DIAGRAMMES

C. LAIR

Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant un objet terminal

Diagrammes, tome 35 (1996), p. 3-23

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1996__35__3_0>

DIAGRAMMES VOLUME 35, 1996

SUR LE GENRE D'ESQUISSABILITE DES CATEGORIES MODELABLES (ACCESSIBLES [1]) POSSEDANT UN OBJET TERMINAL

C. Lair

1. Introduction.

Dans le présent travail, nous prouvons que les catégories modelables (accessibles) possédant un objet terminal sont exactement (à l'équivalence près) les catégories de modèles d'esquisses petites où les co-cônes "distingués" sont tous d'indexations *non vides et connexes*.

Pour obtenir ce résultat, il *suffit* d'utiliser *systématiquement* (comme préconisé en [C.Q.C.E.], notamment en son Appendice) les notions générales antérieurement introduites en [C.M.C.F] et/ou [C.M C.E.] et/ou [C.Q.C.E.], fondamentalement

- celle de *diagramme* (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) *localement co-limite* (évidemment dérivée de celle de *diagramme localement libre*),
- celle d'objet d'une catégorie (localement petite) *satisfaisant* un cône (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) de cette catégorie,

[1] En américain. "catégories modelables" semble devoir se traduire par "accessible categories of Makkai-Paré" ...

- celle d'*invariance* (éventuelle), à la dualité près, du *genre* d'indexation tant des cônes à satisfaire que de certains (parmi tous les possibles) diagrammes localement co-limites dans la sous-catégorie pleine des objets satisfaisant ces cônes

Nous nous sommes donc évertué à les rappeler (une fois de plus ...), tout au long du texte, avec le degré de généralité approprié, exactement là où leur usage s'impose.

2. Sur l'existence d'objets terminaux dans certaines catégories qualifiables.

2.1. Catégories qualifiables.

Suppososons que $\boldsymbol{I}$ est une catégorie.

On note $\mathrm{C}(\boldsymbol{I})$ la catégorie (*cône type d'indexation* $\boldsymbol{I}$) obtenue en adjoignant à $\boldsymbol{I}$ un objet initial (*sommet type*) $\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})$ et, par conséquent, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, une unique flèche (*projection type en* I) $\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}) : \mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}) \to \mathrm{I}$.

Alors, on désigne par $\mathrm{B}(\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \mathrm{C}(\boldsymbol{I})$ le foncteur (*base type*) injection canonique.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie, un foncteur $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé *cône d'indexation* $\boldsymbol{I}$, de *base* $U_\circ\mathrm{B}(\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$, de *sommet* $U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}))$ et ayant $U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I})) : U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})) \to U(\mathrm{I})$ pour *projection en* I, quand $\mathrm{I} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I})$

En particulier, un tel cône peut évidemment être un *cône limite*.

Supposons que $\boldsymbol{J}$ est une catégorie

On désigne par $\mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ la catégorie (*co-cône type de co-indexation* $\boldsymbol{J}$) obtenue en adjoignant à $\boldsymbol{J}$ un objet terminal (*co-sommet type*) $\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}) = \mathrm{Sm}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})$ et, par conséquent, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, une unique flèche (*co-projection type en* J) $\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J}) = \mathrm{p}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})(\mathrm{J}) : \mathrm{J} \to \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J})$.

Alors, on désigne par $\mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) : \boldsymbol{J} \to \mathrm{CC}(\boldsymbol{J})$ le foncteur (*co-base type*) injection canonique.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie, un foncteur $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé *co-cône de co-indexation* $\boldsymbol{J}$, de *co-base* $V_\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, de *co-sommet* $V(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}))$ et ayant $V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J})) : V(\mathrm{J}) \to V(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}))$ pour *co-projection en* J, quand $\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})$.

En particulier, un tel co-cône peut évidemment être un *co-cône co-limite*.

Supposons que X est une catégorie *localement petite*

Comme en [C Q.C.E.], si $U : C(I) \to X$ est un cône d'indexation petite et si X est un objet de X, on dit que X *satisfait* U [2] si :

- le co-cône $X(U(-),X) : CC(I^{op}) = C(I)^{op} \to \mathbf{Ens}$ est un co-cône co-limite.

Compte tenu du calcul des co-limites dans **Ens**, il est facile de voir que X satisfait U si, et seulement si :

- (SAT 1) pour toute flèche $x : U(\mathrm{Sm}(I)) \to X$ de X, il existe un objet I de I et une flèche $y : U(I) \to X$ de X telle que $y.U(p(I)(I)) = x$ (alors, on pourra dire que y est une *factorisation de* x *par* U),
- (SAT 2) pour tous objets I' et I" de I et pour toutes flèches $y' : U(I') \to X$ et $y'' : U(I'') \to X$ de X telles que $y'.U(p(I)(I')) = y''.U(p(I)(I''))$, il existe un entier $n \geq 1$, un *zigzag* de flèches de I :

$$\xi^\circ = (z^\circ_k)_{1\leq k\leq 2n} : I' = Z^\circ_1 \xleftarrow[z^\circ_1]{} Z^\circ_2 \xrightarrow[z^\circ_2]{} Z^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots Z^\circ_{2n-1} \xleftarrow[z^\circ_{2n-1}]{} Z^\circ_{2n} \xrightarrow[z^\circ_{2n}]{} Z^\circ_{2n+1} = I''$$

  et une famille $y^\circ = (y^\circ_k : U(Z^\circ_k) \to X)_{1\leq k\leq 2n+1}$ de flèches de X telles que

  - $y' = y^\circ_1$ et $y^\circ_{2n-1} = y''$,
  - $y^\circ_{2h-1}.U(z^\circ_{2h-1}) = y^\circ_{2h} = y^\circ_{2h+1}.U(z^\circ_{2h})$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$,

  (alors, on pourra dire que la famille y° *connecte* y' *à* y" *le long de* ξ°)

Si $\mathcal{U}$ est un ensemble de cônes de X d'indexations petites et si X est un objet de X, on dit qu'il *satisfait* $\mathcal{U}$ si

- X satisfait tout cône appartenant à $\mathcal{U}$.

Comme en [C.Q.C.E.], on dit alors que $\mathcal{U}$ est une *qualification interne à* X, on note $\mathrm{Satisf}(\mathcal{U},X)$ *la sous-catégorie pleine de* X *qualifiable (ou qualifiée) par* $\mathcal{U}$, i.e la sous-catégorie pleine de X dont les objets sont ceux qui satisfont $\mathcal{U}$, et on note

$$\mathrm{inj}(\mathcal{U},X) : \mathrm{Satisf}(\mathcal{U},X) \to X$$

le foncteur injection canonique.

---

[2] Evidemment, la notion de *satisfaction* généralise aux cas de cônes d'indexations non nécessairement discrètes tant la notion d'*orthogonalité* que celle d'*objet injectif* (voir [C.Q.C.E.] pour une discussion plus complète sur ce thème)

2.2. Genres et qualifications.

On appelle *genre de catégories (petites)* toute classe $\mathcal{G}$ de catégories petites.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories et que X est une catégorie localement petite.

On dit qu'une qualification $\mathcal{U}$, interne à X, est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est une *$\mathcal{G}$-qualification* si :

- pour tout cône $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to X$ appartenant à $\mathcal{U}$, on a $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$

2.3. Existence d'objets terminaux dans certaines catégories qualifiables.

On note $\mathcal{C}x$ la classe de toutes les catégories petites, non vides et connexes : c'est donc un genre particulier.

Si X est une catégorie localement petite et si $\mathcal{U}$ est une qualification interne à X, il est clair que $\mathcal{U}$ est une $\mathcal{C}x$-qualification si, et seulement si :

- l'indexation $\boldsymbol{I}$ de tout cône $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to X$ appartenant à $\mathcal{U}$ est une catégorie non vide et connexe.

Plus concrètement, nous dirons donc que $\mathcal{U}$ est à *indexations non vides et connexes*.

Vérifions que :

LEMME. *Si X est une catégorie localement petite et si $\mathcal{U}$ est une qualification interne à X et à indexations non vides et connexes, i.e. si $\mathcal{U}$ est une $\mathcal{C}x$-qualification, alors le foncteur injection canonique :*

$$\mathrm{inj}(\mathcal{U},X) : \mathrm{Satisf}(\mathcal{U},X) \to X$$

crée les objets terminaux [3].

[3] On déduit immédiatement du LEMME de 2.3 que .

PREUVE. Il suffit de montrer que, si T est un objet terminal de $\boldsymbol{X}$ et si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône d'indexation petite, non vide et connexe, alors T satisfait U (à cet effet, pour tout objet Y de $\boldsymbol{X}$, on notera $!_Y : Y \to T$ l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$ ayant Y pour domaine et T pour co-domaine).

a) Choisissons, tout d'abord, un objet I de $\boldsymbol{I}$ (c'est possible puisque $\boldsymbol{I}$ est non vide) On a donc (par unicité) $!_{U(\mathrm{I})}.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I})) = !_{U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}))}$ et T vérifie donc (SAT 1).

b) Maintenant, pour tous objets I' et I" de $\boldsymbol{I}$, il existe (puisque $\boldsymbol{J}$ est connexe) un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ = (z^\circ_k)_{1 \le k \le 2n} : \mathrm{I'} = Z^\circ_1 \xleftarrow[z^\circ_1]{} Z^\circ_2 \xrightarrow[z^\circ_2]{} Z^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots Z^\circ_{2n-1} \xleftarrow[z^\circ_{2n-1}]{} Z^\circ_{2n} \xrightarrow[z^\circ_{2n}]{} Z^\circ_{2n+1} = \mathrm{I''}$$

et on a donc (par unicité) :

- $!_{U(Z^\circ_{2h-1})}.U(z^\circ_{2h-1}) = !_{U(Z^\circ_{2h})} = !_{U(Z^\circ_{2h+1})}.U(z^\circ_{2h})$, pour tout entier $1 \le h \le n$,

de sorte que T vérifie aussi (SAT 2) FIN DE LA PREUVE.

3. Sur l'existence d'objets terminaux dans les catégories de modèles de certaines esquisses.

3.1. Esquisses.

Comme en [E T S.A.] et en [C.Q.C.E.] (notamment), on dit que $\boldsymbol{E} = (\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}), \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E}), \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E}))$ est une *esquisse* si :

COROLLAIRE. *Si* $\boldsymbol{I}'$ *est une catégorie petite, non vide et connexe, alors les co-limites de co-indexation* $\boldsymbol{I}'$ *commutent, dans* **Ens**, *avec les objets terminaux.*

PREUVE. Désignons par $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}') = \mathrm{Fonct}(\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}'), \boldsymbol{Ens})$ la catégorie des co-cônes de **Ens** de co-indexation $\boldsymbol{I}'$ et par $\mathrm{CoLim}(\boldsymbol{I}')$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$ ayant pour objets les co-cônes co-limites.

Notons $\mathrm{Yon}(\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}')) : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}'^{\mathrm{op}}) = \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}')^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}'), \boldsymbol{Ens}) = \mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$ le plongement de Yoneda (il s'agit donc d'un *cône* de $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$, d'indexation $\boldsymbol{I}'^{\mathrm{op}}$) et posons $\mathcal{U}(\boldsymbol{I}') = \{\mathrm{Yon}(\mathrm{CC}(\boldsymbol{I}')\}$.

Il est clair que $\mathrm{CoLim}(\boldsymbol{I}') = \mathrm{Satisf}(\mathcal{U}(\boldsymbol{I}'), \mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}'))$ et le LEMME de 2 3 s'applique donc. Mais $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$ *possède* des objets terminaux (qui se calculent, évidemment, "point par point"), ce qui permet de conclure facilement. FIN DE LA PREUVE.

- $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ est une catégorie [4], appelée le *support* de $\boldsymbol{E}$,
- $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ est une classe de cônes de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *distingués dans* $\boldsymbol{E}$,
- $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ est une classe de co-cônes de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *co-distingués* dans $\boldsymbol{E}$.

Alors, on dit que $\boldsymbol{E}$ est *petite* si "tout y est petit", i.e si

- $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ est un *ensemble* et l'indexation de tout cône distingué est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ est un *ensemble* et la co-indexation de tout co-cône co-distingué est une catégorie *petite*.

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisses, on dit qu'un foncteur $H : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ *définit un homomorphisme* (encore noté) $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ *de* $\boldsymbol{E}$ *vers* $\boldsymbol{E}'$ et de *support* (le foncteur) H si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le cône composé $H \circ P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ est distingué dans $\boldsymbol{E}'$,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le co-cône composé $H \circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ est co-distingué dans $\boldsymbol{E}'$.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, on dit qu'un foncteur $M : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{X}$ *définit* un *modèle* (encore noté) $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{X}$ *de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{X}$ et de *support* (le foncteur) M si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le cône composé $M \circ P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône limite dans $\boldsymbol{X}$,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le co-cône composé $M \circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{X}$ est un co-cône co-limite dans $\boldsymbol{X}$.

Alors, on note $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$ la catégorie de ces modèles, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{X})$ ayant pour objets les modèles de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{X}$

Si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ est un homomorphisme entre deux esquisses et si $M' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{X}$ est un modèle de $\boldsymbol{E}'$, il est clair que $M' \circ H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{X}$ est un modèle de $\boldsymbol{E}$. Ainsi, on dispose d'un foncteur "composition à droite par H" :

$$\mathrm{Mod}(H,\boldsymbol{X}) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

---

[4] Nous supposons (pour simplifier l'exposé - et la lecture), que les supports des esquisses sont des catégories et non des "présentations de catégories", i.e. des *graphes multiplicatifs* (voir [E.T.S.A.]) Cependant, il est clair que, dans ce cadre plus général, les différents résultats énoncés ici demeurent tout aussi valables (à une simple adaptation près concernant le "plongement" - qui, en général, n'en est plus un - de Yoneda).

Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite.

On note $\mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})) : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le plongement de Yoneda.

Pour tout *cône* P $\mathrm{C}(A) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, distingué dans $\boldsymbol{E}$, on note successivement :

- $\mathrm{CCA}(P) = \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))_{\circ}P^{\mathrm{op}} : \mathrm{CC}(A^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(A)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *co-cône associé* (par dualité, puis composition avec le plongement de Yoneda) au cône P,
- $\mathrm{CSCCA}(P)$ le co-sommet du co-cône associé à P,
- $\mathrm{CLA}(P)$ le *co-cône co-limite associé à* P, i.e. un co-cône co-limite arbitrairement choisi parmi ceux de même co-base que le co-cône associé à P (il en existe au moins un puisque $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ est, évidemment, co-complète),
- $\mathrm{CSCLA}(P)$ le co-sommet du co-cône co-limite $\mathrm{CLA}(P)$ associé à P,
- $\mathrm{f}(P) . \mathrm{CSCLA}(P) \to \mathrm{CSCCA}(P)$ l'unique flèche de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ permettant de factoriser le co-cône $\mathrm{CCA}(P)$ au travers du co-cône co-limite $\mathrm{CLA}(P)$ (puisqu'ils ont même co-base),
- $\mathrm{U}(P) : \mathrm{C}(\boldsymbol{1}) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *cône associé à* P, d'indexation la catégorie $\boldsymbol{1}$ (à un seul objet 0 et une seule flèche $\mathrm{id}(0)$) et ayant pour (seule) projection la flèche .

$$\mathrm{U}(P)(\mathrm{p}(\boldsymbol{1})(0)) = \mathrm{f}(P) : \mathrm{CSCLA}(P) \to \mathrm{CSCCA}(P) .$$

Maintenant, pour tout *co-cône* $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, co-distingué dans $\boldsymbol{E}$, on note :

- $\mathrm{U}(Q) = \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))_{\circ}Q^{\mathrm{op}} : \mathrm{C}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{CC}(\boldsymbol{B})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *cône associé* (par dualité, puis composition avec le plongement de Yoneda) au co-cône Q.

De la sorte, on obtient une qualification interne à $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ *canoniquement associée à* $\boldsymbol{E}$:

$$\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}) = \{\mathrm{U}(P) \mid P \in \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})\} \cup \{\mathrm{U}(Q) \mid Q \in \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})\}$$

et, comme en [C.Q.C.E.], il est facile de constater (compte tenu des propriétés du plongement de Yoneda) que :

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})) .$$

3.2. Genres et esquisses.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

On dit qu'une esquisse $\boldsymbol{E}$ est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est une *$\mathcal{G}$-esquisse* si :

- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, on a $\boldsymbol{B} \in \mathcal{G}$.

3.3. Existence d'objets terminaux dans les catégories de modèles de certaines esquisses.

Il est clair (en reprenant la notation de 2.3) qu'une esquisse petite $\boldsymbol{E}$ est une $\mathcal{C}x$-esquisse si, et seulement si :

- la co-indexation $\boldsymbol{B}$ de tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$ est une catégorie non vide et connexe

Plus concrètement, nous dirons donc que $\boldsymbol{E}$ est à *co-indexations non vides et connexes.*

On vérifie immédiatement que :

PROPOSITION. *Si* $\boldsymbol{E}$ *est une esquisse petite à co-indexations non vides et connexes, i.e. si* $\boldsymbol{E}$ *est une* $\mathcal{C}x$*-esquisse petite, alors la catégorie de ses modèles dans* $\boldsymbol{Ens}$ *possède un objet terminal.*

PREUVE. Clairement, si $\boldsymbol{E}$ est petite et à co-indexations non vides et connexes, alors sa qualification associée $\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E})$ est à indexations non vides et connexes puisque, par construction, si $\boldsymbol{I}$ est une indexation d'un cône de $\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E})$, on a $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{1}$ ou $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}$, où $\boldsymbol{B}$ est une co-indexation d'au moins un co-cône co-distingué dans $\boldsymbol{E}$. Par conséquent, le LEMME de 2.3 s'applique et le foncteur injection canonique :

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$$

crée les objets terminaux. Mais la catégorie $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ *possède* les objets terminaux (qui se calculent, évidemment, "point par point") FIN DE LA PREUVE.

4. Sur les diagrammes localement co-limites dans les catégories possédant un objet terminal.

4.1. Diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites.

Si $\boldsymbol{J}'$ est une petite catégorie, si $F' : \boldsymbol{J}' \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ' est un ensemble, on dit (évidemment) que Λ' est une (ou un *objet*) *limite* de F' si :

- il existe un cône $U' : \mathrm{C}(\boldsymbol{J'}) \to \boldsymbol{Ens}$ tel que :
    - U' a pour sommet Λ' et pour base F',
    - U' est un cône limite.

Alors, on note (bien entendu) :

$$\Lambda' = \underset{\mathrm{J'} \in \boldsymbol{J'}}{\mathrm{Lim}} F'(\mathrm{J'}) .$$

Si $\boldsymbol{I'}$ est une petite catégorie, si $D' : \boldsymbol{I'} \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ'' est un ensemble, on dit (évidemment) que Λ'' est une (ou un *objet*) *co-limite de* D' si :

- il existe un co-cône $V' : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I'}) \to \boldsymbol{Ens}$ tel que .
    - V' a pour co-sommet Λ'' et pour co-base D',
    - V' est un co-cône co-limite.

Alors, on note (bien entendu)

$$\Lambda'' = \underset{\mathrm{I'} \in \boldsymbol{I'}}{\mathrm{CoLim}} D'(\mathrm{I'})$$

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie *localement petite* et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories *petites*.

On dit qu'un foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *admet pour (petit) diagramme localement co-limite* le foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ si :

- naturellement en tout objet X de $\boldsymbol{X}$, on a (dans $\boldsymbol{Ens}$) :

$$\underset{\mathrm{I} \in \boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{CoLim}} \boldsymbol{X}(D(\mathrm{I}),\mathrm{X}) \cong \underset{\mathrm{J} \in \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{Lim}} \boldsymbol{X}(F(\mathrm{J}),\mathrm{X}) .$$

Supposons que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites.

On désigne par $\mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ la catégorie (*tronc de co-cône type de co-indexation* $\boldsymbol{J}$ *et d'indexation* $\boldsymbol{I}$) obtenue en adjoignant à la réunion de $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ (supposées disjointes, pour simplifier) une unique flèche (*co-projection type en* (J,I)) $\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}) : \mathrm{J} \to \mathrm{I}$ et, ce, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$ et pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$.

Alors, on désigne par $\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ et $\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ les foncteurs (*co-base type* et *diagramme co-sommital type*) injections canoniques.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite, un foncteur $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé un (*petit) tronc de co-cône de* $\boldsymbol{X}$, *de co-indexation* $\boldsymbol{J}$, *d'indexation* $\boldsymbol{I}$, *de co-base* $W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *de diagramme co-sommital* $W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ et ayant $W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) : W(\mathrm{J}) \to W(\mathrm{I})$ pour *co-projection en* (J,I), quand $\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})$ et $\mathrm{I} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I})$

En particulier, on dit qu'il s'agit d'un *tronc de co-cône localement co-limite* si :

- (LCOLIM 1) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$ et tout co-cône $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ de co-sommet X et de même co-base $V\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) = W\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ que le tronc de co-cône $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, il existe (au moins) un objet I de $\boldsymbol{I}$ et (au moins) une flèche $y : W(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telle que :
    - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $y.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) = V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J}))$,
- (LCOLIM 2) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$, tous objets I' et I" de $\boldsymbol{I}$ et toutes flèches $y' : W(\mathrm{I}') \to \mathrm{X}$ et $y'' : W(\mathrm{I}'') \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telles que :
    - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $y'.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}')) = y''.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}''))$,

  alors il existe un entier $n \geq 1$, un *zigzag* de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ = (z^\circ_k)_{1\leq k\leq 2n} : \mathrm{I}' = Z^\circ_1 \xleftarrow[z^\circ_1]{} Z^\circ_2 \xrightarrow[z^\circ_2]{} Z^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots Z^\circ_{2n-1} \xleftarrow[z^\circ_{2n-1}]{} Z^\circ_{2n} \xrightarrow[z^\circ_{2n}]{} Z^\circ_{2n+1} = \mathrm{I}''$$

  et une famille $y^\circ = (y^\circ_k : W(Z^\circ_k) \to \mathrm{X})_{1\leq k\leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que
    - $y' = y^\circ_1$ et $y^\circ_{2n+1} = y''$,
    - $y^\circ_{2h-1}.W(z^\circ_{2h-1}) = y^\circ_{2h} = y^\circ_{2h+1}.W(z^\circ_{2h})$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$

Compte tenu du calcul des co-limites dans $\boldsymbol{Ens}$, il est facile de voir que :

LEMME. *Si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et si* $\boldsymbol{I}$ *et* $\boldsymbol{J}$ *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ *est un tronc de co-cône localement co-limite, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W\circ\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un diagramme localement co-limite du foncteur (co-base de* W*)* $F = W\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,
- *si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un diagramme localement co-limite du foncteur* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *il leur est associé un tronc de co-cône localement co-limite* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D}\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D}\circ\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.

4.2. Genres, diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories, que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites.

Si le foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ admet le foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ pour diagramme localement co-limite, on dit (par simple souci d'homogénéïté avec les terminologies précédentes) que D est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est un *$\mathcal{G}$-diagramme* localement co-limite de F si :

- $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$

De même, si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement co-limite, on dit qu'il est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est un *$\mathcal{G}$-tronc de co-cône* localement co-limite si :

- $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$.

Il est évidemment parfaitement trivial de constater (par simple souci d'homogénéïté avec l'énoncé du LEMME de 4 1) que :

LEMME. *Si* $\mathcal{G}$ *est un genre de catégories, si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et si* $\boldsymbol{I}$ *et* $\boldsymbol{J}$ *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ *est un $\mathcal{G}$-tronc de co-cône localement co-limite, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W{\circ}\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite du foncteur (co-base de* W*)* $F = W{\circ}\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,
- *si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite du foncteur* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *il leur est associé un $\mathcal{G}$-tronc de co-cône localement co-limite* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D} \circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D} \circ\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.

4.3. Diagrammes localement co-limites dans les catégories possédant un objet terminal.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites.

Il est clair (en reprenant la notation de 2.3) qu'un foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ admet un foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ pour $\mathcal{C}x$-diagramme localement co-limite si, et seulement si :

- $\boldsymbol{I}$ est non vide et connexe.

Plus concrètement, nous dirons donc que D est *d'indexation non vide et connexe*.

De même, il est clair que $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un $\mathcal{C}x$-tronc de co-cône localement co-limite si, et seulement si :

- $\boldsymbol{I}$ est non vide et connexe

Plus concrètement, nous dirons donc aussi que W est *d'indexation non vide et connexe.*

Etablissons que :

PROPOSITION. *Si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et possédant un objet terminal, si* $\boldsymbol{J}$ *est une catégorie petite, si* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *est un foncteur et si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *en est un petit diagramme localement co-limite, alors* $\boldsymbol{I}$ *est nécessairement non vide et connexe. Autrement dit, tout diagramme localement co-limite dans* $\boldsymbol{X}$ *est d'indexation non vide et connexe, i.e. est un* $\mathcal{C}x$*-diagramme localement co-limite.*

PREUVE. Désignons par T un quelconque objet terminal de $\boldsymbol{X}$ (alors, pour tout objet Y de $\boldsymbol{X}$, on notera $!_{\mathrm{Y}} : \mathrm{Y} \to \mathrm{T}$ l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$ ayant Y pour domaine et T pour co-domaine). En vertu du LEMME de 4.2, il suffit de prouver que, si $W : \mathrm{CCy}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement co-limite (de co-base $W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{J}) = F \quad \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ et de diagramme co-sommital $W \circ \mathrm{CS}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D \quad \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$), alors $\boldsymbol{I}$ est non vide et connexe.

a) Soit $!_F : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ l'unique co-cône de co-indexation $\boldsymbol{J}$, de co-base $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ et de co-sommet T qui, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, a pour co-projection en J l'unique flèche $!_F(\mathrm{J}) = !_{F(\mathrm{J})} : F(\mathrm{J}) \to \mathrm{T}$ de $\boldsymbol{X}$. D'après (LCOLIM 1), il existe donc un objet I de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $\mathrm{y} : W(\mathrm{I}) \to \mathrm{T}$ de $\boldsymbol{X}$ telle que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $\mathrm{y}.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) = !_{F(\mathrm{J})}$ (par unicité, on a évidemment $\mathrm{y} = !_{W(\mathrm{I})}$ et l'égalité $\mathrm{y}.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) = !_{W(\mathrm{I})}.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) = !_{F(\mathrm{J})}$ est, bien sûr, automatique).

Par conséquent, $\boldsymbol{I}$ n'est pas vide.

b) Si I' et I'' sont deux (quelconques) objets de $\boldsymbol{I}$, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a (par unicité) :

$$!_{W(\mathrm{I}')}.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}')) = !_{F(\mathrm{J})} = !_{W(\mathrm{I}'')}.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}''))$$

et, d'après (LCOLIM 2), il existe donc un entier $\mathrm{n} \geq 1$, un *zigzag* de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ = (\mathrm{z}^\circ_{\mathrm{k}})_{1 \leq \mathrm{k} \leq 2\mathrm{n}} : \mathrm{I}' = \mathrm{Z}^\circ_1 \xleftarrow[\mathrm{z}^\circ_1]{} \mathrm{Z}^\circ_2 \xrightarrow[\mathrm{z}^\circ_2]{} \mathrm{Z}^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots \mathrm{Z}^\circ_{2\mathrm{n}-1} \xleftarrow[\mathrm{z}^\circ_{2\mathrm{n}-1}]{} \mathrm{Z}^\circ_{2\mathrm{n}} \xrightarrow[\mathrm{z}^\circ_{2\mathrm{n}}]{} \mathrm{Z}^\circ_{2\mathrm{n}+1} = \mathrm{I}''$$

et une famille $\mathrm{y}^\circ = (\mathrm{y}^\circ_{\mathrm{k}} : W(\mathrm{Z}^\circ_{\mathrm{k}}) \to \mathrm{T})_{1 \leq \mathrm{k} \leq 2\mathrm{n}+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que :

- $!_{W(\mathrm{I}')} = \mathrm{y}^\circ_1$ et $\mathrm{y}^\circ_{2\mathrm{n}+1} = !_{W(\mathrm{I}'')}$,
- $\mathrm{y}^\circ_{2\mathrm{h}-1}.W(\mathrm{z}^\circ_{2\mathrm{h}-1}) = \mathrm{y}^\circ_{2\mathrm{h}} = \mathrm{y}^\circ_{2\mathrm{h}+1}.W(\mathrm{z}^\circ_{2\mathrm{h}})$, pour tout entier $1 \leq \mathrm{h} \leq \mathrm{n}$ (par unicité, pour tout entier $1 \leq \mathrm{k} \leq 2\mathrm{n}+1$, on a évidemment $\mathrm{y}_{\mathrm{k}} = !_{W(\mathrm{Z}_{\mathrm{k}})}$ et les égalités précédentes sont, bien sûr, automatiques).

Par conséquent $\boldsymbol{I}$ est connexe. FIN DE LA PREUVE.

5. Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables possédant un objet terminal.

5.1. Catégories modelables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite, que θ est un ordinal inaccessible et que $\beta < \theta$ est un ordinal régulier.

Comme en [C.M C E.], on dit que $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-*modelable* si :

- $\boldsymbol{M}$ possède les co-limites de co-indexations petites et β-filtrantes,
- $\boldsymbol{M}$ contient une sous-catégorie $\boldsymbol{M}'$ telle que :
  - $\boldsymbol{M}'$ est pleine dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est dense dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite,
  - tout objet de $\boldsymbol{M}'$ est un objet β-présentable dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ possède les θ-petits diagrammes localement co-limites de co-indexations β-petites et le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$ les préserve (autrement dit, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, il existe une catégorie θ-petite $\boldsymbol{I}$ et un diagramme $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}'$, localement co-limite de F, de sorte que $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}$ est aussi un diagramme localement co-limite de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$).

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est θ-*modelable* s'il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable [5]

Enfin, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *modelable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est θ-modelable.

---

[5] Si β est un ordinal régulier, il est facile de voir que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie β-*accessible* ("au sens de Makkaï-Paré") si, et seulement si, il existe un ordinal inaccessible $\theta > \beta$ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable : autrement dit, il y a parfaite identité entre catégories accessibles et catégories modelables.

5.2. Genres et catégories modelables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite, que θ est un ordinal inaccessible, que $\beta < \theta$ est un ordinal régulier et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-*modelable* si :

- $\boldsymbol{M}$ possède les co-limites de co-indexations petites et β-filtrantes,
- $\boldsymbol{M}$ contient une sous-catégorie $\boldsymbol{M}'$ telle que :
  - $\boldsymbol{M}'$ est pleine dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est dense dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite,
  - tout objet de $\boldsymbol{M}'$ est un objet β-présentable dans $\boldsymbol{M}$,
  - $\boldsymbol{M}'$ possède les θ-petits $\mathcal{G}$-diagrammes localement co-limites de co-indexations β-petites et le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$ les préserve (autrement dit, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, il existe une catégorie θ-petite $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$ et un diagramme $D \;\; \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}'$ localement co-limite de F, de sorte que $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}$ est aussi un diagramme localement co-limite de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$).

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta)$-*modelable* s'il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modelable

On dit que $\boldsymbol{M}$ est $\mathcal{G}$-*modelable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta)$-modelable.

5.3. Catégories esquissables.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{E}$ est θ-*petite* si "tout y est θ-petit", i.e. si :

- l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))$ des objets (du support) de $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- l'ensemble $\mathrm{Fl}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))$ des flèches (du support) de $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,

- l'ensemble CDist($\boldsymbol{E}$) des cônes distingués dans $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, la catégorie d'indexation $\boldsymbol{A}$ est θ-petite,
- l'ensemble CCDist($\boldsymbol{E}$) des co-cônes co-distingués dans $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, la catégorie d'indexation $\boldsymbol{B}$ est θ-petite.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est une *catégorie θ-esquissable*, s'il existe une esquisse θ-petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est une *catégorie esquissable*, s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est θ-esquissable (autrement dit, s'il existe une esquisse *petite* dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à $\boldsymbol{M}$)

5.4. Genres et catégories esquissables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *($\mathcal{G}$,θ)-esquissable* s'il existe une $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est *$\mathcal{G}$-esquissable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est ($\mathcal{G}$,θ)-esquissable (autrement dit, s'il existe une $\mathcal{G}$-esquisse petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à $\boldsymbol{M}$).

5.5. Esquissabilité des catégories modelables.

Rappelons (en nous contentant d'une ... "esquisse" de preuve) le résultat fondamental suivant, établi en [C.M.C.E] (où on trouvera une preuve complète) :

LEMME *Les catégories modelables sont des catégories esquissables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible, les catégories* θ*-modelables sont des catégories* θ*-esquissables*[6].

PREUVE Supposons que $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable. Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme $\mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \to \boldsymbol{M}'$ localement co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})$. Alors, si on désigne par $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M})$ l'esquisse (évidemment θ-petite) obtenue comme suit :

- son support est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{Ens})$ dont les objets sont :
    - d'une part les foncteurs (représentés) $\boldsymbol{M}(\mathrm{M}',-)$ $\boldsymbol{M} \to \boldsymbol{Ens}$, dès que M' est objet de $\boldsymbol{M}'$,
    - d'autre part, les foncteurs (limites β-petites - arbitrairement choisies - de foncteurs représentés) $L(F) = \underset{\mathrm{J} \in \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{Lim}}\ \boldsymbol{M}(F(\mathrm{J}),-)$, dès que $F \cdot \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ est un foncteur à valeurs dans $\boldsymbol{M}'$, où $\boldsymbol{J}$ est une catégorie β-petite (et en ne choisissant - arbitrairement - qu'une telle catégorie par composante connexe du sous-groupoïde de ***Cat*** ayant pour flèches les seuls foncteurs inversibles),
- ses cônes distingués sont les limites $L(F) = \underset{\mathrm{J} \in \boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}}{\mathrm{Lim}}\ \boldsymbol{M}(F(\mathrm{J}),-)$ précédentes,
- ses co-cônes co-distingués sont les co-limites $L(F) = \underset{\mathrm{I} \in \mathrm{Ch}(F)^{\mathrm{op}}}{\mathrm{CoLim}}\ \boldsymbol{M}(\mathrm{ch}(F)(\mathrm{I}),-)$, dès que $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ vérifie les conditions précédentes,

on établit que $\boldsymbol{M}$ et $\mathrm{Mod}(\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M}),\boldsymbol{Ens})$ sont équivalentes, ce qui permet de conclure. FIN DE LA PREUVE.

5.6. Genres et esquissabilité des catégories modelables.

De la PREUVE du LEMME de 5.5, on déduit immédiatement que :

PROPOSITION. *Si* $\mathcal{G}$ *est un genre de catégories, les catégories* $\mathcal{G}$*-modelables sont des catégories* $\mathcal{G}$*-esquissables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible, les catégories* $(\mathcal{G},\theta)$*-modelables sont des catégories* $(\mathcal{G},\theta)$*-esquissables*[7].

[6] La réciproque du LEMME de 5.5 est également valide (voir le LEMME de 5.7).

[7] La réciproque de la PROPOSITION de 5.6 *n'est pas*, en général, valide (voir 5.8).

PREUVE Supposons que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modelable Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc tout particulièrement choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un foncteur $\mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \to \boldsymbol{M}'$ qui est un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})$.

Alors, comme dans la PREUVE du LEMME de 5.5, $\boldsymbol{M}$ et $\mathrm{Mod}(\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M}),\boldsymbol{Ens})$ sont équivalentes mais, de plus, l'esquisse θ-petite $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M})$ est (par construction) une $\mathcal{G}$-esquisse. FIN DE LA PREUVE.

5.7. Modelabilité des catégories esquissables.

Rappelons (en nous contentant de nouveau d'une ... "esquisse" de preuve) le résultat fondamental suivant, établi en [C.M C E.] (où on trouvera une preuve complète) :

LEMME. *Les catégories esquissables sont des catégories modelables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible, les catégories* θ*-esquissables sont des catégories* θ*-modelables* [8].

PREUVE. Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse θ-petite On établit que $\boldsymbol{M} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ est (θ,β)-modelable en désignant par β l'ordinal régulier d'indice $\sup(\alpha,s,a',b,b')+1$, où :

- α est l'ordinal régulier d'indice $a+1$, lorsque :
    - a est la borne supérieure des cardinaux des (ensembles de flèches des) indexations des cônes distingués de $\boldsymbol{E}$,
- s est le cardinal de (l'ensemble des flèches du support de $\boldsymbol{E}$) $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$,
- a' est le cardinal de l'ensemble des cônes distingués de $\boldsymbol{E}$,
- b est la borne supérieure des cardinaux des (ensembles de flèches des) co-indexations des co-cônes co-distingués de $\boldsymbol{E}$,

---

[8] Evidemment, le LEMME de 5.7 est réciproque du LEMME de 5.5. On peut donc affirmer que, pour tout ordinal inaccessible θ, les catégories de modèles ensemblistes des esquisses θ-petites sont exactement (à l'équivalence près) les catégories θ-modelables.

Il en résulte que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique" correspondant à la dualité "esquisses-petites vs. catégories-de-modèles-ensemblistes", l'ordinal inaccessible θ est un *invariant* : dans le cas *général*, c'est le seul connu à ce jour (et il est donc particulièrement dommageable - pour ceux qui n'écrivent et/ou ne lisent que cette langue - que ce "θ" n'admette aucune traduction en américain ...). Cependant, dans un certain nombre de cas *particuliers*, on dispose aussi d'invariants *spécifiques* plus précis (voir la Note 10).

• b ' est le cardinal de l'ensemble des co-cônes co-distingués de $\boldsymbol{E}$,

puis en établissant que la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{M}_{<\beta}$ de $\boldsymbol{M}$, dont les objets sont les modèles de $\boldsymbol{E}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles de cardinaux strictement inférieurs à β, est "essentiellement θ-petite", i.e. équivalente (par l'injection canonique) à une de ses sous-catégories pleines θ-petites $\boldsymbol{M}'$ qui, dès lors, convient. FIN DE LA PREUVE.

5.8. Genres et modelabilité des catégories esquissables.

La réciproque de la PROPOSITION de 5.6 *n'est pas* (en général) valide. Plus précisément, si $\mathcal{G}$ est un *quelconque* genre de catégories et si θ est un ordinal inaccessible, on ne peut affirmer (en général) que, pour *toute* $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite $\boldsymbol{E}$, la catégorie $\boldsymbol{M} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ de ses modèles est $(\mathcal{G},\theta)$-modelable D'après le LEMME de 5.7, elle est *seulement* (en général) θ-modelable . c'est que (en reprenant les notations de 5.1 et 5.7), il n'est pas possible (en général) de trouver parmi *tous* les diagrammes $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}' \approx \boldsymbol{M}_{<\beta} = \boldsymbol{M}'$, localement co-limites d'un *quelconque* foncteur $F . \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux [9] qui soit un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite de F [10]

5.9. Genre d'esquissabilité des catégories modelables possédant un objet terminal.

Etablissons (en reprenant la notation de 2.3) que :

[9] Sauf cas particulier (voir [D.E.T.G.]), deux diagrammes localement co-limites d'un même foncteur F *ne sont pas* (en général) "isomorphes".

[10] A contrario (et c'est là un point de vue largement initié en [C.Q.C.E.]. Appendices 1 et 2). on dispose *automatiquement* d'une réciproque de la PROPOSITION de 5.6. mais *spécifique* d'un genre *particulier* $\mathcal{G}$, *si et seulement si* on peut établir que, pour ce genre $\mathcal{G}$, de tels choix sont rendus possibles (par toute procédure adéquate). Dans ce cas. on peut donc conclure que. dans la traduction "syntaxe vs. sémantique" correspondant à la dualité "esquisses-petites vs. catégories-de-modèles-ensemblistes". le couple $(\mathcal{G},\theta)$ est un *invariant*.

Par exemple, si on désigne par $\mathcal{C}at$ le genre de *toutes* les petites catégories et si on prend $\mathcal{G} = \mathcal{C}at$, on peut aussi dire (revoir la Note 8) que. dans la traduction "syntaxe vs. sémantique". $(\mathcal{C}at,\theta)$ est un invariant, puisque les LEMMES de 5.5 et 5.7 sont réciproques l'un de l'autre.

De même, des considérations de 5.9 résulte que. lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{C}_{*}$, la réciproque de la PROPOSITION de 5.6 est valable. Autement dit, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique", $(\mathcal{C}_{*},\theta)$ est aussi un invariant.

THEOREME *Pour toute catégorie localement petite* $\boldsymbol{M}$, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie modelable possédant un objet terminal,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $\mathcal{C}x$*-modelable,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $\mathcal{C}x$*-esquissable,*

ainsi, en particulier, les catégories modelables possédant un objet terminal sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans $\boldsymbol{Ens}$*) des esquisses petites à co-indexations non vides et connexes.*

Plus précisément encore, si θ *est un ordinal inaccessible et si* $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie localement petite, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* θ*-modelable possédant un objet terminal,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $(\mathcal{C}x,\theta)$*-modelable,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $(\mathcal{C}x,\theta)$*-esquissable,*

ainsi, en particulier, les catégories θ*-modelables possédant un objet terminal sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans* $\boldsymbol{Ens}$*) des esquisses* θ*-petites à co-indexations non vides et connexes.*

PREUVE. a) Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie (θ,β)-modelable et possédant un objet terminal.

Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme θ-petit $\mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \to \boldsymbol{M}'$, localement co-limite de F et préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})$ $\boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$.

Mais, $\boldsymbol{M}$ possèdant (par hypothèse) un objet terminal, les diagrammes localement co-limites dans $\boldsymbol{M}$ *sont* (d'après la PROPOSITION de 4.3) des $\mathcal{C}x$-diagrammes localement co-limites. Par conséquent (en reprenant les notations de 5.5) $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M})$ est une $\mathcal{C}x$-esquisse et $\boldsymbol{M}$ est donc $(\mathcal{C}x,\theta,\beta)$-modelable

b) Supposons, maintenant, que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{C}x,\theta)$-modelable D'après la PROPOSITION de 5.6, elle est $(\mathcal{C}x,\theta)$-esquissable.

c) Supposons, enfin, que $\boldsymbol{E}$ est une $\mathcal{C}x$-esquisse θ-petite.

En vertu du LEMME de 5.7, la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ est θ-modelable.

De plus, en vertu de la PROPOSITION de 3.3, la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ possède un objet terminal. FIN DE LA PREUVE [11].

---

[11] De cette PREUVE il ressort que, si $\mathcal{G} = \mathcal{C}x$, si θ est un ordinal inaccessible et si $\boldsymbol{E}$ est une quelconque $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite (et en reprenant les notations de 5.1 et 5.7), il existe une *procédure* (voir

6. Bibliographie.

[C M.C.E] **C. Lair**, *Catégories modelables et catégories esquissables*, Diagrammes 6, Paris, 1981.

[C.M.C.F.] **R. Guitart et C. Lair**, *Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes*, Diagrammes 4, Paris, 1980.

[C.Q.C.E.] **C. Lair**, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17, Paris, 1987.

[D.E.T.G.] **C. Lair**, *Diagrammes localement libres, extensions de corps et théorie de Galois*, Diagrammes 10, Paris, 1983.

[E T S A.] **C. Ehresmann**, *Esquisses et types des structures algébriques*, Bul. Instit Polit Iasi, XIV, 1968.

7. Table.

---

la Note 10) permettant de trouver, parmi *tous* les diagrammes $D : \boldsymbol{I} \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}.\boldsymbol{Ens})_{<\beta} = \boldsymbol{M}_{<\beta} \approx \boldsymbol{M}'$ localement co-limites d'un *quelconque* foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux qui soit un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite : elle consiste à en prendre ... un *quelconque* !

Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
Tours 45-55-5ème étage
2, place Jussieu
75251 Paris CEDEX 05
FRANCE

lair@mathp7.jussieu.fr