} = \{\hat{b} \in C_0 \,/\, b \in B\}$. Les morphismes sont de la forme $\hat{A} \xrightarrow{F} \hat{B}$ où F est l'application

$$F : \hat{A} \to C\left(\hat{A},\hat{B}\right) \text{ définie par } \hat{a} \mapsto \left(\hat{a} \xrightarrow{F(\hat{a})} \hat{b}\right)$$

$F(\hat{a})$ étant tel que pour chaque $\hat{a}$ il existe $\widehat{(f,a)} \in C$ avec $F(\hat{a}) = \widehat{(f,a)}$, f dépendant de F et de $\hat{a}$.

Les rétractions sont notées α_s et β_s et définies par $\alpha_s(F) = i_{\hat{A}}$ qu'on identifie à $\hat{A}$ et $\beta_s(F) = i_{\hat{B}}$ qu'on identifie à $\hat{B}$.

Rappelons que $i_{\hat{A}}$ est l'application $i_{\hat{A}} : \hat{A} \to C\left(\hat{A},\hat{A}\right)$ définie par $\hat{a} \mapsto \hat{a}$. .Notons qu'ici F n'est nullement supposée être différentiable.

3- $\boldsymbol{J^{\varphi}C}$

Les morphismes sont de la forme $J^{\varphi}\hat{a} \xrightarrow{J^{\varphi}\widehat{(f,a)}} J^{\varphi}\hat{b}$. On note encore $J^{\varphi}\widehat{(f,a)} = J^{\varphi}_{a}f$ et $J^{\varphi}\hat{a} = J^{\varphi}(Id_A,a) = J^{\varphi}_{a}Id_A$.

Les rétractions sont notées α^{φ} et β^{φ} et définies par :

$$\alpha^{\varphi}\left(J^{\varphi}_{a}f\right) = J^{\varphi}\left(\alpha\,\widehat{(f,a)}\right) = J^{\varphi}\hat{a} \text{ et } \beta^{\varphi}\left(J^{\varphi}_{a}f\right) = J^{\varphi}\left(\beta\widehat{(f,a)}\right) = J^{\varphi}\hat{b} \ .$$

Bien entendu il n'existe ici aucune différence entre les jets de type φ et les jets infinitésimaux.

4- $\boldsymbol{J^{\varphi}C_s}$

On pose $J^{\varphi}\hat{A} = \left\{J^{\varphi}\hat{a} \in J^{\varphi}C_0 \ / a \in A\right\}$ et $J^{\varphi}\hat{B} = \left\{J^{\varphi}\hat{b} \in J^{\varphi}C_0 \ / b \in B\right\}$. Les morphismes sont alors de la forme $J^{\varphi}\hat{A} \xrightarrow{J^{\varphi}F} J^{\varphi}\hat{B}$. Il faut remarquer que $J^{\varphi}\hat{a}$ ne se réduit pas à $\hat{a}$; outre $\hat{a}$, $J^{\varphi}\hat{a}$ contient des germes de la forme $\hat{a} \xrightarrow{\widehat{(f,a)}} \hat{a}$ tels que $J^{\varphi}_{a}f = J^{\varphi}_{a}Id_A$.

$J^{\varphi}F$ est alors une application définie par :

$$J^{\varphi}F: J^{\varphi}\hat{A} \to \left(J^{\varphi}C\right)\left(J^{\varphi}\hat{A}, J^{\varphi}\hat{B}\right) = J^{\varphi}\left(\hat{A}, \hat{B}\right)$$

où $\left(J^{\varphi}F\right)\left(J^{\varphi}\hat{a}\right)$ est le morphisme $J^{\varphi}\hat{a} \xrightarrow{\left(J^{\varphi}F\right)\left(J^{\varphi}\hat{a}\right)} J^{\varphi}\hat{b}$ et $F: \hat{A} \to C\left(\hat{A}, \hat{B}\right)$ une section locale de α, autrement dit $F \in C_s$.

Définissons $\left(J^{\varphi}F\right)\left(J^{\varphi}\hat{a}\right)$, en posant $\left(J^{\varphi}F\right)\left(J^{\varphi}\hat{a}\right) = J^{\varphi}F(\varphi\hat{a})$. Cette définition ne dépend pas du choix de F dans la classe $J^{\varphi}F$ ni de celui du représentant de la classe de $\hat{a}$, montrons le.

Soit $F' \in J^{\varphi}F$ et $\overset{\wedge}{(g,a)} \in J^{\varphi}\hat{a}$. Comme φ préserve les unités, la seule unité de $J^{\varphi}\hat{a}$ est $\hat{a}$, par conséquent tout autre représentant ne peut être qu'un morphisme de la forme $\hat{a} \xrightarrow{\overset{\wedge}{(g,a)}} \hat{a}$ vérifiant $\varphi\overset{\wedge}{(g,a)} = \varphi\hat{a} = \hat{a}$. On a alors :

$$\left(J^{\varphi}F'\right)\left(J^{\varphi}\overset{\wedge}{(g,a)}\right) = J^{\varphi}F'\left(\varphi\overset{\wedge}{(g,a)}\right) = J^{\varphi}F'(\hat{a})$$

or $$\varphi\left(F'(\hat{a})\right) = \left(\varphi F'\right)(\hat{a}) = \left(\varphi F\right)(\hat{a}) \quad \text{car } F' \in J^{\varphi}F,$$

d'où $J^{\varphi}F'(\hat{a}) = J^{\varphi}F(\hat{a})$. Ce qui prouve que $\left(J^{\varphi}F'\right)\left(J^{\varphi}\overset{\wedge}{(g,a)}\right) = \left(J^{\varphi}F\right)\left(J^{\varphi}\hat{a}\right)$.

Si on pose $F(\hat{a}) = \overset{\wedge}{(f,a)}$ (avec les remarques déjà formulées en 2- concernant le choix de f) alors on a $\left(J^{\varphi}F\right)\left(J^{\varphi}\hat{a}\right) = J^{\varphi}_{a}f$. $J^{\varphi}F$ est considérée par Charles Ehresmann comme étant l'application différentiable $J^{\varphi}F: A \to J^{\varphi}(A,B)$ qui à a associe $J^{\varphi}_{a}f$ c'est donc (en accord avec ses propres notations) un jet de source a et de but $f(a)$.

Si on suppose que toute application de la forme $J^{\varphi}F$ est différentiable alors $J^{\varphi}C_s$ n'est autre que la catégorie des flots au sens usuel.

Les rétractions sont notées $(\alpha_s)^{\varphi}$ et $(\beta_s)^{\varphi}$ et définies par :

$$(\alpha_s)^{\varphi}\left(J^{\varphi}F\right) = J^{\varphi}\alpha_s(F) = J^{\varphi}\hat{A} \text{ et } (\beta_s)^{\varphi}\left(J^{\varphi}F\right) = J^{\varphi}\beta_s(F) = J^{\varphi}\hat{B}.$$

5- $\left(J^{\varphi}C\right)_s$

Les morphismes sont de la forme $J^{\varphi}\hat{A} \xrightarrow{\mathcal{F}} J^{\varphi}\hat{B}$ où $\mathcal{F}$ est l'application

$$\mathcal{F} : J^{\varphi}\hat{A} \to J^{\varphi}\left(\hat{A},\hat{B}\right) \text{ définie par } J^{\varphi}\hat{a} \mapsto \left(J^{\varphi}\hat{a} \xrightarrow{\mathcal{F}\left(J^{\varphi}\hat{a}\right)} J^{\varphi}\hat{b}\right).$$

Examinons la notion de semi holonomie. Avec les notations d'Ehresmann, si $\mathcal{F}$ est une section locale de la rétraction source, on a à l'ordre 1 :

$$\mathcal{F}: A \to J^1(A,B)$$
$$a \mapsto \mathcal{F}(a)$$

et pour tout a de A, au jet $\mathcal{F}(a)$ on peut associer son but b et donc définir l'application différentiable $f: A \to B$ par $a \mapsto b$.

$J^1_a\mathcal{F}$ est alors un jet semi holonome d'ordre 2 si et seulement si $\forall a \in A \;\; \mathcal{F}(a) = J^1_a f$, sinon c'est un jet non holonome d'ordre 2. Or dans cette étude l'application $\mathcal{F}: J^1\hat{A} \to J^1\left(\hat{A},\hat{B}\right)$ est telle que $J^1\mathcal{F}$ est un jet (1,1)-non holonome qui à aucun instant ne saurait être un jet d'ordre 2.

Les rétractions sont notées $\left(\alpha^{\varphi}\right)_s$ et $\left(\beta^{\varphi}\right)_s$ et définies par $\left(\alpha^{\varphi}\right)_s(\mathcal{F}) = i_{J^{\varphi}\hat{A}} = J^{\varphi}\hat{A}$ et $\left(\beta^{\varphi}\right)_s(\mathcal{F}) = i_{J^{\varphi}\hat{B}} = J^{\varphi}\hat{B}$.

Par rapport aux hypothèses « faibles » qui président à la définition d'une algèbre de contact, le calcul des jets développé par Charles Ehresmann se situe dans un environnement beaucoup plus riche. Si C, construite au-dessus d'un univers, est la catégorie des applications différentiables, si A et B sont deux objets de C, l'ensemble des jets infinitésimaux d'un ordre donné de source $a \in A$ et de but $b \in B$ est muni d'une structure de variété différentiable. Il en résulte que les diverses applications considérées sont des applications différentiables.

Pour Charles Ehresmann il n'y a donc aucune nécessité de distinguer les diverses actions introduites dans les algèbres de contact précédentes. Le jet d'un quelconque morphisme est toujours le jet infinitésimal du germe d'une application différentiable, ce qui marque au niveau du calcul des jets une différence fondamentale. En particulier cette situation permet à Ehresmann d'itérer la construction des jets semi holonomes et des jets non holonomes afin de définir les jets d'ordre supérieur.

Terminons par quelques considérations étymologiques. Les qualificatifs « holonome » et « non holonome » sont issus de la mécanique. Pour le mécanicien, un système matériel est dit holonome quand la position de chaque point du système s'exprime au travers d'équations ou d'inéquations dépendantes du temps et d'un certain nombre de paramètres dits « primitifs », si de plus ces équations dépendent des dérivées par rapport au temps de ces paramètres primitifs, le système est dit non holonome.

Charles Ehresmann a repris ces qualificatifs en étendant leur signification, ce qui l'a amené à développer les jets holonomes et semi holonomes d'ordre supérieur, ces derniers s'insérant, comme on l'a vu, entre les jets holonomes et les jets non holonomes.

Pourquoi ces qualificatifs ? En réponse à cette question je ne puis que livrer mes propres réflexions. Si on considère la racine grecque « holo », son sens est bien connu des mathématiciens, nous la traduirons par « entier » au sens de « totalité ». Quant à « nomos » -autre racine grecque- elle concerne « ce qui est en partage », en particulier « la loi » et, dans une langue plus moderne, prend le sens d'unité administrative.

Un jet est donc qualifié d'holonome quand dans son mode de calcul les règles utilisées sont partout les mêmes. A savoir que pour le jet d'ordre 2 de $g \circ f$ en a par exemple, il suffit de composer celui de f en a avec celui de g en $f(a)$ puis de ne retenir que les termes de degré inférieur ou égal à 2. Cette règle simple est applicable quelque soit a. Pour les jets non holonomes cette règle n'est plus applicable, autrement dit le mode de calcul en a risque fort de différer du mode de calcul en a' (a' étant différent de a) ce qui « a posteriori » justifierait selon moi ces qualificatifs.

9.5 ALGEBRE DE CONTACT SUR C_b

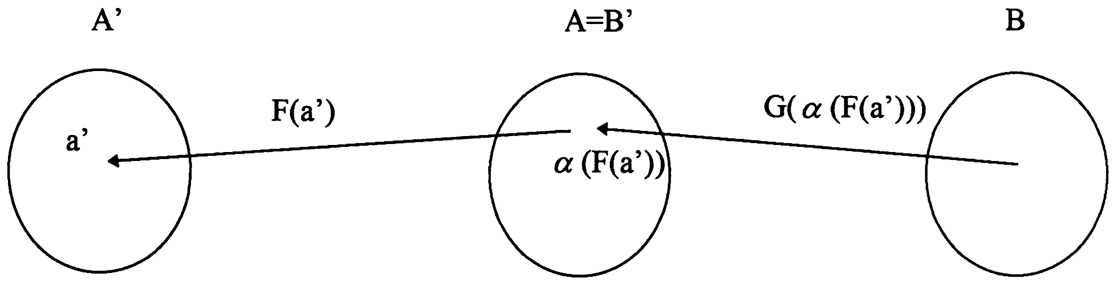
9.5.1 <u>LA CATEGORIE</u> C_b

On appelle **SECTION LOCALE DE** β sur la catégorie C toute application $F: A' \to C(A, A')$ où A' est une partie non vide de C_0, où $A = \alpha(F(A'))$ (c'est une partie non vide de C_0) et où $C(A, A')$ est l'ensemble des morphismes de C dont la source est dans A et le but dans A'. De plus F est telle que pour tout a' de A' on a $\beta(F(a')) = a'$.

Si $F: A' \to C(A, A')$ et $G: B' \to C(B, B')$ sont deux telles sections locales de β on note $F \hat{\circ} G$ leur composé. Il est défini par :

$$F \hat{\circ} G : A' \to C(B, A')$$
$$a' \mapsto (F \hat{\circ} G)(a') = F(a').G(\alpha(F(a'))).$$

si et seulement si $A = B'$.



L'ensemble des sections locales de β sur C est alors muni d'une structure de catégorie notée C_b dont les rétractions source et but sont notées α_b et β_b et définies par $\alpha_b(F) = i_A$, $\beta_b(F) = i_{A'}$ où $F: A' \to C(A, A')$ et $i_A : A \to C(A, A)$ est l'application définie par $a \mapsto i_A(a) = a$.

De même que pour la proposition 9.4.2 ; en ce qui concerne C_b nous avons.

9.5.2 PROPOSITION

Si (k, Φ, C) est une algèbre de contact alors (k_b, Φ, C_b) est une algèbre de contact où k_b est défini par :

$$k_b : \Phi \times C_b \to C_b \quad \text{avec} \quad \varphi F : A' \to C(A, A') \quad (\text{si on a } F : A' \to C(A, A'))$$
$$(\varphi, F) \mapsto k_b(\varphi, F) = \varphi F \qquad a' \mapsto (\varphi F)(a') = k(\varphi, F(a')) = \varphi F(a')$$

Si de plus φ préserve les unités de C alors φ préserve les unités de C_b.

(k_b, Φ, C_b) étant une algèbre de contact, on peut donc introduire un calcul des jets ainsi que la catégorie $J^\varphi C_b$ et le foncteur $J^\varphi : C_b \to J^\varphi C_b$.

$J^\varphi C_b$ a alors pour rétractions source et but les applications $(\alpha_b)^\varphi$ et $(\beta_b)^\varphi$ définies par :

$$(\alpha_b)^\varphi(J^\varphi F) = J^\varphi(\alpha_b(F)) = J^\varphi(i_A) \text{ et } (\beta_b)^\varphi(J^\varphi F) = J^\varphi(\beta_b(F)) = J^\varphi(i_B)$$

pour $F : B \to C(A, B)$ avec $F \in C_b$.

Concernant les morphismes de $J^\varphi C_b$ on peut énoncer comme en 9.4.3.

9.5.3 PROPOSITION

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact. On a les résultats suivants.

1- Si l'application $F: B \to C(A,B)$ est un morphisme de C_b alors au morphisme $J^{\varphi}F$ de $J^{\varphi}C_b$ on associe l'application $\begin{array}{l} B \to (J^{\varphi}C)(A,B) \\ b \mapsto J^{\varphi}(F(b)) \end{array}$.

2- Si de plus φ préserve les unités de C ($\varphi \in \Phi^0$ et de ce fait est idempotent) on peut alors identifier $J^{\varphi}(C_b)$ à une sous-catégorie de $\left(J^{\varphi}C\right)_b$.

9.5.4 PROLONGEMENTS

On peut reprendre mot pour mot les commentaires du paragraphe 9.4.4 en remplaçant $(\ )_s$ par $(\ )_b$ qui permet de construire l'algèbre (k_b,Φ,C_b) à partir de l'algèbre (k,Φ,C) et ainsi présenter, selon un diagramme similaire, les différents prolongements de la catégorie C_b .

9.6 ALGEBRE DE CONTACT SUR $C_{b\bullet}$

9.6.1 LA CATEGORIE $C_{b\bullet}$

La catégorie $C_{b\bullet}$ est formée des morphismes de C_b du type $F: A' \to C(A,A')$ pour lesquels on a distingué un élément a'_0 de A'. De tels morphismes seront notés (F,a'_0). Si (F,a'_0) et (G,b'_0) sont deux morphismes de $C_{b\bullet}$ on définit et on note leur composé comme suit (avec $G: B' \to C(B,B')$):

$(F,a'_0)\hat{\circ}(G,b'_0)$ est défini et égal à $(F\hat{\circ}G,a'_0)$ si et seulement si $A = B'$ et $\alpha(F(a'_0)) = b'_0$.

On note les rétractions source et but respectivement $\alpha_{b\bullet}$ et $\beta_{b\bullet}$. Elles sont définies par :

$$\alpha_{b\bullet}(F,a'_0) = (i_A,\alpha(F(a'_0))) \quad \text{et} \quad \beta_{b\bullet}(F,a'_0) = (i_{A'},a'_0).$$

De même que pour C_b nous avons pu énoncer la proposition 9.5.2, on énonce pour $C_{b\bullet}$ la proposition suivante.

9.6.2 PROPOSITION

Si (k,Φ,C) est une algèbre de contact alors $(k_{b\bullet},\Phi,C_{b\bullet})$ est une algèbre de contact où $k_{b\bullet}$ est défini par :

$$k_{b\bullet}:\Phi\times C_{b\bullet}\to C_{b\bullet}$$
$$(\varphi,(F,a'_0))\mapsto k_{b\bullet}(\varphi,(F,a'_0))=(\varphi F,a'_0)$$

avec

$$\varphi F: A'\to C(A,A') \qquad \text{(si on a } F: A'\to C(A,A')\text{)}.$$
$$a'\mapsto(\varphi F)(a')=k(\varphi,F(a'))=\varphi F(a')$$

Si de plus φ préserve les unités de C alors φ préserve les unités de $C_{b\bullet}$.

Il en résulte l'existence de la catégorie $J^{\varphi}(C_{b\bullet})$ et de ses rétractions $(\alpha_{b\bullet})^{\varphi}$ et $(\beta_{b\bullet})^{\varphi}$. Nous sommes désormais en mesure d'aborder la notion de φ-connexion.

10 φ-CONNEXIONS

En 10.5 il est fait usage dans C_0 et C de chemins, aussi la catégorie C sera-t-elle munie d'une topologie $\mathcal{T}$. On notera $\mathcal{T}_0$ la topologie induite par $\mathcal{T}$ sur C_0.

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact sur C et C_γ le groupoïde des inversibles de C, la restriction du foncteur J^φ à C_0 étant injective il en résulte que $J^\varphi C_\gamma$ est à la fois un groupoïde et une sous-catégorie de $J^\varphi C$. En effet si $f \in C$ est inversible on a alors $J^\varphi(f^{-1}) = (J^\varphi f)^{-1}$. Par contre si $f \in C$ est inversible, rien n'assure que φf le soit ; autrement dit savoir que (k,Φ,C) est une algèbre de contact n'implique pas automatiquement que $\left(k_{|\Phi\times C_\gamma},\Phi,C_\gamma\right)$ soit encore une algèbre de contact. D'ailleurs, vouloir imposer un tel comportement serait par trop restrictif en regard des algèbres de contact déjà rencontrées dans les exemples.

Pour toutes ces raisons, à chaque fois qu'un groupoïde sera évoqué, il le sera toujours comme sous-catégorie d'une catégorie sur laquelle aura été définie une structure d'algèbre de contact afin de pouvoir considérer des troncatures du type φf quand f appartient au groupoïde.

10.1 φ-CONNEXIONS

10.1.1 DEFINITION

(k,Φ,C) étant une algèbre de contact, on dit que X est un **φ-ELEMENT DE CONNEXION sur C en a_0** si et seulement si on a :

1- $X = J^\varphi F$, $F: A \to C(\{a_0\},A)$ et

2- F est une section locale de β telle que l'on ait $a_0 \in A$, $A \in \mathcal{T}_0$ et $F(a_0) = a_0$.

On montre sans peine qu'on a indépendamment du choix de F dans le jet X :
$(\alpha_b)^\varphi(X) = J^\varphi i_{\{a_0\}}, (\beta_b)^\varphi(X) = J^\varphi i_A, J^\varphi(\alpha\circ F) = J^\varphi(A \to \{a_0\}), J^\varphi(\beta\circ F) = J^\varphi(Id_A)$.

On note $Q^\varphi(C,a_0)$ l'ensemble des φ-éléments de connexion sur C en a_0 et on pose $Q^\varphi(C) = \bigcup_{a_0\in C_0} Q^\varphi(C,a_0)$.

On peut également définir de manière tout à fait duale la notion de φ-coélément de connexion sur C en a_0.

10.1.2 DEFINITION

(k,Φ,C) étant une algèbre de contact, on dit que X est un **φ-COELEMENT DE CONNEXION sur C en a_0** si et seulement si on a :

1- $X = J^{\varphi}F$, $F: A \to C(A,\{a_0\})$ et

2- F est une section locale de α telle que l'on ait $a_0 \in A$, $A \in \mathcal{T}_0$ et $F(a_0) = a_0$.

On note $Q^{\varphi *}(C,a_0)$ l'ensemble des φ-coéléments de connexion sur C en a_0 et on pose $Q^{\varphi *}(C) = \bigcup_{a_0 \in C_0} Q^{\varphi *}(C,a_0)$.

Dans le cas où C est un groupoïde on note σ l'application $\sigma: C \to C$ définie par $f \mapsto \sigma(f) = f^{-1}$.

Dans ce cas, à tout $X \in Q^{\varphi}(C)$ on associe $X' \in Q^{\varphi *}(C)$ tel que si $X = J^{\varphi}F$ avec $F: A \to C(\{a_0\},A)$ alors $X' = J^{\varphi}(\sigma \circ F)$ avec $\sigma \circ F: A \to C(A,\{a_0\})$ définie par $(\sigma \circ F)(a) = (F(a))^{-1}$.

10.1.3 DEFINITION

Toute application $q: C_0 \to Q^{\varphi}(C)$ est dite **φ-CONNEXION sur C**

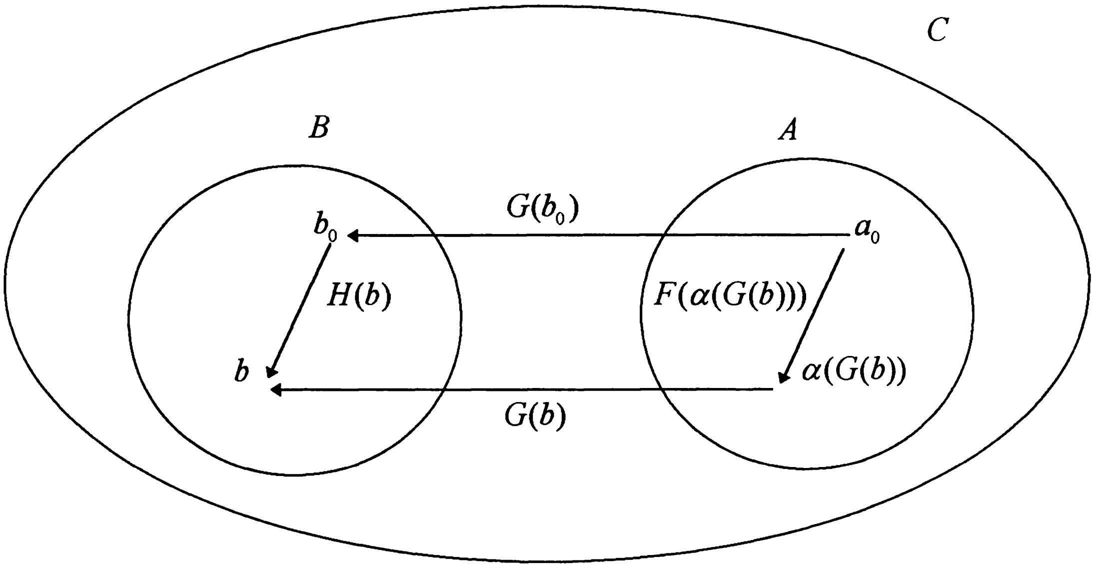
Dans la suite nous allons étudier différentes actions sur $Q^{\varphi}(C)$ où C sera désormais un groupoïde.

10.2 ACTION DE $J^{\varphi}(C_{b\bullet})$ SUR $Q^{\varphi}(C)$

Soit $X \in Q^{\varphi}(C,a_0)$, on pose $X = J^{\varphi}F$ où $F: A \to C(\{a_0\},A)$ est une section locale de β en a_0 avec $a_0 \in A$ et $F(a_0) = a_0$. Soit $Z \in J^{\varphi}(C_{b\bullet})$, on pose $Z = J^{\varphi}(G,b_0)$ où $G: B \to C(A,B)$ est une section locale de β avec $b_0 \in B$, $\alpha(G(b_0)) = a_0$ et B une partie non vide de C_0 appartenant à $\mathcal{T}_0$.

On définit alors l'application $H: B \to C$ par $b \mapsto H(b) = G(b).F(\alpha(G(b))).(G(b_0))^{-1}$ où $(G(b_0))^{-1}$ est défini, C étant un groupoïde.

On illustre cette action par le schéma suivant.



Montrons que $Y = J^{\varphi}H$ est un φ-élément de connexion sur C en b_0.

En effet on a $H(b_0) = b_0$ et pour tout b de B on a $\beta(H(b)) = \beta(G(b)) = b$ (car G est une section locale de β) et $\alpha(H(b)) = \alpha((G(b_0))^{-1}) = \beta(G(b_0)) = b_0$ d'où le résultat. On peut donc écrire plus précisément $H: B \to C(\{b_0\}, B)$.

Montrons que Y ne dépend pas du choix de F représentant de la classe $X = J^{\varphi}F$ ni de celui de (G, b_0) dans la classe $Z = J^{\varphi}(G, b_0)$.

Soit $F': A \to C(\{a_0\}, A)$ une section locale de β telle que $\varphi F' = \varphi F$, $F'(a_0) = a_0$ et soit $G': B \to C(A, B)$ une section locale de β telle que $\varphi G' = \varphi G$, $\alpha(G'(b_0)) = a_0$. On définit alors $H': B \to C(\{b_0\}, B)$ avec $H'(b) = G'(b).F'(\alpha(G'(b))).(G'(b_0))^{-1}$ ce que l'on peut encore écrire $H'(b) = (G' \hat{\circ} F')(b).(G'(b_0))^{-1}$ (c.f 9.5.1). Nous allons donc montrer qu'on a $\varphi H' = \varphi H$. Pour ce faire établissons le résultat suivant.

LEMME

(k, Φ, C) étant une algèbre de contact telle que $\varphi \in \Phi$, $f \in C$, $g \in C$. Si $\varphi f = \varphi g$ et si f^{-1} et g^{-1} existent alors $\varphi(f^{-1}) = \varphi(g^{-1})$.

Δ On a vu en 7.1.1 que $X = J^{\varphi}f$ est inversible (avec $X \in J^{\varphi}(e, e')$) si et seulement si il existe $X' \in J^{\varphi}(e', e)$ tel que $X.X' = J^{\varphi}e$ et $X'.X = J^{\varphi}e'$. En particulier si

$X = J^{\varphi}f$ et si f^{-1} et g^{-1} existent, sachant que $\varphi f = \varphi g$ alors on a $X = J^{\varphi}f = J^{\varphi}g$ et $X' = J^{\varphi}f^{-1} = J^{\varphi}g^{-1}$ d'où $\varphi(f^{-1}) = \varphi(g^{-1})$. ∇

Pour tout b de B on a :

$$\begin{aligned}\varphi(H'(b)) &= \varphi\left[G'(b).F'(\alpha(G'(b))).(G'(b_0))^{-1}\right] \\ &= \varphi\left[\varphi\left[G'(b).F'(\alpha(G'(b)))\right].\varphi\left[(G'(b_0))^{-1}\right]\right].\end{aligned}$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\varphi\left[G'(b).F'(\alpha(G'(b)))\right] &= \varphi\left[\varphi\left[G'(b)\right].\varphi\left[F'(\alpha(G'(b)))\right]\right] \\ &= \varphi\left[(\varphi G')(b).(\varphi F')(\alpha(G'(b)))\right] \\ &= \varphi\left[(\varphi G)(b).(\varphi F)(\alpha(G'(b)))\right]\end{aligned}$$

car $\varphi F' = \varphi F$ et $\varphi G' = \varphi G$.

Comme $\varphi\left[G(b)\right].\varphi\left[F(\alpha(G'(b)))\right]$ est défini on a $G(b).F(\alpha(G'(b)))$ qui est également défini il en résulte alors :

$$\alpha(G(b)) = \beta(F(\alpha(G'(b)))) = \alpha(G'(b))$$

d'où ce qui suit .

$$\begin{aligned}\varphi\left[G'(b).F'(\alpha(G'(b)))\right] &= \varphi\left[(G'\hat{\circ}F')(b)\right] \\ &= \varphi\left[(\varphi G)(b).(\varphi F)(\alpha(G'(b)))\right] \\ &= \varphi\left[G(b).F(\alpha(G'(b)))\right] \\ &= \varphi\left[G(b).F(\alpha(G(b)))\right] \\ &= \varphi\left[(G\hat{\circ}F)(b)\right].\end{aligned}$$

Appliquons le lemme à $G'(b_0)$ et $G(b_0)$ ce qui nous conduit à $\varphi\left[(G'(b_0))^{-1}\right] = \varphi\left[(G(b_0))^{-1}\right]$.

En reportant tous ces résultats dans l'expression de $\varphi(H'(b))$ on montre facilement qu'on a pour tout b de B : $(\varphi H')(b) = (\varphi H)(b)$ et donc $\varphi H' = \varphi H$, ce qui achève cette démonstration.

10.2.1 DEFINITION

La catégorie C sera dite **LOCALEMENT TRANSITIVE** si et seulement si pour tout a_0 de C_0 il existe $F\colon A \to C(\{a_0\}, A)$ section locale de β définie sur $A \in \mathcal{T}_0$ telle que $a_0 \in A$ et $F(a_0) = a_0$.

10.2.2 PROPOSITION

Dans le cas où C est un groupoïde localement transitif il existe une espèce de structures notée $\left(Q^{\varphi}(C), J^{\varphi}(C_{b\bullet}), K'\right)$ où K' est l'application définie par :

$$K' : J^{\varphi}(C_{b\bullet}) * Q^{\varphi}(C) \to Q^{\varphi}(C)$$
$$(Z,X) \mapsto K'(Z,X) = J^{\varphi}H$$

où $J^{\varphi}(C_{b\bullet}) * Q^{\varphi}(C)$ est l'ensemble formé des couples (Z,X) où $Z = J^{\varphi}(G,b_0)$ avec $G : B \to C(A',B)$, $B \in \mathcal{T}_0$ et $X = J^{\varphi}F$ avec $F : A \to C(\{a_0\}, A)$, $A' = A$ et $\alpha(G(b_0)) = a_0$. On a alors $K'(Z,X) = J^{\varphi}H$ avec $H : B \to C(\{b_0\}, B)$ définie par $b \mapsto (G \hat{\circ} F)(b).(G(b_0))^{-1}$.

Δ On a vu que $K'(Z,X) = J^{\varphi}H$ est indépendant du choix de F et du choix de G, par conséquent la définition de K' est justifiée. On pose dans la suite $K'(Z,X) = ZX$.

1- Dans l'hypothèse où ZX, $Z'(ZX)$ et $Z'\hat{\circ}Z$ sont définis, montrons qu'on a $(Z'\hat{\circ}Z)X = Z'(ZX)$.

Soit $Z = J^{\varphi}(G,b_0)$ avec $G : B \to C(A,B)$ et soit $Z' = J^{\varphi}(G',b'_0)$ avec $G' : B' \to C(B,B')$ tel que $\alpha(G'(b'_0)) = b_0$. On a donc $Z'\hat{\circ}Z = J^{\varphi}(G'\hat{\circ}G, b'_0)$. On peut donc écrire :

$$(Z'\hat{\circ}Z)X = J^{\varphi}\left(B' \to C(\{b'_0\}, B')\right)$$
$$b' \mapsto [((G'\hat{\circ}G)\hat{\circ}F)(b')].[(G'\hat{\circ}G)(b'_0)]^{-1}$$

par ailleurs on a:
$$ZX = J^{\varphi}\left(B \to C(\{b_0\}, B)\right)$$
$$b \mapsto [(G\hat{\circ}F)(b)].[G(b_0)]^{-1}$$

puis
$$Z'(ZX) = J^{\varphi}\left(B' \to C(\{b'_0\}, B')\right)$$
$$b' \mapsto [(G'\hat{\circ}(G\hat{\circ}F))(b')].[G(b_0)]^{-1}.[G'(b'_0)]^{-1},$$

or $G'\hat{\circ}(G\hat{\circ}F) = (G'\hat{\circ}G)\hat{\circ}F$ et

$$[G(b_0)]^{-1}.[G'(b'_0)]^{-1} = [G'(b'_0).G(b_0)]^{-1} = [(G'\hat{\circ}G)(b'_0)]^{-1}$$

de là il s'en suit $Z'(ZX) = (Z'\hat{\circ}Z)X$.

2- Montrons que si $X \in Q^{\varphi}(C,a_0)$ il existe un unique $Z \in \left(J^{\varphi}(C_{b\bullet})\right)_0$ tel que ZX soit défini et égal à X.

Soit $X = J^\varphi F$ avec $F: A \to C(\{a_0\}, A)$ et posons $Z = J^\varphi(i_{A'}, a'_0)$. ZX n'est défini que si $A' = A$ et $\alpha(i_{A'}(a'_0)) = \alpha(a'_0) = a'_0 = a_0$ d'où l'unique Z cherché, soit $Z = J^\varphi(i_A, a_0)$.

3- Montrons qu'on a $(Z, X) \in J^\varphi(C_{b\bullet}) * Q^\varphi(C)$ si et seulement si $\left((\alpha_{b\bullet})^\varphi(Z), X\right) \in J^\varphi(C_{b\bullet}) * Q^\varphi(C)$.

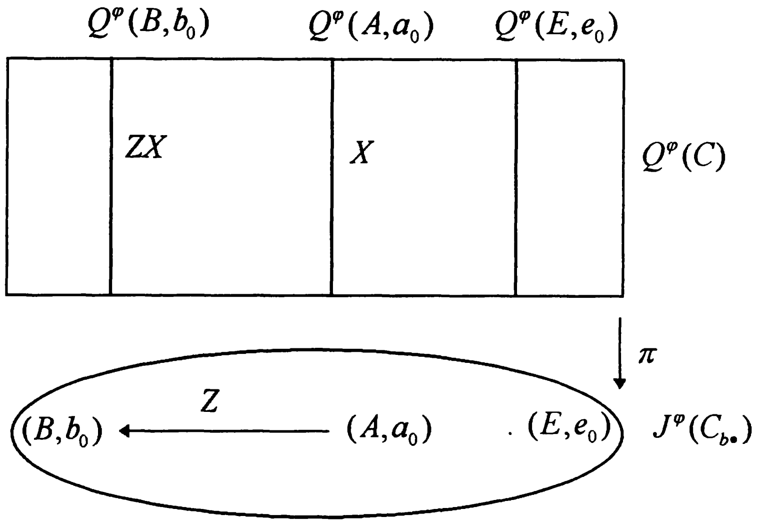
On pose $Z = J^\varphi(G, b_0)$ avec $G: B \to C(A, B)$ et $X = J^\varphi F$ avec $F: A \to C(\{a_0\}, A)$. On a alors $(\alpha_{b\bullet})^\varphi(Z) = J^\varphi(i_{A'}, \alpha(G(b_0)))$. On peut donc écrire ZX est défini si et seulement si $A' = A$ et $\alpha(G(b_0)) = a_0$. On a également $\left((\alpha_{b\bullet})^\varphi(Z)\right)X$ défini si et seulement si $A' = A$ et $\alpha(G(b_0)) = a_0$. Il en résulte que ZX est défini si et seulement si $\left((\alpha_{b\bullet})^\varphi(Z)\right)X$ défini.

4- Montrons que pour tout $Z \in \left(J^\varphi(C_{b\bullet})\right)_0$ il existe $X \in Q^\varphi(C)$ tel que ZX soit défini.

Soit $Z = J^\varphi(i_A, a_0)$, on pose $X = J^\varphi F$. C étant localement transitif, un tel X existe car il existe une section locale de β, notée ici $F: A \to C(\{a_0\}, A)$.

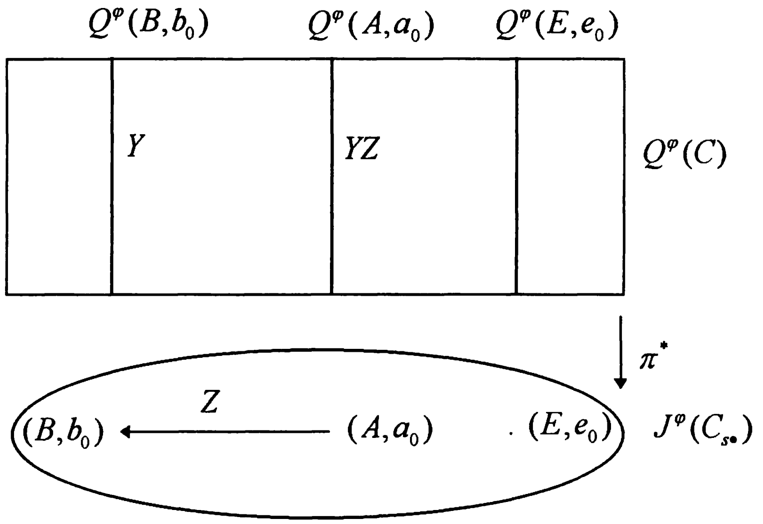
On note $Q^\varphi(A, a_0)$ l'ensemble des φ-éléments de connexion sur C en a_0 de la forme $X = J^\varphi F$ avec $F: A \to C(\{a_0\}, A)$.

On peut donc illustrer la situation présente, soit $\left(Q^\varphi(C), J^\varphi(C_{b\bullet}), K'\right)$, par le schéma suivant.



∇

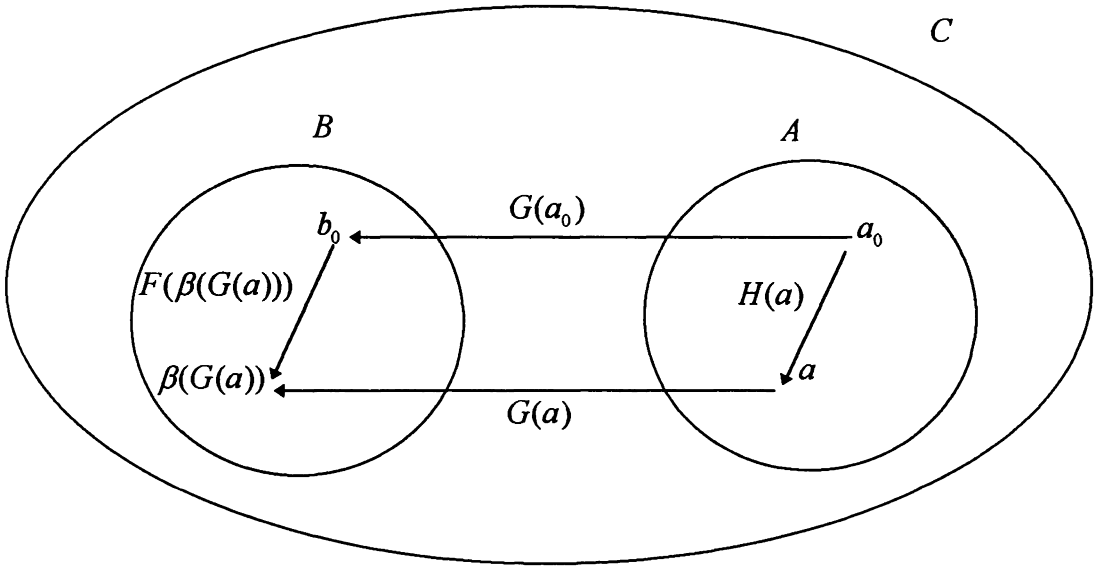
Noter qu'on a de manière tout à fait duale l'espèce de structures $\left(Q^{\varphi}(C), J^{\varphi}(C_{s\bullet}), K'^{*}\right)$.



Avec $Y = J^{\varphi}F$ où F est l'application $F: B \to C(\{b_0\}, B)$ et $Z = J^{\varphi}(G, a_0)$, où G est l'application $G: A \to C(A,B)$ telle que $\beta(G(a_0)) = b_0$, on a alors $YZ = J^{\varphi}H$, avec $H: A \to C(A,B)$ où $H(a) = (G(a))^{-1}.F(\beta(G(a))).G(a_0)$. On vérifie sans peine qu'on a $H(a_0) = a_0$ et pour tout a de A :

$$\alpha(H(a)) = \alpha(G(a_0)) = a_0 \text{ et } \beta(H(a)) = \beta((G(a))^{-1}) = \alpha(G(a)) = a.$$

Ce qui montre que $YZ = J^{\varphi}H$ appartient à $Q^{\varphi}(A, a_0)$.
On illustre cette situation par le diagramme suivant.



10.3 CONNEXION ET ELEMENTS DE CONTACT

10.3.1 DEFINITIONS

Soit (k,Φ,C) une algèbre de contact, soit A une partie non vide de C_0, on considère l'application $F: A \to J^{\varphi}C$.

1- F est un **FLOT** sur A si et seulement si $\forall a \in A \;\; \alpha^{\varphi}(F(a)) = J^{\varphi}a$, ce qui équivaut à écrire $\forall a \in A \;\; F(a) \subset C(\{a\}, C_0)$.

2- F est un **CHAMP** sur A si et seulement si $\forall a \in A \;\; \beta^{\varphi}(F(a)) = J^{\varphi}a$, ce qui équivaut à écrire $\forall a \in A \;\; F(a) \subset C(C_0, \{a\})$.

3- En particulier si F est un champ sur A tel que $\forall a \in A \;\; \alpha^{\varphi}(F(a)) = J^{\varphi}e$ (avec $e \in C_0$) alors l'application suivante :

$$\begin{aligned} \overline{F}: A &\to P_e^{\varphi}A \\ a &\mapsto F(a).H^{\varphi}(e) \end{aligned}$$

est un **CHAMP de (φ,e)-éléments de contact** sur A.

L'existence d'un φ-élément de connexion en a_0 permet précisément d'être dans ce dernier cas.

10.3.2 PROPOSITION

Pour tout $X \in Q^{\varphi}(A,a_0)$ on définit sur A un champ de (φ,a_0)-éléments de contact, c'est à dire une application de A vers $P_{a_0}^{\varphi}A$. De plus, si C est un groupoïde, si a et a' sont deux éléments de A alors les deux (φ,a_0)-éléments de contact associés respectivement à a et à a' sont en bijection.

Δ Soit $X \in Q^{\varphi}(A,a_0)$ tel que $X = J^{\varphi}F$ avec $F: A \to C(\{a_0\}, A)$. On définit l'application notée encore X de A dans $J^{\varphi}C$ par $a \mapsto X(a) = J^{\varphi}F(a)$ qui ne dépend que de X. On peut alors définir le champ de (φ,a_0)-éléments de contact $\overline{X}: A \to P_{a_0}^{\varphi}A$ par $a \mapsto \overline{X}(a) = (J^{\varphi}F(a)).H^{\varphi}(a_0)$.

C étant un groupoïde, $\forall a \in A \;\; (F(a))^{-1}$ existe. Montrons alors que pour tout $f \in F(a)$ on a $F(a').(F(a))^{-1}.f \in J^{\varphi}F(a')$.

$$
\begin{aligned}
J^{\varphi}(F(a').(F(a))^{-1}.f) &= J^{\varphi}F(a').J^{\varphi}[(F(a))^{-1}].J^{\varphi}f \\
&= J^{\varphi}F(a').J^{\varphi}[(F(a))^{-1}].J^{\varphi}F(a) \qquad (f \in J^{\varphi}F(a)\ ) \\
&= J^{\varphi}F(a').J^{\varphi}((F(a))^{-1}.F(a)) \\
&= J^{\varphi}F(a').J^{\varphi}a_0 \\
&= J^{\varphi}(F(a').a_0) \\
&= J^{\varphi}F(a')
\end{aligned}
$$

Enfin on montre sans difficulté que l'application $J^{\varphi}F(a) \to J^{\varphi}F(a')$ définie par $f \mapsto F(a').(F(a))^{-1}.f$ est bijective, la bijection entre les deux (φ,a_0)-éléments de contact $\overline{X}(a)$ et $\overline{X}(a')$ s'en déduit immédiatement. ∇

10.3.3 <u>PROPOSITION</u>

C étant un groupoïde, soit $X \in Q^{\varphi}(A,a_0)$ et $e \in C_0$ tel que $C(e,a_0) \neq \varnothing$, pour tout $f \in C(e,a_0)$ on définit le champ noté $\overline{Xf}$ de (φ,e)-éléments de contact sur A par :

$$
\begin{aligned}
\overline{Xf} : A &\to P_e^{\varphi}A \\
a &\mapsto J^{\varphi}(F(a).f).H^{\varphi}(e)
\end{aligned}
$$

Si on note G_e le groupe $C(e,e)$ alors l'ensemble des champs de la forme $\overline{Xf}$ est globalement invariant sous l'action à droite du groupe G_e définie par $(\overline{Y},g) \mapsto \overline{Y.g}$.

Δ On pose $X = J^{\varphi}F$ et $Xf = J^{\varphi}G$ avec $G: A \to C(\{e\},A)$ définie par $a \mapsto G(a) = F(a).f$. Montrons que Xf ne dépend pas du choix de F. Soit F' tel que $\varphi F' = \varphi F$, on définit alors $G': A \to C(\{e\},A)$ par $a \mapsto G'(a) = F'(a).f$. On a donc pour tout a de A :

$$
\begin{aligned}
(\varphi G')(a) &= \varphi G'(a) \\
&= \varphi(F'(a).f) \\
&= \varphi(\varphi F'(a).\varphi f) \\
&= \varphi((\varphi F')(a).\varphi f) \\
&= \varphi((\varphi F)(a).\varphi f) \\
&= \varphi(\varphi F(a).\varphi f) \\
&= \varphi(F(a).f) \\
&= \varphi G(a) \\
&= (\varphi G)(a)
\end{aligned}
$$

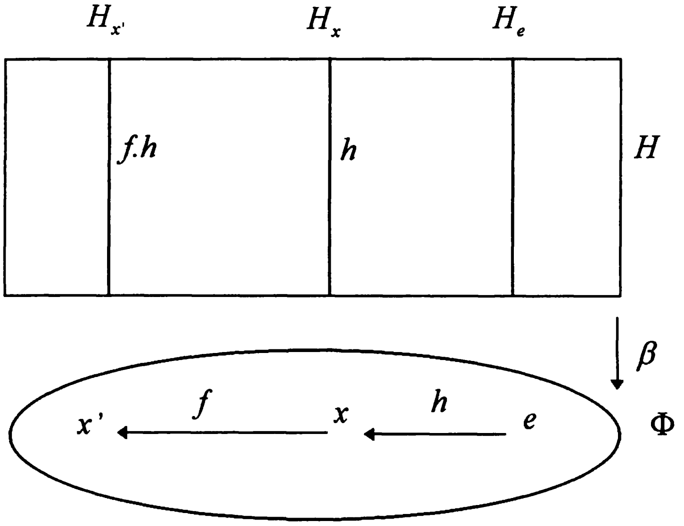
d'où $\varphi G' = \varphi G$.

Finalement l'application $A \to P_e^{\varphi}A$ définie par $a \mapsto (J^{\varphi}G(a)).H^{\varphi}(e)$ qu'on notera $\overline{Xf}$ est bien un champ de (φ,e)-éléments de contact sur A. L'invariance par rapport à l'action du groupe G_e s'établit sans difficulté. ∇

10.4 DIFFERENTIELLE ABSOLUE

Soit (C,E,k') une espèce de structures où C est un groupoïde transitif. Compte tenu des remarques formulées en introduction à ce chapitre, C est également une sous-catégorie d'une catégorie C' telle qu'une structure d'algèbre de contact y ait été définie. Soit $e \in C_0$, on pose $H = C(\{e\},C_0)$ et pour tout x de C_0 on pose $H_x = C(e,x)$. En particulier $H_e = C(e,e)$ est un groupe noté G_e. La fibration $H[\ C_0\ ,\ G_e\ ,\ {}_tG_e\ ,\ C\ ]$ est alors la fibration principale de surjection β attachée à (C,E,k'). L'action $C \times H \to H$ de C sur H est définie par $(f,h) \mapsto f.h$ si et seulement si $h \in H_{\alpha(f)}$ et dans ce cas on a $f.h \in H_{\beta(f)}$.

Cette situation est illustrée par le diagramme ci-dessous.



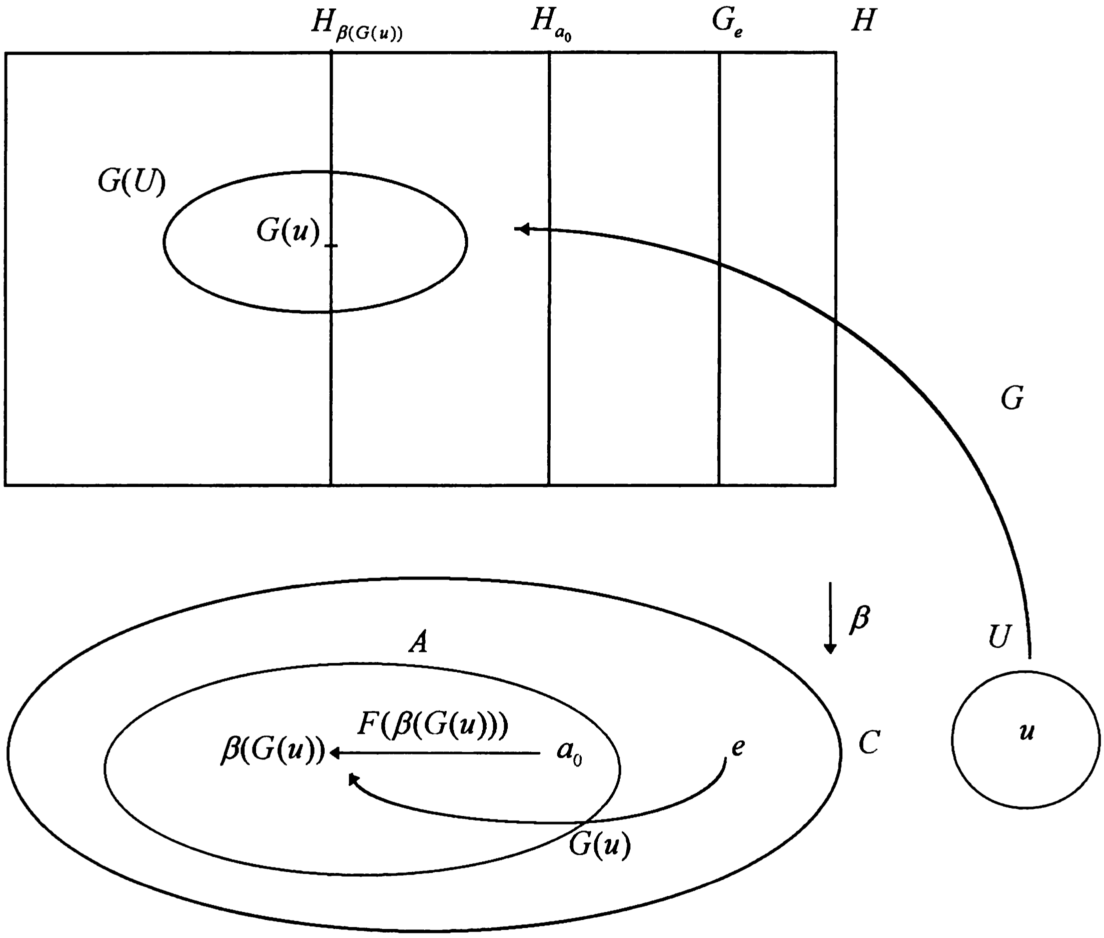
Soit $X \in Q^\varphi(A,a_0)$. On pose $X = J^\varphi F$ avec $F{:}A \to C(\{a_0\},A)$. Soit U un ensemble non vide et $G{:}U \to H$ une application telle que $Y = J^\varphi G \in J^\varphi(H^U)$ et vérifiant $\forall u \in U\ \ \beta(G(u)) \in A$. On pose alors :

$$K{:}U \to H_{a_0}$$
$$u \mapsto K(u) = \left(F(\beta(G(u)))\right)^{-1}.G(u).$$

On note $J^\varphi K = (X^{-1}\beta Y) \bullet Y$. Montrons que $(X^{-1}\beta Y) \bullet Y$ ne dépend ni du choix de F dans X ni du choix de G dans Y.

Soit $F'{:}A \to C(\{a_0\},A)$ telle que $\varphi F' = \varphi F$, soit $G'{:}U \to C$ telle que $\forall u \in U\ \ \beta(G'(u)) \in A$ et $\varphi G' = \varphi G$. On définit alors $K'{:}U \to C$ par $u \mapsto K'(u) = \left(F'(\beta(G'(u)))\right)^{-1}.G'(u)$.

Illustrons cette situation par le diagramme suivant.



Reste à montrer qu'on a $\varphi K' = \varphi K$ soit à montrer qu'on a $\forall u \in U \;\; \varphi(K'(u)) = \varphi(K(u))$. On écrit donc pour tout u de U :

$$\begin{aligned}\varphi(K'(u)) &= \varphi\left[\left(F'(\beta(G'(u)))\right)^{-1}.G'(u)\right] \\ &= \varphi\left[\varphi\left(\left(F'(\beta(G'(u)))\right)^{-1}\right).\varphi(G'(u))\right].\end{aligned}$$

Sachant que $\varphi G' = \varphi G$ on a $\forall u \in U \;\; \varphi(G'(u)) = \varphi(G(u))$. Montrons qu'on a $\varphi[F'(\beta(G'(u)))] = \varphi[F(\beta(G(u)))]$.

De $\varphi F' = \varphi F$ on déduit $\varphi[F'(\beta(G'(u)))] = \varphi[F(\beta(G'(u)))]$. Comme $\varphi G' = \varphi G$ et d'après 1.1.3 1- on a $\beta(G'(u)) = \beta(\varphi G'(u)) = \beta(\varphi G(u)) = \beta(G(u))$ d'où l'on tire :

$$\begin{aligned}\varphi\left(F'(\beta(G'(u)))\right) &= \varphi\left(F(\beta(G'(u)))\right) \\ &= \varphi\left(F(\beta(G(u)))\right).\end{aligned}$$

A cette dernière égalité on applique le lemme du paragraphe 10.2 et on a $\varphi\left((F'(\beta(G'(u))))^{-1}\right) = \varphi\left((F(\beta(G(u))))^{-1}\right)$, on a donc $\forall u \in U \quad \varphi(K'(u)) = \varphi(K(u))$ soit $\varphi K' = \varphi K$. Ce qui achève de montrer que $J^{\varphi}K$ est indépendant de F et de G, ce dont rend compte la notation $J^{\varphi}K = (X^{-1}\beta Y) \bullet Y$.

Dans la notation précédente on a $X^{-1}\beta Y = J^{\varphi}(\sigma \circ F \circ \beta \circ G)$ où σ est l'application $\sigma : C \to C$ définie par $f \mapsto f^{-1}$ $X = J^{\varphi}F$, $Y = J^{\varphi}G$ et l'opérateur noté « $\circ$ » n'est autre que la composition des fonctions. Noter que J^{φ} ne saurait être un foncteur relativement à la composition des fonctions, en dépit de ses avantages cette notation doit donc être utilisée avec prudence.

10.4.1 DEFINITION

$(X^{-1}\beta Y) \bullet Y$ est la **φ-DIFFERENTIELLE ABSOLUE** de Y par rapport à X et est notée $d_X^{\varphi}Y$ ou φ-différentielle absolue de G par rapport à X et notée $d_X^{\varphi}G$.

Remarques

1- Si G est une section locale de β, on a $\beta(G(u)) = u$ et $K(u) = (F(u))^{-1}.G(u)$ et donc $J^{\varphi}K = (X^{-1}\beta Y) \bullet Y = X^{-1} \bullet Y$, soit $d_X^{\varphi}Y = X^{-1} \bullet Y$.

2- Le φ-élément de connexion X joue (dans cette définition) un rôle tout à fait semblable à celui dévolu à la section admissible s dans la définition de la (s,φ)-différentielle.

3- Si $U = \beta^{-1}(A)$ est une partie non vide de H telle que $G = Id_U$ on a alors avec $K : U \to H_{a_0}$:

$$\begin{aligned} K(u) &= \left[F(\beta(G(u)))\right]^{-1}.G(u) \\ &= \left[F(\beta(u))\right]^{-1}.G(u) \\ &= \left[F(\beta(u))\right]^{-1}.u \end{aligned}$$

Pour $h \in H_{a_0}$ on définit l'application notée :

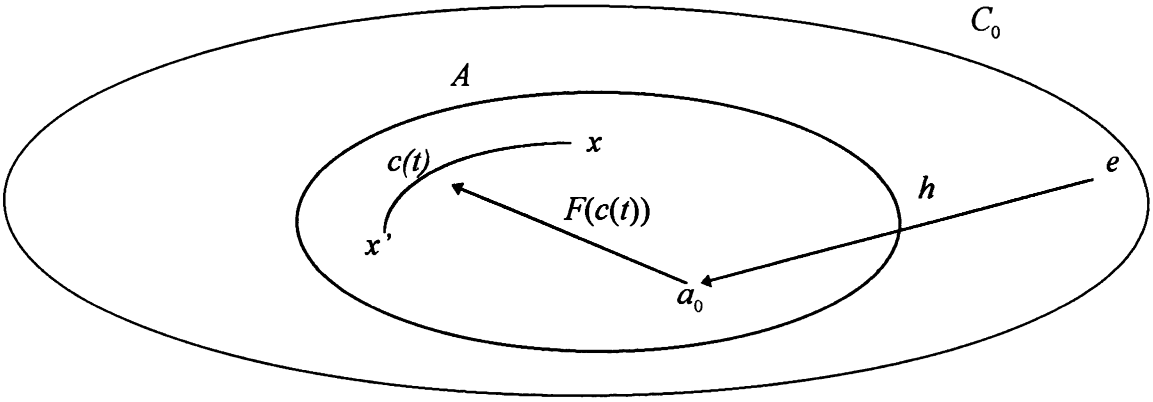
$$\left[h^{-1}.d_X^{\varphi}(J^{\varphi}Id_U)\right] : U \to J^{\varphi}(G_e)$$
$$u \mapsto h^{-1}.J^{\varphi}\left(\left[F(\beta(u))\right]^{-1}.u\right) = J^{\varphi}\left(h^{-1}.\left[F(\beta(u))\right]^{-1}.u\right).$$

A $d_X^{\varphi}(J^{\varphi}Id_U)$ on associe donc canoniquement une application de U dans $J^{\varphi}(G_e)$.

10.5 GROUPOIDE ET GROUPE D'HOLONOMIE

C est désormais une catégorie topologique. $J^\varphi C$ est alors une catégorie topologique munie de la topologie quotient déduite de celle définie sur C par passage au quotient par la relation d'équivalence « $f \overset{\varphi}{\approx} g \Leftrightarrow \varphi f = \varphi g$ ». Dans toute la suite « chemin » signifiera « application continue définie sur $[0,1]$ ». Toutes les applications considérées dans ce paragraphe (sections locales, chemins etc) seront donc des applications continues, en particulier F telle que $X = J^\varphi F$ avec $X \in Q^\varphi(A,a_0)$.

Soit $X \in Q^\varphi(A,a_0)$, soit $c:[0,1] \to A$ un chemin dans A, $A \in \mathcal{T}_0$ et soit $h \in C(e,a_0)$.



L'application notée $F(c) \bullet h:[0,1] \to H$ définie par $t \mapsto F(c(t)).h$ est alors un chemin dans H et ne dépend que de F, c, et h où h est considéré comme le chemin constant $t \mapsto h$.

Par contre l'application $[0,1] \to J^\varphi H$ définie par $t \mapsto J^\varphi(F(c(t)).h)$ ne dépend que de X, c, $J^\varphi h$. En effet considérons l'application F' telle que $\varphi F' = \varphi F$, on montre qu'on a $\forall t \in [0,1]$ $J^\varphi(F'(c(t)).h) = J^\varphi(F(c(t)).h)$ car pour tout $t \in [0,1]$ on a $J^\varphi(F'(c(t)).h) = J^\varphi(F'(c(t))).J^\varphi h$ et comme $c(t) \in A$ et $\varphi F' = \varphi F$ il vient $J^\varphi(F'(c(t))) = J^\varphi(F(c(t)))$ d'où le résultat.

On peut donc noter cette dernière application $X(c) \bullet J^\varphi h$ où $J^\varphi h$ est considéré comme le chemin constant $t \mapsto J^\varphi h$.

Si on pose $x = c(0)$, $z = F(x).h$, $x' = c(1)$, $z' = F(x').h$ on aura alors $\left(X(c) \bullet J^\varphi h\right)(0) = J^\varphi(F(x).h) = J^\varphi z$ ainsi que $\left(X(c) \bullet J^\varphi h\right)(1) = J^\varphi(F(x').h) = J^\varphi z'$.

$X(c) \bullet J^\varphi h$ est donc un chemin qui va de $J^\varphi z$ à $J^\varphi z'$.

En supposant que C soit désormais un groupoïde topologique et une sous-catégorie topologique de la catégorie topologique C' sur laquelle est définie une structure d'algèbre de contact, nous allons examiner successivement de quelle manière un chemin dans H (resp. dans $J^\varphi H$) peut se décomposer en un chemin dans C_0 puis en un chemin dans H_{a_0} (resp. dans $J^\varphi H_{a_0}$) en raison de l'existence d'une section locale $F: A \to C(\{a_0\}, A)$ de β (resp. d'un élément de connexion $X \in Q^\varphi(A, a_0)$).

10.5.1 PROPOSITION

Soit $F: A \to C(\{a_0\}, A)$ une section locale de β telle que $F(a_0) = a_0$ et soit c un chemin dans $\beta^{-1}(A) \subset H$. On associe alors à c :

1- un unique chemin dans A noté c_A et défini $\forall t \in [0,1]$ par $c_A(t) = \beta(c(t))$ et

2- un unique chemin dans H_{a_0} noté c_0 et défini pour tout t de $[0,1]$ par $c_0(t) = F(\beta(c(t)))^{-1}.c(t)$.

On vérifie de plus $\forall t \in [0,1]$ $c(t) = F(c_A(t)).c_0(t)$ ou $c = (F \circ c_A) \bullet c_0$.

Δ On a $\forall t \in [0,1]$:

$$F(c_A(t)).c_0(t) = F(\beta(c(t))).\big(F(\beta(c(t)))\big)^{-1}.c(t) = c(t)$$

Supposons qu'il existe deux chemins c'_A et c'_0 respectivement dans A et dans H_{a_0} tels que $\forall t \in [0,1]$ on ait $c(t) = F(c'_A(t)).c'_0(t) = F(c_A(t)).c_0(t)$. De la relation précédente on tire $\forall t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned} & \beta(c(t)) = \beta\big(F(c'_A(t)).c'_0(t)\big) = \beta\big(F(c_A(t)).c_0(t)\big) \\ \Rightarrow\ & \beta[F(c'_A(t))] = \beta[F(c_A(t))] \\ \Rightarrow\ & c'_A(t) = c_A(t) \qquad\qquad (F \text{ section locale de } \beta). \end{aligned}$$

Par ailleurs on a $\forall t \in [0,1]$ $F(c'_A(t)) = F(c_A(t))$ et comme $F(c_A(t))$ est inversible il vient $\forall t \in [0,1]$ $c'_0(t) = c_0(t)$ et donc $c'_0 = c_0$. ∇

Introduisons l'application $\varpi: J^\varphi H \to C'$ définie par $J^\varphi h \mapsto \varpi(h) = \varphi h$, cette application associe à chaque jet un représentant canonique de ce dernier et naturellement $\varpi(h)$ est indépendant du choix de h dans le jet $J^\varphi h$.

Si φ est idempotent alors ϖ est une section de J^φ ce qui signifie que pour tout Y de $J^\varphi H$ on a $J^\varphi(\varpi(Y)) = Y$.

10.5.2 PROPOSITION

Soit $X \in Q^{\varphi}(A,a_0)$ et soit c un chemin dans $J^{\varphi}\left(\beta^{-1}(A)\right) \subset J^{\varphi}H$. On associe alors au chemin c :

1- un unique chemin dans A noté c_A et défini $\forall t \in [0,1]$ par $c_A(t) = \beta(\varpi(c(t)))$ et

2- un unique chemin dans $J^{\varphi}H_{a_0}$ noté c_0 et défini pour tout t de $[0,1]$ par $c_0(t) = X^{-1}(c_A(t)).c(t)$.

On vérifie de plus $\forall t \in [0,1]$ $c(t) = X(c_A(t)).c_0(t)$ ou $c = X(c_A) \bullet c_0$.

Δ On a de façon évidente :

$$\forall t \in [0,1] \quad X(c_A(t)).c_0(t) = X(c_A(t)).X^{-1}(c_A(t)).c(t) = c(t).$$

Supposons qu'il existe deux chemins c'_A et c'_0 respectivement dans A et dans $J^{\varphi}H_{a_0}$ tels que $\forall t \in [0,1]$ on ait $c(t) = X(c'_A(t)).c'_0(t) = X(c_A(t)).c_0(t)$. De la relation précédente on tire $\forall t \in [0,1]$:

$$\begin{aligned}
&\beta^{\varphi}\left(X(c'_A(t)).c'_0(t)\right) = \beta^{\varphi}\left(X(c'_A(t)).c'_0(t)\right) \\
\Rightarrow\ &\beta^{\varphi}\left[X(c'_A(t))\right] = \beta^{\varphi}\left[X(c_A(t))\right] \\
\Rightarrow\ &c'_A(t) = c_A(t) \qquad\qquad (\text{car } X \in Q^{\varphi}(A,a_0) \Rightarrow \beta^{\varphi}(X) = J^{\varphi}Id_A)
\end{aligned}$$

on a donc $X(c_A) \bullet c'_0 = X(c_A) \bullet c_0$ avec $X(c_A)$ inversible d'où $c'_0 = c_0$. ∇

Parmi tous les relèvements dans H d'un chemin dans A considérons le relèvement suivant $c_h : [0,1] \to H$ défini par $t \mapsto c_h(t) = F(c(t)).h$ où c est un chemin dans A, $h \in H_{a_0}$ et F telle que $X = J^{\varphi}F \in Q^{\varphi}(A,a_0)$. Calculons la φ-différentielle absolue de $J^{\varphi}c_h$ par rapport à X sachant qu'on a $J^{\varphi}c_h = X(c) \bullet J^{\varphi}h = \left(J^{\varphi}(F \circ c)\right) \bullet J^{\varphi}h$ où $J^{\varphi}h$ peut être considérée comme le chemin constant $t \mapsto J^{\varphi}h$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
d_X^{\varphi}\left(J^{\varphi}c_h\right) &= \left(X^{-1}\beta J^{\varphi}c_h\right) \bullet J^{\varphi}c_h \\
&= \left(X^{-1}\beta(X(c) \bullet J^{\varphi}h)\right) \bullet X(c) \bullet J^{\varphi}h \\
&= \left(X^{-1}\beta X(c)\right) \bullet X(c) \bullet J^{\varphi}h \\
&= X^{-1}(c) \bullet X(c) \bullet J^{\varphi}h \qquad (\text{car } \beta X = J^{\varphi}Id_A) \\
&= J^{\varphi}h
\end{aligned}$$

Le calcul précédent nous conduit à poser la définition suivante.

10.5.3 DEFINITION

Soit $X \in Q^{\varphi}(A,a_0)$ et soit c un chemin dans A tel que c' en soit un relèvement dans H. On dit que c' est un **relèvement HORIZONTAL de c relativement à X** si et seulement si il existe $h' \in H_{a_0}$ tel que $d_X^{\varphi}\left(J^{\varphi}c'\right) = J^{\varphi}h'$.

10.5.4 PROPOSITION

Soit $X \in Q^{\varphi}(A,a_0)$ et soit c un chemin dans A tel que c' et c'' soient deux relèvements horizontaux de c dans H relativement à X. Il existe alors g' appartenant à G_e tel que l'on ait $J^{\varphi}c'' = J^{\varphi}(c'\bullet g')$ ($c'\bullet g'$ étant le chemin défini par $(c'\bullet g')(t) = c'(t).g'$).

Δ Dire que c' et c'' sont deux relèvements horizontaux de c relativement à X signifie qu'il existe h' et h'' dans H_{a_0} tels que l'on ait :

$$d_X^{\varphi}\left(J^{\varphi}c'\right) = J^{\varphi}h',\ d_X^{\varphi}\left(J^{\varphi}c''\right) = J^{\varphi}h'' \text{ et } \beta \circ c'' = \beta \circ c' = c$$

Si on pose $h'' = h'.g'$ avec $g' \in G_e$ et pour tout t de $[0,1]$ $c''(t) = c'(t).g(t)$ où g est un chemin dans G_e il vient :

$$d_X^{\varphi}\left(J^{\varphi}c''\right) = J^{\varphi}h'' \Leftrightarrow d_X^{\varphi}\left(J^{\varphi}c''\right) = J^{\varphi}(h'.g')$$

ce qui équivaut à écrire pour tout t de $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
& J^{\varphi}\left[(F(\beta(c''(t))))^{-1}.c''(t)\right] = J^{\varphi}(h'.g') \\
\Leftrightarrow\ & J^{\varphi}\left[(F(\beta(c'(t))))^{-1}.c'(t).g(t)\right] = J^{\varphi}(h'.g') \qquad (\beta \circ c'' = \beta \circ c') \\
\Leftrightarrow\ & \left(d_X^{\varphi}\left(J^{\varphi}c'\right)\right)(t).J^{\varphi}g(t) = J^{\varphi}(h'.g') \\
\Leftrightarrow\ & J^{\varphi}h'.J^{\varphi}g(t) = J^{\varphi}h'.J^{\varphi}g' \\
\Leftrightarrow\ & J^{\varphi}g(t) = J^{\varphi}g' \qquad \text{(en composant à gauche par } J^{\varphi}(h'^{-1})\text{).}
\end{aligned}$$

On a donc $J^{\varphi}c'' = J^{\varphi}(c'\bullet g') = J^{\varphi}c'\bullet J^{\varphi}g'$, soit encore $\varphi c'' = \varphi(c'\bullet g')$. ∇

Dans la suite nous allons montrer comment grace à l'existence de relèvements horizontaux dans H d'un chemin donné dans A allant de x à x' il est possible de définir une bijection de $J^{\varphi}(H_x)$ sur $J^{\varphi}(H_{x'})$, cette bijection étant indépendante des relèvements considérés. Noter qu'on a toujours $J^{\varphi}(H_x) = \left(J^{\varphi}H\right)_x$.

10.5.5 PROPOSITION ET DEFINITION

Soit $X \in Q^{\varphi}(A,a_0)$. Considérons c un chemin dans A allant de x à x' et c' un relèvement horizontal de c dans H relativement à X.

Le chemin c' détermine une bijection de $J^{\varphi}H_x$ (ensemble des jets de la forme $J^{\varphi}h$ avec $h \in H_x$) sur $J^{\varphi}H_{x'}$ définie par :

$$\Psi: J^{\varphi}H_x \to J^{\varphi}H_{x'}$$
$$J^{\varphi}h \mapsto \Psi\left(J^{\varphi}h\right) = J^{\varphi}\left(c'(1).c'(0)^{-1}\right).J^{\varphi}h = J^{\varphi}\left(c'(1).c'(0)^{-1}.h\right)$$

Cette bijection ne dépend que de X et de c et est indépendante du relèvement horizontal choisi.
Une telle bijection est un **TRANSPORT PARALLELE** de $J^{\varphi}H_x$ sur $J^{\varphi}H_{x'}$.

Δ Considérons

$$\psi': H_x \to H_{x'} \qquad \text{et} \qquad \psi'': H_x \to H_{x'}$$
$$h \mapsto h' = c'(1).c'(0)^{-1}.h \qquad h \mapsto h'' = c''(1).c''(0)^{-1}.h$$

Ce sont deux bijections dépendantes du choix du relèvement auxquelles on associe les chemins $c' \bullet \left(c'(0)^{-1}.h\right)$ et $c'' \bullet \left(c''(0)^{-1}.h\right)$ qui vont respectivement de h à $\psi'(h)$ et de h à $\psi''(h)$.

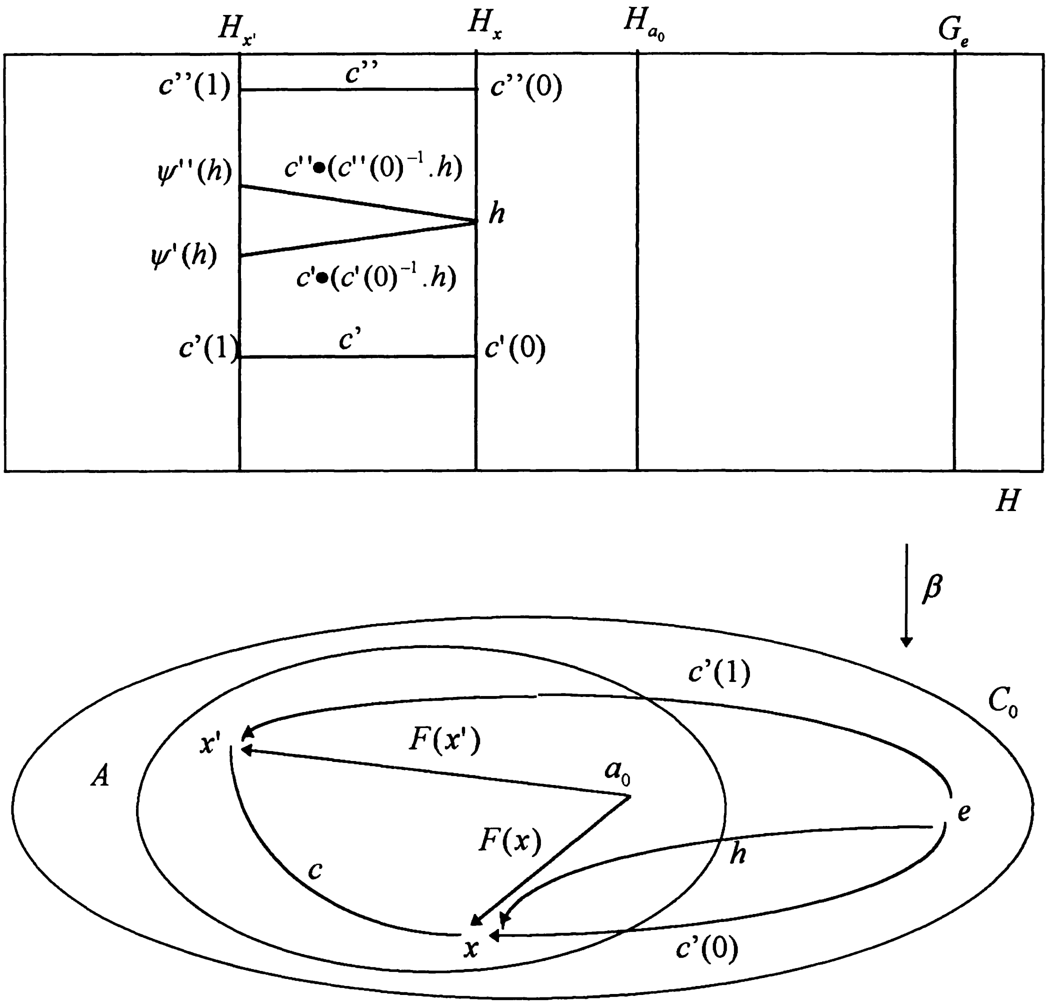
Montrons que Ψ est bijective.

$$\Psi(J^{\varphi}h) = \Psi(J^{\varphi}h')$$
$$\Leftrightarrow J^{\varphi}\left(c'(1).c'(0)^{-1}.h\right) = J^{\varphi}\left(c'(1).c'(0)^{-1}.h_1\right)$$
$$\Rightarrow J^{\varphi}\left(c'(0).c'(1)^{-1}\right).J^{\varphi}\left(c'(1).c'(0)^{-1}.h\right) = J^{\varphi}\left(c'(0).c'(1)^{-1}\right).J^{\varphi}\left(c'(1).c'(0)^{-1}.h_1\right)$$
$$\Rightarrow J^{\varphi}\left(c'(0).c'(1)^{-1}.c'(1).c'(0)^{-1}.h\right) = J^{\varphi}\left(c'(0).c'(1)^{-1}.c'(1).c'(0)^{-1}.h_1\right)$$
$$\Leftrightarrow J^{\varphi}h = J^{\varphi}h_1.$$

Ce qui prouve que Ψ est injective.

Soit $J^{\varphi}h' \in J^{\varphi}H_{x'}$ il est clair que son antécédent est $J^{\varphi}\left(c'(0).c'(1)^{-1}\right).J^{\varphi}h'$ et Ψ est alors surjective et finalement bijective.

Illustrons la situation par le diagramme ci-dessous où -par souci de ne pas surcharger- un certain nombre de morphismes ne sont pas représentés ; cela ne saurait nuire à la compréhension de l'ensemble. Dans H sont représentés quatre chemins, ce sont des relèvements de c ; deux d'entre eux sont des relèvements horizontaux relatifs à X.



Montrons que Ψ est indépendante du relèvement choisi. Soit c'' un autre relèvement, on a alors :

$$
\begin{aligned}
& J^{\varphi}\left(c''(1).c''(0)^{-1}.h\right) \\
&= J^{\varphi}c''(1).J^{\varphi}\left(c''(0)^{-1}\right).J^{\varphi}h \\
&= J^{\varphi}c''(1).\left(J^{\varphi}c''(0)\right)^{-1}.J^{\varphi}h && \left(\text{car } J^{\varphi}\left(c''(0)^{-1}\right)=\left(J^{\varphi}c''(0)\right)^{-1}\right) \\
&= J^{\varphi}\left(c'(1).g'\right).\left(J^{\varphi}\left(c'(0).g'\right)\right)^{-1}.J^{\varphi}h\left(c'(0).g'\right)^{-1} \\
&= J^{\varphi}\left(c'(1).g'\right).J^{\varphi}\left(\left(c'(0).g'\right)^{-1}\right).J^{\varphi}h && \left(\left(c'(0).g'\right)^{-1} \text{ existe}\right) \\
&= J^{\varphi}\left(c'(1).g'.g'^{-1}.c'(0)^{-1}.h\right) \\
&= J^{\varphi}\left(c'(1).c'(0)^{-1}.h\right) \\
&= \Psi\left(J^{\varphi}h\right)
\end{aligned}
$$

Ψ est donc une bijection indépendante du relèvement horizontal choisi. Elle s'étend naturellement aux éléments de contact par $J^{\varphi}h.H^{\varphi}(e) \mapsto \Psi\left(J^{\varphi}h\right).H^{\varphi}(e)$. ∇

10.5.6 DEFINITION

Soit $X \in Q^{\varphi}(A,a_0)$. L'ensemble des bijections du type évoqué précédemment de $J^{\varphi}H_x$ vers $J^{\varphi}H_{x'}$ où x et x' sont des éléments de A est muni d'une structure de groupoïde, c'est le **GROUPOIDE D'HOLONOMIE DE X**.

Dans le cas particulier du groupe des bijections de $J^{\varphi}H_x$ sur $J^{\varphi}H_x$ on définit alors le **GROUPE D'HOLONOMIE DE X**.

INDEX DES NOTATIONS

Pour les chapitres 1 à 6 consulter la 1ère partie, Diagrammes 36 (Paris, 1996).

$A \bullet B$	$= \{f \in C / \exists (a,b) \in A \times B$ tel que $\alpha(a) = \beta(b)$ et $f = a.b\}$	4.2.2
C_γ	Groupoïde des isomorphismes de C	4.2.2
$J^\varphi A$	$= \{h \in C / \exists a \in A\ \varphi h = \varphi a\} = \bigcup_{a \in A} J^\varphi a = Sat\ A$	4.2.3
$(k, \Phi, C)^{(n)}$	$= \left(k^{(n)}, J^{(n)}\Phi, \mathcal{P}^{(n)}(C)\right)$	4.3.2
$(C_\gamma, J^\varphi C_0, k')$	Espèce de morphismes	4.4.1
$C_\gamma \times_{k'} J^\varphi C_0$	Catégorie produit croisé	4.4.1
G_e	Groupe des isomorphismes de C de source et de but e	4.4.2
H_e^φ	$= J^\varphi e$	4.4.2
$(C\ , J^\varphi C_0, k')$	Espèce de morphismes	4.4.2
$C\ \times_{k'} J^\varphi C_0$	Catégorie produit croisé	4.4.2
(C, E, k')	Espèce de structures	4.4.3
$T_{e_0}^\varphi e$	$= \{X \in J^\varphi C / X = J^\varphi f$ avec $f \in C(e_0, e)\}$	4.5.1
$J^\varphi(e_0, e)$	$= T_{e_0}^\varphi e$ l'objet (e_0, φ)-tangent à e	4.5.1
$T_{e_0}^\varphi g$	Morphisme (e_0, φ)-tangent à e	4.5.1
$T_{e_0}^\varphi C$	Catégorie des morphismes (e_0, φ)-tangents à un morphisme de C	4.5.2
$T_{e_0}^\varphi$	Foncteur de C vers $T_{e_0}^\varphi C$	4.5.2
$\alpha_{e_0}^\varphi$	Rétraction source de $T_{e_0}^\varphi C$	4.5.2
$\beta_{e_0}^\varphi$	Rétraction but de $T_{e_0}^\varphi C$	4.5.2
$C(A,B)$	Ensemble des morphismes de C dont la source est dans A et le but dans B	4.5.3
C_s	Catégorie des sections locales de α	4.5.3
α_s	Rétraction source de C_s	4.5.3
β_s	Rétraction but de C_s	4.5.3
$G \circ F$	Composé de morphismes de C_s	4.5.3
$T_{e_0}^\varphi A$	$= \bigcup_{a \in A} T_{e_0}^\varphi a$ l'espace (e_0, φ)-tangent à A	4.5.3
$T_{e_0}^\varphi F$	Application (e_0, φ)-tangente à F	4.5.3
$T_{e_0}^\varphi C_s$	$= \bigcup_{F \in C_s} \{T_{e_0}^\varphi F\}$	4.5.3
$\alpha_{e_0,s}^\varphi$	Rétraction source de $T_{e_0}^\varphi C_s$	4.5.3
$\beta_{e_0,s}^\varphi$	Rétraction but de $T_{e_0}^\varphi C_s$	4.5.3
$T_{e_0}^{\varphi^\bullet} e$	Objet (e_0, φ)-cotangent à e	4.5.3
$T_{e_0}^{\varphi^\bullet} g$	Morphisme (e_0, φ)-tangent à e	4.5.3
$T_{e_0}^{\varphi^\bullet} A$	Espace (e_0, φ)-cotangent à A	4.5.3

$T^{\varphi^*}_{e_0}F$	Application (e_0,φ)-cotangente à F	4.5.3
$C(E)$	Ensemble des chaînes d'éléments de E	6.7.1
$C_c(E)$	Ensemble des chaînes contrôlées d'éléments de E	6.7.1
$(k',C(F),C_c(E_1))$	Néoalgèbre de contact sur $C_c(E_1)$	6.7.2
$(k'',C(F),C_c(E))$	Néoalgèbre de contact sur $C_c(E)$	6.7.2
$J^\varphi(e,e')$	Ensemble des jets $X=J^\varphi f$ où $f\in C(e,e')$	7.1.1
$H^\varphi(e,e')$	Ensemble des jets inversibles de $J^\varphi(e,e')$	7.1.1
$H^\varphi(e)$	$=H^\varphi(e,e)$ c'est le φ-groupe d'isotropie en e	7.1.1
$J^\varphi(e_0,e)$	Ensemble des (e_0,φ)-vitesses en e	7.1.2
$J^\varphi(e,e_0)$	Ensemble des (e_0,φ)-covitesses en e	7.1.2
$T^\varphi_{e_0}A$	$=\bigcup_{a\in A}J^\varphi(e_0,a)$ est l'ensemble des (e_0,φ)-vitesses sur A	7.1.2
$T^{\varphi^*}_{e_0}A$	$=\bigcup_{a\in A}J^\varphi(a,e_0)$ est l'ensemble des (e_0,φ)-covitesses sur A	7.1.2
$H^\varphi(A)$	Ensemble des jets inversibles de $T^\varphi_{e_0}A$ ou (e_0,φ)-repères de A	7.1.3
$H^{\varphi^*}(A)$	Ensemble des jets inversibles de $T^{\varphi^*}_{e_0}A$ ou (e_0,φ)-corepères de A	7.1.3
C_τ	Groupoïde des transformations de l'algèbre (k,Φ,C)	7.2.2
E_0	$=\{e\in C_0\,/\,C_\tau(e_0,e)\neq\varnothing\}$	7.2.2
${}_e s$	$=s(e,c(\widetilde{e}))$	7.3
s_e	$=s(c(\widetilde{e}),e)$	7.3
$d^\varphi_s f$	$=J^\varphi s_{e'}.f=J^\varphi(s_{e'}.f)=J^\varphi s_{e'}.J^\varphi f$ c'est la (s,φ)-différentielle de f	7.3.1
$d^\varphi_s X$	$=s_{e'}.X=J^\varphi s_{e'}.X=d^\varphi_s e'.X$ c'est la (s,φ)-différentielle de X	7.3.1
$\partial^\varphi_s f$	$=f.J^\varphi{}_e s=J^\varphi f.J^\varphi{}_e s=J^\varphi(f.{}_e s)$ c'est la (s,φ)-vitesse de f	7.3.2
$\partial^\varphi_s X$	$=X.{}_e s=X.J^\varphi{}_e s=X.\partial^\varphi_s e$ c'est la (s,φ)-vitesse de X	7.3.2
f^φ_s	$=d^\varphi_s e'.f.\partial^\varphi_s e=d^\varphi_s e'.J^\varphi f.\partial^\varphi_s e$ c'est la (s,φ)-dérivée de f	7.3.3
$\dfrac{d^\varphi_s f}{d^\varphi_s e}$	$=f^\varphi_s$	7.3.3

$\dfrac{\partial_s^\varphi f}{\partial_s^\varphi e'}$	$= f_s^\varphi$	7.3.3
X_s^φ	$= d_s^\varphi e' . X . \partial_s^\varphi e$ c'est la (s,φ)-dérivée de X	7.3.3
$\dfrac{d_s^\varphi X}{d_s^\varphi e}$	$= X_s^\varphi$	7.3.3
$\dfrac{\partial_s^\varphi X}{\partial_s^\varphi e'}$	$= X_s^\varphi$	7.3.3
$d_s^\varphi A$	$= \bigcup_{f \in A} d_s^\varphi f = \bigcup_{f \in A} J^\varphi(s_{e'} . f)$	7.3.6
$\partial_s^\varphi A$	$= \bigcup_{f \in A} \partial_s^\varphi f = \bigcup_{f \in A} J^\varphi(f ._e s)$	7.3.6
$(A)_s^\varphi$	$= \bigcup_{f \in A} f_s^\varphi = \bigcup_{f \in A} J^\varphi(s_{e'} . f ._e s)$	7.3.6
$C^\wedge$	Catégorie quotient de C	7.4.1
$(k^\wedge, \Phi, C^\wedge)$	Algèbre de contact sur $C^\wedge$	7.4.2
$X . H^\varphi(e)$	(φ, e)-élément de contact	8.1.1
$H^\varphi(e) . X$	(φ, e)-élément d'enveloppe	8.1.1
$\overline{X}$	$= X . H^\varphi(e)$	8.1.1
$P_{e_0}^\varphi e$	$= T_{e_0}^\varphi e / H^\varphi(e_0)$	8.2
$P_{e_0}^\varphi A$	$= T_{e_0}^\varphi A / H^\varphi(e_0)$	8.2
$P_{e_0}^\varphi f$	$P_{e_0}^\varphi f : P_{e_0}^\varphi e \to P_{e_0}^\varphi e'$	8.2
$P_{e_0}^\varphi C$	Catégorie des applications de la forme $P_{e_0}^\varphi f : P_{e_0}^\varphi e \to P_{e_0}^\varphi e'$	8.2.1
$P_{e_0}^\varphi$	Foncteur de C vers $P_{e_0}^\varphi C$	8.2.1
$P_{e_0}^{\varphi^*} e$	$= T_{e_0}^{\varphi^*} e / H^\varphi(e)$	8.2.1
$P_{e_0}^{\varphi^*} f$	$P_{e_0}^{\varphi^*} f : P_{e_0}^{\varphi^*} e \to P_{e_0}^{\varphi^*} e'$	8.2.1
$T_{p,x}^\varphi(V_n)$	Ensemble des p^φ-vitesses d'origine x	8.3.3
$L_{q,p}^\varphi$		8.3.3
L_n^φ		8.3.3
$E[\, B , F , G , C \,]$	Fibration	8.4.1
$H[\, C_0 , G , {}_tG , C \,]$	Fibration principale	8.4.1
(F, A)	Objet plongé	8.5.1
$P_e^\varphi(F)$	$P_e^\varphi(F) : P_e^\varphi(A) \to P_e^\varphi(B)$	8.5.1
$(k^\Phi, \Phi, J^\varphi C)$	Algèbre de contact sur $J^\varphi C$	9.1.1

$Q^{\varphi *}(C)$	$= \bigcup_{a_0 \in C_0} Q^{\varphi *}(C, a_0)$	10.1.2
$\left(Q^{\varphi}(C), J^{\varphi}(C_{b\bullet}), K'\right)$	Espèce de structures	10.2.2
$\left(Q^{\varphi}(C), J^{\varphi}(C_{s\bullet}), K'^{*}\right)$	Espèce de structures duale	10.2.2
$Q^{\varphi}(A, a_0)$	Ensemble des φ-éléments de connexion appartenant à $\left(J^{\varphi}C_b\right)\left(\{a_0\}, A\right)$	10.2.2
$d_X^{\varphi}Y$	Différentielle absolue de Y par rapport à X	10.4.1

REFERENCES

Charles Ehresman

Topologie sur les espaces fibrés différentiables
C.R.A.S. Paris 224 (1947)

Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable
Colloque de topologie Bruxelles CBRM (1950)

Géométrie différentielle: les prolongements d'une variété différentiable

I - Calcul des jets, prolongement principal
C.R.A.S. Paris 233 (1951)

II - L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m
C.R.A.S. Paris 233 (1951)

III - Transitivité des prolongements
C.R.A.S. Paris 233 (1951)

IV - Eléments de contact, éléments d'enveloppe
C.R.A.S. Paris 234 (1952)

Les prolongements d'une variété différentiable
Dagli « Atti del IV Congresso dell' Unione Matematica Italiana »
(Taormina 25-31 Octobre 1954)

Structures locales
Conférence polycopiée à Rome (Mars 1952)

Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie
(Synthèse de plusieurs articles publiés jusqu'en 1953)
Colloque international de géométrie différentielle Strasbourg CNRS (1953)

Géométrie différentielle : extension du calcul des jets aux jets non holonomes
C.R.A.S. Paris 239 (1954)

Géométrie différentielle : application de la notion de jet non holonome
C.R.A.S. Paris 240 (1955)

Géométrie différentielle : les prolongements d'un espace fibré différentiable
C.R.A.S. Paris 240 (1955)

Sur les connexions d'ordre supérieur
Dagli « Atti del V Congresso dell' Unione Matematica Italiana »
(Pavia - Torino 1956)

Prolongements des catégories différentiables
Séminaire Charles Ehresmann
Topologie et géométrie différentielle (volume VI Juin 1964)

Propriétés infinitésimales des catégories différentiables
Cahiers de topologie et géométrie différentielle Paris
(volume IX Septembre 1966)

Catégories in differential geometry
Colloque sur l'algèbre des catégories Amiens (1973)
Cahiers de topologie et géométrie différentielle Paris (volume XIV)

Catégories et structures
Editions Dunod Paris (1965)

On trouvera l'essentiel des articles publiés par Charles Ehresmann et relatifs à la géométrie différentielle dans :
« Charles Ehresmann, Oeuvres complètes et commentées »
Suppléments 1 et 2 au volume XXIV des cahiers de topologie et géométrie différentielle Amiens (1983)

André Weil

Théorie des points proches
Colloque international de géométrie différentielle Strasbourg CNRS (1953)

TABLE

14, Grande Rue
94130 NOGENT-SUR-MARNE
FRANCE