DIAGRAMMES

C. LAIR

Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant les produits de deux

Diagrammes, tome 35 (1996), p. 25-52

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1996__35__25_0>

DIAGRAMMES VOLUME 35 , 1996

SUR LE GENRE D'ESQUISSABILITE DES CATEGORIES MODELABLES (ACCESSIBLES [1]) POSSEDANT LES PRODUITS DE DEUX

C. Lair

1. Introduction.

Dans le présent travail, nous prouvons que les catégories modelables (accessibles) possédant les produits de deux sont exactement (à l'équivalence près) les catégories de modèles d'esquisses petites où les co-cônes "distingués" sont tous d'indexations "*tamisantes*", i.e. "suffisamment" filtrantes pour certaines configurations graphiques (simples) *spécifiques*.

Pour obtenir ce résultat, il *suffit* d'utiliser *systématiquement* (comme préconisé en [C.Q.C.E.], notamment en son Appendice) les notions et méthodes générales antérieurement introduites en [C.M.C.F.] et/ou [C.M.C.E.] et/ou [C.Q.C.E.], fondamentalement :

- celle de *diagramme* (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) *localement co-limite* (évidemment dérivée de celle de *diagramme localement libre*),

---

[1] En américain, "catégories modelables" semble devoir se traduire par "accessible categories of Makkaï-Paré" ...

- celle d'objet d'une catégorie (localement petite) *satisfaisant* un cône (d'indexation petite mais non nécessairement discrète) de cette catégorie,
- celle d'*invariance* (éventuelle), à la dualité près, du *genre* d'indexation tant des cônes à satisfaire que de certains (parmi tous les possibles) diagrammes localement co-limites dans la sous-catégorie pleine des objets satisfaisant ces cônes,
- celle de *modification* (ici : par "saturation") d'un diagramme localement co-limite en un autre, plus adéquat.

Nous nous sommes donc évertué à les rappeler (une fois de plus ..), tout au long du texte, avec le degré de généralité approprié, exactement là où leur usage s'impose.

2. Sur l'existence de produits de deux dans certaines catégories qualifiables.

2.1. Catégories qualifiables.

Supposososns que $\boldsymbol{I}$ est une catégorie.

On note $\mathrm{C}(\boldsymbol{I})$ la catégorie (*cône type d'indexation* $\boldsymbol{I}$) obtenue en adjoignant à $\boldsymbol{I}$ un objet initial (*sommet type*) $\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})$ et, par conséquent, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$, une unique flèche (*projection type en* I) $\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}) : \mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}) \to \mathrm{I}$.

Alors, on désigne par $\mathrm{B}(\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \mathrm{C}(\boldsymbol{I})$ le foncteur (*base type*) injection canonique.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie, un foncteur $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé *cône d'indexation* $\boldsymbol{I}$, de *base* $U \circ \mathrm{B}(\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$, de *sommet* $U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I}))$ et ayant $U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I})) : U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})) \to U(\mathrm{I})$ pour *projection en* I, quand $\mathrm{I} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I})$.

En particulier, un tel cône peut évidemment être un *cône limite*.

Supposons que $\boldsymbol{J}$ est une catégorie.

On désigne par $\mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ la catégorie (*co-cône type de co-indexation* $\boldsymbol{J}$) obtenue en adjoignant à $\boldsymbol{J}$ un objet terminal (*co-sommet type*) $\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}) = \mathrm{Sm}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})$ et, par conséquent, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, une unique flèche (*co-projection type en* J) $\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J}) = \mathrm{p}(\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}})(\mathrm{J}) : \mathrm{J} \to \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J})$.

Alors, on désigne par $\mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) : \boldsymbol{J} \to \mathrm{CC}(\boldsymbol{J})$ le foncteur (*co-base type*) injection canonique.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie, un foncteur $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé *co-cône de co-indexation* $\boldsymbol{J}$, de *co-base* $V_o\mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, de *co-sommet* $V(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}))$ et ayant $V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J})) : V(\mathrm{J}) \to V(\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J}))$ pour *co-projection en* J, quand $\mathrm{J} \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})$.

En particulier, un tel co-cône peut évidemment être un *co-cône co-limite*.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie *localement petite*

Comme en [C.Q.C.E.], si $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône d'indexation petite et si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, on dit que X *satisfait* U [2] si :

- le co-cône $\boldsymbol{X}(U(-),\mathrm{X}) : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{I})^{\mathrm{op}} \to \boldsymbol{Ens}$ est un co-cône co-limite.

Compte tenu du calcul des co-limites dans $\boldsymbol{Ens}$, il est facile de voir que X satisfait U si, et seulement si :

- (SAT 1) pour toute flèche $\mathrm{x} : U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$, il existe un objet I de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $\mathrm{y} : U(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telle que $\mathrm{y}.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I})) = \mathrm{x}$ (alors, on pourra dire que y est une *factorisation de* x *par* U),
- (SAT 2) pour tous objets I' et I'' de $\boldsymbol{I}$ et pour toutes flèches $\mathrm{y}' : U(\mathrm{I}') \to \mathrm{X}$ et $\mathrm{y}'' : U(\mathrm{I}'') \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telles que $\mathrm{y}'.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}')) = \mathrm{y}''.U(\mathrm{p}(\boldsymbol{I})(\mathrm{I}''))$, il existe un entier $\mathrm{n} \geq 1$, un *zigzag* de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ = (\mathrm{z}^\circ_{\mathrm{k}})_{1\leq \mathrm{k} \leq 2\mathrm{n}} : \mathrm{I}' = \mathrm{Z}^\circ_1 \xleftarrow[\mathrm{z}^\circ_1]{} \mathrm{Z}^\circ_2 \xrightarrow[\mathrm{z}^\circ_2]{} \mathrm{Z}^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots \mathrm{Z}^\circ_{2\mathrm{n}-1} \xleftarrow[\mathrm{z}^\circ_{2\mathrm{n}-1}]{} \mathrm{Z}^\circ_{2\mathrm{n}} \xrightarrow[\mathrm{z}^\circ_{2\mathrm{n}}]{} \mathrm{Z}^\circ_{2\mathrm{n}+1} = \mathrm{I}''$$

  et une famille $\mathrm{y}^\circ = (\mathrm{y}^\circ_{\mathrm{k}} : U(\mathrm{Z}^\circ_{\mathrm{k}}) \to \mathrm{X})_{1 \leq \mathrm{k} \leq 2\mathrm{n}+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que :

  - $\mathrm{y}' = \mathrm{y}^\circ_1$ et $\mathrm{y}^\circ_{2\mathrm{n}+1} = \mathrm{y}''$,
  - $\mathrm{y}^\circ_{2\mathrm{h}-1}.\mathrm{U}(\mathrm{z}^\circ_{2\mathrm{h}-1}) = \mathrm{y}^\circ_{2\mathrm{h}} = \mathrm{y}^\circ_{2\mathrm{h}+1}.\mathrm{U}(\mathrm{z}^\circ_{2\mathrm{h}})$, pour tout entier $1 \leq \mathrm{h} \leq \mathrm{n}$,

  (alors, on pourra dire que la famille y° *connecte* y' *à* y'' *le long de* ξ°)

Si $\mathcal{U}$ est un ensemble de cônes de $\boldsymbol{X}$ d'indexations petites et si X est un objet de $\boldsymbol{X}$, on dit qu'il *satisfait* $\mathcal{U}$ si :

- X satisfait tout cône appartenant à $\mathcal{U}$.

Comme en [C.Q.C.E.], on dit alors que $\mathcal{U}$ est une *qualification interne à* $\boldsymbol{X}$, on note $\mathrm{Satisf}(\mathcal{U},\boldsymbol{X})$ *la sous-catégorie pleine de* $\boldsymbol{X}$ *qualifiable (ou qualifiée) par* $\mathcal{U}$, i.e. la sous-catégorie pleine de $\boldsymbol{X}$ dont les objets sont ceux qui satisfont $\mathcal{U}$, et on note :

---

[2] Evidemment, la notion de *satisfaction* généralise aux cas de cônes d'indexations non nécessairement discrètes tant la notion d'*orthogonalité* que celle d'*objet injectif* (voir [C.Q.C.E.] pour une discussion plus complète sur ce thème)

$$\mathrm{inj}(\mathcal{U},\boldsymbol{X}) : \mathrm{Satisf}(\mathcal{U},\boldsymbol{X}) \to \boldsymbol{X}$$

le foncteur injection canonique.

2.2. Genres et qualifications.

On appelle *genre de catégories (petites)* toute classe $\mathcal{G}$ de catégories petites.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories et que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite

On dit qu'une qualification $\mathcal{U}$, interne à $\boldsymbol{X}$, est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est une *$\mathcal{G}$-qualification* si :

- pour tout cône $U : \mathrm{C}(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ appartenant à $\mathcal{U}$, on a $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$.

2.3. Existence de produits de deux dans certaines catégories qualifiables.

On dit qu'une catégorie $\boldsymbol{I}$ est *co-tamisante* si :

- (COTAM 1) pour tous objets I_1 et I_2 de $\boldsymbol{I}$, il existe un objet S de $\boldsymbol{I}$ et deux flèches s_1 et s_2 de $\boldsymbol{I}$ telles que $s_1 : S \to I_1$ et $s_2 : S \to I_2$ (alors, on pourra dire que le *span* [3] $\sigma = (S,s_1,s_2)$ *connecte* I_1 *à* I_2) [4],
- (COTAM 2) pour tous objets I_1, I_2 et tous spans $\sigma' = (S',s'_1,s'_2)$ et $\sigma'' = (S'',s''_1,s''_2)$ de $\boldsymbol{I}$, connectant I_1 à I_2, il existe un entier $n \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$

$$\xi^* = (z^*_k)_{1\leq k\leq 2n} : S' = Z^*_1 \xleftarrow[z^*_1]{} Z^*_2 \xrightarrow[z^*_2]{} Z^*_3 \cdots$$
$$\cdots Z^*_{2n-1} \xleftarrow[z^*_{2n-1}]{} Z^*_{2n} \xrightarrow[z^*_{2n}]{} Z^*_{2n+1} = S''$$

et deux familles de flèches de $\boldsymbol{I}$:

---

[3] Nous préférons dire ici "span" plutôt que "cône", pour éviter toute confusion de "fonction" avec les nombreux autres cônes ... où ces "spans" vont être utilisés.

[4] Bien entendu, il revient au même de dire que $\boldsymbol{I}$ co-filtre les diagrammes discrets, finis, non vides.

$$s^*_1 = (s^*_{1.k} : Z^*_k \to I_1)_{1 \leq k \leq 2n+1}$$

$$s^*_2 = (s^*_{2.k} : Z^*_k \to I_2)_{1 \leq k \leq 2n+1},$$

telles que

- $s'_1 = s^*_{1.1}$ et $s^*_{1.2n+1} = s''_1$,
- $s^*_{1.2h-1}.z^*_{2h-1} = s^*_{1.2h} = s^*_{1.2h+1}.z^*_{2h}$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$,
- $s'_2 = s^*_{2.1}$ et $s^*_{2.2n+1} = s''_2$,
- $s^*_{2.2h-1}.z^*_{2h-1} = s^*_{2.2h} = s^*_{2.2h+1}.z^*_{2h}$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$,

(alors, on pourra dire que les deux familles s^*_1 et s^*_2 *connectent le span* σ' *au span* σ'' *le long de* ξ^*)

Alors, on dit qu'une catégorie est *tamisante* si sa duale est co-tamisante et on note $\mathcal{T}am$ la classe de toutes les catégories petites et tamisantes : c'est donc un genre particulier

Si X est une catégorie localement petite et si $\mathcal{U}$ est une qualification interne à X, il est clair que $\mathcal{U}$ est une $\mathcal{T}am$-qualification si, et seulement si :

- l'indexation I de tout cône $U : \mathrm{C}(I) \to X$ appartenant à $\mathcal{U}$ est une catégorie co-tamisante.

Plus concrètement, nous dirons donc que $\mathcal{U}$ est à *indexations co-tamisantes*

Vérifions que

LEMME. *Si* X *est une catégorie localement petite et si* $\mathcal{U}$ *est une qualification interne à* X *et à indexations co-tamisantes, i.e. si* $\mathcal{U}$ *est une* $\mathcal{T}am$*-qualification, alors le foncteur injection canonique :*

$$\mathrm{inj}(\mathcal{U},X) : \mathrm{Satisf}(\mathcal{U},X) \to X$$

crée les produits de deux [5].

---

[5] On déduit immédiatement du LEMME de 2.3 que :

COROLLAIRE. *Si* I' *est une catégorie petite et tamisante, alors les co-limites de co-indexation* I' *commutent, dans* ***Ens***, *avec les produits de deux.*

PREUVE. Désignons par $\mathrm{CoCones}(I') = \mathrm{Fonct}(\mathrm{CC}(I'),\boldsymbol{Ens})$ la catégorie des co-cônes de ***Ens*** de co-indexation I' et par $\mathrm{CoLim}(I')$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{CoCones}(I')$ ayant pour objets les co-cônes co-limites.

PREUVE. Il suffit de montrer que, si $U \cdot C(\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône d'indexation petite et co-tamisante, si X_1 et X_2 sont deux objets de $\boldsymbol{X}$ qui satisfont U et si $(\pi_r : X_1 \times X_2 \to X_r)_{r \in \{1.2\}}$ est un produit dans $\boldsymbol{X}$, alors $X_1 \times X_2$ satisfait U (à cet effet, pour tout objet Y et toutes flèches $y_1 : Y \to X_1$ et y_2 $Y \to X_2$ de $\boldsymbol{X}$, on notera $[y_1,y_2] . Y \to X_1 \times X_2$ l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$ telle que $\pi_1.[y_1,y_2] = y_1$ et $\pi_2.[y_1,y_2] = y_2$)

a) Supposons, tout d'abord, que $x : U(\mathrm{Sm}(\boldsymbol{I})) \to X_1 \times X_2$ est une flèche de $\boldsymbol{X}$

En conséquence :

- il existe (en vertu de (SAT 1), puisque X_1 satisfait U) un objet I_1 de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $y_1 : U(I_1) \to X_1$ de $\boldsymbol{X}$ telle que $y_1.U(p(\boldsymbol{I})(I_1)) = \pi_1.x$,
- il existe (en vertu de (SAT 1), puisque X_2 satisfait U) un objet I_2 de $\boldsymbol{I}$ et une flèche $y_2 : U(I_2) \to X_2$ de $\boldsymbol{X}$ telle que $y_2.U(p(\boldsymbol{I})(I_2)) = \pi_2.x$

Mais, $\boldsymbol{I}$ étant co-tamisante, il existe (en vertu de (COTAM 1)) un span $\sigma = (S,s_1,s_2)$ de $\boldsymbol{I}$ qui connecte I_1 à I_2.

Dès lors, il est facile de constater (par unicité) que $[y_1.U(s_1),y_2.U(s_2)].U(p(\boldsymbol{I})(S)) = x$, autrement dit $X_1 \times X_2$ vérifie (SAT 1).

b) Supposons, maintenant, que I' et I" sont deux objets de $\boldsymbol{I}$ et que $y' . U(I') \to X_1 \times X_2$ et $y'' : U(I'') \to X_1 \times X_2$ sont deux flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que $y'.U(p(\boldsymbol{I})(I')) = y''.U(p(\boldsymbol{I})(I''))$.

On en déduit que :

- il existe (en vertu de (SAT 2), puisque X_1 satisfait U) un entier $n_1 \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$.

$$\xi^\circ_1 = (z^\circ_{1k})_{1\leq k\leq 2n_1} : I' = Z^\circ_{1.1} \xleftarrow[z^\circ_{1.1}]{} Z^\circ_{1.2} \xrightarrow[z^\circ_{1.2}]{} Z^\circ_{1.3} \cdots$$
$$\cdots Z^\circ_{1.2n_1-1} \xleftarrow[z^\circ_{1.2n_1-1}]{} Z^\circ_{1.2n_1} \xrightarrow[z^\circ_{1.2n_1}]{} Z^\circ_{1.2n_1+1} = I''$$

  et une famille $y^\circ_1 = (y^\circ_{1,k} : U(Z^\circ_{1.k}) \to X_1)_{1\leq k\leq 2n_1+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ qui connecte $\pi_1.y'$ à $\pi_1.y''$ le long de ξ°_1,

- il existe (en vertu de (SAT 2), puisque X_2 satisfait U) un entier $n_2 \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

Notons $\mathrm{Yon}(CC(\boldsymbol{I}')) : C(\boldsymbol{I}'^{op}) = CC(\boldsymbol{I}')^{op} \to \mathrm{Fonct}(CC(\boldsymbol{I}').\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$ le plongement de Yoneda (il s'agit donc d'un *cône* de $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$. d'indexation $\boldsymbol{I}'^{op}$) et posons $\mathcal{U}(\boldsymbol{I}') = \{\mathrm{Yon}(CC(\boldsymbol{I}')\}$

Il est clair que $\mathrm{CoLim}(\boldsymbol{I}') = \mathrm{Satisf}(\mathcal{U}(\boldsymbol{I}'),\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}'))$ et le LEMME de 2.3 s'applique donc (puisque $(\boldsymbol{I}')^{op}$ est - par définition - co-tamisante) Mais $\mathrm{CoCones}(\boldsymbol{I}')$ *possède* les produits de deux (qui se calculent, évidemment, "point par point"), ce qui permet de conclure facilement. FIN DE LA PREUVE.

$$\xi^\circ{}_2 = (z^\circ{}_{2.k})_{1\le k\le 2n_2} : I' = Z^\circ{}_{2.1} \xleftarrow{z^\circ{}_{2,1}} Z^\circ{}_{2.2} \xrightarrow{z^\circ{}_{2.2}} Z^\circ{}_{2.3} \cdots$$
$$\cdots Z^\circ{}_{2,2n_2-1} \xleftarrow{z^\circ{}_{2.2n_2-1}} Z^\circ{}_{2.2n_2} \xrightarrow{z^\circ{}_{2.2n_2}} Z^\circ{}_{2.2n_2+1} = I''$$

et une famille $y^\circ{}_2 = (y^\circ{}_{2.k} : U(Z^\circ{}_{2.k}) \to X_2)_{1\le k\le 2n_2+1}$ de flèches de X qui connecte $\pi_2.y'$ à $\pi_2.y''$ le long de $\xi^\circ{}_2$

On peut toujours supposer que $n_1 = n_2 = n$ (ce que nous ferons donc dans la suite) car, si $n_1 < n_2$ (par exemple), on voit que :

- on peut prolonger le zigzag $\xi^\circ{}_1$ (de longueur $2n_1$) en le zigzag $\overline{\xi^\circ{}_1} = (\xi^\circ{}_1, id(I''), \ldots, id(I''))$ (de longueur $2n_2$),
- on peut compléter la famille $y^\circ{}_1$ (de longueur $2n_1$) en la famille $\overline{y^\circ{}_1} = (y^\circ{}_1, \pi_1.y'', \ldots, \pi_1.y'')$ (de longueur $2n_2$),
- la famille $\overline{y^\circ{}_1}$ connecte $\pi_1.y'$ à $\pi_1.y''$ le long de $\overline{\xi^\circ{}_1}$

Comme I est co-tamisante, pour tout $1 \le k \le 2n+1$, on dispose (en vertu de (COTAM 1)) d'un span $\sigma_k = (S_k, s_{k.1}, s_{k.2})$ de I connectant $Z^\circ{}_{1.k}$ à $Z^\circ{}_{2.k}$ et, ce, de sorte qu'on peut même prendre $\sigma_1 = (I', id(I'), id(I'))$ et $\sigma_{2n+1} = (I'', id(I''), id(I''))$.

Alors, comme I est co-tamisante, pour tout $1 \le h \le n$, on dispose (en vertu de (COTAM 2)) :

- d'un entier $m_{2h-1} \ge 1$, d'un zigzag de flèches de I.

$$\xi^*{}_{2h-1} = (z^*{}_{2h-1.r})_{1\le r\le 2m_{2h-1}} : S_{2h-1} = Z^*{}_{2h-1.1} \xleftarrow{z^*{}_{2h-1.1}} Z^*{}_{2h-1.2} \xrightarrow{z^*{}_{2h-1.2}} Z^*{}_{2h-1.3} \cdots$$
$$\cdots Z^*{}_{2h-1.2m_{2h-1}-1} \xleftarrow{z^*{}_{2h-1.2m_{2h-1}-1}} Z^*{}_{2h-1.2m_{2h-1}} \xrightarrow{z^*{}_{2h-1.2m_{2h-1}}} Z^*{}_{2h-1.2m_{2h-1}+1} = S_{2h}$$

  et de deux familles $s^*{}_{2h-1.1} = (s^*{}_{2h-1.1.r})_{1\le r\le 2m_{2h-1}+1}$ et $s^*{}_{2h-1.2} = (s^*{}_{2h-1.2.r})_{1\le r\le 2m_{2h-1}+1}$ de flèches de I permettant de connecter le span $\sigma_{2h-1} = (S_{2h-1}, s_{2h-1.1}, s_{2h-1.2})$ au span (obtenu par composition) $(z^\circ{}_{1.2h-1}, z^\circ{}_{2.2h-1}).\sigma_{2h} = (S_{2h}, z^\circ{}_{1.2h-1}.s_{2h.1}, z^\circ{}_{2.2h-1}.s_{2h.2})$ le long de $\xi^*{}_{2h-1}$,

- d'un entier $m_{2h} \ge 1$, d'un zigzag de flèches de I :

$$\xi^*{}_{2h} = (z^*{}_{2h.r})_{1\le r\le 2m_{2h}} : S_{2h} = Z^*{}_{2h,1} \xleftarrow{z^*{}_{2h.1}} Z^*{}_{2h,2} \xrightarrow{z^*{}_{2h.2}} Z^*{}_{2h,3} \cdots$$
$$\cdots Z^*{}_{2h.2m_{2h}-1} \xleftarrow{z^*{}_{2h.2m_{2h}-1}} Z^*{}_{2h.2m_{2h}} \xrightarrow{z^*{}_{2h.2m_{2h}}} Z^*{}_{2h.2m_{2h}+1} = S_{2h+1}$$

  et de deux familles $s^*{}_{2h.1} = (s^*{}_{2h.1.r})_{1\le r\le 2m_{2h}+1}$ et $s^*{}_{2h.2} = (s^*{}_{2h.2.r})_{1\le r\le 2m_{2h}+1}$ de flèches de I permettant de connecter le span (également obtenu par composition) $(z^\circ{}_{1.2h}, z^\circ{}_{2.2h}).\sigma_{2h} = (S_{2h}, z^\circ{}_{1.2h}.s_{2h.1}, z^\circ{}_{2.2h}.s_{2h.2})$ au span $\sigma_{2h+1} = (S_{2h+1}, s_{2h+1.1}, s_{2h+1.2})$ le long de $\xi^*{}_{2h}$.

Dès lors, on dispose aussi :

- pour tout $1 \leq k \leq 2n+1$, de la flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$f_k = [y^\circ_{1,k} \bullet \mathcal{U}(s_{k,1}), y^\circ_{2,k} \bullet \mathcal{U}(s_{k,2})] : \mathcal{U}(S_k) \to X_1 \times X_2$$

  et, ce, de sorte qu'on a, en particulier :

  - $f_1 = [\pi_1 \bullet y' \bullet \mathcal{U}(\mathrm{id}(I')), \pi_2 \bullet y' \bullet \mathcal{U}(\mathrm{id}(I'))] = y'$,
  - $f_{2n+1} = [\pi_1 \bullet y'' \bullet \mathcal{U}(\mathrm{id}(I'')), \pi_2 \bullet y'' \bullet \mathcal{U}(\mathrm{id}(I''))] = y''$,

- pour tout $1 \leq h \leq n$ et tout $1 < r < 2m_{2h-1}+1$, de la flèche de $\boldsymbol{X}$.

$$f^*_{2h-1,r} = [y^\circ_{1,2h-1} \bullet \mathcal{U}(s^*_{2h-1,1,r}), y^\circ_{2,2h-1} \bullet \mathcal{U}(s^*_{2h-1,2,r})] : \mathcal{U}(Z^*_{2h-1,r}) \to X_1 \times X_2 ,$$

- pour tout $1 \leq h \leq n$ et tout entier $1 < r < 2m_{2h}+1$, de la flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$f^*_{2h,r} = [y^\circ_{1,2h+1} \bullet \mathcal{U}(s^*_{2h,1,r}), y^\circ_{2,2h+1} \bullet \mathcal{U}(s^*_{2h,2,r})] \quad \mathcal{U}(Z^*_{2h,r}) \to X_1 \times X_2$$

Dans ces conditions, il est facile de constater que la famille de flèches de $\boldsymbol{X}$:

$$\begin{gathered}(f_1, (f^*_{1,r})_{1<r<2m_1+1}, f_2, (f^*_{2,r})_{1<r<2m_2+1}, f_3, \ldots \\ \ldots, f_{2h-1}, (f^*_{2h-1,r})_{1<r<2m_{2h-1}+1}, f_{2h}, (f^*_{2h,r})_{1<r<2m_{2h}+1}, f_{2h+1}, \ldots \\ \ldots, f_{2n-1}, (f^*_{2n-1,r})_{1<r<2m_{2n-1}+1}, f_{2n}, (f^*_{2n,r})_{1<r<2m_{2n}+1}, f_{2n+1})\end{gathered}$$

permet de connecter $y' = f_1$ à $f_{2n+1} = y''$ le long du zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$(\xi^*_1, \ldots, \xi^*_k, \ldots, \xi^*_{2n}) = ((z^*_{1,r})_{1 \leq r \leq 2m_1}, \ldots, (z^*_{k,r})_{1 \leq r \leq 2m_k}, \ldots, (z^*_{2n,r})_{1 \leq r \leq 2m_{2n}}) ,$$

de sorte que $X_1 \times X_2$ vérifie aussi (SAT 2). FIN DE LA PREUVE

3. Sur l'existence de produits de deux dans les catégories de modèles de certaines esquisses.

3.1. Esquisses.

Comme en [E.T.S.A.] et en [C.Q.C.E.] (notamment), on dit que $\boldsymbol{E} = (\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}), \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E}), \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E}))$ est une *esquisse* si :

- $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ est une catégorie [6], appelée le *support* de $\boldsymbol{E}$,

---

[6] Nous supposons (pour simplifier l'exposé - et la lecture), que les supports des esquisses sont des catégories et non des "présentations de catégories", i.e. des *graphes multiplicatifs* (voir [E.T.S.A.]). Cependant, il est clair que, dans ce cadre plus général, les différents résultats énoncés ici demeurent tout

- $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ est une classe de cônes de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *distingués dans* $\boldsymbol{E}$,
- $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ est une classe de co-cônes de $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, dits *co-distingués* dans $\boldsymbol{E}$

Alors, on dit que $\boldsymbol{E}$ est *petite* si "tout y est petit", i.e. si :

- $\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ est un *ensemble* et l'indexation de tout cône distingué est une catégorie *petite*,
- $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ est un *ensemble* et la co-indexation de tout co-cône co-distingué est une catégorie *petite*.

Si $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{E}'$ sont deux esquisses, on dit qu'un foncteur $H : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ *définit un homomorphisme* (encore noté) $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ *de* $\boldsymbol{E}$ *vers* $\boldsymbol{E}'$ et de *support* (le foncteur) H si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le cône composé $H \circ P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ est distingué dans $\boldsymbol{E}'$,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le co-cône composé $H \circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}')$ est co-distingué dans $\boldsymbol{E}'$.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse, on dit qu'un foncteur $M : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}) \to \boldsymbol{X}$ *définit* un *modèle* (encore noté) $M : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{X}$ *de* $\boldsymbol{E}$ *dans* $\boldsymbol{X}$ et de *support* (le foncteur) M si :

- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le cône composé $M \circ P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \boldsymbol{X}$ est un cône limite dans $\boldsymbol{X}$,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, le co-cône composé $M \circ Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \boldsymbol{X}$ est un co-cône co-limite dans $\boldsymbol{X}$.

Alors, on note $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X})$ la catégorie de ces modèles, i.e. la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{X})$ ayant pour objets les modèles de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{X}$.

Si $H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}'$ est un homomorphisme entre deux esquisses et si $M' : \boldsymbol{E}' \to \boldsymbol{X}$ est un modèle de $\boldsymbol{E}'$, il est clair que $M' \circ H : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{X}$ est un modèle de $\boldsymbol{E}$. Ainsi, on dispose d'un foncteur "composition à droite par H" :

$$\mathrm{Mod}(H,\boldsymbol{X}) : \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E}',\boldsymbol{X}) \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{X}).$$

Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite.

On note $\mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})) : \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le plongement de Yoneda.

---

aussi valables (à une simple adaptation près concernant le "plongement" - qui, en général, n'en est plus un - de Yoneda).

Pour tout *cône* $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, distingué dans $\boldsymbol{E}$, on note successivement :

- $\mathrm{CCA}(P) = \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))_{\circ}P^{\mathrm{op}} : \mathrm{CC}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{C}(\boldsymbol{A})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *co-cône associé* (par dualité, puis composition avec le plongement de Yoneda) au cône P,
- $\mathrm{CSCCA}(P)$ le co-sommet du co-cône associé à P,
- $\mathrm{CLA}(P)$ le *co-cône co-limite associé à* P, i.e. un co-cône co-limite arbitrairement choisi parmi ceux de même co-base que le co-cône associé à P (il en existe au moins un puisque $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ est, évidemment, co-complète),
- $\mathrm{CSCLA}(P)$ le co-sommet du co-cône co-limite $\mathrm{CLA}(P)$ associé à P,
- $\mathrm{f}(P) : \mathrm{CSCLA}(P) \to \mathrm{CSCCA}(P)$ l'unique flèche de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ permettant de factoriser le co-cône $\mathrm{CCA}(P)$ au travers du co-cône co-limite $\mathrm{CLA}(P)$ (puisqu'ils ont même co-base),
- $\mathrm{U}(P) : \mathrm{C}(\boldsymbol{1}) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *cône associé à* P, d'indexation la catégorie $\boldsymbol{1}$ (à un seul objet 0 et une seule flèche $\mathrm{id}(0)$) et ayant pour (seule) projection la flèche :

$$\mathrm{U}(P)(\mathrm{p}(\boldsymbol{1})(0)) = \mathrm{f}(P) : \mathrm{CSCLA}(P) \to \mathrm{CSCCA}(P).$$

Maintenant, pour tout *co-cône* $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$, co-distingué dans $\boldsymbol{E}$, on note :

- $\mathrm{U}(Q) = \mathrm{Yon}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))_{\circ}Q^{\mathrm{op}} : \mathrm{C}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{CC}(\boldsymbol{B})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ le *cône associé* (par dualité, puis composition avec le plongement de Yoneda) au co-cône Q.

De la sorte, on obtient une qualification interne à $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ *canoniquement associée à* $\boldsymbol{E}$:

$$\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}) = \{\mathrm{U}(P) \mid P \in \mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})\} \cup \{\mathrm{U}(Q) \mid Q \in \mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})\}$$

et, comme en [C.Q.C.E.], il est facile de constater (compte tenu des propriétés du plongement de Yoneda) que :

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})).$$

3.2. Genres et esquisses.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

On dit qu'une esquisse $\boldsymbol{E}$ est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est une *$\mathcal{G}$-esquisse* si :

- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, on a $\boldsymbol{B} \in \mathcal{G}$.

3.3. Existence de produits de deux dans les catégories de modèles de certaines esquisses.

Il est clair (en reprenant la notation de 2.3) qu'une esquisse petite $\boldsymbol{E}$ est une $\mathcal{T}am$-esquisse si, et seulement si :

- la co-indexation $\boldsymbol{B}$ de tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$ est une catégorie tamisante.

Plus concrètement, nous dirons donc que $\boldsymbol{E}$ est à *co-indexations tamisantes*.

On vérifie immédiatement que :

PROPOSITION. *Si* $\boldsymbol{E}$ *est une esquisse petite à co-indexations tamisantes, i.e. si* $\boldsymbol{E}$ *est une* $\mathcal{T}am$*-esquisse petite, alors la catégorie de ses modèles dans* $\boldsymbol{Ens}$ *possède les produits de deux.*

PREUVE. Clairement, si $\boldsymbol{E}$ est petite et à co-indexations tamisantes, alors sa qualification associée $\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E})$ est à indexations co-tamisantes puisque, par construction, si $\boldsymbol{I}$ est une indexation d'un cône de $\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E})$, on a $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{1}$ ou $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{op}}$, où $\boldsymbol{B}$ est une co-indexation d'au moins un co-cône co-distingué dans $\boldsymbol{E}$. Par conséquent, le LEMME de 2.3 s'applique et le foncteur injection canonique :

$$\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens}) = \mathrm{Satisf}(\mathrm{Qualif}(\boldsymbol{E}),\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})) \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$$

crée les produits de deux. Mais la catégorie $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}),\boldsymbol{Ens})$ *possède* les produits de deux (qui se calculent, évidemment, "point par point"). FIN DE LA PREUVE.

4. Sur les diagrammes localement co-limites dans les catégories possédant les produits de deux.

4.1. Diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites.

Si $\boldsymbol{J}'$ est une petite catégorie, si $F' : \boldsymbol{J}' \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ' est un ensemble, on dit (évidemment) que Λ' est une (ou un *objet*) *limite* de F' si :

- il existe un cône $U' : \mathrm{C}(\boldsymbol{J}') \to \boldsymbol{Ens}$ tel que :
  - U' a pour sommet Λ' et pour base F',
  - U' est un cône limite.

Alors, on note (bien entendu) :

$$\Lambda' = \operatorname*{Lim}_{J' \in \boldsymbol{J'}} F'(J')$$

Si $\boldsymbol{I'}$ est une petite catégorie, si $D' : \boldsymbol{I'} \to \boldsymbol{Ens}$ est un foncteur et si Λ'' est un ensemble, on dit (évidemment) que Λ'' est une (ou un *objet*) *co-limite de* D' si :

- il existe un co-cône $V' : \mathrm{CC}(\boldsymbol{I'}) \to \boldsymbol{Ens}$ tel que :
    - V' a pour co-sommet Λ'' et pour co-base D',
    - V' est un co-cône co-limite.

Alors, on note (bien entendu) :

$$\Lambda'' = \operatorname*{CoLim}_{I' \in \boldsymbol{I'}} D'(I') .$$

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie *localement petite* et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories *petites*.

On dit qu'un foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *admet pour (petit) diagramme localement co-limite* le foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ si :

- naturellement en tout objet X de $\boldsymbol{X}$, on a (dans $\boldsymbol{Ens}$) :

$$\operatorname*{CoLim}_{I \in \boldsymbol{I}^{op}} \boldsymbol{X}(D(I),X) \cong \operatorname*{Lim}_{J \in \boldsymbol{J}^{op}} \boldsymbol{X}(F(J),X) .$$

Supposons que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites.

On désigne par $\mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ la catégorie (*tronc de co-cône type de co-indexation* $\boldsymbol{J}$ *et d'indexation* $\boldsymbol{I}$) obtenue en adjoignant à la réunion de $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ (supposées disjointes, pour simplifier) une unique flèche (*co-projection type en* (J,I)) $\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I) : J \to I$ et, ce, pour tout objet I de $\boldsymbol{I}$ et pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$.

Alors, on désigne par $\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ et $\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})$ les foncteurs (*co-base type* et *diagramme co-sommital type*) injections canoniques.

Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite, un foncteur $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est appelé un (*petit) tronc de co-cône de* $\boldsymbol{X}$, *de co-indexation* $\boldsymbol{J}$, *d'indexation* $\boldsymbol{I}$, *de co-base* $W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *de diagramme co-sommital* $W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ et ayant $W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I)) : W(J) \to W(I)$ pour *co-projection en* (J,I), quand $J \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})$ et $I \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{I})$.

En particulier, on dit qu'il s'agit d'un *tronc de co-cône localement co-limite* si :

- (LCOLIM 1) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$ et tout co-cône $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$ de co-sommet X et de même co-base $V \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J}) = W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ que le tronc de co-cône $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, il existe (au moins) un objet I de $\boldsymbol{I}$ et (au moins) une flèche $y : W(\mathrm{I}) \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telle que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $y.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I})) = V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(\mathrm{J}))$,

- (LCOLIM 2) pour tout objet X de $\boldsymbol{X}$, tous objets I' et I" de $\boldsymbol{I}$ et toutes flèches $y' : W(\mathrm{I}') \to \mathrm{X}$ et $y'' : W(\mathrm{I}'') \to \mathrm{X}$ de $\boldsymbol{X}$ telles que :

  - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $y'.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}')) = y''.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(\mathrm{J},\mathrm{I}''))$,

alors il existe un entier $n \geq 1$, un *zigzag* de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^\circ = (z^\circ_k)_{1\leq k\leq 2n} : \mathrm{I}' = Z^\circ_1 \xleftarrow[z^\circ_1]{} Z^\circ_2 \xrightarrow[z^\circ_2]{} Z^\circ_3 \ldots$$
$$\ldots Z^\circ_{2n-1} \xleftarrow[z^\circ_{2n-1}]{} Z^\circ_{2n} \xrightarrow[z^\circ_{2n}]{} Z^\circ_{2n+1} = \mathrm{I}''$$

et une famille $y^\circ = (y^\circ_k : W(Z^\circ_k) \to \mathrm{X})_{1 \leq k \leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ telles que :

- $y' = y^\circ_1$ et $y^\circ_{2n+1} = y''$,
- $y^\circ_{2h-1}.W(z^\circ_{2h-1}) = y^\circ_{2h} = y^\circ_{2h+1}.W(z^\circ_{2h})$, pour tout entier $1 \leq h \leq n$

Compte tenu du calcul des co-limites dans $\boldsymbol{Ens}$, il est facile de voir que :

LEMME. *Si $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites, alors :*

- *si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement co-limite, le diagramme (co-sommital de W) $D = W\circ\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme localement co-limite du foncteur (co-base de W) $F = W\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,*

- *si $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un diagramme localement co-limite du foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, il leur est associé un tronc de co-cône localement co-limite $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, de co-base le foncteur $W_{F,D} \circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ et de diagramme co-sommital le foncteur $W_{F,D} \circ\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.*

4.2. Genres, diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites.

Supposons que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories, que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites

Si le foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ admet le foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ pour diagramme localement co-limite, on dit (par simple souci d'homogénéïté avec les terminologies précédentes) que D est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est un *$\mathcal{G}$-diagramme* localement co-limite de F si :

- $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$.

De même, si $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement co-limite, on dit qu'il est *de genre* $\mathcal{G}$ ou encore que c'est un *$\mathcal{G}$-tronc de co-cône* localement co-limite si :

- $\boldsymbol{I}^{\mathrm{op}} \in \mathcal{G}$.

Il est évidemment parfaitement trivial de constater (par simple souci d'homogénéité avec l'énoncé du LEMME de 4.1) que :

LEMME. *Si* $\mathcal{G}$ *est un genre de catégories, si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et si* $\boldsymbol{I}$ *et* $\boldsymbol{J}$ *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ *est un $\mathcal{G}$-tronc de co-cône localement co-limite, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite du foncteur (co-base de* W*)* $F = W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,
- *si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite du foncteur* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *il leur est associé un $\mathcal{G}$-tronc de co-cône loc alement co-limite* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.

4.3. Diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites saturés.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite.

Si $\boldsymbol{I}$ est une catégorie petite et si $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un foncteur, on dira que $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est un *(petit) diagramme saturé* si :

- (DSATUR 1) D est fidèle,
- (DSATUR 2) pour tous objets I, Z et Z' de $\boldsymbol{I}$, pour toutes flèches $\mathrm{i} : \mathrm{Z} \to \mathrm{I}$ et $\mathrm{z} : \mathrm{Z} \to \mathrm{Z}'$ de $\boldsymbol{I}$ et pour toute flèche $\mathrm{f} : D(\mathrm{Z}') \to D(\mathrm{I})$ de $\boldsymbol{X}$ telles que $\mathrm{f}.D(\mathrm{z}) = D(\mathrm{i})$, il existe une (nécessairement unique, par fidélité) flèche $\mathrm{i}' : \mathrm{Z}' \to \mathrm{I}$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $D(\mathrm{i}') = \mathrm{f}$ (d'où l'on déduit, par fidélité, que $\mathrm{i}'.\mathrm{z} = \mathrm{i}$)

Si $\boldsymbol{I}''$ est une catégorie petite et si $D'' : \boldsymbol{I}'' \to \boldsymbol{X}$ est un foncteur, notons $\mathrm{Satur}(D'')$ la catégorie, évidemment petite, telle que :

- ses objets sont ceux de $\boldsymbol{I}''$,

- ses flèches sont les $(Z',f,I) : Z' \to I$ tels que :
    - I et Z' sont deux objets de $\boldsymbol{I}''$,
    - $f : D''(Z') \to D''(I)$ est une flèche de $\boldsymbol{X}$,
    - il existe un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}''$:

$$\xi^{\#} = (z^{\#}{}_k)_{1\leq k\leq 2n} \cdot Z' = Z^{\#}{}_1 \xleftarrow[z^{\#}{}_1]{} Z^{\#}{}_2 \xrightarrow[z^{\#}{}_2]{} Z^{\#}{}_3 \dots$$
$$\dots Z^{\#}{}_{2n-1} \xleftarrow[z^{\#}{}_{2n-1}]{} Z^{\#}{}_{2n} \xrightarrow[z^{\#}{}_{2n}]{} Z^{\#}{}_{2n+1} = I$$

et une famille $f^{\#} = (f^{\#}{}_k : D''(Z^{\#}{}_k) \to D''(I))_{1\leq k\leq 2n+1}$ de flèches de $\boldsymbol{X}$ permettant de connecter f à $\mathrm{id}(D''(I))$ le long de $\xi^{\#}$

Alors, on dispose du foncteur canonique :

$$\begin{aligned} \mathrm{satur}(D'') \cdot \mathrm{Satur}(D'') &\to \boldsymbol{X} \\ (Z',f,I) &\mapsto f \end{aligned}$$

et il est facile de constater que $\mathrm{satur}(D'')$ est un diagramme saturé

De plus, on vérifie aisément que, si $\boldsymbol{J}$ est une catégorie petite, si $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ est un foncteur et si D'' en est un petit diagramme localement co-limite, alors $\mathrm{satur}(D'')$ en est *aussi* un petit diagramme localement co-limite, évidemment saturé.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite

Si $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites et si $W \cdot \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône, on dira qu'il est *(co-sommitalement) saturé* si ·

- (TSATUR 1) son diagramme co-sommital $W_o\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ est fidèle,
- (TSATUR 2) pour tous objets I et Z' de $\boldsymbol{I}$ et toute flèche $f : W(Z') \to W(I)$ de $\boldsymbol{X}$ tels que ·
    - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $f.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,Z')) = W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I))$,

  il existe une (nécessairement unique, par fidélité) flèche $i' : Z' \to I$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $W(i') = f$.

Si $\boldsymbol{I}''$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites et si $W'' \cdot \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'') \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône, notons $\mathrm{Satur}(W'')$ la catégorie, évidemment petite, telle que :

- ses objets sont ceux de $\boldsymbol{I}$,
- ses flèches sont les $(Z',f,I) : Z' \to I$ tels que :
    - I et Z' sont deux objets de $\boldsymbol{I}''$,
    - $f : W''(Z') \to W''(I)$ est une flèche de $\boldsymbol{X}$,
    - pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a $f.W''(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'')(J,Z')) = W''(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'')(J,I))$.

Alors, on dispose du foncteur canonique :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{satur}(W'') : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\mathrm{Satur}(W'')) & \to & \boldsymbol{X} \\ \mathrm{j} & \mapsto & W''(\mathrm{j}) \\ \mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\mathrm{Satur}(W''))(\mathrm{J},\mathrm{I}) & \mapsto & W''(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}'')(\mathrm{J},\mathrm{I})) \\ (\mathrm{Z}',\mathrm{f},\mathrm{I}) & \mapsto & \mathrm{f} \end{array}$$

et il est facile de constater que $\mathrm{satur}(W'')$ est un tronc de co-cône saturé de même co-base que le tronc de co-cône W''

De plus, on vérifie aisément que, si W'' est un petit tronc de co-cône localement co-limite, alors $\mathrm{satur}(W'')$ est *aussi* un petit tronc de co-cône localement co-limite, évidemment saturé, de même co-base que le tronc de co-cône W'' .

Compte tenu du LEMME de 4.1, il est facile de voir que :

LEMME. *Si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et si* $\boldsymbol{I}$ *et* $\boldsymbol{J}$ *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ *est un petit tronc de co-cône localement co-limite et saturé, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W\circ\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un petit diagramme localement co-limite et saturé du foncteur (co-base de* W*)* $F = W\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,
- *si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un petit diagramme localement co-limite et saturé du foncteur* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *le tronc de co-cône associé* $W_{F,D} : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ *est un petit tronc de co-cône localement co-limité et saturé (de co-base le foncteur* F *et de diagramme co-sommital le foncteur* D*).*

4.4. Genres, diagrammes et troncs de co-cônes localement co-limites saturés.

Il est évidemment parfaitement trivial de constater (par simple souci d'homogénéïté avec les énoncés des LEMMES de 4 1, 4 2 et 4.3) que :

LEMME. *Si* $\mathcal{G}$ *est un genre de catégories, si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et si* $\boldsymbol{I}$ *et* $\boldsymbol{J}$ *sont deux catégories petites, alors :*

- *si* $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ *est un* $\mathcal{G}$*-tronc de co-cône localement co-limite et saturé, le diagramme (co-sommital de* W*)* $D = W\circ\mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un* $\mathcal{G}$*-diagramme localement co-limite saturé du foncteur (co-base de* W*)* $F = W\circ\mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$,
- *si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *est un* $\mathcal{G}$*-diagramme localement co-limite saturé du foncteur* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$, *il leur est associé un* $\mathcal{G}$*-tronc de co-cône localement co-limite et saturé*

$W_{F,D}$: $\mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$, *de co-base le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ *et de diagramme co-sommital le foncteur* $W_{F,D} \circ \mathrm{CSm}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$.

4.5. Diagrammes localement co-limites saturés dans les catégories possédant les produits de deux.

Supposons que $\boldsymbol{X}$ est une catégorie localement petite et que $\boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J}$ sont deux catégories petites.

Il est clair (en reprenant la notation de 2.3) qu'un foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ admet un foncteur $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ pour $\mathcal{T}am$-diagramme localement co-limite si, et seulement si :

- $\boldsymbol{I}$ est co-tamisante.

Plus concrètement, nous dirons donc que D est *d'indexation co-tamisante*.

De même, il est clair que $W : \mathrm{TCC}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un $\mathcal{T}am$-tronc de co-cône localement co-limite si, et seulement si :

- $\boldsymbol{I}$ est co-tamisante.

Plus concrètement, nous dirons donc aussi que W est *d'indexation co-tamisante.*

Etablissons (en reprenant la notation de 2.3) que :

PROPOSITION *Si* $\boldsymbol{X}$ *est une catégorie localement petite et possédant les produits de deux, si* $\boldsymbol{J}$ *est une catégorie petite, si* $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{X}$ *est un foncteur et si* $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$ *en est un petit diagramme localement co-limite et saturé, alors* $\boldsymbol{I}$ *est nécessairement co-tamisante. Autrement dit, tout diagramme localement co-limite et saturé dans* $\boldsymbol{X}$ *est d'indexation co-tamisante, i.e. est un* $\mathcal{T}am$*-diagramme localement co-limite.*

PREUVE. En vertu du LEMME de 4.4, il suffit de prouver que, si $W : \mathrm{CCy}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) \to \boldsymbol{X}$ est un tronc de co-cône localement co-limite *saturé* (de co-base $W \circ \mathrm{CB}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{J}) = F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{Ens}$ et de diagramme co-sommital $W \circ \mathrm{CS}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I}) = D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{X}$), alors $\boldsymbol{I}$ est co-tamisante (pour ce faire, pour tous objets X_1, X_2 et Y et toutes flèches $y_1 : Y \to X_1$ et $y_2 : Y \to X_2$ de $\boldsymbol{X}$, on désigne par $(\pi_r : X_1 \times X_2 \to X_r)_{r\,\{1,2\}}$ un produit de X_1 et X_2, arbitrairement choisi dans $\boldsymbol{X}$, et on note $[y_1,y_2] : Y \to X_1 \times X_2$ l'unique flèche de $\boldsymbol{X}$ telle que $\pi_1.[y_1,y_2] = y_1$ et $\pi_2.[y_1,y_2] = y_2$).

a) On voit tout d'abord que, si I_1 et I_2 sont deux objets de $\boldsymbol{I}$, alors, pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on dispose de la flèche de $\boldsymbol{X}$:

$$[W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)), W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2))] : W(J) \to W(I_1) \times W(I_2).$$

Il en résulte (par unicité) que :

- pour toute flèche $j : J \to J'$ de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$[W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J',I_1)),W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J',I_2))].W(j') = [W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)),W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2))]$$

En d'autres termes, on dispose ainsi d'un co-cône $V : \mathrm{CC}(\boldsymbol{J}) \to \boldsymbol{X}$, de co-sommet $W(I_1) \times W(I_2)$, de même co-base que W et ayant pour famille de co-projections :

$$(V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(J)))_{J \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})} = ([W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)),W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2))])_{J \in \mathrm{Ob}(\boldsymbol{J})} .$$

En vertu de (LCOLIM 1), il existe donc (au moins) un objet S de $\boldsymbol{I}$ et (au moins) une flèche $f : W(S) \to W(I_1) \times W(I_2)$ de $\boldsymbol{X}$ telle que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$f.W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S)) = [W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)),W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2))] .$$

On en déduit que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$(\pi_1.f).W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S)) = \pi_1.[W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)),W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2))] = W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)) ,$$

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$(\pi_2.f).W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J)) = \pi_2.[W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)),W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2))] = W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2)) .$$

Mais, comme W est (par hypothèse) saturé, on peut affirmer (en vertu de (TSATUR 2)) que :

- il existe une (nécessairement unique, en vertu de (TSATUR 1)) flèche $s_1 : S \to I_1$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $W(s_1) = \pi_1.f$,
- il existe une (nécessairement unique, en vertu de (TSATUR 1)) flèche $s_2 : S \to I_2$ de $\boldsymbol{I}$ telle que $W(s_2) = \pi_2.f$.

De la sorte, (S,s_1,s_2) est un span connectant I_1 à I_2, et $\boldsymbol{I}$ vérifie (COTAM 1)

b) Maintenant, supposons (encore) que I_1 et I_2 sont deux objets de $\boldsymbol{I}$ et, de plus, que $\sigma' = (S',s'_1,s'_2)$ et $\sigma'' = (S'',s''_1,s''_2)$ sont deux spans connectant I_1 à I_2 dans $\boldsymbol{I}$.

On voit immédiatement (par unicité, et en reprenant la notation précédente concernant V) que :

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$[W(s'_1),W(s'_2)].W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S')) = [W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)),W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2))] = V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(J)) ,$$

- pour tout objet J de $\boldsymbol{J}$, on a :

$$[W(s''_1),W(s''_2)].W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,S'')) = [W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_1)),W(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J},\boldsymbol{I})(J,I_2))] = V(\mathrm{cp}(\boldsymbol{J})(J)) .$$

D'après (LCOLIM 2), il existe donc un entier $n \geq 1$, un zigzag de flèches de $\boldsymbol{I}$:

$$\xi^* = (z^*_k)_{1\leq k\leq 2n} : S' = Z^*_1 \xleftarrow[z^*_1]{} Z^*_2 \xrightarrow[z^*_2]{} Z^*_3 \cdots$$

$$\cdots Z^*_{2n-1} \xleftarrow[z^*_{2n-1}]{} Z^*_{2n} \xrightarrow[z^*_{2n}]{} Z^*_{2n+1} = S''$$

et une famille $f^* = (f^*_k : W(Z^*_k) \to W(I_1) \times W(I_2))_{1 \le k \le 2n+1}$ de flèches de X connectant $[W(s'_1), W(s'_2)]$ à $[W(s''_1), W(s''_2)]$ le long de ξ^*.

Alors, on voit aussi (par connexité de triangles commutatifs) que

- pour tout $1 \le k \le 2n+1$ et pour tout objet J de J, on a :

$$(\pi_1.f^*_k).W(cp(J,I)(J,Z^*_k) = W(cp(J,I)(J,I_1),$$

- pour tout $1 \le k \le 2n+1$ et pour tout objet J de J, on a :

$$(\pi_2.f^*_k).W(cp(J,I)(J,Z^*_k) = W(cp(J,I)(J,I_2)$$

Comme W est (par hypothèse) saturé, on en déduit (en utilisant (TSATUR 2)) que :

- pour tout $1 \le k \le 2n+1$, il existe une (nécessairement unique, d'après (TSATUR 1)) flèche $s^*_{1,k} : Z^*_k \to I_1$ de I telle que $W(s^*_{1,k}) = \pi_1.f^*_k$,
- pour tout $1 \le k \le 2n+1$, il existe une (nécessairement unique, d'après (TSATUR 1)) flèche $s^*_{2,k} : Z^*_k \to I_2$ de I telle que $W(s^*_{2,k}) = \pi_2.f^*_k$,

puis (par fidélité, i e en utilisant de nouveau (TSATUR 1)) que les familles $s^*_1 = (s^*_{1,k})_{1 \le k \le 2n+1}$ et $s^*_2 = (s^*_{2,k})_{1 \le k \le 2n+1}$ permettent de connecter le span σ' au span σ'', autrement dit que I vérifie aussi (COTAM 2). FIN DE LA PREUVE

5. Sur le genre d'esquissabilité des catégories modelables possédant les produits de deux.

5.1. Catégories modelables.

Supposons que M est une catégorie localement petite, que θ est un ordinal inaccessible et que $\beta < \theta$ est un ordinal régulier.

Comme en [C.M.C.E.], on dit que M est (θ,β)-*modelable* si

- M possède les co-limites de co-indexations petites et β-filtrantes,
- M contient une sous-catégorie M' telle que :
  - M' est pleine dans M,
  - M' est dense dans M,
  - M' est θ-petite,
  - tout objet de M' est un objet β-présentable dans M,

- M' possède les θ-petits diagrammes localement co-limites de co-indexations β-petites et le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(M',M) : M' \to M$ les préserve (autrement dit, pour toute catégorie β-petite J et tout foncteur $F : J \to M'$, il existe une catégorie θ-petite I et un diagramme $D : I \to M'$, localement co-limite de F, de sorte que $\mathrm{inj}(M',M) \circ D : I \to M$ est aussi un diagramme localement co-limite de $\mathrm{inj}(M',M) \circ F : J \to M$)

Supposons que M est une catégorie localement petite.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que M est *θ-modelable* s'il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ pour lequel M est (θ,β)-modelable [7]

Enfin, on dit que M est *modelable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel M est θ-modelable.

5.2. Genres et catégories modelables.

Supposons que M est une catégorie localement petite, que θ est un ordinal inaccessible, que $\beta < \theta$ est un ordinal régulier et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

On dit que M est *$(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modelable* si :

- M possède les co-limites de co-indexations petites et β-filtrantes,
- M contient une sous-catégorie M' telle que :
  - M' est pleine dans M,
  - M' est dense dans M,
  - M' est θ-petite,
  - tout objet de M' est un objet β-présentable dans M,
  - M' possède les θ-petits $\mathcal{G}$-diagrammes localement co-limites de co-indexations β-petites et le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(M',M) : M' \to M$ les préserve (autrement dit, pour toute catégorie β-petite J et tout foncteur $F : J \to M'$, il existe une catégorie θ-petite $I^{op} \in \mathcal{G}$ et un diagramme $D : I \to M'$ localement co-limite de F, de sorte

[7] Si β est un ordinal régulier, il est facile de voir que M est une catégorie β-*accessible* ("au sens de Makkaï-Paré") si, et seulement si, il existe un ordinal inaccessible $\theta > \beta$ pour lequel M est (θ,β)-modelable ; autrement dit, il y a parfaite identité entre catégories accessibles et catégories modelables

que $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}$ est aussi un diagramme localement co-limite de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})\circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$)

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est *$(\mathcal{G},\theta)$-modelable* s'il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta,\beta)$-modelable.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est *$\mathcal{G}$-modelable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta)$-modelable.

5.3. Catégories esquissables.

Si $\boldsymbol{E}$ est une esquisse petite et si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{E}$ est *θ-petite* si "tout y est θ-petit", i.e. si .

- l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))$ des objets (du support) de $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- l'ensemble $\mathrm{Fl}(\mathrm{Supp}(\boldsymbol{E}))$ des flèches (du support) de $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- l'ensemble $\mathrm{CDist}(\boldsymbol{E})$ des cônes distingués dans $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- pour tout cône distingué $P : \mathrm{C}(\boldsymbol{A}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, la catégorie d'indexation $\boldsymbol{A}$ est θ-petite,
- l'ensemble $\mathrm{CCDist}(\boldsymbol{E})$ des co-cônes co-distingués dans $\boldsymbol{E}$ est θ-petit,
- pour tout co-cône co-distingué $Q : \mathrm{CC}(\boldsymbol{B}) \to \mathrm{Supp}(\boldsymbol{E})$ dans $\boldsymbol{E}$, la catégorie d'indexation $\boldsymbol{B}$ est θ-petite.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est une *catégorie θ-esquissable*, s'il existe une esquisse θ-petite dont la catégorie des modèles dans $\boldsymbol{Ens}$ est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est une *catégorie esquissable*, s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est θ-esquissable (autrement dit, s'il existe une esquisse *petite* dont la catégorie des modèles dans $\boldsymbol{Ens}$ est équivalente à $\boldsymbol{M}$).

5.4. Genres et catégories esquissables.

Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie localement petite et que $\mathcal{G}$ est un genre de catégories.

Si θ est un ordinal inaccessible, on dit que $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta)$-*esquissable* s'il existe une $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à la catégorie $\boldsymbol{M}$.

On dit que $\boldsymbol{M}$ est $\mathcal{G}$-*esquissable* s'il existe un ordinal inaccessible θ pour lequel $\boldsymbol{M}$ est $(\mathcal{G},\theta)$-esquissable (autrement dit, s'il existe une $\mathcal{G}$-esquisse petite dont la catégorie des modèles dans ***Ens*** est équivalente à $\boldsymbol{M}$).

5.5. Esquissabilité des catégories modelables.

Rappelons (en nous contentant d'une .. "esquisse" de preuve) le résultat fondamental suivant, établi en [C.M.C.E.] (où on trouvera une preuve complète) :

LEMME. *Les catégories modelables sont des catégories esquissables. Plus précisément encore, si* θ *est un ordinal inaccessible, les catégories* θ*-modelables sont des catégories* θ*-esquissables* [8].

PREUVE Supposons que $\boldsymbol{M}$ est (θ,β)-modelable. Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F\ \boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme $\mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F)\to\boldsymbol{M}'$ localement co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})$ Alors, si on désigne par $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{ch},\boldsymbol{M})$ l'esquisse (évidemment θ-petite) obtenue comme suit :

- son support est la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\boldsymbol{M},\boldsymbol{Ens})$ dont les objets sont :
  - d'une part les foncteurs (représentés) $\boldsymbol{M}(\mathrm{M}',-) : \boldsymbol{M}\to\boldsymbol{Ens}$, dès que M' est objet de $\boldsymbol{M}'$,
  - d'autre part, les foncteurs (limites β-petites - arbitrairement choisies - de foncteurs représentés) $L(F) = \operatorname{Lim}_{\mathrm{J}\in\boldsymbol{J}^{\mathrm{op}}} \boldsymbol{M}(F(\mathrm{J}),-)$, dès que $\boldsymbol{F}:\boldsymbol{J}\to\boldsymbol{M}$ est un foncteur à valeurs dans $\boldsymbol{M}'$, où $\boldsymbol{J}$ est une catégorie β-petite (et en ne choisissant - arbitrairement - qu'une telle catégorie par composante connexe du sous-groupoïde de ***Cat*** ayant pour flèches les seuls foncteurs inversibles),

[8] La réciproque du LEMME de 5.5 est également valide (voir le LEMME de 5 7).

- ses cônes distingués sont les limites $L(F) = \operatorname{Lim}_{J \in J^{op}} M(F(J),\text{-})$ précédentes,
- ses co-cônes co-distingués sont les co-limites $L(F) = \operatorname{CoLim}_{I \in Ch(F)^{op}} M(ch(F)(I),\text{-})$, dès que $F : J \to M$ vérifie les conditions précédentes,

on établit que M et Mod(Esquiss(ch,M),Ens) sont équivalentes, ce qui permet de conclure. FIN DE LA PREUVE.

5.6. Genres et esquissabilité des catégories modelables.

De la PREUVE du LEMME de 5.5, on déduit immédiatement que .

PROPOSITION. *Si $\mathcal{G}$ est un genre de catégories, les catégories $\mathcal{G}$-modelables sont des catégories $\mathcal{G}$-esquissables. Plus précisément encore, si θ est un ordinal inaccessible, les catégories ($\mathcal{G}$,θ)-modelables sont des catégories ($\mathcal{G}$,θ)-esquissables* [9].

PREUVE. Supposons que M est ($\mathcal{G}$,θ,β)-modelable. Pour toute catégorie β-petite J et tout foncteur $F : J \to M'$, on peut donc tout particulièrement choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un foncteur $ch(F) : Ch(F) \to M'$ qui est un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite de F, préservé par le foncteur injection canonique inj(M',M)

Alors, comme dans la PREUVE du LEMME de 5.5, M et Mod(Esquiss(ch,M),Ens) sont équivalentes mais, de plus, l'esquisse θ-petite Esquiss(ch,M) est (par construction) une $\mathcal{G}$-esquisse. FIN DE LA PREUVE.

5.7. Modelabilité des catégories esquissables.

Rappelons (en nous contentant de nouveau d'une ... "esquisse" de preuve) le résultat fondamental suivant, établi en [C.M.C.E.] (où on trouvera une preuve complète) :

LEMME. *Les catégories esquissables sont des catégories modelables. Plus précisément encore, si θ est un ordinal inaccessible, les catégories θ-esquissables sont des catégories θ-modelables* [10].

---

[9] La réciproque de la PROPOSITION de 5.6 *n'est pas*, en général, valide (voir 5.8).

PREUVE. Supposons que $\boldsymbol{E}$ est une esquisse θ-petite. On établit que $\boldsymbol{M} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ est (θ,β)-modelable en désignant par β l'ordinal régulier d'indice sup(α,s,a',b,b')+1 , où :

- α est l'ordinal régulier d'indice a+1 , lorsque :
    - a est la borne supérieure des cardinaux des (ensembles de flèches des) indexations des cônes distingués de $\boldsymbol{E}$,
- s est le cardinal de (l'ensemble des flèches du support de $\boldsymbol{E}$) Supp($\boldsymbol{E}$) ,
- a' est le cardinal de l'ensemble des cônes distingués de $\boldsymbol{E}$,
- b est la borne supérieure des cardinaux des (ensembles de flèches des) co-indexations des co-cônes co-distingués de $\boldsymbol{E}$,
- b' est le cardinal de l'ensemble des co-cônes co-distingués de $\boldsymbol{E}$,

puis en établissant que la sous-catégorie pleine $\boldsymbol{M}_{<\beta}$ de $\boldsymbol{M}$, dont les objets sont les modèles de $\boldsymbol{E}$ à valeurs dans la catégorie des ensembles de cardinaux strictement inférieurs à β , est "essentiellement θ-petite", i.e. équivalente (par l'injection canonique) à une de ses sous-catégories pleines θ-petites $\boldsymbol{M}'$ qui, dès lors, convient. FIN DE LA PREUVE.

5.8. Genres et modelabilité des catégories esquissables.

La réciproque de la PROPOSITION de 5.6 *n'est pas* (en général) valide. Plus précisément, si $\mathcal{G}$ est un *quelconque* genre de catégories et si θ est un ordinal inaccessible, on ne peut affirmer (en général) que, pour *toute* $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite $\boldsymbol{E}$, la catégorie $\boldsymbol{M} = \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ de ses modèles est ($\mathcal{G}$,θ)-modelable. D'après le LEMME de 5.7, elle est *seulement* (en général) θ-modelable : c'est que (en reprenant les notations de 5.1 et 5.7), il n'est pas possible (en général) de trouver parmi *tous* les diagrammes $D : \boldsymbol{I} \to \boldsymbol{M}' \approx \boldsymbol{M}_{<\beta}$, localement co-limites d'un *quelconque* foncteur

---

[10] Evidemment, le LEMME de 5.7 est réciproque du LEMME de 5.5. On peut donc affirmer que, pour tout ordinal inaccessible θ , les catégories de modèles ensemblistes des esquisses θ-petites sont exactement (à l'équivalence près) les catégories θ-modelables.

Il en résulte que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique" correspondant à la dualité "esquisses-petites vs. catégories-de-modèles-ensemblistes", l'ordinal inaccessible θ est un *invariant* : dans le cas *général*, c'est le seul connu à ce jour (et il est donc particulièrement dommageable - pour ceux qui n'écrivent et/ou ne lisent que cette langue - que ce "θ" n'admette aucune traduction en américain ...). Cependant, dans un certain nombre de cas *particuliers*, on dispose aussi d'invariants *spécifiques* plus précis (voir la Note 12).

$F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux [11] qui soit un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite de F [12].

5.9. Genre d'esquissabilité des catégories modelables possédant les produits de deux.

Etablissons (en reprenant la notation de 2.3) que :

THEOREME. *Pour toute catégorie localement petite* $\boldsymbol{M}$, *les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie modelable possédant les produits de deux,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $\mathcal{T}am$*-modelable,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $\mathcal{T}am$*-esquissable,*

ainsi, en particulier, les catégories modelables possédant les produits de deux sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans **Ens***) des esquisses petites à co-indexations tamisantes.*

Plus précisément encore, si θ *est un ordinal inaccessible et si* $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie localement petite, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* θ*-modelable possédant les produits de deux,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $(\mathcal{T}am,\theta)$*-modelable,*
- $\boldsymbol{M}$ *est une catégorie* $(\mathcal{T}am,\theta)$*-esquissable,*

---

[11] Sauf cas particulier (voir [D.E.T.G.]), deux diagrammes localement co-limites (même saturés) d'un même foncteur F *ne sont pas* (en général) "isomorphes".

[12] A contrario (et c'est là un point de vue largement initié en [C Q.C.E.], Appendices 1 et 2), on dispose *automatiquement* d'une réciproque de la PROPOSITION de 5.6, mais *spécifique* d'un genre *particulier* $\mathcal{G}$, *si et seulement si* on peut établir que, pour ce genre $\mathcal{G}$, de tels choix sont rendus possibles (par toute procédure adéquate). Dans ce cas, on peut donc conclure que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique" correspondant à la dualité "esquisses-petites vs. catégories-de-modèles-ensemblistes", le couple $(\mathcal{G},\theta)$ est un *invariant.*

Par exemple, si on désigne par $\mathcal{C}at$ le genre de *toutes* les petites catégories et si on prend $\mathcal{G} = \mathcal{C}at$, on peut aussi dire (revoir la Note 10) que, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique", $(\mathcal{C}at,\theta)$ est un invariant, puisque les LEMMES de 5.5 et 5.7 sont réciproques l'un de l'autre.

De même, des considérations de 5.9 résulte que, lorsque $\mathcal{G} = \mathcal{T}am$, la réciproque de la PROPOSITION de 5.6 est valable. Autement dit, dans la traduction "syntaxe vs. sémantique", $(\mathcal{T}am,\theta)$ est aussi un invariant.

ainsi, en particulier, les catégories θ-modelables possédant les produits de deux sont exactement (à équivalence près) les catégories de modèles (dans **Ens** *) des esquisses θ-petites à co-indexations tamisantes.*

PREUVE. a) Supposons que $\boldsymbol{M}$ est une catégorie (θ,β)-modelable et possédant les produits de deux.

Pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on peut donc choisir (puisqu'il en existe, par hypothèse, au moins un) un diagramme θ-petit $\mathrm{ch}'(F) : \mathrm{Ch}'(F) \to \boldsymbol{M}'$, localement co-limite de F et préservé par le foncteur injection canonique $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) : \boldsymbol{M}' \to \boldsymbol{M}$.

Dès lors, pour toute catégorie β-petite $\boldsymbol{J}$ et tout foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, on voit (en reprenant les notations de 4.3) que :

- le diagramme :

$$\mathrm{ch}(F) = \mathrm{satur}(\mathrm{ch}'(F)) : \mathrm{Ch}(F) = \mathrm{Satur}(\mathrm{ch}'(F)) \to \boldsymbol{M}'$$

  est un diagramme θ-petit (puisque $\boldsymbol{M}'$ est θ-petite) localement co-limite et *saturé* de F,

- le diagramme :

$$\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ \mathrm{ch}(F) : \mathrm{Ch}(F) \xrightarrow[\mathrm{ch}(F)]{} \boldsymbol{M}' \xrightarrow[\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M})]{} \boldsymbol{M}$$

  est un diagramme θ-petit localement co-limite et *saturé* de $\mathrm{inj}(\boldsymbol{M}',\boldsymbol{M}) \circ F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}$ (puisque $\boldsymbol{M}'$ est une sous-catégorie *pleine* de $\boldsymbol{M}$).

Mais, $\boldsymbol{M}$ possèdant (par hypothèse) les produits de deux, les diagrammes localement co-limites *saturés* dans $\boldsymbol{M}$ *sont* (d'après la PROPOSITION de 4.5) des diagrammes localement co-limites d'indexations co-tamisantes. Par conséquent (en reprenant les notations de 5.5) $\mathrm{Esquiss}(\mathrm{Ch},\boldsymbol{M})$ est une $\mathcal{T}am$-esquisse et $\boldsymbol{M}$ est donc ($\mathcal{T}am$,θ,β)-modelable.

b) Supposons, maintenant, que $\boldsymbol{M}$ est ($\mathcal{T}am$,θ)-modelable. D'après la PROPOSITION de 5.6, elle est ($\mathcal{T}am$,θ)-esquissable.

c) Supposons, enfin, que $\boldsymbol{E}$ est une $\mathcal{T}am$-esquisse θ-petite

En vertu du LEMME de 5.7, la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ est θ-modelable.

De plus, en vertu de la PROPOSITION de 3.3, la catégorie $\mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})$ possède les produits de deux. FIN DE LA PREUVE [13].

---

[13] De cette PREUVE il ressort que, si $\mathcal{G} = \mathcal{T}am$, si θ est un ordinal inaccessible et si $\boldsymbol{E}$ est une quelconque $\mathcal{G}$-esquisse θ-petite (et en reprenant les notations de 5.1 et 5.7), il existe une *procédure* (voir la Note 12) permettant de trouver, parmi *tous* les diagrammes $D' : \boldsymbol{I} \to \mathrm{Mod}(\boldsymbol{E},\boldsymbol{Ens})_{<\beta} = \boldsymbol{M}_{<\beta} \approx \boldsymbol{M}'$ localement co-limites d'un *quelconque* foncteur $F : \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{M}'$, *au moins un* d'entre eux qui soit un $\mathcal{G}$-diagramme localement co-limite : elle consiste à en *saturer* un quelconque !

6. Bibliographie.

[C.M.C.E.] **C. Lair**, *Catégories modelables et catégories esquissables*, Diagrammes 6, Paris, 1981

[C.M.C.F.] **R. Guitart et C. Lair**, *Calcul des modèles syntaxiques et calcul des formules internes*, Diagrammes 4, Paris, 1980.

[C.Q.C.E.] **C. Lair**, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17, Paris, 1987.

[D.E.T.G.] **C. Lair**, *Diagrammes localement libres, extensions de corps et théorie de Galois*, Diagrammes 10, Paris, 1983.

[E.T.S.A.] **C. Ehresmann**, *Esquisses et types des structures algébriques*, Bul. Instit. Polit. Iasi, XIV, 1968.

7. Table.

Université Paris 7
U.F.R. de Mathématiques
Tours 45-55-5ème étage
2, place Jussieu
75251 Paris CEDEX 05
FRANCE

lair@mathp7.jussieu.fr