DIAGRAMMES

F. CURY

La suffisante complétude connexe. Section B : théorie générale

Diagrammes, tome 31 (1994), exp. n° 1, p. 1-80
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1994__31__A1_0>

DIAGRAMMES VOLUME 31 , 1994

LA SUFFISANTE COMPLETUDE CONNEXE

SECTION B : THEORIE GENERALE

F. CURY

Introduction

Le présent texte est le deuxième ("Section B") d'une série de trois ("Section A" - voir [S.C.C.A.] - , "Section B" et, enfin, "Section C" - à paraître en [S.C.C.C.]) consacrés à l'étude générale (d'un point de vue catégorique) de la propriété de *suffisante complétude connexe* : une "théorie essentiellement équationnelle" (ou, si l'on préfère, "essentiellement algébrique") possède cette propriété lorsque ses algèbres *libres* sont constituées des composantes connexes (par relation de ré-écriture) des algèbres *libres* d'une "théorie esentiellement relationnelle" qui "l'assouplit".

A.M.S. Sub. Class. : 18 C 10 , 18 D 05 , 18 A 10

Par exemple, il est facile d'admettre, au moins expérimentalement, que toute "théorie *purement* équationnelle", i.e. où les lois sont définies sur des n-uplets *quelconques* de variables, possède cette propriété : il suffit de l'assouplir en y remplaçant ses équations (lues dans un sens arbitrairement choisi[1]) par des règles de ré-écriture.

Par contre, pour des "théories essentiellement équationnelles" quelconques, i.e. où les lois de composition ne s'appliquent qu'à des n-uplets de variables satisfaisant certains *tests* (i.e. certaines équations), il ne suffit pas toujours d'assouplir de la manière précédente : cela a été montré, par exemple, dans l'étude du cas particulier - non classique, mais assez typique de cette situation - des catégories localement cartésiennes (voir [E.S.C.C.]). Dans de tels cas, il peut être nécessaire de "corriger les défauts de connexité" de ce premier assouplissement *simple* en lui ajoutant de *nouvelles* lois de composition et de *nouvelles* relations (les unes et les autres devenant *triviales* par passage aux classes de connexité).

En Section A, nous avons précisé ce qu'il convenait de comprendre - en toute généralité - par "théorie essentiellement équationnelle" et par "théorie essentiellement relationnelle".

Rappelons donc qu'une "théorie essentiellement équationnelle" est une *syntaxe d'algèbres* (au sens de [T.A.E.P.]) sur

[1] Pour ce qui concerne la seule connexité par ré-écriture, une telle orientation arbitraire est, évidemment, bien suffisante. Bien sûr, il n'en est plus de même si l'on souhaite disposer de propriétés de confluence, noetherianité ou existence de formes normales . . .

une catégorie (localement petite) $\mathbb{A}'$ lui servant de *contexte*. C'est donc (en écrivant rapidement) un $\mathcal{D}' = (\mathbb{A}', \ldots, \mathbb{B}', \ldots, \mathbb{D}')$, où $\mathbb{D}'$ (la partie *purement syntaxique* de $\mathcal{D}'$) est une sur-catégorie d'une sous-catégorie $\mathbb{B}'$ de $\mathbb{A}'$ ayant mêmes objets que $\mathbb{D}'$ (2) ; mieux, $\mathbb{D}'$ et $\mathbb{B}'$ peuvent n'être que des *graphes à composition*, i.e. des "présentations de catégories".

Dans ces conditions, munir un objet A' de $\mathbb{A}'$ d'une structure de *$\mathcal{D}'$-algèbre*, c'est se donner un foncteur :

$$\vartheta' : \mathbb{D}'^{op} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$$

prolongeant le foncteur canonique :

$$\mathbb{B}'^{op} \longrightarrow \mathbb{A}'^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}(-,A')]{} \mathbb{E}\mathrm{ns} .$$

De la sorte, un diagramme commutatif de $\mathbb{D}'$ tel que le suivant (par exemple) :

$$\begin{tikzcd}
 & D'_2 \arrow[dr, "d'_2"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
D'_1 \arrow[ur, "d'_1"] \arrow[rr] \arrow[dr, "d'_3"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & D'_4 \\
 & D'_3 \arrow[ur, "d'_4"'] &
\end{tikzcd}$$

représente l'axiome "universel-équationnel" :

$$\forall\ x' \quad d'_2 \cdot d'_1\ (x') = d'_4 \cdot d'_3\ (x')$$

(qu'on peut encore écrire, plus "concrètement" et compte

(2) Concrètement, les flèches de $\mathbb{D}'$ sont les lois de composition des algèbres. De même, les objets de $\mathbb{B}'$ (ou $\mathbb{D}'$) sont les sortes - ou types - des arguments d'entrée et/ou valeurs de sortie de ces lois, tandis que ses flèches (qui jouent le rôle de projections) fixent les "contraintes contextuelles" imposées à la syntaxe.

tenu de la dualité intervenant dans la spécification d'une $\mathcal{D}'$-algèbre :

$$\forall\ x' \quad d'_1(d'_2(x')) = d'_3(d'_4(x')) \qquad)$$

que toute $\mathcal{D}'$-algèbre (A',ϑ') doit satisfaire (quand x' parcourt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}'}(D'_4,A')$).

Alors, pour formaliser ce que l'on entend par "théorie essentiellement relationnelle", il nous a suffi d'*enrichir* les concepts précédents "avec des 2-flèches (représentant les ré-écritures)". Autrement dit, il suffit de considérer des graphes à composition enrichis (les *amphi-graphes à composition*) et des catégories enrichies (les *amphi-catégories*) à l'aide d'une structure adéquate de catégorie monoïdale, symétrique et fermée $\mathbb{G}$rComp (et qui *n'est pas* la structure cartésienne fermée) sur la catégorie $\mathbb{G}$rComp des graphes à composition.
Ainsi, une "théorie essentiellement relationnelle" est une *amphi-syntaxe* sur une amphi-catégorie $\mathbb{A}$ lui servant de contexte (enrichi). C'est donc un $\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbb{A},\ldots,\mathbb{B},\ldots,\mathbb{D})$, où $\mathbb{D}$ est un sur-amphi-graphe à composition d'un sous-amphi-graphe à composition $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$ ayant mêmes objets que $\mathbb{D}$.
De même, en enrichissant totalement (resp. partiellement) la notion précédente d'algèbre, on a pu introduire et étudier les structures de *$\boldsymbol{\mathcal{D}}$-amphi-algèbres* (resp. de *$\boldsymbol{\mathcal{D}}$-sesqui-algèbres*) $(A,\boldsymbol{\vartheta})$ sur les objets A de $\mathbb{A}$.
De la sorte, un 2-diagramme de $\mathbb{D}$ tel que le suivant (par exemple) :

$$\begin{tikzcd}
& D_2 \arrow[dr, "d_2"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
D_1 \arrow[ur, "d_1"] \arrow[dr, "d_3"'] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] & {} & D_4 \\
& D_3 \arrow[ur, "d_4"'] \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}$$

représente l'axiome "universel-relationnel" (où $\longrightarrow$ représente la relation de ré-écriture) :

$$\forall\ x \quad d_2 \cdot d_1\ (x) \longrightarrow d_4 \cdot d_3\ (x)$$

(qu'on peut encore écrire, plus "concrètement" :

$$\forall\ x \quad d_1(d_2(x)) \longrightarrow d_3(d_4(x)) \qquad)$$

que toute $\mathcal{D}$-amphi-algèbre (resp. $\mathcal{D}$-sesqui-algèbre) $(A, \mathcal{S})$ doit satisfaire (quand x parcourt $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(D_4, A)$, i.e. quand x est un *objet* du graphe à composition $\mathbf{A}(D_4, A)$).

Rappelons, enfin, que les considérations précédentes nous ont permis d'établir - assez facilement - trois résultats essentiels pour la suite :

- si $\mathbb{A}'$ est une catégorie (localement petite) et co-complète et si $\mathcal{D}'$ est une petite syntaxe de contexte $\mathbb{A}'$ et ayant un rang (i.e. dont les objets - en tant qu'objets de $\mathbb{A}'$ - ont un rang de présentabilité), alors tout objet X' de $\mathbb{A}'$ engendre une $\mathcal{D}'$-algèbre libre $(A'_{X'}, \mathcal{S}'_{X'})$,

- dans les conditions précédentes, le foncteur "objet sous-jacent" $U^{\mathcal{D}'} : \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \longrightarrow \mathbb{A}'$ (de la catégorie $\mathbb{A}'^{\mathcal{D}'}$ des $\mathcal{D}'$-algèbres vers la catégorie $\mathbb{A}'$) admet donc un adjoint à gauche et, alors, la catégorie de Kleisli $\mathbb{A}'_{\mathcal{D}'}$ (de la monade associée à cette adjonction) est la partie purement syntaxique d'une syntaxe $\mathcal{A}ch(\mathcal{D}') = (\mathbb{A}', \ldots, \mathbb{A}', \ldots, \mathbb{A}'_{\mathcal{D}'})$, dite *achevée* (car sa partie syntaxique est une sur-*catégorie* de $\mathbb{A}'$ *tout entière*), qui est *engendrée* par $\mathcal{D}'$,

- malgré les différences (conceptuelles) apparentes, il *n'y a pas*, dans de "bons" contextes, de différence de traitement *technique* essentielle entre amphi-algèbres (resp. sesqui-algèbres) et algèbres (non enrichies) : si $\mathbf{A}$ est une amphi-catégorie *co-représentable* (dans un sens analogue à celui utilisé pour les 2-catégories co-représentables), les amphi-algèbres (resp. les sesqui-algèbres) d'une amphi-syntaxe $\mathbf{D}$ de contexte $\mathbf{A}$ sont exactement les algèbres (non enrichies) d'une syntaxe (non enrichie) *associée par co-représentation* $\mathcal{SAA}(\mathbf{D})$ (resp. $\mathcal{SSA}(\mathbf{D})$) de contexte (la catégorie sous-jacente à $\mathbf{A}$) $\mathbb{A}$.

Dans la présente Section B, nous sommes en mesure de préciser ce qu'on doit systématiquement comprendre par théorie essentiellement relationnelle (i.e. amphi-syntaxe) "assouplissant" une théorie essentiellement équationnelle (i.e. une syntaxe), avec d'éventuelles "corrections de défauts de connexité". Et nous pouvons étudier les conditions dans lesquelles les algèbres libres de la théorie "rigide" sont des "quotients" des algèbres libres de la théorie "assouplie" (suffisante complétude) ou, mieux encore, des "quotients par connexité" (suffisante complétude connexe).

Tout d'abord, nous constatons que la catégorie cartésienne et fermée $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ (qui sert d'enrichissement - trivial - pour les catégories, les graphes à composition et les syntaxes) et la catégorie monoïdale, symétrique et fermée $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$ (qui sert d'enrichissement pour les amphi-catégories, les amphi-graphes à composition et les amphi-syntaxes) s'organisent mutuellement en ce que nous appelons une *configuration de base* φ dont nous explicitons, au §5.1, les propriétés.
Pour l'essentiel, nous notons qu'on dispose du foncteur "composantes connexes" (sous-jacent à un foncteur monoïdal *particulier*) :

$$\pi_0 : \mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns} ,$$

qui est adjoint à gauche du foncteur "graphe à composition discret (où tout objet est à identité)" (également sous-jacent à un foncteur monoïdal *particulier*) :

$$\mathrm{did} : \mathbb{E}\mathrm{ns} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp} .$$

Les propriétés de cette configuration de base φ nous permettent, au §5.2, d'étudier les *modifications d'enrichissements* :

– à *toute* amphi-catégorie $\mathbf{A}$ (resp. à *certains* amphi-graphes à composition $\mathbf{D}$, à *certaines* amphi-syntaxes $\mathcal{D}$), on associe la catégorie $\Pi_0(\mathbf{A})$ (resp. le graphe à composition $\Pi_0(\mathbf{D})$, la syntaxe $\Pi_0(\mathcal{D})$) de ses "composantes connexes Hom par Hom ",

– à *toute* catégorie $\mathbb{A}'$ (resp. à *tout* graphe à composition $\mathbb{D}'$, à *toute* syntaxe $\mathcal{D}'$), on associe l'amphi-catégorie $\mathrm{Did}(\mathbb{A}')$ (resp. l'amphi-graphe à composition $\mathrm{Did}(\mathbb{D}')$, l'amphi-syntaxe $\mathrm{Did}(\mathcal{D}')$) de ses "graphes à composition discrets Hom par Hom ".

Grâce à ces modifications d'enrichissements, il tombe sous le sens, maintenant, que la partie purement syntaxique $\mathbf{D}$ d'une amphi-syntaxe $\mathcal{D} = (\mathbf{A},\dots,\mathbf{B},\dots,\mathbf{D})$ peut être légitimement considérée comme *assouplissant* la partie purement syntaxique $\mathbb{D}'$ d'une syntaxe $\mathcal{D}' = (\mathbb{A}',\dots,\mathbb{B}',\dots,\mathbb{D}')$, à la condition suffisante que $\Pi_0(\mathbf{D}) = \mathbb{D}'$. Il reste donc à se doter d'un mode de comparaison de leurs contextes respectifs $\mathbf{A}$ et $\mathbb{A}'$ pour achever de comparer (la totalité de l'amphi-syntaxe) $\mathcal{D}$ à (la totalité de la syntaxe) $\mathcal{D}'$: c'est l'objet du §5.3.
Il serait trop restrictif d'imposer (de nouveau) que $\Pi_0(\mathbf{A}) = \mathbb{A}'$: ce n'est même pas le cas pour la configuration de base, i.e. pour l'exemple "générique" obtenu en prenant

$\mathbb{A}$ = GrComp et $\mathbb{A}'$ = $\mathbb{E}$ns . Par contre, dans cet exemple, on voit immédiatement que Did($\mathbb{E}$ns) est une sous-*amphi*-catégorie, *amphi*-réflexive, de GrComp , ce qui complète la structure de la configuration de base en ce que nous appelons l'*amphi-configuration de base* Φ .

Dès lors, pour comparer - en toute généralité - une $\mathbb{A}$ à une $\mathbb{A}'$, il suffit de supposer que $(\mathbb{A},\mathbb{F},\ldots,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une *Φ-réflexion*, i.e. que $(\mathbb{A},\mathbb{F},\ldots,\mathbb{R},\mathrm{Did}(\mathbb{A}'))$ est une amphi-réflexion (où $\mathbb{F} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Did}(\mathbb{A}')$ est un amphi-foncteur amphi-adjoint à gauche de $\mathbb{R} : \mathrm{Did}(\mathbb{A}') \longrightarrow \mathbb{A}$).

Ainsi, tout objet A de $\mathbb{A}$ est doté d'un morphisme canonique (résultant de l'amphi-adjonction de $\mathbb{F}$ à gauche de $\mathbb{R}$) :

$$\varepsilon(A) : A \longrightarrow \mathbb{R}(\mathbb{F}(A))$$

et on voit que :

- si A_1 est un objet de $\mathbb{A}$ pour lequel le foncteur :

$$\mathbb{A}(A_1,\varepsilon(A)) : \mathbb{A}(A_1,A) \longrightarrow \mathbb{A}(A_1,\mathbb{R}(\mathbb{F}(A)))$$

est *surjectif*, alors $\varepsilon(A)$ représente un passage au quotient (plus fort que par la seule connexité) *du point de vue de* A_1 ,

- si A_0 est un objet de $\mathbb{A}$ pour lequel l'application :

$$\pi_0(\mathbb{A}(A_0,\varepsilon(A))) : \pi_0(\mathbb{A}(A_0,A)) \longrightarrow \pi_0(\mathbb{A}(A_0,\mathbb{R}(\mathbb{F}(A))))$$

est *bijective*, alors $\varepsilon(A)$ représente un passage au quotient (exactement) par connexité *du point de vue de* A_0 .

De la sorte, si la Φ-réflexion $(\mathbb{A},\mathbb{F},\ldots,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est *suffisamment connexe*, i.e. si la catégorie $\mathbb{A}$ (sous-jacente à $\mathbb{A}$) contient une petite sous-catégorie pleine "suffisamment génératrice" (ou "suffisamment dense") et dont les objets sont de tels A_0 , ce sont maintenant les *objets* de $\mathbb{A}$ qu'on peut regarder comme *assouplissant* les *objets* de $\mathbb{A}'$, considérés comme *rigides* (au même titre que, dans l'exemple générique, tout graphe à composition se rigidifie en l'ensemble de ses composantes connexes).

Au §5.4, nous utilisons ces divers outils de comparaison pour introduire et étudier, tout d'abord, les *laxifications*, i.e. ces couples $(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ où, pour l'essentiel, $\Pi_0(\mathbb{D}) = \mathbb{D}'$ et $(\mathbb{A},\mathbb{F},\ldots,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion (éventuellement, suffisamment connexe) : ils modélisent donc complètement ce qu'on entend par théorie essentiellement relationnelle (à savoir $\mathcal{D}$) "assouplissant, mais sans corrections d'éventuels défauts de connexité" une théorie esentiellement équationnelle (à savoir $\mathcal{D}'$).
Ensuite, pour modéliser les assouplissements "avec corrections de défauts de connexité", nous introduisons et étudions les *amphi-élargissements* (resp. les *sesqui-élargissements*), i.e. les $(\mathcal{D},\ldots,\mathcal{T},\ldots,\mathcal{D}'',\ldots,\mathcal{D}')$ où :

- $(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ est une laxification (on dispose donc déjà d'un assouplissement *simple* de $\mathcal{D}'$ par $\mathcal{D}$),

- $\mathcal{T}$ est une sur-syntaxe (non enrichie) de la syntaxe (non enrichie) $\mathcal{SAA}(\mathcal{D})$ (resp. $\mathcal{SSA}(\mathcal{D})$) obtenue par co-représentation (et $\mathcal{T}$ peut donc contenir des informations supplémentaires *effectives* par rapport à $\mathcal{D}$),

- $\mathcal{D}''$ est une sur-syntaxe de $\mathcal{D}'$, décrivant les mêmes algèbres que $\mathcal{D}'$ (et $\mathcal{D}''$ contient donc des informations supplémentaires, mais *redondantes*, par rapport à $\mathcal{D}'$: elle est simplement plus "achevée" que $\mathcal{D}'$ ... au point - extrême - que ce peut être la syntaxe achevée $\mathcal{A}ch(\mathcal{D}')$ engendrée par $\mathcal{D}'$),

- toute $\mathcal{T}$-algèbre sur un objet de (la sous-catégorie réflexive de $\mathbb{A}$) $\mathbb{A}'$ s'identifie à une $\mathcal{D}'$-algèbre (ainsi, les informations supplémentaires contenues dans $\mathcal{T}$ ne sont réellement effectives, dans une algèbre, que lorsque la relation de connexité *n'y est pas* l'égalité et, donc, $\mathcal{T}$ ne corrige bien, éventuellement, *que* des défauts de connexité des $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-amphi-algèbres (resp. des $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-sesqui-algèbres)).

En particulier, toute laxification $(\boldsymbol{\mathcal{D}},\mathcal{D}')$ s'identifie à l'amphi-élargissement $(\boldsymbol{\mathcal{D}},\ldots,\mathcal{SAA}(\boldsymbol{\mathcal{D}}),\ldots,\ldots,\ldots,\mathcal{D}')$ (resp. au sesqui-élargissement $(\boldsymbol{\mathcal{D}},\ldots,\mathcal{SSA}(\boldsymbol{\mathcal{D}}),\ldots,\ldots,\ldots,\mathcal{D}')$) où, par conséquent, $\mathcal{T} = \mathcal{SAA}(\boldsymbol{\mathcal{D}})$ (resp. $\mathcal{T} = \mathcal{SSA}(\boldsymbol{\mathcal{D}})$) ne contient aucune information supplémentaire par rapport à $\boldsymbol{\mathcal{D}}$.

Au §5.5, nous établissons les deux résultats fondamentaux suivants :

- si $(\mathbf{A},\mathbf{F},\ldots,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion, si $(\boldsymbol{\mathcal{D}},\ldots,\mathcal{T},\ldots,\mathcal{D}'',\ldots,\mathcal{D}')$ est un élargissement ayant un rang (où $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ a pour contexte $\mathbf{A}$, $\mathcal{T}$ a pour contexte $\mathbb{A}$ et $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ ont pour contexte $\mathbb{A}'$) et si, pour tout objet X' de $\mathbb{A}'$, la $\mathcal{T}$-algèbre $(A_{X'},\vartheta_{X'})$, librement engendrée par X' (identifié à un objet de $\mathbf{A}$), *passe au quotient* (a fortiori, si elle passe au quotient *par connexité*) *du point de vue des sortes de* $\mathcal{T}$ (i.e. de ces objets de $\mathbf{A}$ particuliers que sont les objets de $\mathcal{T}$), alors *son quotient s'identifie à la* $\mathcal{D}'$*-algèbre librement engendrée par* X' et il y a donc *suffisante complétude* (a fortiori, *suffisante complétude connexe*) *du point de vue des sortes de* $\mathcal{T}$ (*ou encore des sortes de* $\mathcal{D}'$),

- si, de plus, la Φ-réflexion $(\mathbf{A},\mathbf{F},\ldots,\mathbb{R},\mathbb{A})$ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-connexe (i.e. si $\mathbb{A}_0$ est suffisamment dense dans $\mathbb{A}$ et si les *objets* tels les $A_{X'}$ *passent aussi au quotient par connexité du point de vue des objets* *de* $\mathbb{A}_0$ [3]), alors *la syntaxe achevée* $\mathcal{A}ch(\mathcal{D}')$, *engendrée par* $\mathcal{D}'$, *est (équivalente à) une image de la syntaxe achevée* $\mathcal{A}ch(\mathcal{T})$, *engendrée par son assouplissement* $\mathcal{T}$, *et la suffisante complétude connexe "sémantique" induit donc la suffisante complétude "syntaxique".*

Le §5.6 est consacré au cas particulier, évoqué plus haut, des "théories purement équationnelles" : nous y donnons une *preuve générale* du fait (évidemment attendu) qu'elles possèdent bien la propriété de suffisante complétude connexe. Plus précisément, si $(\mathbf{A},\mathbf{F},\ldots,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion suffisamment $\mathbb{A}_0$-connexe (donc, si $\mathbb{A}_0$ est suffisamment dense dans $\mathbb{A}$ et si tout *objet* de $\mathbf{A}$ passe au quotient par connexité du point de vue des objets de $\mathbb{A}_0$), si $(\mathbf{\mathcal{D}},\mathcal{D}')$ est une laxification (où $\mathbf{\mathcal{D}}$ a pour contexte $\mathbf{A}$ et $\mathcal{D}'$ a pour contexte $\mathbb{A}'$) pour laquelle tout objet de $\mathbf{\mathcal{D}}$ (vu comme un objet de $\mathbf{A}$) est une amphi-somme finie d'objets de $\mathbb{A}_0$, alors les amphi-algèbres de $\mathbf{\mathcal{D}}$ *passent au quotient par connexité du point de vue des objets de* $\mathbb{A}_0$. Autrement dit, l'amphi-élargissement canoniquement associé à la laxification $(\mathbf{\mathcal{D}},\mathcal{D}')$ vérifie toutes les hypothèses générales précédentes assurant que, du point de vue des objets de $\mathbb{A}_0$, les $\mathcal{D}'$-algèbres libres sont représentées par les classes de connexité des $\mathbf{\mathcal{D}}$-amphi-algèbres libres. Ces hypothèses sont évidemment vérifiées lorsque, par exemple, $\mathcal{D}'$ est une "présentation" de la duale d'une "théorie de Lawvere" (au sens de [F.S.A.T.]) ou d'un "I-

[3] En pratique, les objets de $\mathbb{A}_0$ sont des objets de $\mathcal{T}$, il faut donc voir l'hypothèse suppémentaire qui est faite comme portant sur la "nature" de la "suffisante densité" de $\mathbb{A}_0$, relativement à l'amphi-réflexion $(\mathbf{A},\mathbf{F},\ldots,\mathbb{R},\mathbb{A}')$, plus que - de nouveau - sur les objets tels les $A_{X'}$.

type de Bénabou" (au sens de [S.A.D.C.]) : il suffit donc bien d'assouplir *simplement*, i.e sans corrections de défauts de connexité, toute présentation d'une théorie de Lawvere ou d'un I-type de Bénabou pour obtenir la propriété de suffisante complétude connexe au niveau *sémantique* ainsi que la propriété de suffisante complétude au niveau *syntaxique*.

Au §5.7, nous abordons, enfin, un second cas particulier, un peu plus général que le précédent (mais assez courant dans la pratique). Il s'agit de celui de ces théories "essentiellement algébriques" qu'on cherche à assouplir en permettant des ré-écritures entre les *résultats* des lois, mais pas pour les "tests d'égalité" qui *conditionnent* l'application des lois (c'est le cas, par exemple, pour la "théorie des ... catégories", lorsqu'on veut l'assouplir en introduisant des ré-écritures entre flèches, mais pas entre objets) : nous donnons encore une *preuve générale* du fait qu'elles possèdent bien la propriété de suffisante complétude connexe.
Plus précisément, il suffit de reprendre les considérations précédentes, en supposant cette fois que :

- $\mathbb{A}_{oo}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}_o$ dont chaque objet A_{oo} ne génère "aucune ré-écriture autre que l'identité", i.e. est tel que :

$$\text{pour tout objet } A \text{ de } \mathbf{A}\,,$$
$$\mathbf{A}(A_{oo},A) \text{ est un graphe à composition } \textit{discret},$$

- tout objet D de $\mathcal{D}$ (vu comme un objet de $\mathbf{A}$) est une amphi-somme fibrée[4], dans $\mathbf{A}$, de la forme :

[4] On considère même des amphi-colimites plus générales.

$$\begin{tikzcd}
 & D & \\
A_{01} \arrow[ur] & & A_{02} \arrow[ul] \\
 & A_{00} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où A_{00} est objet de $\mathbb{A}_{00}$ et A_{01} et A_{02} sont objets de $\mathbb{A}_0$ [5].

En Section C, on trouvera de nombreux exemples (assez détaillés) des situations générales étudiées ici et, notamment, une interprétation complète du traitement explicite (effectué en [E.S.C.C.]) du cas particulier, mentionné plus haut, de la théorie des catégories localement cartésiennes (et qui est à l'origine du présent travail : tout particulièrement, de ce qui a trait aux *élargissements*).

Pour conclure, signalons qu'il n'est pas absolument nécessaire d'avoir lu en détail la Section A pour pouvoir parcourir cette Section B : la terminologie et les notations *générales*, utilisées dans la présente Section, correspondent (autant que cela est possible) au "standard" de la théorie des catégories enrichies. Quant aux notations ou concepts plus spécifiques, introduits en Section A et que

[5] De la sorte, pour s'assurer qu'un couple $(x_1, x_2) \in \mathbb{A}(A_{01}, A) \times \mathbb{A}(A_{02}, A)$ est élément de $\mathbb{A}(D, A)$, il faut, et il suffit de, faire un test d'égalité et non de ré-écriture (puisque A_0 ne génère aucune ré-écriture "autre" que l'égalité).

nous utilisons (inévitablement) ici, nous en donnons assez systématiquement la référence permettant de les localiser rapidement dans cette Section antérieure.

5. Suffisante complétude connexe

5.1. La configuration de base

Désignons par $\pi_0 : \mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$ le foncteur "ensemble des composantes connexes", qui associe à tout graphe à composition petit $\mathbb{D}$ l'ensemble $\pi_0(\mathbb{D})$ des composantes connexes $[D]$ des objets D de $\mathbb{D}$.

Ce foncteur est sous-jacent au foncteur *strictement monoïdal sur les unités* (et même "strictement monoïdal sur les produits tensoriels", mais sans que ce soit utile dans la suite) $\Pi_0 = (\pi_0, t_0, u_0) : \mathbb{G}\mathrm{rComp} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ où :

- $t_0 : \pi_0(-) \times \pi_0(-) \Longrightarrow \pi_0(-\otimes-) : \mathbb{G}\mathrm{rComp} \times \mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$ est la transformation (évidemment) naturelle telle que, si $\mathbb{D}_1$ et $\mathbb{D}_2$ sont deux graphes à composition petits, alors $t_0(\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2) : \pi_0(\mathbb{D}_1) \times \pi_0(\mathbb{D}_2) \longrightarrow \pi_0(\mathbb{D}_1 \otimes \mathbb{D}_2)$ est l'application (évidemment bien définie) pour laquelle, si D_1 est un objet de $\mathbb{D}_1$ et si D_2 est un objet de $\mathbb{D}_2$, alors on a $t_0(\mathbb{D}_1,\mathbb{D}_2)([D_1],[D_2]) = [(D_1,D_2)]$,
- $u_0 : 1 \xrightarrow{\simeq} \pi_0(\mathbb{1}_\emptyset)$ est l'unique application inversible de $1 = \{0\}$ vers $\pi_0(\mathbb{1}_\emptyset) = \{\{0\}\}$.

Maintenant, désignons par $\mathrm{did} : \mathbb{E}\mathrm{ns} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}$ le foncteur "graphe à composition discret où tout objet est à identité", qui associe à tout ensemble E le graphe à composition $\mathrm{did}(E)$ tel que :

- $\mathrm{Ob}(\mathrm{did}(E)) = \mathrm{ObId}(\mathrm{did}(E)) = E$,

- $\mathrm{Fl}(\mathrm{did}(E)) = \{ (x,x) \ / \ x \in E \}$,

(pour tout $x \in E$, on a donc $\mathrm{id}_{\mathrm{did}(E)}(x) = (x,x)$).

Ce foncteur est sous-jacent au foncteur *strictement monoïdal sur les produits tensoriels* (mais non stictement monoïdal sur les unités) $\mathrm{Did} = (\mathrm{did},t,u) : \mathbb{E}\mathrm{ns} \to \mathbb{G}\mathrm{rComp}$ où :

- $t : \mathrm{did}(-) \otimes \mathrm{did}(-) \Longrightarrow \mathrm{did}(-\times-) : \mathbb{E}\mathrm{ns} \times \mathbb{E}\mathrm{ns} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}$ est l'équivalence (bien entendu) naturelle telle que, si E_1 et E_2 sont deux ensembles, alors $t(E_1,E_2) : \mathrm{did}(E_1) \otimes \mathrm{did}(E_2) \longrightarrow \mathrm{did}(E_1 \times E_2)$ est l'unique foncteur inversible (évidemment bien défini) dont la restriction aux objets est l'identité,

- $u : \mathbb{1}_\emptyset \to \mathrm{did}(1)$ est l'unique foncteur possible.

Il est facile de vérifier que le foncteur π_0 est adjoint à gauche du foncteur did . Plus précisément, on dispose d'une *réflexion* $\rho = (\mathbb{G}\mathrm{rComp},\pi_0,v,w,\mathrm{did},\mathbb{E}\mathrm{ns})$, en ce sens (usuel) que :

- $v : \mathbb{E}\mathrm{ns}(\pi_0(-),-) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{G}\mathrm{rComp}(-,\mathrm{did}(-))$ est une équivalence naturelle,

- $w : \pi_0(\mathrm{did}(-)) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{id}_{\mathbb{E}\mathrm{ns}}(-)$ est une équivalence naturelle,

- pour tous ensembles E_1 et E_2 , le diagramme ci-dessous est commutatif (si l'on utilise les conventions de notations adoptées en Section A, §1.2 - i.e. en [S.C.C.A.] - concernant $\langle \mathrm{did} \rangle$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E}\mathrm{ns}(\pi_0(\mathrm{did}(E_1)),E_2) \arrow[r, "v(\mathrm{did}(E_1)\text{,}E_2)", "\simeq"'] & \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathrm{did}(E_1),\mathrm{did}(E_2)) \\
\mathbb{E}\mathrm{ns}(E_1,E_2) \arrow[u, "\mathbb{E}\mathrm{ns}(w(E_1)\text{,}E_2)", "\simeq"'] \arrow[ur, "\langle \mathrm{did}\rangle(E_1\text{,}E_2)"'] &
\end{tikzcd}$$

de sorte que le foncteur $\mathrm{did} : \mathbb{E}\mathrm{ns} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}$ identifie

$\mathbb{E}$ns à une sous-catégorie pleine et réflexive de $\mathbb{G}$rComp .

De plus, il y a *cohérence* entre la réflexion ρ et les foncteurs monoïdaux Π_0 et Did , en ce sens que :

- pour tous ensembles E_1 et E_2 , le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
\pi_0(\mathrm{did}(E_1)) \times \pi_0(\mathrm{did}(E_2)) & \xrightarrow{w(E_1)\times w(E_2)} & E_1 \times E_2 \\
{\scriptstyle t_0(\mathrm{did}(E_1),\mathrm{did}(E_2))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle w(E_1\times E_2)^{-1}} \\
\pi_0(\mathrm{did}(E_1) \otimes \mathrm{did}(E_2)) & \xrightarrow[\pi_0(t(E_1,E_2))]{} & \pi_0(\mathrm{did}(E_1 \times E_2))
\end{array}$$

- le diagramme ci-dessous est (bien évidemment) commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 & 1 & \\
{\scriptstyle u_0}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle w(1)^{-1}} \\
\{\{0\}\} = \pi_0(\mathbb{1}_\emptyset) & \xrightarrow[\pi_0(u)]{} & \pi_0(\mathrm{did}(1)) = \{\{0\}\}
\end{array}$$

Dans la suite, pour faire référence à ces différentes propriétés, nous dirons que :

$$\varphi = (\Pi_0,\rho,\mathrm{Did}) = (\Pi_0,(\mathbb{G}\mathrm{rComp},\pi_0,v,w,\mathrm{did},\mathbb{E}\mathrm{ns}),\mathrm{Did})$$

est la *configuration de base*[1] et que Π_0 (resp. Did)

[1] Il est clair que la "configuration de base" pourrait varier ... pourvu que soient conservées les propriétés générales que nous extrayons systématiquement du seul cas particulier (de $\mathbb{E}$ns , $\mathbb{G}$rComp , π_0 , did ...) considéré (pour simplifier) ici.

en est le *foncteur monoïdal de gauche* (resp. *de droite*), π_0 (resp. did) en est le *foncteur de gauche* (resp. *de droite*), ρ en est la *réflexion* etc...

5.2. Modifications

Le foncteur monoïdal (de gauche de la configuration de base) $\Pi_0 : \mathbf{GrComp} \longrightarrow \mathbf{Ens}$ permet, éventuellement sous certaines conditions, le "changement d'enrichissement" des amphi-catégories, des amphi-graphes à composition et des amphi-syntaxes.

a) Si $\mathbf{A}$ est une amphi-catégorie (i.e. une catégorie enrichie par $\mathbf{GrComp}$), on lui associe la catégorie (i.e. la $\mathbf{Ens}$-catégorie) $\Pi_0(\mathbf{A})$ "de ses composantes 2-connexes Hom par Hom ", appelée la Π_0-*modification de* $\mathbf{A}$ et définie comme suit :

- $\mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbf{A})) = \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$,
- pour tous objets A_1 , $A_2 \in \mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbf{A}))$, on a :

$$\Pi_0(\mathbf{A})(A_1,A_2) = \pi_0(\mathbf{A}(A_1,A_2)) ,$$

- pour tout objet $A \in \mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbf{A}))$, l'application $selid_{\Pi_0(\mathbf{A})}(A) : 1 \longrightarrow \Pi_0(\mathbf{A})(A,A)$ est définie comme rendant commutatif le diagramme ci-dessous (si l'on utilise les conventions de notations adoptées en Section A, §1.2 - i.e. en [S.C.C.A.] - concernant $selid_{\Pi_0(\mathbf{A})}$) :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "selid_{\Pi_0(\mathbf{A})}(A)"] \arrow[dr, "u_0"'] & & \Pi_0(\mathbf{A})(A,A) = \pi_0(\mathbf{A}(A,A)) \\
& \pi_0(\mathbb{1}_\emptyset) \arrow[ur, "\pi_0(i_{\mathbf{A}}(A))"'] &
\end{tikzcd}$$

- pour tous objets A_1 , A_2 , $A_3 \in \mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbf{A}))$, l'application $comp_{\Pi_0(\mathbf{A})}(A_1,A_2,A_3):\Pi_0(\mathbf{A})(A_2,A_3)\times\Pi_0(\mathbf{A})(A_1,A_2)\to\Pi_0(\mathbf{A})(A_1,A_3)$ est définie comme rendant commutatif le diagramme ci-dessous (si l'on utilise les conventions de notations adoptées en Section A, §1.2 - i.e. en [S.C.C.A.] - concernant $comp_{\Pi_0(\mathbf{A})}$) :

$$\begin{array}{ccc}
\Pi_0(\mathbf{A})(A_2,A_3) \times \Pi_0(\mathbf{A})(A_1,A_2) & \xrightarrow{comp_{\Pi_0(\mathbf{A})}(A_1,A_2,A_3)} & \Pi_0(\mathbf{A})(A_1,A_3) \\
= & & = \\
\pi_0(\mathbf{A}(A_2,A_3)) \times \pi_0(\mathbf{A}(A_1,A_2)) & & \pi_0(\mathbf{A}(A_1,A_3)) \\
\quad {\scriptstyle t_0(\mathbf{A}(A_2,A_3),\mathbf{A}(A_1,A_2))} \searrow & & \nearrow {\scriptstyle \pi_0(k_{\mathbf{A}}(A_1,A_2,A_3))} \quad \\
& \pi_0(\mathbf{A}(A_2,A_3) \otimes \mathbf{A}(A_1,A_2)) &
\end{array}$$

Bien entendu, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ sont deux amphi-catégories et si $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ est un amphi-foncteur, on lui associe le foncteur (i.e. le $\mathbf{Ens}$-foncteur) $\Pi_0(\mathbf{F}) : \Pi_0(\mathbf{A}) \longrightarrow \Pi_0(\mathbf{A}')$, appelé la Π_0*-modification de* $\mathbf{F}$, défini comme suit (si l'on utilise les conventions de notations adoptées en Section A, §1.2 - i.e. en [S.C.C.A.] - concernant le foncteur $\Pi_0(\mathbf{F})$, notamment pour $\langle\Pi_0(\mathbf{F})\rangle$) :

- $\Pi_0(\mathbf{F})_{ob} = \mathbf{F}_{ob}$,

- pour tous objets A_1 , $A_2 \in \mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbf{A}))$, on a :

$$\begin{array}{ccc}
\langle\Pi_0(\mathbf{F})\rangle(A_1,A_2):\Pi_0(\mathbf{A})(A_1,A_2) & \to & \Pi_0(\mathbf{A}')(\Pi_0(\mathbf{F})(A_1),\Pi_0(\mathbf{F})(A_2)) \\
= \qquad\qquad = & & = \\
\pi_0(\mathbf{F}(A_1,A_2)):\pi_0(\mathbf{A}(A_1,A_2)) & \to & \pi_0(\mathbf{A}'(\mathbf{F}(A_1),\mathbf{F}(A_2)))
\end{array} .$$

De même, si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ sont deux amphi-catégories, si $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2 : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ sont deux amphi-foncteurs et si $\nu = (\,\nu(A) : \mathbb{1}_\varnothing \to \mathbf{A}'(\mathbf{F}_1(A),\mathbf{F}_2(A))\,)_{A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})} : \mathbf{F}_1 \Longrightarrow \mathbf{F}_2$

est une amphi-transformation naturelle (i.e. une $\mathbb{G}$rComp-transformation naturelle), on lui associe la transformation naturelle (i.e. la $\mathbb{E}$ns-transformation naturelle) $\Pi_0(\boldsymbol{\nu}) : \Pi_0(\mathbf{F}_1) \Longrightarrow \Pi_0(\mathbf{F}_2)$, appelée la Π_0-*modification de* $\boldsymbol{\nu}$, définie comme suit :

- pour tout $A \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$, $\Pi_0(\boldsymbol{\nu})(A) : \Pi_0(\mathbf{F}_1)(A) \longrightarrow \Pi_0(\mathbf{F}_2)(A)$ est définie comme rendant commutatif le diagramme ci-dessous (où l'on utilise les conventions de notations adoptées en Section A, §1.2 - i.e. en [S.C.C.A.] - concernant $select_{\Pi_0(\mathbf{A}')}$) :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "select_{\Pi_0(\mathbf{A}')}(\Pi_0(\boldsymbol{\nu})(A))"] \arrow[dr, "u_0"'] & & \Pi_0(\mathbf{A}')(\Pi_0(\mathbf{F}_1)(A),\Pi_0(\mathbf{F}_2)(A)) = \pi_0(\mathbf{A}'(\mathbf{F}_1(A),\mathbf{F}_2(A))) \\
& \pi_0(\mathbb{1}_\emptyset) \arrow[ur, "\pi_0(\boldsymbol{\nu}(A))"'] &
\end{tikzcd}$$

Vu ce qui précède, le lecteur vérifiera facilement que, si $(\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}', \boldsymbol{\nu}, \mathbf{R} : \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{A})$ est une amphi-adjonction, alors $(\Pi_0(\mathbf{F}) : \Pi_0(\mathbf{A}) \longrightarrow \Pi_0(\mathbf{A}') , \Pi_0(\boldsymbol{\nu}) , \Pi_0(\mathbf{R}) : \Pi_0(\mathbf{A}') \longrightarrow \Pi_0(\mathbf{A}))$ est une adjonction.

b) Le foncteur (de gauche de la configuration de base) $\pi_0 : \mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$ ne commutant pas en général aux monomorphismes, si $\mathbb{D}$ est un amphi-graphe à composition, ses "composantes 2-connexes Hom par Hom " n'héritent pas nécessairement d'une structure de graphe à composition canoniquement déduite de la structure de $\mathbb{D}$, à moins qu'il ne soit (*canoniquement*) Π_0-*modifiable*, dans le sens suivant :

<u>Définition 1 :</u> On dit qu'un amphi-graphe à composition $\mathbb{D} = (\mathrm{Ob},\mathrm{ObId},\mathbb{D}(-,-),\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(-,-,-),i,m,k,j_1,j_2)$ est Π_0-*modifia-*

ble si et seulement si :

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, l'application $\pi_0(m(D_1,D_2,D_3)) : \pi_0(\mathbb{D}^{\therefore}(D_1,D_2,D_3)) \longrightarrow \pi_0(\mathbb{D}(D_2,D_3)\otimes\mathbb{D}(D_1,D_2))$ est une injection.

Alors, si $\mathbb{D}$ est un amphi-graphe à composition Π_0-modifiable, on lui associe le graphe à composition $\Pi_0(\mathbb{D})$ (qui est bien celui "de ses composantes 2-connexes Hom par Hom "), appelé la Π_0-*modification (canonique) de* $\mathbb{D}$, (bien) défini comme suit :

- $\mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbb{D})) = \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$,
- $\mathrm{ObId}(\Pi_0(\mathbb{D})) = \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$,
- pour tous objets D_1 , $D_2 \in \mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbb{D}))$, on a :
$$\Pi_0(\mathbb{D})(D_1,D_2) = \pi_0(\mathbb{D}(D_1,D_2)) ,$$
- pour tout objet à identité $D \in \mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbb{D}))$, l'application $selid_{\Pi_0(\mathbb{D})}(D) : 1 \longrightarrow \Pi_0(\mathbb{D})(D,D)$ est définie comme rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "selid_{\Pi_0(\mathbb{D})}(D)"] \arrow[dr, "u_0"'] & & \Pi_0(\mathbb{D})(D,D) = \pi_0(\mathbb{D}(D,D)) \\
& \pi_0(\mathbb{1}_{\emptyset}) \arrow[ur, "\pi_0(i_{\mathbb{D}}(D))"'] &
\end{tikzcd}$$

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\Pi_0(\mathbb{D}))$, l'application
$$\Pi_0(\mathbb{D})^{\therefore}(D_1,D_2,D_3) \xrightarrow{inj_{\Pi_0(\mathbb{D})}(D_1,D_2,D_3)} \Pi_0(\mathbb{D})(D_2,D_3) \times \Pi_0(\mathbb{D})(D_1,D_2)$$
est construite à l'aide du produit fibré représenté ci-dessous (si l'on utilise les conventions de notations adoptées en Section A, §1.2 - i.e. en [S.C.C.A.] - concernant $\Pi_0(\mathbb{D})^{\therefore}$ et $inj_{\Pi_0(\mathbb{D})}$), où $inj_{\Pi_0(\mathbb{D})}(D_1,D_2,D_3)$ est donc

l'une des projections et où on désigne l'autre par $proj_{\mathbb{D}}(D_1, D_2, D_3)$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \Pi_o(\mathbb{D})^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \arrow[dl, "inj_{\Pi_o(\mathbb{D})}(D_1,D_2,D_3)"'] \arrow[dr, "proj_{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3)"] & \\
\begin{array}{c}\Pi_o(\mathbb{D})(D_2,D_3)\times\Pi_o(\mathbb{D})(D_1,D_2)\\ =\\ \pi_o(\mathbb{D}(D_2,D_3))\times\pi_o(\mathbb{D}(D_1,D_2))\end{array} \arrow[dr, "t_o(\mathbb{D}(D_2,D_3),\mathbb{D}(D_1,D_2))"'] & & \pi_o(\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3)) \arrow[dl, "\pi_o(m(D_1,D_2,D_3))"] \\
 & \pi_o(\mathbb{D}(D_2,D_3)\otimes\mathbb{D}(D_1,D_2)) &
\end{tikzcd}$$

(ainsi, $inj_{\Pi_o(\mathbb{D})}(D_1,D_2,D_3)$ est bien une injection puisque, $\mathbb{D}$ étant supposé Π_o-modifiable, $\pi_o(m(D_1,D_2,D_3))$ en est une),

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in Ob(\Pi_o(\mathbb{D}))$, l'application $comp_{\Pi_o(\mathbb{D})}(D_1,D_2,D_3) \ : \ \Pi_o(\mathbb{D})^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \Pi_o(\mathbb{D})(D_1,D_3)$ est définie comme rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\Pi_o(\mathbb{D})^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \arrow[rr, "comp_{\Pi_o(\mathbb{D})}(D_1,D_2,D_3)"] \arrow[dr, "proj_{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3)"'] & & \begin{array}{c}\Pi_o(\mathbb{D})(D_1,D_3)\\ =\\ \pi_o(\mathbb{D}(D_1,D_3))\end{array} \\
 & \pi_o(\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3)) \arrow[ur, "\pi_o(k_{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3))"'] &
\end{tikzcd}$$

Evidemment, si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux amphi-graphes à composition Π_o-modifiables et si $\mathbb{F} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ est un amphi-foncteur, il est facile de lui associer, par analogie avec le cas d'un amphi-foncteur entre amphi-catégories, son foncteur Π_o-*modification* $\Pi_o(\mathbb{F}) : \Pi_o(\mathbb{D}) \longrightarrow \Pi_o(\mathbb{D}')$.

De même, si $\mathbb{D}$ est un amphi-graphe à composition Π_0-modifiable, si $\mathbb{A}'$ est une amphi-catégorie, si $\mathbb{F}_1$, $\mathbb{F}_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{A}'$ sont deux amphi-foncteurs et si $\nu : \mathbb{F}_1 \Longrightarrow \mathbb{F}_2$ est une amphi-transformation naturelle, il est facile de lui associer (par analogie avec le cas d'une amphi-transformation naturelle entre amphi-foncteurs d'une amphi-catégorie vers une autre) la transformation naturelle $\Pi_0(\nu) : \Pi_0(\mathbb{F}_1) \Longrightarrow \Pi_0(\mathbb{F}_2)$, Π_0-*modification de* ν.

c) Pour en terminer avec les Π_0-modifications, introduisons les amphi-syntaxes Π_0-*modifiables* et leurs Π_0-*modifications* :

Définition 2 : On dit qu'une amphi-syntaxe $\mathcal{D} = (\mathbb{A}, \mathbb{J}, \mathbb{B}, \mathbb{K}, \mathbb{D})$ est Π_0-*modifiable* si et seulement si :

- $\mathbb{B}$ est un amphi-graphe à composition Π_0-modifiable,
- $\mathbb{D}$ est un amphi-graphe à composition Π_0-modifiable,
- $\Pi_0(\mathcal{D}) = (\Pi_0(\mathbb{A}), \Pi_0(\mathbb{J}), \Pi_0(\mathbb{B}), \Pi_0(\mathbb{K}), \Pi_0(\mathbb{D}))$ est une syntaxe (autrement dit, le foncteur $\Pi_0(\mathbb{J}) : \Pi_0(\mathbb{B}) \longrightarrow \Pi_0(\mathbb{A})$ est injectif),

alors $\Pi_0(\mathcal{D})$ est appelée la Π_0-*modification de* $\mathcal{D}$.

Bien sûr, si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux amphi-syntaxes Π_0-modifiables et si $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un amphi-homomorphisme, il est facile de lui associer son homomorphisme Π_0-*modification* $\Pi_0(\mathcal{H}) : \Pi_0(\mathcal{D}) \longrightarrow \Pi_0(\mathcal{D}')$ [(2)].

[(2)] Nous n'utiliserons, dans la suite, ni les Π_0-modifications d'amphi-homomorphismes, mentionnées ici par seul souci d'homogénéïté, ni les Π_0-modifications de sesqui-homomorphismes, plus fastidieuses à introduire (et donc laissées au lecteur !).

Le foncteur monoïdal (de droite de la configuration de base) $\mathrm{Did} : \mathbb{E}\mathrm{ns} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}$ permet *toujours*, lui, le "changement (canonique) d'enrichissement" des catégories, des graphes à composition et des syntaxes.

a) Si $\mathbb{A}$ est une catégorie localement petite (i.e. une catégorie enrichie par $\mathbb{E}\mathrm{ns}$), on lui associe une amphi-catégorie (i.e. une $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$-catégorie) $\mathrm{Did}(\mathbb{A})$, appelée la Did-*modification de* $\mathbb{A}$, qu'on laisse au lecteur le soin de préciser par une réécriture (de $\mathbf{A}$ en $\mathbb{A}$ et Π_0 en Did notamment) automatique de ce qui concerne les Π_0-modifications.

Bien entendu, si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$ sont deux catégories localement petites et si $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ est un foncteur, on lui associe l'amphi-foncteur (i.e. le $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$-foncteur) $\mathrm{Did}(F) : \mathrm{Did}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathrm{Did}(\mathbb{A}')$, appelé la Did-*modification de* F , qu'on laisse de nouveau au lecteur le soin de préciser.

De même, si $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$ sont deux catégories localement petites, si $F_1 , F_2 : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ sont deux foncteurs et si $\nu : F_1 \Longrightarrow F_2$ est une transformation naturelle, il est facile de lui associer une amphi-transformation naturelle $\mathrm{Did}(\nu) : \mathrm{Did}(F_1) \Longrightarrow \mathrm{Did}(F_2)$, appelée la Did-*modification de* ν .

Le lecteur vérifiera aussi facilement que, si $(F:\mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}', \nu, R:\mathbb{A}' \rightarrow \mathbb{A})$ est une adjonction, alors $(\mathrm{Did}(F):\mathrm{Did}(\mathbb{A}) \rightarrow \mathrm{Did}(\mathbb{A}'), \mathrm{Did}(\nu), \mathrm{Did}(R):\mathrm{Did}(\mathbb{A}') \rightarrow \mathrm{Did}(\mathbb{A}))$ est une amphi-adjonction.

b) Le foncteur (de droite de la configuration de base) $\mathrm{did} : \mathbb{E}\mathrm{ns} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}$ commute évidemment aux monomorphismes, puisqu'il admet un adjoint à gauche. Il en résulte que, si $\mathbb{D}$ est un graphe à composition localement petit, il est toujours Did-*modifiable* car :

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, le foncteur :

$$\mathrm{did}(\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3)) \xrightarrow{\mathrm{did}(inj_{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3))} \mathrm{did}(\mathbb{D}(D_2,D_3)\times\mathbb{D}(D_1,D_2))$$

est injectif (i.e. est un monomorphisme de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$).

Par conséquent, si $\mathbb{D}$ est un graphe à composition localement petit (quelconque), on lui associe un amphi-graphe à composition $\mathrm{Did}(\mathbb{D})$, appelé la Did-*modification de* $\mathbb{D}$, qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter par une réécriture automatique de ce qui concerne les Π_0-modifications (tout en se souvenant que $t : \mathrm{did}(-) \otimes \mathrm{did}(-) \Longrightarrow \mathrm{did}(-\times-)$ est une *équivalence* naturelle).

Bien entendu, si $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ est un foncteur entre graphes à composition localement petits (quelconques), on lui associe un amphi-foncteur $\mathrm{Did}(F) : \mathrm{Did}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Did}(\mathbb{D}')$, appelé la Did-*modification de* F , qu'on laisse de nouveau au lecteur le soin de préciser.

De même, on définira sans peine la Did-*modification* $\mathrm{Did}(\nu)$ d'une transformation naturelle $\nu : F_1 \Longrightarrow F_2 : \mathbb{D} \to \mathbb{A}'$ entre deux foncteurs d'un graphe à composition localement petit $\mathbb{D}$ vers une catégorie localement petite $\mathbb{A}'$.

c) Pour en terminer, cette fois, avec les Did-modifications, constatons que, si $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ est une syntaxe localement petite sur la catégorie localement petite $\mathbb{A}$, alors :

- pour tous objets B_1 , B_2 de $\mathbb{B}$, le foncteur :

$$\mathrm{did}(\mathbb{B}(B_1,B_2)) \xrightarrow[]{\substack{\mathrm{Did}(J)(B_1,B_2) \\ = \\ \mathrm{did}((J)(B_1,B_2))}} \mathrm{did}(\mathbb{A}(J(B_1),J(B_2)))$$

est injectif (puisque le foncteur did : $\mathbb{E}\mathrm{ns} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}$, ayant un adjoint à gauche, commute aux monomorphismes et puisque l'application $(J)(B_1,B_2):\mathbb{B}(B_1,B_2) \to \mathbb{A}(J(B_1),J(B_2))$ est, par hypothèse, injective).

Par conséquent, si $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ est une syntaxe localement petite sur la catégorie localement petite $\mathbb{A}$, alors $\mathrm{Did}(\mathcal{D}) = (\mathrm{Did}(\mathbb{A}),\mathrm{Did}(J),\mathrm{Did}(\mathbb{B}),\mathrm{Did}(K),\mathrm{Did}(\mathbb{D}))$ est une amphi-syntaxe, appelée la Did-*modification de* $\mathcal{D}$.

Evidemment, si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont deux syntaxes localement petites sur des catégories localement petites et si $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un homomorphisme, il est facile de lui associer un amphi-homomorphisme $\mathrm{Did}(\mathcal{H}) : \mathrm{Did}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathrm{Did}(\mathcal{D}')$, qu'on appelle la Did-*modification* de $\mathcal{H}$ (3).

Pour conclure, il est trivial de constater que la propriété de cohérence entre la réflexion ρ et les foncteurs monoïdaux Π_0 et Did ainsi que la monoïdalité stricte sur les produits tensoriels (au sens du §5.1) de Did assurent que :

- "2-naturellement" en toute catégorie localement petite $\mathbb{A}$, on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\mathbb{A} \xrightarrow{\simeq} \Pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{A}))$$

(de sorte que, pour toutes catégories localement petites $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$, pour tous foncteurs F_1, $F_2 : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ et pour

(3) Pas plus que précédemment, nous n'aurons à utiliser, dans la suite, les Did-modifications d'homomorphismes.

toute transformation naturelle $\nu : F_1 \Longrightarrow F_2$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[d, bend right=60, "F_1"'] \arrow[d, bend left=60, "F_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{\nu}{\Longrightarrow}"] & & \Pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{A})) \arrow[d, bend right=60, "\Pi_0(\mathrm{Did}(F_1))"'] \arrow[d, bend left=60, "\Pi_0(\mathrm{Did}(F_2))"] \arrow[d, phantom, "\overset{\Pi_0(\mathrm{Did}(\nu))}{\Longrightarrow}"] \\ \mathbb{A}' \arrow[rr, "\simeq"] & & \Pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{A}')) \end{tikzcd}$$),

- pour toute syntaxe localement petite $\mathcal{D}$ sur une catégorie localement petite, l'amphi-syntaxe $\mathrm{Did}(\mathcal{D})$ est Π_0-modifiable,

- naturellement en toute syntaxe localement petite $\mathcal{D}$ sur une catégorie localement petite, on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\simeq} \Pi_0(\mathrm{Did}(\mathcal{D}))$$

(de sorte que, pour toutes syntaxes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sur des catégories localement petites et pour tout homomorphisme $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathcal{H}"'] & \Pi_0(\mathrm{Did}(\mathcal{D})) \arrow[d, "\Pi_0(\mathrm{Did}(\mathcal{H}))"] \\ \mathcal{D}' \arrow[r, "\simeq"] & \Pi_0(\mathrm{Did}(\mathcal{D}')) \end{tikzcd}$$).

De même, il est trivial de constater que l'adjonction de π_0 à gauche de did , la propriété de cohérence entre la réflexion ρ et les foncteurs monoïdaux Π_0 et Did ainsi que la monoïdalité stricte sur les unités (au sens du §5.1) de Π_0 et la monoïdalité stricte sur les produits tensoriels (au sens du §5.1) de Did assurent que (en reprenant les notations de la Section A, §3.2 - i.e. de [S.C.C.A.] - concernant $\mathbb{1}_{\emptyset}/-$ ...) :

- "2-naturellement" en toute catégorie localement petite $\mathbb{A}$, on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\mathbb{A} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A})$$

(de sorte que, pour toutes catégories localement petites $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$, pour tous foncteurs F_1 , $F_2 : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ et pour toute transformation naturelle $\nu : F_1 \Longrightarrow F_2$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, bend right=60, "F_1"'] \arrow[d, bend left=60, "F_2"] \arrow[d, phantom, "\overset{\nu}{\Longrightarrow}"] & \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A}) \arrow[d, bend right=60, "\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(F_1)"'] \arrow[d, bend left=60, "\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(F_2)"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\nu)}{\Longrightarrow}"] \\
\mathbb{A}' \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A}')
\end{tikzcd}$$

),

- naturellement en toute syntaxe localement petite $\mathcal{D}$ sur une catégorie localement petite, on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\mathcal{D} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathcal{D})$$

(de sorte que, pour toutes syntaxes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sur des catégories localement petites et pour tout homomorphisme $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "\mathcal{H}"'] & \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathcal{D}) \arrow[d, "\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathcal{H})"] \\
\mathcal{D}' \arrow[r, "\simeq"] & \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathcal{D}')
\end{tikzcd}$$

).

Dans la suite, nous procéderons aux différentes identifications que ces isomorphismes naturels autorisent.

5.3. L'amphi-configuration de base

Rappelons la définition des *amphi-réflexions* :

<u>Définition 3 :</u> On dit que $(\mathbf{A},\mathbf{F},\nu,\omega,\mathbf{R},\mathbf{A}')$ est une *amphi-réflexion* si et seulement si :

- $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}'$ sont deux amphi-catégories,

- $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ et $\mathbf{R} : \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{A}$ sont deux amphi-foncteurs,

- $\nu : \mathbf{A}'(\mathbf{F}(-),-) \xrightarrow{\simeq} \mathbf{A}(-,\mathbf{R}(-))$ est une amphi-équivalence naturelle,

- $\omega : \mathbf{F}(\mathbf{R}(-)) \xrightarrow{\simeq} id_{\mathbf{A}'}(-)$ est une amphi-équivalence naturelle,

- pour tous objets A'_1 et A'_2 de $\mathbf{A}'$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\emptyset}\otimes\mathbf{A}'(\mathbf{F}(\mathbf{R}(A'_1)),A'_2) \arrow[r, "curry^{-1}(\nu(\mathbf{R}(A'_1),A'_2))", "\simeq"'] & \mathbf{A}(\mathbf{R}(A'_1),\mathbf{R}(A'_2)) \\
\mathbf{A}'(\mathbf{F}(\mathbf{R}(A'_1)),A'_2) \arrow[u, "gche^{-1}_{\mathbf{A}'}(\mathbf{F}(\mathbf{R}(A'_1)),A'_2)", "\simeq"'] & \\
\mathbf{A}'(A'_1,A'_2)\otimes\mathbf{A}'(\mathbf{F}(\mathbf{R}(A'_1)),A'_1) \arrow[u, "k(\mathbf{F}(\mathbf{R}(A'_1)),A'_1,A'_2)"] & \\
\mathbf{A}'(A'_1,A'_2)\otimes\mathbb{1}_{\emptyset} \arrow[u, "id(\mathbf{A}'(A'_1,A'_2))\otimes\omega(A'_1)"] \arrow[r, "\simeq", "drte_{\mathbf{A}'}(A'_1,A'_2)"'] & \mathbf{A}'(A'_1,A'_2) \arrow[uuu, "\mathbf{R}(A'_1,A'_2)"']
\end{tikzcd}$$

(diagramme qu'on peut réécrire, à des abus de notations près :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}'(\mathbf{F}(\mathbf{R}(A'_1)),A'_2) \arrow[rr, "\boldsymbol{\nu}(\mathbf{R}(A'_1),A'_2)", "\simeq"'] & & \mathbf{A}(\mathbf{R}(A'_1),\mathbf{R}(A'_2)) \\
\mathbf{A}'(A'_1,A'_2) \arrow[u, "\mathbf{A}'(\boldsymbol{\omega}(A'_1),A'_2)", "\simeq"'] \arrow[urr, "\mathbf{R}(A'_1,A'_2)"'] & &
\end{tikzcd} \quad)$$

de sorte que $\mathbf{R}(A'_1,A'_2)$ est un isomorphisme de graphes à composition et $\mathbf{R} : \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{A}$ identifie $\mathbf{A}'$ à une "sous-amphi-catégorie pleine et amphi-réflexive" de $\mathbf{A}$.

Alors, il est facile de vérifier que (après Π_0-modifications) $(\Pi_0(\mathbf{A}),\Pi_0(\mathbf{F}),\Pi_0(\boldsymbol{\nu}),\Pi_0(\boldsymbol{\omega}),\Pi_0(\mathbf{R}),\Pi_0(\mathbf{A}'))$ est une réflexion, qu'on appelle la *Π_0-modification* de l'amphi-réflexion $(\mathbf{A},\mathbf{F},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},\mathbf{R},\mathbf{A}')$.

De même, on voit que (par "restrictions aux 1-flèches") on dispose d'une réflexion *sous-jacente* $(\mathbb{A},F,\nu,\omega,R,\mathbb{A}')$ où :

- pour tout objet A de $\mathbb{A}$ et pour tout objet A' de $\mathbb{A}'$, on a :

$$\begin{array}{ccc}
& \mathrm{GrComp}(\mathbb{1}_\varnothing,\mathrm{curry}^{-1}(\boldsymbol{\nu}(A,A'))\cdot \mathrm{gche}^{-1}_{\mathbf{A}'(\mathbf{F}(A),A')}) & \\
& = & \\
\mathbb{A}'(F(A),A') & \xrightarrow{\qquad \nu(A,A') \qquad} & \mathbb{A}(A,R(A')) \\
= & & = \\
\mathrm{GrComp}(\mathbb{1}_\varnothing,\mathbf{A}'(\mathbf{F}(A),A')) & & \mathrm{GrComp}(\mathbb{1}_\varnothing,\mathbf{A}(A,\mathbf{R}(A')))
\end{array} ,$$

- pour tout objet A' de $\mathbb{A}'$, on a :

$$\left|\begin{array}{l}
\omega(A') \ : \ F(R(A')) \longrightarrow A' \\
= \\
\omega(A') \ : \ F(R(A')) \longrightarrow_{\mathbb{1}_\varnothing} A' \\
= \\
\boldsymbol{\omega}(A') \ : \ \mathbb{1}_\varnothing \longrightarrow \mathbf{A}'(\mathbf{F}(\mathbf{R}(A')),A') \ .
\end{array}\right.$$

En particulier, il est facile de vérifier que la réflexion $\rho = (\mathbb{G}\mathrm{rComp}, \pi_0, \mathrm{v}, \mathrm{w}, \mathrm{did}, \mathbb{E}\mathrm{ns})$ de la configuration de base est sous-jacente à une unique amphi-réflexion, notée $\boldsymbol{\rho} = (\mathbb{G}\mathrm{rComp}, \boldsymbol{\pi}_0, \mathrm{v}, \mathbf{w}, \mathrm{did}, \mathrm{Did}(\mathbb{E}\mathrm{ns}))$, (compte tenu de l'identification $\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{E}\mathrm{ns}) \simeq \mathbb{E}\mathrm{ns}$, permise par les propriétés de la configuration de base).

Dans la suite, pour faire référence à la donnée de la configuration de base φ et de cette amphi-réflexion, nous dirons que :

$$\Phi = (\Pi_0, \boldsymbol{\rho}, \mathrm{Did}) = (\Pi_0, (\mathbb{G}\mathrm{rComp}, \boldsymbol{\pi}_0, \mathrm{v}, \mathbf{w}, \mathbf{did}, \mathrm{Did}(\mathbb{E}\mathrm{ns})), \mathrm{Did})$$

est l'*amphi-configuration de base* et que Π_0 (resp. Did) en est le *foncteur monoïdal de gauche* (resp. *de droite*), $\boldsymbol{\pi}_0$ (resp. did) en est l'*amphi-foncteur de gauche* (resp. *de droite*), $\boldsymbol{\rho}$ en est l'*amphi-réflexion*, ρ en est la *réflexion sous-jacente*, $\varphi = (\Pi_0, \rho, \mathrm{Did})$ en est la *configuration de base sous-jacente* etc...

Définissons maintenant les *Φ-réflexions* :

<u>Définition 4 :</u> On dit que $\Psi = (\mathbb{A}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}, \mathbb{R}, \mathbb{A}')$ est une *Φ-réflexion* si et seulement si :

- $\mathbb{A}'$ est une catégorie localement petite,
- $(\mathbb{A}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}, \mathbb{R}, \mathrm{Did}(\mathbb{A}'))$ est une amphi-réflexion (où Did est le foncteur monoïdal de droite de l'amphi-configuration de base Φ).

Ainsi, une Φ-réflexion définit, sur la même catégorie localement petite $\mathbb{A}'$, l'amphi-réflexion $(\mathbb{A}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}, \mathbb{R}, \mathrm{Did}(\mathbb{A}'))$, d'une part, et, d'autre part :

- la réflexion $(\Pi_0(\mathbb{A}), \Pi_0(\mathbf{F}), \Pi_0(\boldsymbol{\nu}), \Pi_0(\boldsymbol{\omega}), \Pi_0(\mathbb{R}), \mathbb{A}')$ (qu'on obtient par Π_0-modications et en tenant compte de l'identification $\Pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{A}')) \simeq \mathbb{A}'$ que les propriétés de la configuration de base - sous-jacente à l'amphi-configuration de base - autorisent),

- la réflexion $(\mathbb{A},F,\nu,\omega,R,\mathbb{A}')$ (qu'on obtient par "restrictions aux 1-flèches" et en tenant compte de l'identification $\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A}') \simeq \mathbb{A}'$ que les propriétés de la configuration de base - sous-jacente à l'amphi-configuration de base - autorisent).

En particulier, pour tout objet A de $\mathbb{A}$, on posera :

$$\nu(A,F(A)) : \mathbb{A}'(F(A),F(A)) \longrightarrow \mathbb{A}(A,R(F(A)))$$
$$\mathrm{id}(F(A)) \longmapsto \varepsilon_{\Psi}(A) = \varepsilon(A) \quad .$$

Dans la suite, nous dirons qu'une Φ-réflexion $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},\mathbf{R},\mathbb{A}')$ est *amphi-co-complète* si et seulement si $\mathbf{A}$ est une amphi-catégorie amphi-co-complète (alors, $\mathbb{A}$ est une catégorie co-complète). Il en résulte que $\mathrm{Did}(\mathbb{A}')$ est aussi amphi-co-complète (et, par conséquent, que $\mathbb{A}'$ est co-complète).

De même, nous dirons qu'une Φ-réflexion $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},\mathbf{R},\mathbb{A}')$ est *amphi-complète* si et seulement si $\mathbf{A}$ est une amphi-catégorie amphi-complète (alors, $\mathbb{A}$ est une catégorie complète).

Enfin, nous dirons qu'une Φ-réflexion $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},\mathbf{R},\mathbb{A}')$ est *co-représentable* si et seulement si $\mathbf{A}$ est une amphi-catégorie co-représentable (au sens de la Section A, §3.4 - i.e. de [S.C.C.A.]). Il en résulte alors que $\mathrm{Did}(\mathbb{A}')$ est elle-même une amphi-catégorie co-représentable; en effet, si $C_{\Psi} = C_{\mathbf{A}} : \mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}},\mathbb{A}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ est un foncteur de co-représentation pour $\mathbf{A}$, il est facile de vérifier que (compte tenu de l'identification $\mathbb{1}_\emptyset/\mathrm{Did}(\mathbb{A}') \simeq \mathbb{A}'$ que les propriétés de la configuration de base - sous-jacente à l'amphi-configuration de base - autorisent) :

- le foncteur :

$C'_\Psi = C_{\mathrm{Did}(\mathbb{A}')} : \mathbb{1}_\emptyset/\mathrm{Did}(\mathbb{A}') \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}, (\mathbb{1}_\emptyset/\mathrm{Did}(\mathbb{A}'))^{op})^{op}$,

défini comme rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{1}_\emptyset/\mathrm{Did}(\mathbb{A}') & \xrightarrow{C'_\Psi \,=\, C_{\mathrm{Did}(\mathbb{A}')}} & \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}, (\mathbb{1}_\emptyset/\mathrm{Did}(\mathbb{A}'))^{op})^{op} \\
\simeq & & \simeq \\
\mathbb{A}' & & \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}, \mathbb{A}'^{op})^{op} \\
{\scriptstyle R}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}, F^{op})^{op}} \\
\mathbb{A} & \xrightarrow[C_{\mathbb{A}}]{} & \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{Grcomp}}, \mathbb{A}^{op})^{op}
\end{array}$$

est bien un foncteur de co-représentation pour $\mathrm{Did}(\mathbb{A}')$ (où $\mathbb{E}_{\mathrm{Grcomp}}$ est l'esquisse des graphes à composition, telle que décrite en Section A, §3.3 - i.e. en [S.C.C.A.]) :

- pour tout objet A' de $\mathbb{A}'$ et pour toute flèche $g : G_1 \longrightarrow G_2$ de l'esquisse $\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}$, la flèche $C'_\Psi(A')(g) : C'_\Psi(A')(G_2) \longrightarrow C'_\Psi(A')(G_1)$ est une flèche inversible de $\mathbb{A}'$.

Alors, si $\Psi = (\mathbf{A}, \mathbf{F}, \nu, \omega, \mathbb{R}, \mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion co-représentable et si $\mathcal{D}'$ est une syntaxe sur $\mathbb{A}'$, à l'amphi-syntaxe $\mathrm{Did}(\mathcal{D}')$, sur $\mathrm{Did}(\mathbb{A}')$, sont associés (comme en Section A, §4.3 - i.e. en [S.C.C.A.]) les syntaxes $\mathcal{SSA}_\Psi(\mathcal{D}') = \mathcal{SSA}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))$ et $\mathcal{SAA}_\Psi(\mathcal{D}') = \mathcal{SAA}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))$ ainsi que l'homomorphisme :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathit{inj}_\Psi(\mathcal{D}') & : & \mathcal{SSA}_\Psi(\mathcal{D}') & \longrightarrow & \mathcal{SAA}_\Psi(\mathcal{D}') \\
= & & = & & = \\
\mathit{inj}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}')) & & \mathcal{SSA}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}')) & & \mathcal{SAA}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))
\end{array}$$

sur $\mathbb{A}' \simeq \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A}')$. Par construction, il est facile de vérifier qu'on dispose de deux isologies (au sens de la Section A, §2.3 - i.e. de [S.C.C.A.]) canoniques sur $\mathbb{A}'$:

$\mathcal{J}\mathcal{S}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}') : \mathcal{D}' \to \mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')$ et $\mathcal{J}\mathcal{A}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}') : \mathcal{D}' \to \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')$,

de sorte que le diagramme ci-dessous est commutatif (en y reprenant des notations analogues à celles utilisées en Section A, §§2.2, 4.2, 4.3 - i.e. en [S.C.C.A.]) :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}'^{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')} \arrow[rr, "\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{J}\mathcal{A}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}", "\simeq"'] \arrow[drr, "U^{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}"'] \arrow[ddd, "\simeq"'] & & \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \arrow[d, "U^{\mathcal{D}'}"] & & \mathbb{A}'^{\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')} \arrow[ll, "\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{J}\mathcal{S}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}"', "\simeq"] \arrow[dll, "U^{\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}"] \arrow[ddd, "\simeq"] \\
 & & \mathbb{A}' \arrow[d, "\simeq"'] & & \\
 & & \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A}') & & \\
(\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A}'))^{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))} \arrow[urr, "U^{\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))}"] & & & & (\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A}'))^{\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))} \arrow[ull, "U^{\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))}"'] \\
 & \mathrm{Did}(\mathbb{A}')^{\mathrm{Did}(\mathcal{D}')} \arrow[ul, "\mathrm{corepa}", "\simeq"'] \arrow[uur, "U^{\mathrm{Did}(\mathcal{D}')}"] & & (\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathrm{Did}(\mathbb{A}'))^{\mathrm{Did}(\mathcal{D}')} \arrow[ur, "\mathrm{coreps}"', "\simeq"] \arrow[uul, "U^{\mathrm{Did}(\mathcal{D}')}"'] &
\end{tikzcd}$$

Définissons maintenant les Φ-réflexions *suffisamment générées*[4] :

<u>Définition 5 :</u> Si $\Psi = (\mathbb{A}, \mathbb{F}, \nu, \omega, \mathbb{R}, \mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion, si $\mathbb{A}_0$ est une petite sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}$, si on note $j_0 : \mathbb{A}_0 \longrightarrow \mathbb{A}$ le foncteur injection canonique et si on désigne par :

[4] On trouvera des exemples de Φ-réflexions suffisamment générées en Section C, §§6.5 et 6.6 (i.e. en [S.C.C.C.]).

$$\begin{aligned}
[j_0] : \mathbb{A}_0 &\longrightarrow \Pi_0(\mathbb{A}) \\
A_0 &\mapsto A_0 \\
a_0 : A_{01} \longrightarrow A_{02} &\mapsto (\pi_0(a_0)\cdot u_0)(0) \\
= & \\
a_0 : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{A}(A_{01},A_{02}) &
\end{aligned}$$

(ce qu'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned}
[j_0] : \mathbb{A}_0 &\longrightarrow \Pi_0(\mathbb{A}) \\
A_0 &\mapsto A_0 \\
a_0 &\mapsto [a_0] \ ,
\end{aligned}$$

lorsqu'on identifie $a_0 : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{A}(A_{01},A_{02})$ et $a_0(0)$ et qu'on note – comme au §5.1 – $[a_0] = [a_0(0)] = (\pi_0(a_0)\cdot u_0)(0)$ la composante connexe de $a_0(0)$ dans $\mathbb{A}(A_{01},A_{02})$)

le foncteur qui s'en déduit, alors nous dirons que $\Psi = (\mathbb{A},\mathbb{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est *suffisamment* $\mathbb{A}_0$*-générée* si et seulement si :

– pour tout objet $A \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$ et pour tout objet $A' \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}')$, l'application[5] :

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(A,R(A')) &\longrightarrow \mathrm{Nat}(\Pi_0(\mathbb{A})([j_0](-),A),\Pi_0(\mathbb{A})([j_0](-),R(A'))) \\
c : A \longrightarrow R(A') &\mapsto \Pi_0(\mathbb{A})([j_0](-),(\pi_0(c)\cdot u_0)(0)) \\
= & \\
c : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{A}(A,\mathbb{R}(A')) &
\end{aligned}$$

(qu'on peut encore écrire, comme précédemment :

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}(A,R(A')) &\longrightarrow \mathrm{Nat}(\Pi_0(\mathbb{A})([j_0](-),A),\Pi_0(\mathbb{A})([j_0](-),R(A'))) \\
c &\mapsto \Pi_0(\mathbb{A})([j_0](-),[c]) \qquad)
\end{aligned}$$

est une bijection.

Ainsi, on voit que Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-générée si et

[5] si $H, K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}'$ sont deux foncteurs entre catégories, on note (comme usuellement) $\mathrm{Nat}(H,K)$ la classe des transformations naturelles de H vers K.

seulement si :

pour tout objet A de $\mathbf{A}$, pour tout objet A' de $\mathbb{A}'$ et pour toute famille de flèches de $\mathbb{A}$:

$$b = (b_a : A_o \longrightarrow R(A'))_{\substack{A_o \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}_o) \\ a : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbf{A}(A_o, A)}} ,$$

telle que :

$$b_a = b_{a_1} \text{ , si } [a] = [a_1] \text{ ,}$$

et

$$b_a \cdot a_o = b_{a \cdot a_o} \text{ ,}$$

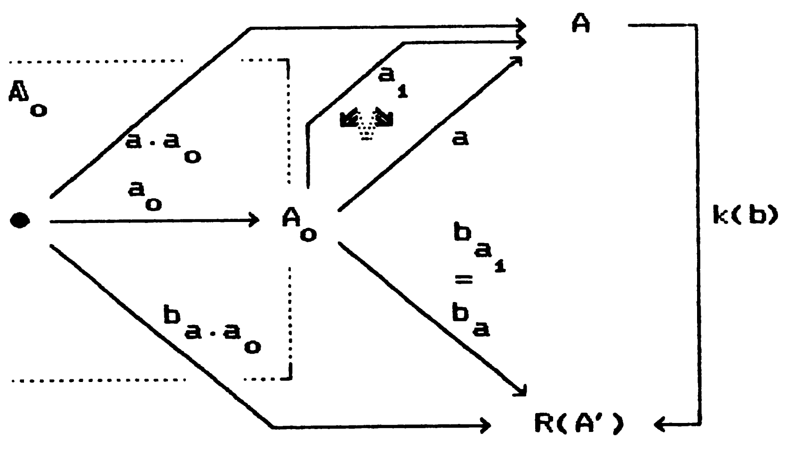
dès que tout cela a un sens ,

il existe une unique flèche $k(b) : A \longrightarrow R(A')$ de $\mathbb{A}$ telle que :

$$k(b) \cdot a = b_a \text{ ,}$$

dès que cela a un sens,

comme suggéré par le diagramme de $\mathbf{A}$ ci-dessous :



En utilisant la réflexion $(\mathbb{A}, F, \nu, \omega, R, \mathbb{A}')$, obtenue (comme décrit au §5.3) par restriction aux 1-flèches de l'amphi-réflexion $(\mathbf{A}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{R}, \mathrm{Did}(\mathbb{A}')))$), on voit aussi que Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_o$-générée si et seulement si :

pour tout objet A de $\mathbb{A}$, pour tout objet A' de $\mathbb{A}'$ et pour toute famille de flèches de $\mathbb{A}'$:

$$b' = (b'_a : F(A_o) \longrightarrow A')_{\substack{A_o \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}_o) \\ a : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{A}(A_o, A)}} ,$$

telle que :

$$b'_a = b'_{a_1} \ , \text{ si } \ [a] = [a_1] \ ,$$

et

$$b'_a \cdot F(a_o) = b'_{a \cdot a_o} \ ,$$

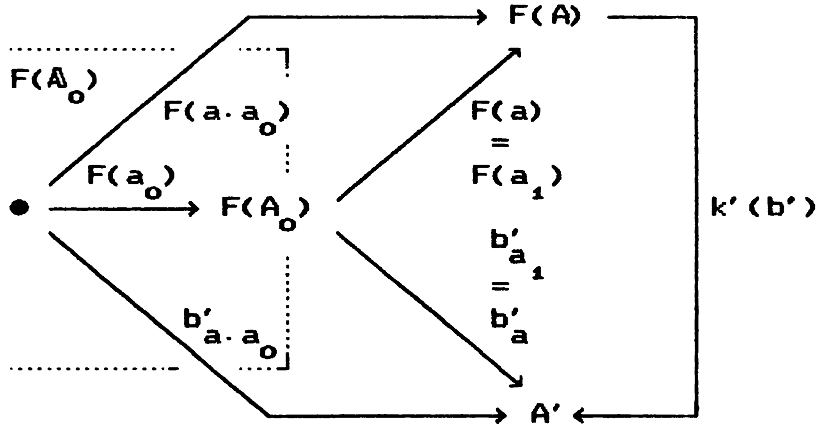
dès que tout cela a un sens ,

il existe une unique flèche $k'(b') : F(A) \longrightarrow A'$ de $\mathbb{A}'$ telle que :

$$k'(b') \cdot F(a) = b'_a \ ,$$

dès que cela a un sens,

comme suggéré par le diagramme de $\mathbb{A}'$ ci-dessous :



En particulier, on voit que, si Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_o$-générée , alors :

pour tout objet A' de $\mathbb{A}'$, on a :

$$A' = \operatorname*{colim}_{\substack{A_0 \in Ob(\mathbb{A}_0) \\ a' : F(A_0) \to A' \in \mathbb{A}(F(A_0), A')}} F(A_0)$$

dans $\mathbb{A}'$.

Plus simplement, nous dirons d'une Φ-réflexion Ψ qu'elle est *suffisamment générée* si et seulement s'il existe une $\mathbb{A}_0$ pour laquelle Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-générée .

Enfin, définissons les Φ-réflexions *suffisamment connexes*(6) :

<u>Définition 6 :</u> Si $\Psi = (\mathbf{A}, \mathbf{F}, \nu, \omega, \mathbb{R}, \mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion, si C est une sous-classe de $Ob(\mathbb{A})$ et si $\mathbb{A}_0$ est une petite sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}$, alors on dit que Ψ est *suffisamment* $\mathbb{A}_0$*-connexe pour* C si et seulement si :

- Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-générée,
- pour tout objet $A \in C$ de $\mathbf{A}$ et pour tout objet A_0 de $\mathbb{A}_0$, l'application :

$$\Pi_0(\mathbf{A})(A_0, A) \xrightarrow{\Pi_0(\mathbf{A})(A_0, (\pi_0(\varepsilon_\Psi(A)) \cdot u_0)(0))} \Pi_0(\mathbf{A})(A_0, R(F(A))) \simeq \mathbb{A}'(F(A_0), F(A))$$

(qui s'écrit encore, comme précédemment :

$$\Pi_0(\mathbf{A})(A_0, A) \xrightarrow{\Pi_0(\mathbf{A})(A_0, [\varepsilon_\Psi(A)])} \Pi_0(\mathbf{A})(A_0, R(F(A))) \simeq \mathbb{A}'(F(A_0), F(A)) \quad)$$

(6) On trouvera des exemples de Φ-réflexions suffisamment connexes en Section C, §§6.5 et 6.6 (i.e. en [S.C.C.C.]).

est bijective.

Clairement, une Φ-réflexion Ψ, suffisamment $\mathbb{A}_0$-générée, est suffisamment $\mathbb{A}_0$-connexe pour C si et seulement si :

- pour tout objet $A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}_0)$ de $\mathbb{A}_0$, pour tout objet $A \in C$ de $\mathbb{A}$ et pour toute flèche $c : A_0 \longrightarrow R(F(A))$ de $\mathbb{A}$, il existe une flèche $a : A_0 \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ telle que $\varepsilon(A) \cdot a = c$, comme représenté par le diagramme commutatif de $\mathbb{A}$ ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} A_0 \arrow[d, "a"] \arrow[dd, bend right=60, "c"'] \\ A \arrow[d, "\varepsilon(A)"] \\ R(F(A)) \end{tikzcd}$$

- pour tout objet $A_0 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}_0)$ de $\mathbb{A}_0$, pour tout objet $A \in C$ de $\mathbf{A}$ et pour toutes flèches a_1, $a_2 : A_0 \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ telles que $\varepsilon(A) \cdot a_1 = \varepsilon(A) \cdot a_2$, il existe un entier $n \geq 1$ et (en reprenant la terminologie et les notations de la Section A, §1.2 - i.e. de [S.C.C.A.]) une famille α_1, α_2, ..., α_{2n-1}, α_{2n} de chemins, éventuellement de longueurs nulles, du graphe à composition $\mathbf{A}(A_0,A)$, tels que :

$$a_1 = \mathrm{codom}_{\mathbf{A}(A_0,A)}(\alpha_1) ,$$
$$\mathrm{dom}_{\mathbf{A}(A_0,A)}(\alpha_1) = \mathrm{dom}_{\mathbf{A}(A_0,A)}(\alpha_2) ,$$
$$\mathrm{codom}_{\mathbf{A}(A_0,A)}(\alpha_2) = \mathrm{codom}_{\mathbf{A}(A_0,A)}(\alpha_3) ,$$

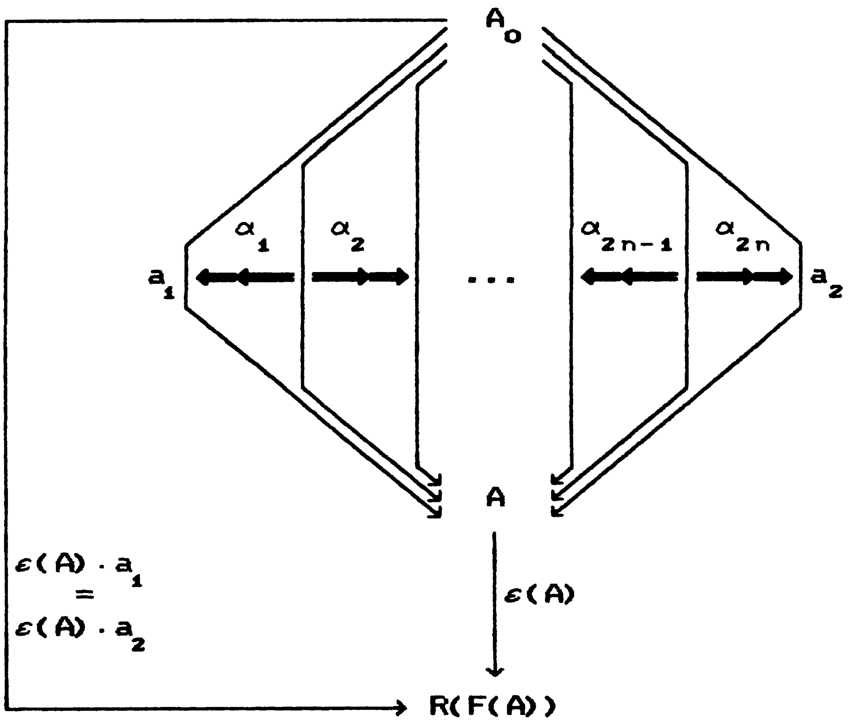
...

$$\mathrm{codom}_{\mathbb{A}(A_0,A)}(\alpha_{2n-2}) = \mathrm{codom}_{\mathbb{A}(A_0,A)}(\alpha_{2n-1}) \ ,$$

$$\mathrm{dom}_{\mathbb{A}(A_0,A)}(\alpha_{2n-1}) = \mathrm{dom}_{\mathbb{A}(A_0,A)}(\alpha_{2n}) \ ,$$

$$\mathrm{codom}_{\mathbb{A}(A_0,A)}(\alpha_{2n}) = a_2 \ ,$$

comme suggéré par le diagramme de $\mathbb{A}$ ci-dessous :



Ainsi, si Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-connexe pour C , on voit (en particulier) que, pour tout objet $A \in C$ de $\mathbb{A}$, la flèche $\varepsilon(A) : A \longrightarrow R(F(A))$ *est un quotient par (passage aux classes de) connexité (du point de vue des objets de* $\mathbb{A}_0$ *)*.

Plus simplement, nous dirons que Ψ est *totalement* $\mathbb{A}_0$*-connexe* si et seulement si Ψ est $\mathbb{A}_0$-connexe pour $\mathrm{Ob}(\mathbb{A})$. Et nous dirons que Ψ est *suffisamment connexe* *pour* C (resp. *totalement connexe*) si et seulement s'il existe une $\mathbb{A}_0$ pour laquelle Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-connexe pour C (resp. totalement $\mathbb{A}_0$-connexe).

5.4. Laxifications et élargissements

Introduisons la notion de *laxification*(7).

Définition 7 : Si $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion, on dit que $\mathcal{L} = (\mathcal{D},\mathcal{D}')$ est une Ψ-*laxification*(8) si et seulement si :

- $\mathcal{D}$ est une amphi-syntaxe sur $\mathbf{A}$,

- $\mathcal{D}'$ est une syntaxe sur $\mathbb{A}'$,

- $\mathcal{D}$ est Π_0-modifiable, sa Π_0-modification $\Pi_0(\mathcal{D})$ est transportable (au sens de la Section A, §2.1 - i.e. de [S.C.C.A.]) par le foncteur $\Pi_0(\mathbf{F}) : \Pi_0(\mathbf{A}) \longrightarrow \Pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{A}'))$ et l'on a :

$$\Pi_0(\mathbf{F}) \cdot \Pi_0(\mathcal{D}) = \mathcal{D}'$$

(compte tenu de l'identification $\Pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{A}')) \simeq \mathbb{A}'$).

Alors, établissons la proposition suivante (où l'on reprend les notations de la Section A, §§2.2 et 4.3 - i.e. de [S.C.C.A.] - et du §5.3, notamment) :

Proposition 1 : *Si* $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ *est une* Φ-*réflexion co-représentable et si* $\mathcal{L} = (\mathcal{D},\mathcal{D}')$ *est une* Ψ-*laxification,*

(7) On trouvera des exemples de laxification en Section C, §6.5 (i.e. en [S.C.C.C.]).

(8) On dira aussi que $\mathcal{D}$ est une "Ψ-laxification" de $\mathcal{D}'$, ou encore que $\mathcal{D}'$ est la "Ψ-rigidification" de $\mathcal{D}$.

alors on dispose d'un homomorphisme canonique de syntaxes $\mathscr{K}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathscr{L}) : \mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathfrak{D}) \longrightarrow \mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}_{\Psi}(\mathscr{D}')$ *sur l'adjonction* $(\mathbb{A}, F, \nu, R, \mathbb{A}')$ *, de sorte que le carré* $(*)$ *du diagramme commutatif ci-dessous (où les flèches en pointillés ne figurent que pour fixer les notations, i.e. désigner certaines flèches composées d'autres antérieurement obtenues) représente un produit fibré :*

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}'^{\mathscr{D}'} \arrow[rr, dotted, bend left=40, "\Delta_{s,\mathscr{L}}"] \arrow[rrr, dotted, bend left=50, "\Delta'_{s,\mathscr{L}}"] \arrow[dr, "U^{\mathscr{D}'}"'] & \mathbb{A}'^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}_{\Psi}(\mathscr{D}')} \arrow[l, "\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}_{\Psi}(\mathscr{D}')}"', "\simeq"] \arrow[r, "R^{\mathscr{K}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathscr{L})}"] \arrow[d, "U^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}_{\Psi}(\mathscr{D}')}"] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathbb{A}^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathfrak{D})} \arrow[r, "\simeq", "\mathrm{coreps}^{-1}"'] \arrow[d, "U^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathfrak{D})}"'] & \mathbb{A}^{\mathfrak{D}} \arrow[dl, "U^{\mathfrak{D}}"] \\
 & \mathbb{A}' \arrow[r, "R"] & \mathbb{A} &
\end{tikzcd}
$$

Ainsi, il existe un unique foncteur inversible :

$$I_{s,\mathscr{L}} \;:\; \mathbb{A}^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathfrak{D})} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}'^{\mathscr{D}'}$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}'^{\mathscr{D}'} \arrow[rr, bend left=30, "\Delta_{s,\mathscr{L}}"] \arrow[dr, "U^{\mathscr{D}'}"'] & \mathbb{A}^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathfrak{D})} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[l, "I_{s,\mathscr{L}}"', "\simeq"] \arrow[r, "\mathrm{projs}_1"] \arrow[d, "\mathrm{projs}_2"] & \mathbb{A}^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathfrak{D})} \arrow[d, "U^{\mathscr{S}\mathscr{S}\mathscr{A}(\mathfrak{D})}"'] \\
 & \mathbb{A}' \arrow[r, "R"] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}
$$

(alors, pour tout objet A' *de* $\mathbb{A}'$ *et pour toute* $\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})$*-algèbre de la forme* $(R(A'),\vartheta)$ *, on note :*

$$I'_{s,\mathcal{X}}\ (R(A'),\vartheta) = I_{s,\mathcal{X}}\ ((R(A'),\vartheta),A') = (A',i_{s,\mathcal{X}}(\vartheta))\ ).$$

Preuve.

Posons $\mathfrak{D} = (\mathbb{A},\mathbb{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$. Alors, par hypothèse, on a $\mathcal{D}' = (\mathbb{A}',\Pi_0(\mathbb{F})\cdot\Pi_0(\mathbb{J}),\Pi_0(\mathbb{B}),\Pi_0(\mathbb{K}),\Pi_0(\mathbb{D}))$.

Nous laissons au lecteur le soin d'expliciter $\mathcal{XSA}(\mathcal{X})$, en utilisant les constructions de $\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})$ et $\mathcal{SSA}_{\Psi}(\mathcal{D}') = \mathcal{SSA}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))$.

Maintenant, si A' est un objet de $\mathbb{A}'$, on a, naturellement en tous objets B_1 et B_2 de $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{A}(J(B_2),R(A')),\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),\mathbb{R}(A'))))$$

$\simeq$ (F étant adjoint à gauche de R)

$$\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{A}'(F(J(B_2)),A'),\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),\mathbb{R}(A'))))$$

$\simeq$ ($\mathbb{F}$ étant amphi-adjoint à gauche de $\mathbb{R}$)

$$\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{A}'(F(J(B_2)),A'),\ldots$$
$$\ldots\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathrm{Did}(\mathbb{A}')(\mathbb{F}(\mathbb{J}(B_1)),A')))$$

$\simeq$ (adjonction de la configuration de base)

$$\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{A}'(F(J(B_2)),A'),\ldots$$
$$\ldots\mathbb{E}\mathrm{ns}(\Pi_0(\mathbb{D})(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}'(F(J(B_1)),A'))) \ .$$

En conséquence, si $(R(A'),\sigma)$ est une $\mathfrak{D}$-sesqui-algèbre, alors, pour tous objets B_1 et B_2 de $\mathbb{B}$, à l'application :

$$\mathbb{A}(J(B_2),R(A')) \xrightarrow{\sigma(B_1,B_2)} \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),\mathbb{R}(A')))$$

correspond, par la succession précédente de bijections, une application :

$$\mathbb{A}'(F(J(B_2)),A') \xrightarrow{\lambda_\sigma(B_1,B_2)} \mathbb{E}\mathrm{ns}(\Pi_0(\mathbb{D})(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}'(F(J(B_1)),A'))$$

et il est facile de vérifier qu'on définit bien ainsi une $\mathcal{D}'$-algèbre (A',λ_{σ}) . La procédure réciproque étant également applicable, on a donc construit un isomorphisme "canonique" :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{\mathfrak{D}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \\ ((R(A'),\sigma),A') & \longmapsto & (A',\lambda_{\sigma}) \end{array} \quad ,$$

de sorte que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \arrow[rr, bend left, "\Delta'_{s,\mathcal{L}}"] \arrow[dr, "U^{\mathcal{D}'}"'] & & \mathbb{A}^{\mathfrak{D}} \arrow[dd, "U^{\mathfrak{D}}"] \\
& \mathbb{A}^{\mathfrak{D}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[ul, "\simeq"'] \arrow[ur, "projs'_1"] \arrow[d, "projs'_2"] & \\
& \mathbb{A}' \arrow[r, "R"] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

On conclut alors facilement.

Fin de la preuve.

Prouvons de même (en utilisant de nouveau les notations de la Section A, §§2.2 et 4.3 - i.e. de [S.C.C.A.] - et du §5.3, notamment) que :

Proposition 2 : *Si* $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\boldsymbol{\nu},\boldsymbol{\omega},\mathbb{R},\mathbb{A}')$ *est une* Φ*-réflexion co-représentable et si* $\mathcal{L} = (\mathfrak{D},\mathcal{D}')$ *est une* Ψ*-laxification, alors on dispose d'un homomorphisme canonique de syntaxes* $\mathfrak{X}\mathcal{AA}(\mathcal{L}) : \mathcal{SAA}(\mathfrak{D}) \longrightarrow \mathcal{SAA}_{\Psi}(\mathcal{D}')$ *sur l'adjonction* $(\mathbb{A},F,\nu,R,\mathbb{A}')$ *, de sorte que, dans le diagramme commutatif ci-dessous (où les flèches en pointillés ne figurent que pour fixer les notations, i.e. désigner certaines flèches composées d'autres, antérieurement obtenues), le carré* (**) *représente un produit fibré :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \arrow[d, "U^{\mathcal{D}'}"'] \arrow[rr, dotted, bend left, "\Delta_{a,\mathscr{L}}"] \arrow[rrr, dotted, bend left=40, "\Delta'_{a,\mathscr{L}}"] & \mathbb{A}'^{\mathcal{SAA}_{\Psi}(\mathcal{D}')} \arrow[l, "\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{JAA}_{\Psi}(\mathcal{D}')}"', "\simeq"] \arrow[r, "R^{\mathcal{HAA}(\mathscr{L})}"] \arrow[dl, "U^{\mathcal{SAA}_{\Psi}(\mathcal{D}')}"] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})} \arrow[r, "\simeq", "\mathrm{corepa}^{-1}"'] \arrow[d, "U^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})}"'] & \mathbb{A}^{\mathfrak{D}} \arrow[dl, "U^{\mathfrak{D}}"] \\
\mathbb{A}' \arrow[rr, "R"] & & \mathbb{A} &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, il existe un unique foncteur inversible :

$$I_{a,\mathscr{L}} \; : \; \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'}$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
\mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \arrow[ddr, "U^{\mathcal{D}'}"'] \arrow[rr, bend left, "\Delta_{a,\mathscr{L}}"] & & \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})} \arrow[dd, "U^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})}"'] \\
& \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[ul, "I_{a,\mathscr{L}}"', "\simeq"] \arrow[ur, "\mathrm{proja}_1"] \arrow[d, "\mathrm{proja}_2"] & \\
& \mathbb{A}' \arrow[r, "R"] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

(alors, pour tout objet A' *de* $\mathbb{A}'$ *et pour toute* $\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})$*-algèbre de la forme* $(R(A'),\vartheta)$ *, on note :*

$$I'_{a,\mathscr{L}}(R(A'),\vartheta) = I_{a,\mathscr{L}}((R(A'),\vartheta),A') = (A', i_{a,\mathscr{L}}(\vartheta))\ ).$$

<u>Preuve.</u>

Posons de nouveau $\mathfrak{D} = (\mathbf{A},\mathbf{J},\mathbf{B},\mathbf{K},\mathbf{D})$. Par hypothèse, on a

toujours $\mathcal{D}' = (\mathbb{A}', \Pi_0(\mathbf{F}) \cdot \Pi_0(\mathbf{J}), \Pi_0(\mathbb{B}), \Pi_0(\mathbb{K}), \Pi_0(\mathbb{D}))$.
Nous laissons encore au lecteur le soin d'expliciter $\mathcal{KAA}(\mathcal{L})$, en utilisant les constructions de $\mathcal{SAA}(\mathcal{D})$ et $\mathcal{SAA}_{\Psi}(\mathcal{D}') = \mathcal{SAA}(\mathrm{Did}(\mathcal{D}'))$.
Maintenant, si A' est un objet de $\mathbb{A}'$, on a, naturellement en tous objets B_1 et B_2 de $\mathbb{B}$:

$$\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{A}(\mathbf{J}(B_2), \mathbb{R}(A')), \ldots$$
$$\ldots \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1), \mathbb{K}(B_2)), \mathbb{A}(\mathbf{J}(B_1), \mathbb{R}(A'))))$$

$\simeq$ ($\mathbf{F}$ étant amphi-adjoint à gauche de $\mathbb{R}$)

$$\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathrm{Did}(\mathbb{A}')(\mathbf{F}(\mathbf{J}(B_2)), A'), \ldots$$
$$\ldots \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1), \mathbb{K}(B_2)), \mathbb{A}(\mathbf{J}(B_1), \mathbb{R}(A'))))$$

$\simeq$ ($\mathbf{F}$ étant amphi-adjoint à gauche de $\mathbb{R}$)

$$\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathrm{Did}(\mathbb{A}')(\mathbf{F}(\mathbf{J}(B_2)), A'), \ldots$$
$$\ldots \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1), \mathbb{K}(B_2)), \mathrm{Did}(\mathbb{A}')(\mathbf{F}(\mathbf{J}(B_1)), A')))$$

$\simeq$ (amphi-adjonction de l'amphi-configuration de base)

$$\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathrm{Did}(\mathbb{A}')(\mathbf{F}(\mathbf{J}(B_2)), A'), \ldots$$
$$\ldots \mathrm{Did}(\mathbb{E}\mathrm{ns})(\Pi_0(\mathbb{D})(K(B_1), K(B_2)), \mathbb{A}'(F(J(B_1)), A')))$$

$\simeq$ (adjonction de la configuration de base)

$$\mathbb{E}\mathrm{ns}(\Pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{A}'))(F(J(B_2)), A'), \ldots$$
$$\ldots \mathbb{E}\mathrm{ns}(\Pi_0(\mathbb{D})(K(B_1), K(B_2)), \mathbb{A}'(F(J(B_1)), A')))$$

$=$ (identification $\Pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{A}')) \simeq \mathbb{A}'$)

$$\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{A}'(F(J(B_2)), A'), \ldots$$
$$\ldots \mathbb{E}\mathrm{ns}(\Pi_0(\mathbb{D})(K(B_1), K(B_2)), \mathbb{A}'(F(J(B_1)), A'))) \ .$$

En conséquence, si $(R(A'), \mathcal{D})$ est une $\mathcal{D}$-amphi-algèbre, alors, pour tous objets B_1 et B_2 de $\mathbb{B}$, au foncteur :

$$\mathbb{A}(\mathbf{J}(B_2), \mathbb{R}(A')) \xrightarrow{\mathcal{D}(B_1, B_2)} \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1), \mathbb{K}(B_2)), \mathbb{A}(\mathbf{J}(B_1), \mathbb{R}(A')))$$

correspond, par la succession précédente de bijections, une application :

$$\mathbb{A}'(F(J(B_2)),A') \xrightarrow{\lambda_{\mathscr{B}}(B_1,B_2)} \mathbb{E}\mathrm{ns}(\Pi_0(\mathbb{D})(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}'(F(J(B_1)),A'))$$

et il est facile de vérifier qu'on définit bien ainsi une $\mathscr{D}'$-algèbre $(A',\lambda_{\mathscr{B}})$. La procédure réciproque étant également applicable, on a donc construit un isomorphisme "canonique" :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^{\mathscr{D}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{A}'^{\mathscr{D}'} \\ ((R(A'),\mathscr{B}),A') & \longrightarrow & (A',\lambda_{\mathscr{B}}) \end{array} ,$$

de sorte que le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}'^{\mathscr{D}'} \arrow[rr, bend left, "\Delta'_{a,\mathscr{L}}"] \arrow[dr, "U^{\mathscr{D}'}"'] & & & \mathbf{A}^{\mathscr{D}} \arrow[dl, "U^{\mathscr{D}}"] \\
& \mathbf{A}^{\mathscr{D}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[ul, "\simeq"'] \arrow[urr, "\mathrm{proja}'_1"] \arrow[d, "\mathrm{proja}'_2"] & & \\
& \mathbb{A}' \arrow[r, "R"] & \mathbb{A} &
\end{tikzcd}$$

On conclut alors facilement.
<u>Fin de la preuve.</u>

Introduisons maintenant la notion plus générale d'*élargissement*[9].

<u>Définition 8 :</u> Si $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\nu,\omega,\mathbf{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion co-représentable, on dit que $\mathscr{E} = (\mathscr{D},\mathscr{K}',\mathscr{T},\mathscr{K}'',\mathscr{D}'',\mathscr{X}',\mathscr{D}')$ est un *Ψ-sesqui-élargissement* (resp. un *Ψ-amphi-élargisse-*

[9] On trouvera des exemples d'élargissements en Section C, §6.6 (i.e. en [S.C.C.C.]).

ment)[10] si et seulement si :

- $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ est une amphi-syntaxe sur $\mathbb{A}$ et $\mathcal{T}$ est une syntaxe sur $\mathbb{A}$,
- $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont deux syntaxes sur $\mathbb{A}'$,
- $\mathcal{K}' : \mathcal{S}\&\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathfrak{D}}) \longrightarrow \mathcal{T}$ est un homomorphisme sur $\mathbb{A}$, lorsqu'on prend $\& = \mathcal{S}$ (resp. $\& = \mathcal{A}$)[11],
- $\mathcal{K}'' : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{D}''$ est un homomorphisme sur l'adjonction $(\mathbb{A}, F, \nu, R, \mathbb{A}')$,
- $\mathcal{H}' : \mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}') \longrightarrow \mathcal{D}''$ est un homomorphisme sur $\mathbb{A}'$, lorsqu'on prend $\& = \mathcal{S}$ (resp. $\& = \mathcal{A}$),
- $\mathcal{L}(\mathfrak{T}) = (\boldsymbol{\mathfrak{D}}, \mathcal{D}')$ est une Ψ-laxification,
- les propriétés suivantes sont vérifiées :
  - (i) le diagramme (d'homomorphismes) ci-dessous est commutatif, lorsqu'on prend $\& = \mathcal{S}$ (resp. $\& = \mathcal{A}$) :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathfrak{D}}) \arrow[r, "\mathcal{K}'"] \arrow[d, "\mathcal{H}\&\mathcal{A}(\mathcal{L}(\mathfrak{T}))"'] & \mathcal{T} \arrow[d, "\mathcal{K}''"] \\
\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}') \arrow[r, "\mathcal{H}'"'] & \mathcal{D}''
\end{tikzcd}$$

(10) On dira aussi que $\mathcal{T}$ est un "Ψ-sesqui-assouplissement" (resp. un "Ψ-amphi-assouplissement") de $\mathcal{D}'$ relatif à $\mathfrak{T}$, ou encore que $\mathcal{D}'$ est la "Ψ-sesqui-rigidification" (resp. "la Ψ-amphi-rigidification") de $\mathcal{T}$ relative à $\mathfrak{T}$.

(11) Jusqu'à présent, il nous a fallu développer séparément ce qui était spécifique du cas des sesqui-algèbres et ce qui l'était du cas des amphi-algèbres. A partir de maintenant, on a fait suffisamment "converger" ces développements pour que ce ne soit plus nécessaire, d'où l'utilisation du "grand joker" $\&$ (ainsi que, plus loin, du "petit joker" & et, une seule fois, des "jokers accessoires" \$ et £).

(ii) dans le diagramme commutatif ci-dessous, où les deux rectangles intérieurs représentent des produits fibrés :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathcal{T}} \arrow[d, "U^{\mathcal{T}}"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}(\mathbb{A})^{\mathcal{K}'}"'] & & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[ll] \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\mathrm{id}(\mathbb{A})^{\mathcal{K}'} \times_{\mathbb{A}} \mathrm{id}(\mathbb{A}')"] \\
\mathbb{A} & & \mathbb{A}' \arrow[ll, "R"'] \\
\mathbb{A}^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathscr{D}})} \arrow[u, "U^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathscr{D}})}"'] & & \mathbb{A}^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathscr{D}})} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[ll] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

le foncteur :

$$\mathrm{id}(\mathbb{A})^{\mathcal{K}'} \times_{\mathbb{A}} \mathrm{id}(\mathbb{A}') : \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathscr{D}})} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}'$$

est injectif, lorsqu'on prend $\& = \mathcal{S}$ (resp. $\& = \mathcal{A}$),

(iii) le foncteur $\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathscr{X}'} : \mathbb{A}'^{\mathscr{D}''} \longrightarrow \mathbb{A}'^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathscr{D}')} \simeq \mathbb{A}'^{\mathscr{D}'}$ est un isomorphisme (autrement dit, $\mathscr{X}'$ est une isologie), lorsqu'on prend $\& = \mathcal{S}$ (resp. $\& = \mathcal{A}$).

Evidemment, si $\mathfrak{E} = (\boldsymbol{\mathscr{D}},\mathcal{K}',\mathcal{T},\mathcal{K}'',\mathscr{D}'',\mathscr{X}',\mathscr{D}')$ est un Ψ-amphi-élargissement, on voit (en reprenant, pour $inj(\boldsymbol{\mathscr{D}})$, la notation de la Section A, §4.3 - i.e. de [S.C.C.A.] - et, pour $inj_{\Psi}(\mathscr{D}')$, celle du §5.2) que :

$$\mathcal{S}\mathcal{J}(\mathfrak{E}) = (\boldsymbol{\mathscr{D}},\mathcal{K}'\cdot inj(\boldsymbol{\mathscr{D}}),\mathcal{T},\mathcal{K}'',\mathscr{D}'',\mathscr{X}'\cdot inj_{\Psi}(\mathscr{D}'),\mathscr{D}')$$

est un Ψ-sesqui-élargissement, dit *sous-jacent à* $\mathfrak{E}$.

De même, on vérifie facilement que, si $\mathscr{L} = (\boldsymbol{\mathscr{D}},\mathscr{D}')$ est une Ψ-laxification, alors :

$$\mathcal{S}(\mathscr{L}) = (\boldsymbol{\mathscr{D}},\mathrm{id}(\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathscr{D}})),\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}(\boldsymbol{\mathscr{D}}),\mathscr{X}\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathscr{L}),\ldots$$
$$\ldots\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathscr{D}'),\mathrm{id}(\mathcal{S}\mathcal{S}\mathcal{A}_{\Psi}(\mathscr{D}')),\mathscr{D}')$$

et :

$\mathcal{S}'(\mathcal{L}) = (\mathfrak{D}, inj(\mathfrak{D}), \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}(\mathfrak{D}), \mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{A}(\mathcal{L}), \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}_\Psi(\mathcal{D}'), inj_\Psi(\mathcal{D}'), \mathcal{D}')$

sont deux Ψ-sesqui-élargissements, tandis que :

$\mathcal{A}(\mathcal{L}) = (\mathfrak{D}, \mathrm{id}(\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}(\mathfrak{D})), \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}(\mathfrak{D}), \mathcal{H}\mathcal{A}\mathcal{A}(\mathcal{L}), \ldots$
$\ldots \mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}_\Psi(\mathcal{D}'), \mathrm{id}(\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}_\Psi(\mathcal{D}')), \mathcal{D}')$

est un Ψ-amphi-élargissement (dont le Ψ-sesqui-élargissement sous-jacent est $\mathcal{S}\mathcal{J}(\mathcal{A}(\mathcal{L})) = \mathcal{S}'(\mathcal{L})$).

Dès lors, il est facile d'établir (en reprenant, notamment, les notations de la Section A, §4.3 - i.e. de [S.C.C.A.] - concernant coreps et corepa) que :

<u>Proposition 3 :</u> *Si* $\Psi = (\mathbf{A}, \mathbf{F}, \nu, \omega, \mathbf{R}, \mathbb{A}')$ *est une* Φ*-réflexion co-représentable et si* $\mathfrak{Z} = (\mathfrak{D}, \mathcal{K}', \mathcal{T}, \mathcal{K}'', \mathcal{D}'', \mathcal{H}', \mathcal{D}')$ *est un* Ψ*-sesqui-élargissement (resp. un* Ψ*-amphi-élargissement), alors le trapèze* $(***)$ *du diagramme commutatif ci-dessous (où les flèches en pointillés ne figurent que pour fixer les notations, i.e. désigner certaines flèches composées d'autres antérieurement obtenues) représente un produit fibré :*

$$\begin{tikzcd}
\$^{\mathfrak{D}} \arrow[r, bend left, "\mathrm{corep}_{\scriptstyle\&}", "\simeq"'] \arrow[dr, "\pounds^{\mathfrak{D}}"'] & \mathbb{A}^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\mathfrak{D})} \arrow[d, "U^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\mathfrak{D})}"'] & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \arrow[l, bend right, "\mathrm{id}(\mathbb{A})^{\mathcal{K}'}"'] \arrow[dl, "U^{\mathcal{T}}"] \arrow[rrr, phantom, "(***)"] & \mathbb{A}'^{\mathcal{D}''} \arrow[l, "R^{\mathcal{K}''}"'] \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{H}'}", "\simeq"'] \arrow[dr, "U^{\mathcal{D}''}"] & \mathbb{A}'^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_\Psi(\mathcal{D}')} \arrow[d, "U^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_\Psi(\mathcal{D}')}"] \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_\Psi(\mathcal{D}')}", "\simeq"'] & \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \arrow[lll, dotted, bend right, "\Lambda_{\scriptstyle\&, \mathfrak{Z}}"'] \arrow[dl, "U^{\mathcal{D}'}"] \\
 & \mathbb{A} & & & \mathbb{A}' \arrow[lll, "R"'] &
\end{tikzcd}$$

lorsqu'on prend ${\scriptstyle\&} = s$ *(resp.* ${\scriptstyle\&} = a$ *),* $\& = \mathcal{S}$ *(resp.* $\& = \mathcal{A}$ *),* $\$ = \mathbb{A}$ *(resp.* $\$ = \mathbf{A}$ *) et* $\pounds = U$ *(resp.* $\pounds = \mathbf{U}$ *). Ainsi, il existe un unique foncteur inversible :*

$$I_{\scriptstyle\&, \mathfrak{Z}} : \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'}$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathcal{T}} \arrow[dd, "U^{\mathcal{T}}"'] & & & \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \arrow[lll, bend right, "\Lambda_{\&,\mathfrak{Z}}"'] \arrow[ddl, "U^{\mathcal{D}'}"] \\
& \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[ul, "P_1"] \arrow[dr, "P_2"'] \arrow[urr, "I_{\&,\mathfrak{Z}}"] & & \\
\mathbb{A} & & \mathbb{A}' \arrow[ll, "R"] &
\end{tikzcd}$$

lorsqu'on prend $\& = s$ *(resp.* $\& = a$ *) et* $\& = \mathcal{S}$ *(resp.* $\& = \mathcal{A}$ *).*

Alors, pour tout objet A' *de* $\mathbb{A}'$ *et pour toute* $\mathcal{T}$*-algèbre de la forme* $(R(A'),\vartheta)$ *, on note :*

$$I'_{\&,\mathfrak{Z}}(R(A'),\vartheta) = I_{\&,\mathfrak{Z}}((R(A'),\vartheta),A') = (A',i_{\&,\mathfrak{Z}}(\vartheta)) \ ,$$

lorsqu'on prend $\& = s$ *(resp.* $\& = a$ *).*

<u>Preuve.</u>

En effet, le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\mathfrak{D})} \arrow[d, "U^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\mathfrak{D})}"'] & & \mathbb{A}'^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')} \arrow[ll, bend right, "R^{\mathcal{X}\&\mathcal{A}(\mathcal{L}(\mathfrak{Z}))}"'] \arrow[d, "U^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}"] \\
\mathbb{A} & & \mathbb{A}' \arrow[ll, "R"]
\end{tikzcd}$$

représente un produit fibré, en vertu de la proposition 1 (resp. de la proposition 2) précédente, lorqu'on prend $\& = \mathcal{S}$ (resp. $\& = \mathcal{A}$).

Par conséquent, si on considère le produit fibré représenté par le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \arrow[dl, "U^{\mathcal{T}}"'] & & \\
& & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[ul, "P_1"'] \arrow[dr, "P_2"] & \\
\mathbb{A} & & & \mathbb{A}' \arrow[lll, "R"']
\end{tikzcd}$$

il existe un unique foncteur $\nabla'_{\&,\mathfrak{G}} : \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}'^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}$, évidemment injectif (en vertu de la propriété (ii) de la définition 8 précédente), rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\mathbb{D})} \arrow[ddd, "U^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\mathbb{D})}"'] & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \arrow[l, bend right, "\mathrm{id}(\mathbb{A})^{\mathcal{K}'}"'] \arrow[dddl, "U^{\mathcal{T}}"'] & & \mathbb{A}'^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')} \arrow[lll, bend right=40, "R^{\mathcal{H}\&\mathcal{A}(\mathcal{L}(\mathfrak{G}))}"'] \arrow[ddd, "U^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}"] \\
& & & \\
& & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[uul, "P_1"'] \arrow[uur, "\nabla'_{\&,\mathfrak{G}}"] \arrow[dr, "P_2"] & \\
\mathbb{A} & & & \mathbb{A}' \arrow[lll, "R"']
\end{tikzcd}$$

De plus, par hypothèse (en vertu de la propriété (i) de la définition 8 précédente), le diagramme ci-dessous est commutatif et (en vertu de la propriété (iii) de la définition 8 précédente) $\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{X}'} : \mathbb{A}'^{\mathcal{D}''} \longrightarrow \mathbb{A}'^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}$ y est inversible :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}(\mathbb{D})} & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \arrow[l, bend right, "\mathrm{id}(\mathbb{A})^{\mathcal{K}'}"'] & \mathbb{A}'^{\mathcal{D}''} \arrow[l, "R^{\mathcal{K}''}"'] \arrow[r, bend left, "\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{X}'}", "\simeq"'] & \mathbb{A}'^{\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')} \arrow[lll, bend right=40, "R^{\mathcal{H}\&\mathcal{A}(\mathcal{L}(\mathfrak{G}))}"']
\end{tikzcd}$$

Il existe donc un unique foncteur $\nabla_{\&,\mathfrak{G}} : \mathbb{A}'^{\mathcal{D}''} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}'$ rendant commutatif *tout* le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathcal{SE\!A}(\boldsymbol{\mathcal{D}})} \arrow[ddd, "U^{\mathcal{SE\!A}(\boldsymbol{\mathcal{D}})}"'] & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \arrow[l, "\mathrm{id}(\mathbb{A})^{\mathcal{K}'}"'] \arrow[dddl, "U^{\mathcal{T}}"'] & & \mathbb{A}'^{\mathcal{D}''} \arrow[ll, "R^{\mathcal{K}''}"'] \arrow[r, "\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{X}'}", "\simeq"'] \arrow[dl, "\nabla_{\&,\mathfrak{E}}"] & \mathbb{A}'^{\mathcal{SE\!A}_{\Psi}(\mathcal{D}')} \arrow[ddd, "U^{\mathcal{SE\!A}_{\Psi}(\mathcal{D}')}"] \arrow[llll, bend right, "R^{\mathcal{XE\!A}(\mathcal{L}(\mathfrak{E}))}"'] \\
& & \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \times_{\mathbb{A}} \mathbb{A}' \arrow[ul, "p_1"] \arrow[urr, "\nabla'_{\&,\mathfrak{E}}"'] \arrow[ddrr, "p_2"'] & & \\
& & & & \\
\mathbb{A} & & & & \mathbb{A}' \arrow[llll, "R"']
\end{tikzcd}$$

On conclut alors facilement (que $\nabla_{\&,\mathfrak{E}}$ admet pour inverse $(\mathrm{id}(\mathbb{A}')^{\mathcal{X}'})^{-1} \cdot \nabla'_{\&,\mathfrak{E}}$).
<u>Fin de la preuve.</u>

Si $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion, nous dirons d'une Ψ-laxification $\mathcal{L} = (\boldsymbol{\mathcal{D}},\mathcal{D}')$ qu'elle est *petite* si et seulement si $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est une amphi-syntaxe petite ou, de manière équivalente, si et seulement si $\mathcal{D}'$ est une syntaxe petite. De plus, si Ψ est amphi-co-complète, nous dirons de $\mathcal{L}$ qu'elle a un *rang* si et seulement s'il existe un ordinal régulier α pour lequel $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est d'amphi-rang $\leq \alpha$ et $\mathcal{D}'$ est de rang $\leq \alpha$.

De même, si Ψ est une Φ-réflexion co-représentable, nous dirons d'un Ψ-sesqui-élargissement (resp. d'un Ψ-amphi-élargissement) $\mathfrak{E} = (\boldsymbol{\mathcal{D}},\mathcal{K}',\mathcal{T},\mathcal{K}'',\mathcal{D}'',\mathcal{X}',\mathcal{D}')$ qu'il est *petit* si et seulement si $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est une amphi-syntaxe petite et $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}''$ sont des syntaxes petites (ce qui impose que $\mathcal{D}'$ est une syntaxe petite). De plus, si Ψ est amphi-co-complète, nous dirons de $\mathfrak{E}$ qu'il a un *rang* si et seulement s'il existe un ordinal régulier α pour lequel $\mathcal{T}$ et $\mathcal{D}''$ sont de rang $\leq \alpha$ (ce qui impose aussi que $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ est d'amphi-rang $\leq \alpha$ et que $\mathcal{D}'$ est de rang $\leq \alpha$).

5.5. Suffisante complétude et suffisante complétude connexe[12]

Introduisons la notion d'algèbre *(canoniquement)* *Ψ-quotientable*.

<u>Définition 9 :</u> Si $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\nu,\omega,\mathbf{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion et si $\mathcal{T} = (\mathbb{A},V,\mathbb{S},W,\mathbb{T})$ est une syntaxe sur $\mathbb{A}$, on dit qu'une $\mathcal{T}$-algèbre (A,τ) est *Ψ-quotientable (du point de vue des objets de* $\mathbb{S}$ *)* si et seulement si :

- pour tout objet $S \in \mathrm{Ob}(\mathbb{S})$, l'application :

$$\mathbb{A}(V(S),\varepsilon(A)) \ : \ \mathbb{A}(V(S),A) \longrightarrow \mathbb{A}(V(S),R(F(A)))$$

est surjective,

- pour tous objets S_1 , $S_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{S})$, il existe une (nécessairement unique) application :

$$\mathbb{A}(V(S_2),R(F(A))) \xrightarrow{\tau(S_1,S_2)/\varepsilon(A)} \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{T}(W(S_1),W(S_2)),\mathbb{A}(V(S_1),R(F(A))))$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{A}(V(S_2),A) \arrow[dl, "\mathbb{A}(V(S_2){,}\varepsilon(A))"'] \arrow[dr, "\tau(S_1{,}S_2)"] & \\
\mathbb{A}(V(S_2),R(F(A))) \arrow[dr, "\tau(S_1{,}S_2)/\varepsilon(A)"'] & & \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{T}(W(S_1),W(S_2)),\mathbb{A}(V(S_1),A)) \arrow[dl, "\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{T}(W(S_1){,}W(S_2)){,}\mathbb{A}(V(S_1){,}\varepsilon(A)))"] \\
& \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{T}(W(S_1),W(S_2)),\mathbb{A}(V(S_1),R(F(A)))) &
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, (A,τ) est Ψ-quotientable si et seulement si :

[12] On trouvera des exemples de suffisante complétude et de suffisante complétude connexe en Section C, §§6.5 et 6.6 (i.e. en [S.C.C.C.]).

- pour tout objet $S \in Ob(\mathbb{S})$ et pour toute flèche $x' : V(S) \longrightarrow R(F(A))$ de $\mathbb{A}$, il existe (au moins) une flèche $x : V(S) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ telle que $\varepsilon(A) \cdot x = x'$, comme représenté par le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & V(S) \arrow[dl, "x"'] \arrow[ddl, bend left, "x'"] \\ A \arrow[d, "\varepsilon(A)"'] & \\ R(F(A)) & \end{tikzcd}$$

- pour tous objets S_1 , $S_2 \in Ob(\mathbb{S})$, pour toute flèche $t : W(S_1) \longrightarrow W(S_2)$ de $\mathbb{T}$ et pour toutes flèches x_2 , $y_2 : V(S_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, si l'on a $\varepsilon(A) \cdot x_2 = \varepsilon(A) \cdot y_2$ ($= x_2'$) , alors on a $\varepsilon(A) \cdot (x_2 \cdot_\tau t) = \varepsilon(A) \cdot (y_2 \cdot_\tau t)$ ($= x_1'$) , comme représenté par le diagramme commutatif ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & V(S_2) \arrow[dl, shift right, "x_2"'] \arrow[dl, shift left, "y_2"] \arrow[ddl, bend left, "x_2'"] & V(S_1) \arrow[l, dashed, "t"'] \arrow[dll, shift right, "x_2 \cdot_\tau t"'] \arrow[dll, shift left, "y_2 \cdot_\tau t"] \arrow[ddll, bend left, "x_1'"] \\ A \arrow[d, "\varepsilon(A)"'] & & \\ R(F(A)) & & \end{tikzcd}$$

Evidemment, la définition des algèbres Ψ-quotientables est exactement celle qui convient pour qu'une telle $\mathcal{T}$-algèbre (A,τ) puisse être "quotientée par (ou le long de) $\varepsilon(A)$ ". Précisément, on a :

<u>Proposition 4 :</u> *Si* $\Psi = (\mathbb{A},\mathbb{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ *est une* Φ*-réflexion, si* $\mathcal{T}$ *est une syntaxe sur* $\mathbb{A}$ *et si* (A,τ) *est une* $\mathcal{T}$*-algèbre* Ψ*-quotientable, alors il existe une et une seule structure de* $\mathcal{T}$*-algèbre* $(A,\tau)/\varepsilon(A) = (R(F(A)),\tau/\varepsilon(A))$ *sur* $R(F(A))$ *(qu'on appelle, bien entendu, la "* $\mathcal{T}$*-algèbre* Ψ*-quotient de* (A,τ) *par* $\varepsilon(A)$ *") pour laquelle* $\varepsilon(A) : (A,\tau) \longrightarrow (R(F(A)),\tau/\varepsilon(A))$ *est un homomorphisme.*

<u>Preuve.</u>

Il est clair que, pour tous objets S_1 , $S_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{S})$, il suffit de, et il faut, poser :

$$\tau/\varepsilon(A)_{(S_1,S_2)} = \tau_{(S_1,S_2)}/\varepsilon(A)$$

$$\mathbb{A}(V(S_2),R(F(A))) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{T}(W(S_1),W(S_2)),\mathbb{A}(V(S_1),R(F(A)))) .$$

Autrement dit, pour tous objets S_1 , $S_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{S})$, pour toute flèche $t : W(S_1) \longrightarrow W(S_2)$ de $\mathbb{T}$ et pour toute flèche $x_2' : V(S_2) \longrightarrow R(F(A))$ de $\mathbb{A}$, il suffit de, et il faut, poser :

$$x_2' \cdot_{\tau/\varepsilon(A)} t = \varepsilon(A)\cdot(x_2 \cdot_\tau t) ,$$

en choisissant arbitrairement une flèche $x_2 : V(S_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ telle que $\varepsilon(A)\cdot x_2 = x_2'$.

<u>Fin de la preuve.</u>

Introduisons maintenant la notion de *suffisante complétude*.

<u>Définition 10 :</u> Supposons que :

- $\Psi = (\mathbb{A},\mathbb{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion co-représentable et amphi-co-complète,

- $\mathfrak{E} = (\mathfrak{D}, \mathcal{K}', \mathcal{T}, \mathcal{K}'', \mathcal{D}'', \mathscr{X}', \mathcal{D}')$ est un Ψ-sesqui-élargissement (resp. un Ψ-amphi-élargissement) petit et ayant un rang (par conséquent, en vertu de la proposition 1 de la Section A, §2.3 - voir [S.C.C.A.] - , le foncteur $U^{\mathcal{T}} : \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \to \mathbb{A}$ admet un adjoint à gauche $L^{\mathcal{T}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{T}}$),

- $\mathcal{X}$ est une sous-classe de la classe $\mathrm{Ob}(\mathbb{A})$ de tous les objets de $\mathbb{A}$.

On dit que $(\Psi,\mathfrak{E})$ est un couple possédant la propriété de *suffisante* $(\Phi$-)*sesqui-complétude relativement à* $\mathcal{X}$ (resp. de *suffisante* $(\Phi$-)*amphi-complétude relativement à* $\mathcal{X}$) si et seulement si :

- pour tout objet X de $\mathcal{X}$, la $\mathcal{T}$-algèbre $L^{\mathcal{T}}(X)$, librement engendrée par X , est Ψ-quotientable.

Evidemment, si $(\Psi,\mathfrak{E})$ a la propriété de suffisante amphi-complétude relativement à $\mathcal{X}$, alors $(\Psi,\mathcal{S}\mathcal{J}(\mathfrak{E}))$ a la propriété de suffisante sesqui-complétude relativement à $\mathcal{X}$ (en reprenant la notation du §5.4, concernant le sesqui-élargissement $\mathcal{S}\mathcal{J}(\mathfrak{E})$, sous-jacent à l'amphi-élargissement originel $\mathfrak{E}$).

Plus simplement, nous dirons que $(\Psi,\mathfrak{E})$ a la propriété de *suffisante sesqui-complétude* (resp. de *suffisante amphi-complétude*) si et seulement si $(\Psi,\mathfrak{E})$ a la propriété de suffisante sesqui-complétude (resp. de suffisante amphi-complétude) relativement à la classe $\mathcal{X} = \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$.

Si $(\Psi,\mathfrak{E})$ a la propriété (formelle) de suffisante complétude, alors il y a suffisante complétude - au sens plus classique du terme - pour les $\mathcal{D}'$-algèbres libres, i.e. elles sont quotients des $\mathcal{T}$-algèbres libres. C'est le sens de la proposition suivante :

<u>Proposition 5 :</u> *Supposons que* $\Psi = (\mathbb{A}, \mathbb{F}, \nu, \omega, \mathbb{R}, \mathbb{A}')$ *est une* Φ*-réflexion et que* $\mathfrak{F} = (\mathfrak{D}, \mathcal{K}', \mathcal{T}, \mathcal{K}'', \mathcal{D}'', \mathcal{K}', \mathcal{D}')$ *est un* Ψ*-sesqui-élargissement (resp. un* Ψ*-amphi-élargissement).*
Si $\mathcal{X}$ *est une sous-classe de* $\mathrm{Ob}(\mathbb{A})$ *et si* $(\Psi, \mathfrak{F})$ *est un couple possédant la propriété de suffisante sesqui-complétude (resp. de suffisante amphi-complétude) relativement à* $\mathcal{X}$ *(si bien que, en vertu de la proposition 1 de la Section A, §2.3 - voir [S.C.C.A.] -, le foncteur* $\mathrm{U}^{\mathcal{T}} : \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \to \mathbb{A}$ *admet un adjoint à gauche* $\mathrm{L}^{\mathcal{T}} : \mathbb{A} \to \mathbb{A}^{\mathcal{T}}$ *et le foncteur* $\mathrm{U}^{\mathcal{D}'} : \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \to \mathbb{A}'$ *admet un adjoint à gauche* $\mathrm{L}^{\mathcal{D}'} : \mathbb{A}' \to \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'}$*), alors, pour tout objet* X *de la classe* $\mathcal{X}$*, on dispose successivement de :*

- *la* $\mathcal{T}$*-algèbre* $\mathrm{L}^{\mathcal{T}}(X) = (A_X, \tau_X)$*, qui est librement engendrée par* X*,*

- *la* $\mathcal{T}$*-algèbre* $\mathrm{L}^{\mathcal{T}}(X)/\varepsilon(A_X) = (R(F(A_X)), \tau_X/\varepsilon(A_X))$*, qui est* Ψ*-quotient de* $\mathrm{L}^{\mathcal{T}}(X)$ *par* $\varepsilon(A_X)$*,*

- *la* $\mathcal{D}'$*-algèbre* $I'_{\&,\mathfrak{F}}(R(F(A_X)), \tau_X/\varepsilon(A_X)) = (F(A_X), \vartheta'_X)$*, qui est associée, en vertu de la proposition 3 du §5.4, à la* $\mathcal{T}$*-algèbre* $(R(F(A_X)), \tau_X/\varepsilon(A_X))$*, lorsqu'on prend* $\& = s$ *(resp.* $\& = a$*),*

et, dans ces conditions, $(F(A_X), \vartheta'_X)$ *est la* $\mathcal{D}'$*-algèbre librement engendrée par* $F(X)$ *(autrement dit, on peut choisir le foncteur* $\mathrm{L}^{\mathcal{D}'} : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'}$*, de sorte que* $(F(A_X), \vartheta'_X) = \mathrm{L}^{\mathcal{D}'}(F(X))$*).*
En particulier, si $\mathcal{X}$ *contient la classe* $R(\mathrm{Ob}(\mathbb{A}'))$*, naturellement en tout objet* X' *de* $\mathbb{A}'$*, la* $\mathcal{D}'$*-algèbre* $\mathrm{L}^{\mathcal{D}'}(X')$*, librement engendrée par* X'*, s'identifie au* Ψ*-quotient de la* $\mathcal{T}$*-algèbre* $\mathrm{L}^{\mathcal{T}}(R(X'))$*, librement engendrée par* $R(X')$*. A fortiori, il en est évidemment ainsi si* $(\Psi, \mathfrak{F})$ *possède la propriété de suffisante sesqui-complétude (resp. de suffisante amphi-complétude).*

Preuve.

On se réfère au diagramme ci-dessous :

$\mathbb{A}$ | $\mathbb{A}^{\mathcal{T}}$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "m_X"] \arrow[d, "\varepsilon(X)"'] & & A_X \arrow[d, "\varepsilon(A_X)"] \arrow[ddl, "h"'] \\
R(F(X)) \arrow[dr, "R(a')"'] & & R(F(A_X)) \arrow[dl, "R(h')"] \\
& R(A') &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(A_X,\tau_X) \arrow[d, "h"'] \\
(R(A'),\tau)
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{A}'$ | $\mathbb{A}'^{\mathcal{D}'}$

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[dr, "a'"'] & & F(A_X) \arrow[dl, "h'"] \\
& A' &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(F(A_X),\vartheta'_X) \arrow[d, "h'"] \\
(A',\vartheta')
\end{tikzcd}$$

Supposons que (A',ϑ') est une $\mathcal{D}'$-algèbre et que $a' : F(X) \longrightarrow A'$ est une flèche de $\mathbb{A}'$.

Il existe donc une unique flèche $h : A_X \longrightarrow R(A')$ de $\mathbb{A}$ telle que :

- $h : (A_X,\tau_X) \longrightarrow (R(A'),\tau)$ est un homomorphisme de $\mathcal{T}$-algèbres, si on pose $I'_{\&,\gamma}((R(A'),\tau)) = (A',\vartheta')$,

- $h \cdot m_X = R(a') \cdot \varepsilon(X)$ (en notant (M,m,n) la monade sur $\mathbb{A}$ déduite de l'adjonction de $L^{\mathcal{T}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{T}}$ à gauche de $U^{\mathcal{T}} : \mathbb{A}^{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{A}$).

Alors, il existe une unique flèche $h' : F(A_X) \longrightarrow A'$ de $\mathbb{A}'$ telle que $R(h') \cdot \varepsilon(A_X) = h$.

Il est facile de vérifier ("par passage au quotient") que $h' : (F(A_X), \vartheta'_X) \longrightarrow (A', \vartheta')$ est un homomorphisme de $\mathcal{D}'$-algèbres, et puis de conclure.

Fin de la preuve.

Introduisons enfin la notion de *suffisante complétude connexe*.

Définition 11 : Supposons que :

- $\Psi = (\mathbb{A}, \mathbb{F}, \nu, \omega, \mathbb{R}, \mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion co-représentable, amphi-co-complète et amphi-complète,

- $\mathfrak{F} = (\mathfrak{D}, \mathcal{K}', \mathcal{T}, \mathcal{K}'', \mathcal{D}'', \mathcal{H}', \mathcal{D}')$ est un Ψ-sesqui-élargissement (resp. un Ψ-amphi-élargissement) petit et ayant un rang,

- $\mathcal{X}$ est une sous-classe de la classe $\mathrm{Ob}(\mathbb{A})$ de tous les objets de $\mathbb{A}$,

- $\mathbb{A}_o$ est une petite sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}$,

- C est une sous-classe de la classe $\mathrm{Ob}(\mathbb{A})$ de tous les objets de $\mathbb{A}$.

On dit que le couple $(\Psi, \mathfrak{F})$ possède la propriété de *suffisante (Φ-)sesqui-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe pour C et relativement à $\mathcal{X}$* (resp. de *suffisante (Φ-)amphi-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe pour C et relativement à $\mathcal{X}$*) si et seulement si :

- $(\Psi, \mathfrak{F})$ a la propriété de suffisante sesqui-complétude (resp. de suffisante amphi-complétude) relativement à $\mathcal{X}$,

- Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_o$-connexe pour C.

Il est clair que, si $(\Psi, \mathfrak{F})$ possède la propriété de suffisante amphi-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe pour C et relativement à $\mathcal{X}$, alors $(\Psi, \mathcal{S}\mathcal{J}(\mathfrak{F}))$ possède la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe pour C et relativement à $\mathcal{X}$.

Nous dirons, en particulier, que le couple $(\Psi,\mathfrak{F})$ a la *propriété de suffisante sesqui-complétude* $\mathbb{A}_o$*-connexe* (resp. de *suffisante amphi-complétude* $\mathbb{A}_o$*-connexe*) si et seulement si $(\Psi,\mathfrak{F})$ possède la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe (resp. de suffisante amphi-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe) pour $C_{(\Psi,\mathfrak{F})}$ et relativement à $\mathrm{Ob}(\mathbb{A})$, lorqu'on pose :

$$C_{(\Psi,\mathfrak{F})} = \{ A_{R(X')} \ / \ X' \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}') \} .$$

Plus particulièrement encore, nous dirons que le couple $(\Psi,\mathfrak{F})$ possède la propriété de *suffisante sesqui-complétude totalement* $\mathbb{A}_o$*-connexe* (resp. de *suffisante amphi-complétude totalement* $\mathbb{A}_o$*-connexe*) si et seulement si $(\Psi,\mathfrak{F})$ possède la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe (resp. de suffisante amphi-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe) pour $\mathrm{Ob}(\mathbb{A})$ et relativement à $\mathrm{Ob}(\mathbb{A})$.

Plus simplement, nous dirons aussi d'un couple $(\Psi,\mathfrak{F})$ qu'il a la propriété de *suffisante sesqui-complétude connexe* (resp. de *suffisante amphi-complétude connexe*) *pour* C *et relativement à* $\mathcal{X}$ si et seulement s'il existe une $\mathbb{A}_o$ pour laquelle $(\Psi,\mathfrak{F})$ a la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe (resp. de suffisante amphi-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe) pour C et relativement à $\mathcal{X}$.

De même, nous dirons d'un couple $(\Psi,\mathfrak{F})$ qu'il a la propriété de *suffisante sesqui-complétude connexe* (resp. de *suffisante amphi-complétude connexe*) si et seulement s'il existe une $\mathbb{A}_o$ pour laquelle $(\Psi,\mathfrak{F})$ a la propriété de suffisante sesqui-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe (resp. de suffisante amphi-complétude $\mathbb{A}_o$-connexe).

Et, bien entendu, nous dirons, enfin, d'un couple $(\Psi,\mathfrak{F})$ qu'il a la propriété de *suffisante sesqui-complétude totalement connexe* (resp. de *suffisante amphi-complétude totalement connexe*) si et seulement s'il existe une $\mathbb{A}_0$ pour laquelle $(\Psi,\mathfrak{F})$ a la propriété de suffisante sesqui-complétude totalement $\mathbb{A}_0$-connexe (resp. de suffisante amphi-complétude totalement $\mathbb{A}_0$-connexe).

Si $(\Psi,\mathfrak{F})$ a la propriété (formelle) de suffisante sesqui-complétude connexe (resp. de suffisante amphi-complétude connexe), non seulement il y a suffisante complétude (usuelle) "sémantique", i.e. pour les $\mathcal{D}'$-algèbres libres (vu la proposition 5 précédente), mais il y a aussi suffisante complétude (usuelle) "syntaxique", i.e. pour la théorie engendrée par $\mathcal{D}'$, puisqu'elle est (équivalente à une) image de la théorie engendrée par $\mathcal{T}$. C'est très exactement le sens de la proposition suivante (où nous reprenons les résultats, la terminologie et les notations de la Section A, §2.4 - i.e. de [S.C.C.A.]) :

<u>Proposition 6 :</u> *Si $(\Psi,\mathfrak{F})$ est un couple possédant la propriété de suffisante sesqui-complétude connexe (resp. de suffisante amphi-complétude connexe), alors on dispose d'un homomorphisme "essentiellement surjectif" (dit "de rigidification") de la théorie engendrée par $\mathcal{T}$ vers la théorie engendrée par $\mathcal{D}'$:*

$$\mathcal{R}igid(\Psi,\mathfrak{F}) : \mathcal{A}ch(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathcal{A}ch(\mathcal{D}') = \mathcal{A}ch(\mathcal{D}'')$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous (où on reprend les notations du §5.3, concernant $\mathcal{S}\&\mathcal{A}_\Psi(\mathcal{D}')$ et $\mathcal{S}\&\mathcal{A}_\Psi(\mathcal{D}')$), quand $\& = \mathcal{S}$ (resp. $\& = \mathcal{A}$) :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{A}ch(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\mathcal{R}igid(\Psi,\mathfrak{F})} & \mathcal{A}ch(\mathcal{D}'') & = & \mathcal{A}ch(\mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')) & = & \mathcal{A}ch(\mathcal{D}') \\
\uparrow{\scriptstyle cano(\mathcal{T})} & & \uparrow{\scriptstyle cano(\mathcal{D}'')} & & & & \uparrow{\scriptstyle cano(\mathcal{D}')} \\
\mathcal{T} & \xrightarrow[\mathcal{K}'']{} & \mathcal{D}'' & \xleftarrow[\mathcal{K}']{} & \mathcal{S}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}') & \xleftarrow[\mathcal{G}\&\mathcal{A}_{\Psi}(\mathcal{D}')]{} & \mathcal{D}'
\end{array}$$

<u>Preuve.</u>

Tout d'abord (en reprenant les notations de la Section A, §2.4 - i.e. de [S.C.C.A.] - concernant notamment les catégories de Kleisli), de la proposition 5 précédente (dont on reprend également les notations et où $\mathcal{X} = \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$), il résulte immédiatement qu'on dispose d'un foncteur :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Rigid}(\Psi,\mathfrak{F}) : \mathbb{A}_{\mathcal{T}} &\longrightarrow \mathbb{A}'_{\mathcal{D}'} \\
(X,(A_X,\tau_X)) &\longmapsto (F(X),(F(A_X),\vartheta'_X))
\end{aligned}$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{A}_{\mathcal{T}} & \xrightarrow{\mathrm{Rigid}(\Psi,\mathfrak{F})} & \mathbb{A}'_{\mathcal{D}'} = \mathbb{A}'_{\mathcal{D}''} \\
{\scriptstyle L_{\mathcal{T}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle L_{\mathcal{D}'} = L_{\mathcal{D}''}} \\
\mathbb{A} & \xrightarrow[F]{} & \mathbb{A}'
\end{array}$$

Maintenant, en nous référant au diagramme ci-dessous, supposons que X'_1 et X'_2 sont deux objets de $\mathbb{A}'$ et que $a' : X'_1 \longrightarrow M'(X'_2)$ est une flèche de $\mathbb{A}'$ (en notant (M',m',n') la monade associée à l'adjonction de $L^{\mathcal{D}'} : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'}$ à gauche de $U^{\mathcal{D}'} : \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \longrightarrow \mathbb{A}'$) :

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
A_{01} \arrow[r, "b_a"] \arrow[r, bend left, "c"] \arrow[rr, bend left=40, "r_a"] \arrow[dr, "a"] \arrow[ddr, bend right=60, "\varepsilon(PF)\cdot b_a"'] & PF \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dd, bend left=50, "\varepsilon(PF)"] \arrow[dr, phantom, "(****)"] & M(R(X'_2)) = A_{R(X'_2)} \arrow[d, "\varepsilon(A_{R(X'_2)})"] \\
A_{02} \arrow[u, "a_0"] \arrow[ur, "b_{a\cdot a_0}"] \arrow[dr, "\varepsilon(PF)\cdot b_{a\cdot a_0}"'] \arrow[l, phantom, "="] & R(X'_1) \arrow[r, "R(a')"] \arrow[d, bend left, "R(k')"] & R(M'(X'_2)) = R(F(A_{R(X'_2)})) \\
& R(F(PF)) \arrow[u, bend left, "R(h')"] &
\end{tikzcd}
$$

$\mathbb{A}$

$\mathbb{A}'$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
X'_1 \arrow[r, "a'"] \arrow[d, bend left, "h'^{-1} = k'"] & M'(X'_2) = F(A_{R(X'_2)}) \\
F(PF) \arrow[u, bend left, "h'"] &
\end{tikzcd}
$$

D'après la proposition 5 précédente, nous avons donc :

$$M'(X'_2) = F(M(R(X'_2))) = F(A_{R(X'_2)}) .$$

Considérons alors le produit fibré représenté par le carré commutatif (****) du diagramme précédent et supposons, précisément, que Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-connexe pour $\mathcal{C}_{(\Psi,\mathbb{X})}$.

Si A_{01} est un objet de $\mathbb{A}_0$ et si $a : A_{01} \longrightarrow R(X'_1)$

est une flèche de $\mathbb{A}$, il existe (puisque Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_o$-connexe pour $C_{(\Psi,\mathfrak{F})}$) au moins une flèche $r_a : A_{o1} \longrightarrow A_{R(X'_2)}$ de $\mathbb{A}$ telle que :

$$\varepsilon(A_{R(X'_2)}) \cdot r_a = R(a') \cdot a \ .$$

Par conséquent, il existe une et une seule flèche $b_a : A_{o1} \longrightarrow PF$ de $\mathbb{A}$ telle que :

$$p_1 \cdot b_a = a \quad \text{et} \quad p_2 \cdot b_a = r_a \ .$$

Si, de plus, $a_o : A_{o2} \longrightarrow A_{o1}$ est une flèche de $\mathbb{A}_o$, il est immédiat de constater que les deux flèches $r_a \cdot a_o$, $r_{a \cdot a_o} : A_{o2} \longrightarrow A_{R(X'_2)}$ de $\mathbb{A}$ (c'est-à-dire les deux foncteurs $r_a \cdot a_o$, $r_{a \cdot a_o} : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbf{A}(A_{o2}, A_{R(X'_2)})$) sont (i.e. s'identifient à) deux objets connectés dans $\mathbf{A}(A_{o2}, A_{R(X'_2)})$ (puisque Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_o$-connexe pour $C_{(\Psi,\mathfrak{F})}$).
Les produits fibrés dans $\mathbb{A}$ étant "des amphi-produits fibrés dans $\mathbf{A}$ " et tout objet étant à identité dans $\mathbf{A}(A_{o2}, R(X'_1))$, il en résulte que les deux flèches $b_a \cdot a_o$, $b_{a \cdot a_o} : A_{o2} \longrightarrow PF$ de $\mathbb{A}$ (i.e. les deux foncteurs $b_a \cdot a_o$, $b_{a \cdot a_o} : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbf{A}(A_{o2}, PF)$) sont (i.e. s'identifient à) deux objets connectés dans $\mathbf{A}(A_{o2}, PF)$. On en déduit que :

$$\varepsilon(PF) \cdot (b_a \cdot a_o) = \varepsilon(PF) \cdot b_{a \cdot a_o} \ .$$

Alors, il existe une unique flèche $k' : X'_1 \longrightarrow F(PF)$ de $\mathbb{A}'$ telle que :

- pour tout objet A_{o1} de $\mathbb{A}_o$ et toute flèche $a : A_{o1} \longrightarrow R(X'_1)$ de $\mathbb{A}$, on a $R(k') \cdot a = \varepsilon(PF) \cdot b_a$,

(puisque Ψ est - en particulier - suffisamment $\mathbb{A}_o$-générée).
En conséquence, si on désigne par $h' : F(PF) \longrightarrow X'_1$ l'unique flèche de $\mathbb{A}'$ telle que $R(h') \cdot \varepsilon(PF) = p_1$, on

voit que, pour tout objet A_{01} de $\mathbb{A}_0$ et toute flèche $a : A_{01} \longrightarrow R(X_1')$, on a :

$$\begin{aligned}(R(h')\cdot R(k'))\cdot a &= R(h')\cdot(R(k')\cdot a)\\ &= R(h')\cdot(\varepsilon(PF)\cdot b_a) = (R(h')\cdot\varepsilon(PF))\cdot b_a\\ &= p_1\cdot b_a = a\end{aligned}$$

et donc (puisque Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-générée) on a aussi :

$$R(h')\cdot R(k') = id(R(X_1'))$$

et, par conséquent (puisque $(\mathbb{A},F,\nu,\omega,\mathbb{A}')$ est une réflexion) :

$$h'\cdot k' = id(X_1') \ .$$

De même, on voit que, pour tout objet A_{01} de $\mathbb{A}_0$ et toute flèche $c : A_{01} \longrightarrow PF$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$\begin{aligned}(R(k')\cdot p_1)\cdot c &= R(k')\cdot(p_1\cdot c)\\ &= \varepsilon(PF)\cdot b_{p_1\cdot c}\\ &= \varepsilon(PF)\cdot c\end{aligned}$$

(puisque Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-connexe pour $C_{(\Psi,\gamma)}$ et parce qu'il est facile d'établir, comme précédemment, que c et $b_{p_1\cdot c}$ sont connectés dans $\mathbb{A}(A_{01},PF)$)

et donc (puisque Ψ est suffisamment $\mathbb{A}_0$-générée), on a aussi :

$$R(k')\cdot p_1 = \varepsilon(PF) \ ,$$

d'où :

$$\begin{aligned}(R(k')\cdot R(h'))\cdot\varepsilon(PF) &= R(k')\cdot(R(h')\cdot\varepsilon(PF))\\ &= R(k')\cdot p_1\\ &= \varepsilon(PF) \ ,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure, par unicité (résultant de l'adjonction de $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ à gauche de $R : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}$), que :

$$k'\cdot h' = id(F(PF)) \ .$$

Il en résulte que le diagramme ci-dessous commute :

$$
\begin{tikzcd}
F(PF) \arrow[r, "F(p_2)"] \arrow[d, "F(\varepsilon(PF))"', "\simeq"] & F(M(R(X'_2))) = M'(X'_2) \arrow[dd, "F(\varepsilon(M(R(X'_2))))", "\simeq"'] \arrow[ddd, bend left=60, "id(M'(X'_2))"] \\
F(R(F(PF))) \arrow[d, "F(R(h'))"', "\simeq"] & \\
F(R(X'_1)) \arrow[r, "F(R(a'))"] \arrow[d, "\omega(X'_1)"', "\simeq"] & F(R(M'(X'_2))) \arrow[d, "\omega(M'(X'_2))", "\simeq"'] \\
X'_1 \arrow[r, "a'"] & M'(X'_2)
\end{tikzcd}
$$

On en déduit que $\mathrm{Rigid}(\Psi,\mathfrak{X}) : \mathbb{A}_{\mathcal{T}} \longrightarrow \mathbb{A}'_{\mathcal{D}'}$ est un foncteur essentiellement surjectif (i.e. surjectif sur une sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}'_{\mathcal{D}'}$ pour laquelle l'injection canonique est une équivalence).

Reprenant les considérations de la Section A, §2.3 (i.e. de [S.C.C.A.]) concernant les catégories de Kleisli et les achèvements de syntaxes (i.e. les théories qu'elles engendrent), on conclut facilement.

<u>Fin de la preuve.</u>

On laisse au lecteur le soin de "relativiser" la proposition précédente, dans le cas d'un couple $(\Psi,\mathfrak{X})$ possédant la propriété de suffisante sesqui-complétude connexe (resp. de suffisante amphi-complétude connexe) pour $\mathcal{C}$ et relativement à $\mathcal{X}$, lorsque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{X}$ sont "mutuellement assez riches" vis-à-vis d'une sous-classe $\mathcal{C}'$ de $\mathrm{Ob}(\mathbb{A}')$, i.e.

quand :

- $\mathcal{X}$ contient $R(\mathcal{C}')$,
- $\mathcal{C}$ contient $A_{R(\mathcal{C}')} = \{ A_{R(X')} \ / \ X' \in \mathcal{C}' \}$,
- $\mathcal{C}'$ contient $F(\mathcal{X}')$,
- pour tous objets X'_1 et X'_2 de $\mathcal{C}'$ et toute flèche $a' : X'_1 \longrightarrow F(A_{R(X'_2)})$ de $\mathbb{A}'$, l'objet (produit fibré) PF (du diagramme commutatif (****) de la preuve précédente) est élément de $\mathcal{X}$,

(alors, il remplacera :

- $\mathcal{A}c\mathcal{h}(\mathcal{T})$ par la syntaxe $\mathcal{A}c\mathcal{h}^{\mathcal{X}}(\mathcal{T})$, canoniquement définie "sur" la sous-catégorie pleine $\mathbb{A}_{\mathcal{T}}^{\mathcal{X}}$ de $\mathbb{A}_{\mathcal{T}}$ dont les seuls objets sont les $(X,(A_X,\tau_X))$, où X est élément de $\mathcal{X}$,
- $\mathcal{A}c\mathcal{h}(\mathcal{D}')$ par la syntaxe $\mathcal{A}c\mathcal{h}^{\mathcal{C}'}(\mathcal{D}')$, canoniquement définie "sur" la sous-catégorie pleine $\mathbb{A}'^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{D}'}$ de $\mathbb{A}'_{\mathcal{D}'}$ dont les seuls objets sont les $(X',L^{\mathcal{D}'}(X'))$, où X' est élément de $\mathcal{C}'$).

5.6. Un premier cas particulier de suffisante complétude (totalement) connexe[13]

Supposons que $\Psi = (\mathbb{A},\mathbb{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion co-représentable, amphi-co-complète, amphi-complète, totalement $\mathbb{A}_0$-connexe (au sens du §5.3) et $\mathbb{A}_0$-*identitaire* dans le sens suivant :

(i) pour tout objet $A_0 \in Ob(\mathbb{A}_0)$ et tout objet

[13] On trouvera un exemple de ce cas particulier en Section C, §6.5 (*i.e.* en [S.C.C.C.]).

$A \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$, le graphe à composition $\mathbf{A}(A_0,A)$ est *identitaire* (au sens de la Section A, §1.2 - voir [S.C.C.A.]), i.e. tel que $\mathrm{ObId}(\mathbf{A}(A_0,A)) = \mathrm{Ob}(\mathbf{A}(A_0,A))$.

Supposons aussi que $\mathcal{L} = (\mathcal{D},\mathcal{D}')$ est une Ψ-laxification (où $\mathcal{D}=(\mathbf{A},\mathbf{J},\mathbf{B},\mathbf{K},\mathbf{D})$ et $\mathcal{D}'=(\mathbb{A}',\Pi_0(\mathbf{F})\cdot\Pi_0(\mathbf{J}),\Pi_0(\mathbf{B}),\Pi_0(\mathbf{K}),\Pi_0(\mathbf{D}))$) ayant un rang et vérifiant :

(ii) pour tout objet $B \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B})$ de $\mathbf{B}$, il existe un entier $n(B)$ et une famille $A_0(B)_1, \ldots, A_0(B)_{n(B)}$ d'objets de $\mathbb{A}_0$ tels que $\mathbf{J}(B) = \coprod_{1 \leq i \leq n(B)} A_0(B)_i$ dans $\mathbb{A}$.

Alors, si A est un objet de $\mathbf{A}$, on voit que :

- pour tout objet B de $\mathbf{B}$, on dispose du "diagramme" commutatif suivant (où, concernant $[\varepsilon(A)]$, on reprend la notation du §5.1 et des conventions d'écriture analogues à celles adoptées au §5.3) :

$$\Pi_0(\mathbf{A})(J(B),A) \xrightarrow{\Pi_0(\mathbf{A})(J(B),[\varepsilon(A)])} \Pi_0(\mathbf{A})(J(B),R(F(A)))$$

$= $ (par définition)

$\pi_0(\mathbf{A}(\mathbf{J}(B),A))$

$=$ (en vertu du (ii))

$\pi_0(\mathbf{A}(\coprod_{1 \leq i \leq n(B)} A_0(B)_i,A))$

$\simeq$ ($\mathbf{A}$ étant *amphi*-co-complète)

$\pi_0(\prod_{1 \leq i \leq n(B)} \mathbf{A}(A_0(B)_i,A))$

$\simeq$ (π_0 : $\mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$ commutant aux produits de graphes à composition identitaire)

(par adjonction) $\simeq$

$\mathbb{A}'(F(J(B)),F(A))$

(en vertu de (ii)) $=$

$\mathbb{A}'(F(\coprod_{1 \leq i \leq n(B)} A_0(B)_i),F(A))$

(F étant un adjoint à gauche) $\simeq$

$\mathbb{A}'(\coprod_{1 \leq i \leq n(B)} F(A_0(B)_i),F(A))$

(le foncteur $\mathbb{A}'(-,F(A))$ commutant aux produits) $\simeq$

$$\begin{array}{ccc}
\prod\limits_{1 \leq i \leq n(\mathbb{B})} \pi_0(\mathbb{A}(A_0(B)_i, A)) & & \prod\limits_{1 \leq i \leq n(\mathbb{B})} \mathbb{A}'(F(A_0(B)_i), F(A)) \\
\simeq \text{ (par définition)} & & \text{(par adjonction) } \simeq \\
\prod\limits_{1 \leq i \leq n(\mathbb{B})} \Pi_0(\mathbb{A})(A_0(B)_i, A) & \xrightarrow{\prod\limits_{1 \leq i \leq n(\mathbb{B})} \Pi_0(\mathbb{A})(A_0(B)_i, [\varepsilon(A)])} & \prod\limits_{1 \leq i \leq n(\mathbb{B})} \Pi_0(\mathbb{A})(A_0(B)_i, R(F(A)))
\end{array}$$

Par conséquent (Ψ étant totalement $\mathbb{A}_0$-connexe et donc $\Pi_0(\mathbb{A})(A_0(B)_i, [\varepsilon(A)])$ étant inversible pour tout objet tel que $A_0(B)_i$), on voit que :

- pour tout objet B de $\mathbb{B}$, l'application :

$$\Pi_0(\mathbb{A})(J(B), A) \xrightarrow{\Pi_0(\mathbb{A})(J(B), [\varepsilon(A)])} \Pi_0(\mathbb{A})(J(B)), R(F(A)))$$

est bijective.

Il est facile d'en déduire (compte tenu notamment de (i)) que :

- pour tout objet B de $\mathbb{B}$ et pour tout objet G du graphe à composition $\mathbb{G}_{GrComp}$ (sous-jacent à l'esquisse $\mathbb{E}_{GrComp}$ des graphes à composition, telle que décrite en Section A, §3.3 - i.e. en [S.C.C.A.]), l'application :

$$\mathbb{A}(C(J(B))(G), A) \xrightarrow{\mathbb{A}(C(J(B))(G), \varepsilon(A))} \mathbb{A}(C(J(B))(G), R(F(A)))$$

est surjective.

Maintenant, si (A, Φ) est une $\mathcal{D}$-amphi-algèbre, on voit que :

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, on dispose de l'application (composée) définie comme rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}'(F(J(B_2)),F(A)) \arrow[d, phantom, "\simeq" description] & \\
\pi_0(\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_2),\mathbb{R}(F(A)))) \arrow[dd, "\vartheta'(B_1,B_2)"'] \arrow[dr, "\pi_0(\mathfrak{D}(B_1,B_2))"] & \\
& \pi_0(\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),\mathbb{R}(F(A))))) \arrow[dl, "\pi_0(\pi_0(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),\mathbb{R}(F(A)))))"] \\
\pi_0(\mathrm{Did}(\mathbb{E}\mathrm{ns})(\pi_0(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))),\pi_0(\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),\mathbb{R}(F(A)))))) \arrow[d, phantom, "\simeq" description] & \\
\mathbb{E}\mathrm{ns}(\pi_0(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))),\mathbb{A}'(F(J(B_1)),F(A))) &
\end{tikzcd}
$$

Alors, il est facile de vérifier que :

- $(F(A),\vartheta')$ est une $\mathcal{D}'$-algèbre,

- la $\mathcal{S}\mathcal{A}\mathcal{A}(\mathfrak{D})$-algèbre $(A,\mu) = \mathrm{corepa}(\mathfrak{D})(A,\mathfrak{D})$ (canoniquement associée, comme en Section A, §4.3 - i.e. en [S.C.C.A.] - à la $\mathfrak{D}$-amphi-algèbre $(A,\mathfrak{D})$) est Ψ-quotientable (essentiellement parce que les $\mathbb{A}(C(J(B))(G),\varepsilon(A))$ sont surjectives et parce que (A,μ) est associée à une *amphi*-algèbre) et :

$$I'_{a,\mathcal{A}(\mathcal{L})}((A,\mu)/\varepsilon(A)) = (F(A),\vartheta')$$

(en reprenant les notations du §5.4 - concernant $\mathcal{A}(\mathcal{L})$ et $I'_{a,\mathcal{A}(\mathcal{L})}$ - et celles de la proposition 4 du §5.5).

Il en résulte que $(\Psi,\mathcal{A}(\mathcal{L}))$ (resp. $(\Psi,\mathcal{S}'(\mathcal{L}))$) a la propriété de suffisante amphi-complétude totalement $\mathbb{A}_0$-connexe (resp. de suffisante sesqui-complétude totalement $\mathbb{A}_0$-connexe), lorsqu'on reprend les notations du §5.4 concernant $\mathcal{S}'(\mathcal{L})$.

5.7. Un deuxième cas particulier de suffisante complétude (totalement) connexe[14]

Si $n \geq 1$ et m sont deux entiers et si $g : \{1,\dots,m\} \times \{1,\dots,n\} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application, on note $\mathbb{G}(g)$ le graphe à composition (trivial) défini comme suit :

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{G}(g)) = \{ G_p \ / \ 1 \leq p \leq m \} \cup \{ G'_q \ / \ 1 \leq q \leq n \}$,
- $\mathrm{ObId}(\mathbb{G}(g)) = \varnothing$,
- $\mathrm{Fl}(\mathbb{G}(g)) = \{ (p,i,q) : G_p \longrightarrow G'_q \ / \ 1 \leq p \leq m , \dots$
  $\dots 1 \leq i \leq g(p,q) , \dots$
  $\dots 1 \leq q \leq n \}$,

et donc représenté par le diagramme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc}
G_1 \bullet & & \\
 & & \bullet\ G'_1 \\
\vdots & & \vdots \\
G_p \bullet & \xrightarrow{(p,i,q)} & \bullet\ G'_q \\
\vdots & & \vdots \\
 & & \bullet\ G'_n \\
G_m \bullet & &
\end{array}$$

Alors, si $f : \mathbb{G}(g)^{op} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}$ est un foncteur tel que :

- pour tout $1 \leq p \leq m$, le foncteur :

$$e(f(G_p)) : f(G_p) \longrightarrow \mathrm{did}(\pi_0(f(G_p)))$$

est bijectif (si, pour tout objet $\mathbb{G}$ de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, on pose $e(\mathbb{G}) = v(\mathbb{G},\pi_0(\mathbb{G}))(\mathrm{id}(\pi_0(\mathbb{G}))) : \mathbb{G} \longrightarrow \mathrm{did}(\pi_0(\mathbb{G}))$ où, rap-

[14] On trouvera un exemple de ce cas particulier en Section C, §6.5 (i.e. en [S.C.C.C.]).

pelons-le, (π_o,v,did) est l'adjonction de la configuration de base),

- pour tout $1 \leq q \leq n$, le graphe à composition $f(G'_q)$ est identitaire (au sens de la Section A, §1.2 - voir [S.C.C.A.] - , i.e. tel que $Ob(f(G'_q)) = ObId(f(G'_q))$),

il est facile de vérifier que :

$$\pi_o(\lim_{G \in \mathbb{G}(g)} f(G)) = \lim_{G \in \mathbb{G}(g)} \pi_o(f(G))$$

(on pourra dire que π_o commute aux *limites projectives connectantes identitaires*).

Supposons que $\Psi = (\mathbf{A},\mathbf{F},\nu,\omega,\mathbb{R},\mathbb{A}')$ est une Φ-réflexion co-représentable, amphi-co-complète, amphi-complète, totalement $\mathbb{A}_o$-connexe (au sens du §5.3) et $\mathbb{A}_o$-identaire (au sens du §5.6) et que $\mathbb{A}_{oo}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathbb{A}_o$ telle que :

(j) pour tout objet $A_{oo} \in Ob(\mathbb{A}_{oo})$ de $\mathbb{A}_{oo}$ et pour tout objet $A \in Ob(\mathbb{A})$ de $\mathbb{A}$, le foncteur :

$$\mathbf{A}(A_{oo},A) \xrightarrow{\mathbf{A}(A_{oo},\varepsilon(A))} \mathbf{A}(A_{oo},\mathbb{R}(\mathbf{F}(A))) \simeq Did(\mathbb{A}')(\mathbf{F}(A_{oo}),\mathbf{F}(A))$$

est bijectif (moyennant quelque abus de notation, concernant $\mathbf{A}(A_{oo},\varepsilon(A))$).

Supposons aussi que $\mathcal{L} = (\mathfrak{D},\mathcal{D}')$ est une Ψ-laxification (où $\mathfrak{D}=(\mathbf{A},\mathbf{J},\mathbf{B},\mathbf{K},\mathbf{D})$ et $\mathcal{D}'=(\mathbb{A}',\Pi_o(\mathbf{F})\cdot\Pi_o(\mathbf{J}),\Pi_o(\mathbf{B}),\Pi_o(\mathbf{K}),\Pi_o(\mathbf{D}))$) ayant un rang et telle que, pour tout objet $B \in Ob(\mathbf{B})$ de $\mathbf{B}$, il existe deux entiers $n(B) \geq 1$ et $m(B)$, une application :

$$g_B : \{1,...,m(B)\} \times \{1,...,n(B)\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

et un foncteur :

$$f_B : \mathbb{G}(B) = \mathbb{G}(g_B) \longrightarrow \mathbb{A}$$

tels que :

(jj_1) pour tout $1 \leq p \leq m(B)$, on a $f_B(G_p) \in Ob(\mathbb{A}_{oo})$,

(jj_2) pour tout $1 \leq q \leq n(B)$, on a $f_B(G'_q) \in Ob(\mathbb{A}_o)$,

(jj_3) $\mathbf{J}(B)$ est la co-limite de $f_B : \mathbb{G}(B) \longrightarrow \mathbb{A}$.

Par conséquent, si A est un objet de $\mathbf{A}$, on voit que :

- pour tout objet B de $\mathbb{B}$, on dispose du "diagramme" commutatif suivant (où, concernant $[\varepsilon(A)]$, on reprend la notation du §5.1 et des conventions d'écriture analogues à celles adoptées au §5.3) :

$$\Pi_o(\mathbf{A})(J(B),A) \xrightarrow{\Pi_o(\mathbf{A})(J(B),[\varepsilon(A)])} \Pi_o(\mathbf{A})(J(B),R(F(A)))$$

= (par définition) $\qquad$ (par adjonction) $\simeq$

$$\pi_o(\mathbf{A}(\mathbf{J}(B),A)) \qquad \mathbb{A}'(F(J(B)),F(A))$$

= (en vertu de (jj_3)) $\qquad$ (en vertu de (jj_3)) =

$$\pi_o(\mathbf{A}(\operatorname*{colim}_{G \in \mathbb{G}(B)} f_B(G),A)) \qquad \mathbb{A}'(F(\operatorname*{colim}_{G \in \mathbb{G}(B)} f_B(G)),F(A))$$

$\simeq$ ($\mathbf{A}$ étant *amphi*-co-complète) $\qquad$ (F étant un adjoint à gauche) $\simeq$

$$\pi_o(\lim_{G \in \mathbb{G}(B)^{op}} \mathbf{A}(f_B(G),A)) \qquad \mathbb{A}'(\operatorname*{colim}_{G \in \mathbb{G}(B)} F(f_B(G)),F(A))$$

$\simeq$ (en vertu de (j), (jj_1) et (jj_2) et $\pi_o : \mathbb{G}r\mathbb{C}omp \longrightarrow \mathbb{E}ns$ commutant aux limites projectives connectantes identitaires) $\qquad$ (le foncteur $\mathbb{A}'(-,F(A))$ commutant aux produits) $\simeq$

$$\lim_{G \in \mathbb{G}(B)^{op}} \pi_o(\mathbf{A}(f_B(G),A)) \qquad \lim_{G \in \mathbb{G}(B)^{op}} \mathbb{A}'(F(f_B(G)),F(A))$$

= (par définition) $\qquad$ (par adjonction) $\simeq$

$$\lim_{G \in \mathbb{G}(B)^{op}} \Pi_o(\mathbb{A})(f_B(G),A) \xrightarrow[\lim_{G \in \mathbb{G}(B)^{op}} \Pi_o(\mathbb{A})(f_B(G),[\varepsilon(A)])]{} \lim_{G \in \mathbb{G}(B)^{op}} \Pi_o(\mathbb{A})(f_B(G),R(F(A)))$$

Alors, par pure recopie de ce qui figure au §5.6, on conclut que $(\Psi,\mathscr{A}(\mathscr{L}))$ (resp. $(\Psi,\mathscr{S}'(\mathscr{L}))$) a la propriété de suffisante amphi-complétude totalement $\mathbb{A}_o$-connexe (resp. de suffisante sesqui-complétude totalement $\mathbb{A}_o$-connexe), lorsqu'on reprend les notations du §5.4, concernant $\mathscr{A}(\mathscr{L})$ (resp. $\mathscr{S}'(\mathscr{L})$).

Bibliographie de la Section B

[E.S.C.C.] F. Cury, Catégories lax-localement cartésiennes et catégories localement cartésiennes : un exemple de suffisante complétude connexe de sémantiques initiales, Diagrammes 25, Paris, 1991.

[F.S.A.T.] F. W. Lawvere, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, Lect. Notes in Math. 61, Springer, 1968.

[S.A.D.C.] J. Bénabou, Structures algébriques dans les catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. X,1, Paris, 1968.

[S.C.C.A.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Section A : amphi-syntaxes, amphi-algèbres et sesqui-algèbres, Diagrammes 30, Paris, 1993.

[S.C.C.C.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Section C : exemples, Diagrammes 32, Paris, (à paraître).

[T.A.E.P.] L. Coppey, Théories algébriques et extensions de préfaisceaux et compléments, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XIII,1 et XIII,4, Paris, 1972.

Table de la Section B