DIAGRAMMES

F. CURY

La suffisante complétude connexe. Section A : amphi-syntaxes, amphi-algèbres et sesqui-algèbres

Diagrammes, tome 30 (1993), exp. n° 1, p. 1-122

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1993__30__A1_0>

LA SUFFISANTE COMPLETUDE CONNEXE

SECTION A : AMPHI-SYNTAXES, AMPHI-ALGEBRES ET SESQUI-ALGEBRES

F. CURY

Introduction

Le présent texte est le premier ("Section A") d'une série de trois ("Section A", "Section B" - à paraître en [S.C.C.B.] - et "Section C" - à paraître en [S.C.C.C.]) consacrés à l'étude générale (d'un point de vue catégorique) de la propriété de "suffisante complétude connexe" : une théorie essentiellement algébrique possède cette propriété lorsque ses algèbres libres sont (très concrètement) constituées des composantes connexes (par ré-écriture) des algèbres libres d'une "théorie essentiellement à ré-écritures" ou "essentiellement relationnelle (par relation de ré-écriture)", i.e. où les équations sont remplacées par

A.M.S. Sub. Class. : 18 C 10 , 18 D 05 , 18 A 10

des règles de ré-écriture (on pourra trouver le traitement complet d'un cas particulier non classique - celui de la théorie essentiellement algébrique des catégories localement cartésiennes - en [E.S.C.C.]).

Il nous a fallu, tout d'abord, préciser ce que l'on entendait par "théorie essentiellement algébrique". A la conception usuellement désignée par cette terminologie, nous avons préféré adopter (en l'adaptant) celle des *syntaxes d'algèbres* de [T.A.E.P.].

Si $\mathbb{A}$ est une catégorie localement petite, une sur-catégorie $\mathbb{C}$ de $\mathbb{A}$ est une *syntaxe* qui décrit des structures *d'algèbres* : l'objet A de $\mathbb{A}$ est doté d'une telle structure ϑ lorsque l'*opération globale canonique* :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(-,A) : \mathbb{A}^{op} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$$

admet un prolongement :

$$\vartheta : \mathbb{C}^{op} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$$

(i.e. lorsque les diverses opérations canoniques - par composition - des flèches $x : X \longrightarrow X'$ de $\mathbb{A}$ sur les ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(X',A)$ peuvent être complétées par des opérations des autres flèches de $\mathbb{C}$).
C'est là le point de vue, maintenant fort classique, initié en [A.O.F.S.], où les *algèbres d'une monade* M sur $\mathbb{A}$ sont justement interprétées comme autant d'algèbres, au sens précédent, de la syntaxe sur $\mathbb{A}$ que constitue la catégorie de Kleisli $\mathbb{A}_M = \mathbb{C}$ de la monade M .

Plus généralement, une *syntaxe sur* $\mathbb{A}$ peut seulement être constituée d'une sur-catégorie $\mathbb{D}$ d'une sous-catégorie $\mathbb{B}$ de $\mathbb{A}$. Plus pratiquement encore, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ peuvent n'être que des *présentations de catégories*, i.e. des *graphes à composition*, c'est-à-dire des graphes munis d'une composition (partielle) de certains couples (seulement) de flèches consécutives et munis d'identités en certains (seulement) de leurs objets. C'est (au remplacement des "graphes multiplicatifs" par les "graphes à composition" près) le point de vue de [T.A.E.P.] (repris en [A.M.E.N.]).

Par exemple, à une théorie universelle-équationnelle unisorte T, on sait associer une *théorie de Lawvere*, i.e. une certaine catégorie $\mathbb{D}_T$ à sommes finies nD (quand n parcourt $\mathbb{N}$) d'un même objet D (voir [F.S.A.T.]). On peut voir $\mathbb{D}_T$ comme une sur-catégorie de la sous-catégorie pleine $\mathbb{B}_{-,n,-}$ de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ dont les objets sont les entiers n (quand n parcourt $\mathbb{N}$). De la sorte, les algèbres de $\mathbb{D}_T$ sont exactement les algèbres (ou modèles) de T et, si l'ensemble A est muni d'une telle structure d'algèbre ϑ, on voit que :

- pour tout entier n, on a :

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\mathrm{ns}}(n,A) \cong A^n$$

et, par conséquent, les objets nD de $\mathbb{D}_T$ représentent (syntaxiquement) les n-uples d'éléments, i.e. diverses *configurations* (simples) d'éléments,

- pour toute flèche $b : m \longrightarrow n$ de $\mathbb{B}_{-,n,-}$, l'application :

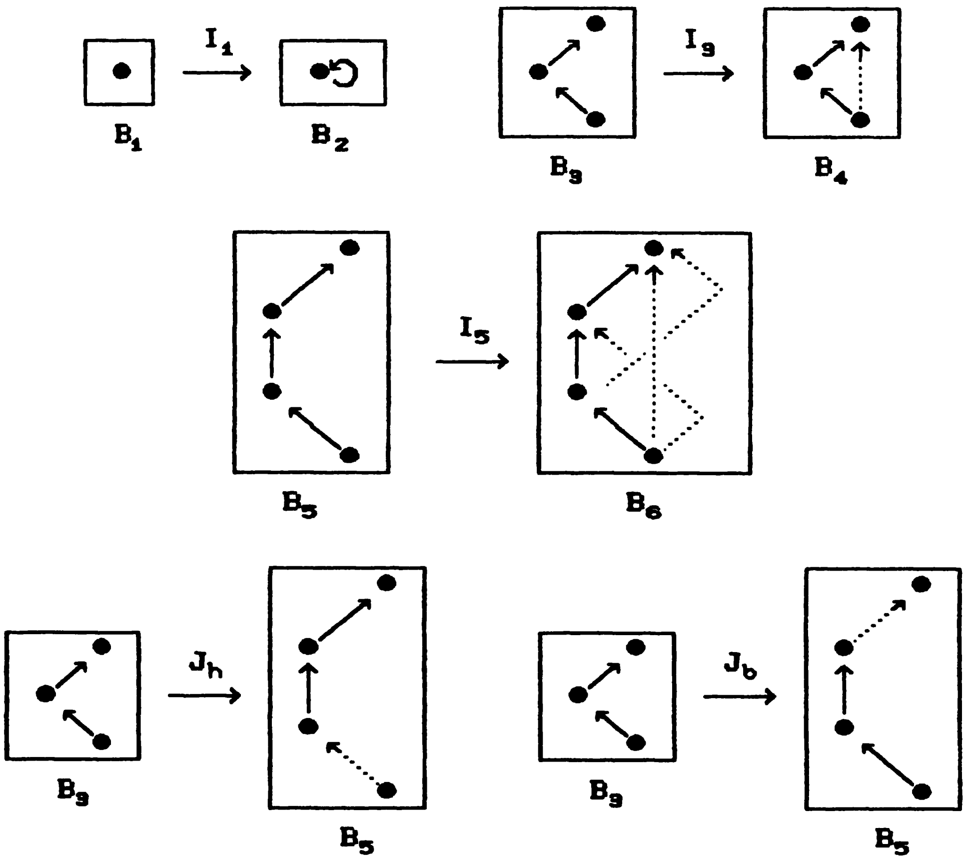
$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{E}\mathrm{ns}}(b,A) \cong A^b : A^n \longrightarrow A^m$$

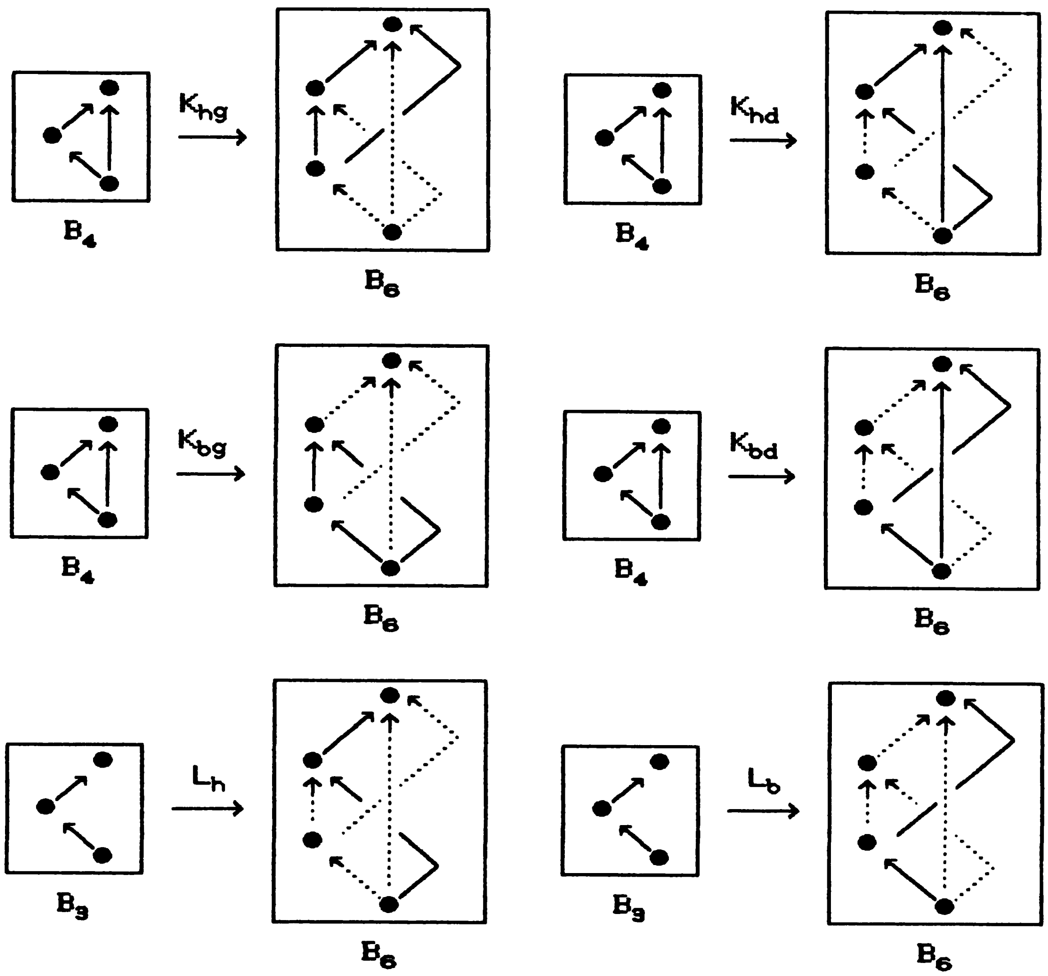
est une projection et, par conséquent, les flèches de $\mathbb{B}_{-,n,-}$ représentent (syntaxiquement et par dualité) les *comparaisons naturelles* entre configurations,

- pour toute autre flèche $d : m \longrightarrow n$ de $\mathbb{D}_T$, l'application $\vartheta(d) : A^n \longrightarrow A^m$ est une loi de composition (précisément, au sens classique des termes : un m-uplet de lois de composition n-aires) si bien que les flèches de $\mathbb{D}_T$, autres que celles de $\mathbb{B}_{-,n,-}$, représentent (syntaxiquement) les *lois de composition*,

- dès lors, les égalités entre composées de flèches dans $\mathbb{D}_T$ (autres que celles entre composées de flèches toutes dans $\mathbb{B}_{-,n,-}$) représentent évidemment les *équations* de T (ou celles qu'on en déduit).

De même, si $\mathbb{A} = \mathbb{G}\mathrm{rph}$ est la catégorie des graphes petits, on peut y sélectionner un sous-graphe à composition $\mathbb{B}_{cat}$ puis en construire un sur-graphe à composition $\mathbb{D}_{cat}$ tel que ses algèbres soient exactement les catégories petites. Essentiellement, $\mathbb{B}_{cat}$ a pour flèches les foncteurs injections représentés ci-dessous (où les flèches "non atteintes" sont dessinées en pointillés - sauf dans B_2) :





et, dans $\mathbb{D}_{cat}$, on fait figurer des inverses à gauche :

$I'_1 : B_2 \longrightarrow B_1$, $I'_3 : B_4 \longrightarrow B_3$ et $I'_5 : B_6 \longrightarrow B_5$

respectivement de :

$I_1 : B_1 \longrightarrow B_2$, $I_3 : B_3 \longrightarrow B_4$ et $I_5 : B_5 \longrightarrow B_6$

(si bien que, même si $\mathbb{B}_{cat}$ était une catégorie, il est de toute manière plus économique de se contenter d'un graphe à composition pour $\mathbb{D}_{cat}$, plutôt que d'utiliser la catégorie qu'il engendre).

Ainsi, de nouveau, on voit que :

- les objets de $\mathbb{D}_{cat}$ représentent (syntaxiquement) différentes *sortes de configurations graphiques* (non nécessairement "simples", i.e. constituées de graphes discrets),

- les flèches de $\mathbb{B}_{cat}$ représentent (syntaxiquement et par dualité) des *comparaisons* entre ces sortes,

- les flèches de $\mathbb{D}_{cat}$, autres que celles de $\mathbb{B}_{cat}$, représentent différentes *lois de composition*, inhérentes à toute structure de catégorie (par exemple :

I'_1 représente la loi *sélection des identités*,

I'_3 représente la loi *composition des couples de flèches consécutives*,

I'_5 représente la loi *composition des triplets de flèches consécutives*),

- les égalités entre composées de flèches dans $\mathbb{D}_{cat}$ (autres que celles entre composées de flèches toutes dans $\mathbb{B}_{cat}$) représentent les équations (ou axiomes) de structure (par exemple, les commutations des diagrammes suivants de $\mathbb{D}_{cat}$:

$$\begin{tikzcd}
B_4 \arrow[r, "K_{hg}"] \arrow[d, "I'_3"'] & B_6 \arrow[d, "I'_5"] \\
B_3 \arrow[r, "J_h"'] & B_5
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B_4 \arrow[rr, "K_{hd}"] \arrow[d, "I'_3"'] & & B_6 \arrow[d, "I'_5"] \\
B_3 \arrow[r, "L_h"'] & B_6 \arrow[r, "I'_5"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
B_4 \arrow[r, "K_{bg}"] \arrow[d, "I'_3"'] & B_6 \arrow[d, "I'_5"] \\
B_3 \arrow[r, "J_b"'] & B_5
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B_4 \arrow[rr, "K_{bd}"] \arrow[d, "I'_3"'] & & B_6 \arrow[d, "I'_5"] \\
B_3 \arrow[r, "L_b"'] & B_6 \arrow[r, "I'_5"'] & B_5
\end{tikzcd}$$

indiquent que la loi I'_5 est déduite, "par itération", de la loi I'_3, i.e. que la composition des couples de flèches consécutives est effectivement associative dans toute algèbre, i.e. dans toute catégorie !).

Le §1 est consacré aux rappels théoriques et formels nécessaires concernant les graphes à composition et le §2 à ceux concernant les syntaxes et leurs algèbres. Nous y rappelons notamment sous quelles conditions (simples) tout objet de $\mathbb{A}$ engendre une algèbre libre.

Le point de vue que nous avons adopté (pour cette raison) permet de voir immédiatement quel type de structure "catégorique" il suffit d'introduire pour formaliser ce que sont les "théories essentiellement à ré-écritures".

A la place de diagrammes commutatifs (dans $\mathbb{D}$) tels que (par exemple) le suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & D_1 \arrow[dr, "d_2"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
D \arrow[ur, "d_1"] \arrow[rr] \arrow[dr, "d'_1"'] & & D' \\
 & D_2 \arrow[ur, "d'_2"'] \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}$$

(correspondant à l'axiome universel-équationnel :

$$\forall x \quad d_2 \cdot d_1(x) = d'_2 \cdot d'_1(x) \qquad)$$

il faut pouvoir disposer de diagrammes tels que (par exemple) le suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & D_1 \arrow[dr, "d_2"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
D \arrow[ur, "d_1"] \arrow[rr, bend left] \arrow[rr, bend right] \arrow[rr, phantom, "\Downarrow"] \arrow[dr, "d'_1"'] & & D' \\
 & D_2 \arrow[ur, "d'_2"'] \arrow[u, phantom, "="] &
\end{tikzcd}$$

(correspondant à l'axiome universel-relationnel :

$$\forall x \quad d_2 \cdot d_1(x) \longrightarrow d'_2 \cdot d'_1(x)$$

qu'on écrira, désormais ... avec une "2-flèche":

$$\forall x \quad d_2 \cdot d_1(x) \Longrightarrow d'_2 \cdot d'_1(x) \qquad)$$

Autrement dit :

(a) même si on ne souhaite utiliser que de la "pure ré-écriture" (et pas de la "ré-écriture modulo des équations") il faut tout de même pouvoir composer (ne serait-ce que "librement") certaines 1-flèches consécutives, donc encore disposer d'un graphe à composition (et pas seulement d'un graphe) sous-jacent,

(b) il faut disposer de 2-flèches (de ré-écriture) et pouvoir *éventuellement* les composer "verticalement" (du moins en se fiant aux sens adoptés dans le diagramme précédent), si on souhaite les doter d'une certaine structure (par exemple, en écrivant $\delta'_1 * \delta_1 = \delta'_2 * \delta_2$ s'il est nécessaire de préciser que "l'exécution successive" de $\delta_1 : d_2 \cdot d_1 \Longrightarrow d'_2 \cdot d'_1$ et $\delta'_1 : d'_2 \cdot d'_1 \Longrightarrow d''_2 \cdot d''_1$ "revient au même" - ne serait-ce qu'en temps - que l'exécution successive de $\delta_2 : d_2 \cdot d_1 \Longrightarrow d'_4 \cdot d'_3$ et $\delta'_2 : d'_4 \cdot d'_3 \Longrightarrow d''_2 \cdot d''_1$),

(c) la ré-écriture étant conçue comme une congruence, il faut pouvoir composer "horizontalement" (en se fiant aux sens adoptés dans le diagramme précédent) certaines 1-flèches avec certaines 2-flèches, ou certaines 2-flèches avec certaines 1-flèches, car si :

$$\forall x \quad d_2 \cdot d_1(x) \overset{\delta}{\Longrightarrow} d'_2 \cdot d'_1(x) \ ,$$

on souhaite en déduire :

$$\forall x \quad d \cdot (d_2 \cdot d_1)(x) \overset{d \cdot \delta}{\Longrightarrow} d \cdot (d'_2 \cdot d'_1)(x)$$

(si $d \cdot (d_2 \cdot d_1)$ et $d \cdot (d'_2 \cdot d'_1)$ sont définis)

et

$$\forall\, y \quad (d_2 \cdot d_1) \cdot d'(y) \xrightarrow{\delta \cdot d'} (d'_2 \cdot d'_1) \cdot d'(y)$$

(si $(d_2 \cdot d_1) \cdot d'$ et $(d'_2 \cdot d'_1) \cdot d'$ sont définis),

(d) il n'est pas nécessaire de savoir, a priori, composer "horizontalement" entre elles les 2-flèches, car si :

$$d_1 \xrightarrow{\delta_1} d'_1 \ , \ d_2 \xrightarrow{\delta_2} d'_2 \ ,$$

et si :

$$d_2 \cdot d_1 \quad \text{et} \quad d'_2 \cdot d'_1 \quad \text{sont définis}$$

alors, on déduit de (c) que :

$$d_2 \cdot d_1 \xrightarrow{d_2 \cdot \delta_1} d_2 \cdot d'_1 \xrightarrow{\delta_2 \cdot d'_1} d'_2 \cdot d'_1$$

et/ou que :

$$d_2 \cdot d_1 \xrightarrow{\delta_2 \cdot d_1} d'_2 \cdot d_1 \xrightarrow{d'_2 \cdot \delta_1} d'_2 \cdot d'_1$$

autrement dit, que $d'_2 \cdot d'_1$ et $d_2 \cdot d_1$ sont connectés (de deux manières) par ré-écriture, ce qui est suffisant pour ce que nous avons en vue (et, de toute façon, si on veut comparer ces deux manières, par exemple dire qu'elles sont "égales", il suffit d'utiliser la composition verticale des deux flèches, ce qui permet de définir a posteriori la composition horizontale $\delta_2 \cdot \delta_1$ "manquant", en posant - et en imposant :

$$\delta_2 \cdot \delta_1 = (\delta_2 \cdot d'_1) * (d_2 \cdot \delta_1) = (d'_2 \cdot \delta_1) * (\delta_2 \cdot d_1) \qquad).$$

Il se trouve qu'on dispose d'une *théorie générale des graphes à composition enrichis* (étendant la théorie des catégories enrichies) par une quelconque catégorie monoïdale, symétrique, fermée (voir [G.M.E.N.]). Au §3, il nous suffit donc de doter la catégorie $\mathbb{G}$rComp des petits graphes à composition d'une (parmi beaucoup d'autres) structure monoïdale, symétrique et fermée convenable $\mathbb{G}$rComp pour disposer *automatiquement* de graphes à composition enrichis (et, en particulier, de catégories enrichies), appelés *amphi-graphes à composition* (ou *amphi-catégories*), obéissant *exactement* aux contraintes précédentes (on pourrait, d'ailleurs, enrichir les graphes à composition par des graphes à composition munis d'une structure supplémentaire - par exemple ... des amphi-graphes à composition - si on désirait préciser plus encore la structure des ré-écritures - par exemple, en les comparant grâce à des "3-flèches" : nous avons rédigé les choses, de manière "générique", dans cette optique, sans pour autant entrer dans cette plus grande - et plus lourde - généralité).

Dès lors, une "théorie essentiellement à ré-écritures" est une *amphi-syntaxe*, i.e. un sur-amphi-graphe à composition $\mathbb{D}$ d'un sous-amphi-graphe à composition $\mathbb{B}$ d'une amphi-catégorie $\mathbb{A}$! Alors, si A est un objet de $\mathbb{A}$, il est muni d'une structure d'*amphi-algèbre* $\mathcal{A}$ lorsque l'*opération globale canonique* (restriction à $\mathbb{B}$ du "Hom interne à GrComp):

$$\mathbb{A}(-,A)_{|\mathbb{B}^{op}} : \mathbb{B}^{op} \longrightarrow \mathrm{GrComp}$$

admet un prolongement :

$$\mathcal{A} : \mathbb{D}^{op} \longrightarrow \mathrm{GrComp}$$

i.e. lorsque les diverses opérations canoniques - par composition - des 1-flèches $x : X \longrightarrow X'$ et des 2-flèches $\varkappa : x \Longrightarrow x' : X \longrightarrow X'$ de $\mathbb{B}$ sur les 1-flèches $a : X' \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ peuvent être complétées par des opérations des autres 1-flèches et 2-flèches de $\mathbb{D}$ sur ces 1-flèches de $\mathbb{A}$, *ainsi que lorsque les diverses opérations - par composition - des 1-flèches* $x : X \longrightarrow X'$ *de* $\mathbb{B}$ *sur les 2-flèches* $\alpha : a \Longrightarrow a' : X' \longrightarrow A$ *de* $\mathbb{A}$ *peuvent être complétées par des opérations des autres 1-flèches de* $\mathbb{D}$. Cependant, du seul point de vue de la connexité par ré-écriture (i.e. par 2-flèches), il n'est même pas nécessaire de savoir faire opérer les 1-flèches de

$\mathbb{D}$ sur ces 2-flèches : il suffit donc de considérer des amphi-algèbres *partielles* de ce genre, appelées *sesqui-algèbres*.
Nous consacrons le §4 à l'étude de ces amphi-syntaxes, de leurs sesqui-algèbres (mais aussi de leurs amphi-algèbres, pour être complet). En particulier, nous établissons que, sous-certaines conditions de *co-représentabilité* (dans un sens analogue à celui utilisé pour les 2-catégories) de l'amphi-catégorie $\mathbb{A}$, ces sesqui-algèbres (et les amphi-algèbres) sont des algèbres (non enrichies) de syntaxes (non enrichies) associées, d'où on déduit l'existence automatique de sesqui-algèbres (et d'amphi-algèbres) libres.

La Section B (voir [S.C.C.B.]) est consacrée au problème de la suffisante complétude connexe proprement dit : sous-quelles conditions une amphi-syntaxe $\mathbb{D}'$ peut-elle être considérée comme *assouplissant* une syntaxe $\mathbb{D}$, de sorte que les algèbres libres de cette dernière soient les algèbres des composantes connexes (par 2-flèches) des sesqui-algèbres libres de la première ?

On trouvera de nombreux exemples (assez détaillés) dans la Section C (voir [S.C.C.C.]), ainsi qu'une présentation - à la lumière de la théorie générale développée ici et dans la Section B - du traitement explicite du cas de la théorie essentiellemeent algébrique des catégories localement cartésiennes, effectué en [E.S.C.C.] (et qui est à l'origine du présent travail).

---

1. Ensembles et graphes à composition

1.1. Ensembles

Dans toute la suite, nous nous plaçons dans un modèle de la théorie des ensembles et classes de Bernays-Gödel-Von Neumann. Naïvement, il suffit ici d'avoir à l'esprit la distinction entre "gros ensemble", i.e. *classe*, et "petite classe", i.e. *ensemble*. Ainsi, on dit d'une structure (de catégorie, ou de graphe à composition, par exemple) qu'elle est *petite* si toutes ses classes constituantes sont petites, i.e. sont des ensembles, et on dit qu'elle est seulement *localement petite* si seulement "certaines" (à préciser) de ses classes constituantes sont petites.

On note évidemment $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ la catégorie des ensembles.

On sait qu'elle est munie d'une structure cartésienne fermée qu'on désigne (sans plus de précision[1]) par :
$\mathbf{Ens} = (\mathbb{E}\mathrm{ns}, -\times-, 1, \ldots, \mathbf{Ens}(-,-)) = (\mathbb{E}\mathrm{ns}, -\times-, 1, \ldots, \mathbb{E}\mathrm{ns}(-,-))$
(où, pour être systématique, nous notons indifféremment :

$$\mathbf{Ens}(-,-) = \mathbb{E}\mathrm{ns}(-,-) : \mathbb{E}\mathrm{ns}^{op} \times \mathbb{E}\mathrm{ns} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$$

le foncteur "exponentiation" usuel, i.e. la fermeture).

[1] Dans la notation $\mathbf{Ens} = (\mathbb{E}\mathrm{ns}, -\times-, 1, \ldots, \mathbf{Ens}(-,-))$, les "..." font allusion aux isomorphismes (canoniques) d'associativité :

$$\mathrm{ass}_{\mathbf{Ens},-,-,-} = \mathrm{ass} : (-\times-)\times- \xrightarrow{\simeq} -\times(-\times-) ,$$

d'unitarités (à gauche et à droite) :

$$\mathrm{gche}_{\mathbf{Ens},-} = \mathrm{gche} : 1\times- \xrightarrow{\simeq} - ,$$
$$\mathrm{drte}_{\mathbf{Ens},-} = \mathrm{drte} : -\times 1 \xrightarrow{\simeq} -$$

et de symétrie :

$$\mathrm{sym}_{\mathbf{Ens},-_1,-_2} = \mathrm{sym} : -_1\times-_2 \xrightarrow{\simeq} -_2\times-_1 .$$

Naturellement en tous les objets E , E' , E'' de $\mathbb{E}ns$, on dispose donc de la bijection :

$$\mathrm{curry}_{\mathbb{E}ns,E,E',E''} : \mathbb{E}ns(E\times E',E'') \longrightarrow \mathbb{E}ns(E,\mathbb{E}ns(E',E''))$$

(notée, plus simplement :

$$\mathrm{curry}_{E,E',E''} : \mathbb{E}ns(E\times E',E'') \longrightarrow \mathbb{E}ns(E,\mathbb{E}ns(E',E'')) \quad ,$$

ou encore, s'il n'y a pas ambiguïté :

$$\mathrm{curry} : \mathbb{E}ns(E\times E',E'') \longrightarrow \mathbb{E}ns(E,\mathbb{E}ns(E',E'')) \quad)$$

telle que, pour toute application :

$$\begin{aligned} f : E\times E' &\longrightarrow E'' \\ (x,x') &\longmapsto f(x,x') \end{aligned} \quad ,$$

on a :

$$\begin{aligned} \mathrm{curry}(f) : E &\longrightarrow \mathbb{E}ns(E',E'') \\ x &\longmapsto \left(\begin{aligned} \mathrm{curry}(f)(x) : E' &\longrightarrow E'' \\ x' &\longmapsto f(x,x') \end{aligned} \right) \end{aligned} \quad .$$

1.2. Graphes à composition[2]

Introduisons la notion de graphe à composition[3].

<u>Définition 1 :</u> On dit que :

$$\mathbb{D} = (\mathrm{Ob},\mathrm{ObId},\mathrm{Fl},\mathrm{CComp},\mathrm{dom},\mathrm{codom},\mathrm{selid},\mathrm{comp})$$

est un *graphe (partiellement) à composition* si et seulement si :

[2] On trouvera des exemples de graphes à composition en Section C, §6.1 (i.e. en [S.C.C.C.]).

[3] Les graphes à composition sont évidemment des "systèmes de générateurs et relations" pour les catégories. On reprend donc ici l'idée initiale des "graphes multiplicatifs" introduits par C. Ehresmann en [C.A.S.T.]. Formellement, un graphe multiplicatif est un graphe à composition où tout objet est à identité.

- Ob (notée encore Ob($\mathbb{D}$) s'il y a risque d'ambiguïté) est une classe, dite *classe des objets de* $\mathbb{D}$,

- ObId (notée encore ObId($\mathbb{D}$)) est une sous-classe de Ob , dite *classe des objets à identité de* $\mathbb{D}$ (alors, on note injob:ObId $\longrightarrow$ Ob ou encore $\mathrm{injob}_{\mathbb{D}}$:ObId($\mathbb{D}$) $\longrightarrow$ Ob($\mathbb{D}$) l'injection canonique),

- Fl (notée encore Fl($\mathbb{D}$)) est une classe, dite *classe des flèches de* $\mathbb{D}$,

- CComp (notée encore CComp($\mathbb{D}$)) est une sous-classe de Fl $\times$ Fl , dite *classe des couples de flèches composables de* $\mathbb{D}$ (alors, on note inj : CComp $\longrightarrow$ Fl $\times$ Fl ou encore $\mathrm{inj}_{\mathbb{D}}$: CComp($\mathbb{D}$) $\longrightarrow$ Fl($\mathbb{D}$) $\times$ Fl($\mathbb{D}$) l'injection canonique),

- dom : Fl $\longrightarrow$ Ob (notée encore $\mathrm{dom}_{\mathbb{D}}$) est une application, dite *sélection des domaines*,

- codom : Fl $\longrightarrow$ Ob (notée encore $\mathrm{codom}_{\mathbb{D}}$) est une application, dite *sélection des codomaines*,

- selid : ObId $\longrightarrow$ Fl (notée encore $\mathrm{selid}_{\mathbb{D}}$) est une application, dite *sélection des identités (associées aux objets à identité)*,

- comp : CComp $\longrightarrow$ Fl (notée encore $\mathrm{comp}_{\mathbb{D}}$) est une application, dite *composition des (couples composables de) flèches*,

- pour tout objet à identité D $\in$ ObId , on a :

$$\mathrm{dom}(\mathrm{selid}(D)) = D = \mathrm{codom}(\mathrm{selid}(D)) \ ,$$

- pour tout couple composable $(d_2,d_1) \in$ CComp , on a :

$$\mathrm{dom}(d_2) = \mathrm{codom}(d_1) \ ,$$

$$\mathrm{dom}(\mathrm{comp}(d_2,d_1)) = \mathrm{dom}(d_1)$$

et :

$$\mathrm{codom}(\mathrm{comp}(d_2,d_1)) = \mathrm{codom}(d_2) \ ,$$

- pour tout objet à identité $D_1 \in$ ObId et pour toute flèche $d \in Fl$ telle que $dom(d) = D_1$, le couple $(d, selid(D_1))$ est un couple composable, dit *trivial*, et on a :

$$comp(d, selid(D_1)) = d ,$$

- pour tout objet à identité $D_2 \in ObId$ et pour toute flèche $d \in Fl$ telle que $codom(d) = D_2$, le couple $(selid(D_2), d)$ est un couple composable, dit *trivial*, et on a :

$$comp(selid(D_2), d) = d .$$

Pour un tel graphe à composition $\mathbb{D}$, on utilise aussi, selon les circonstances, les notations suivantes (bien entendu analogues à celles usuellement utilisées pour les catégories) :

- pour tout objet à identité $D \in ObId$, on note $selid(D) = id(D) = id_{\mathbb{D}}(D)$,

- pour tout couple composable $(d_2, d_1) \in CComp$, on note $comp(d_2, d_1) = d_2 \cdot d_1 = d_2 \cdot_{\mathbb{D}} d_1$,

- pour toute flèche $d \in Fl$, on note $d : D_1 \longrightarrow D_2$ si et seulement si $dom(d) = D_1$ et $codom(d) = D_2$,

- pour tous objets D_1, $D_2 \in Ob$, on désigne par $Hom_{\mathbb{D}}(D_1, D_2) = \mathbb{D}(D_1, D_2) = Hom(D_1, D_2)$ la classe des flèches de $\mathbb{D}$ ayant D_1 pour domaine et D_2 pour codomaine.

On dit (comme pour une catégorie[4]) qu'un graphe à composition $\mathbb{D}$ est *localement petit* si et seulement si, pour tous objets D_1, $D_2 \in Ob(\mathbb{D})$, la classe $\mathbb{D}(D_1, D_2)$ est

[4] On prendra garde au fait que la catégorie engendrée par un graphe à composition localement petit n'est pas nécessairement localement petite.

petite, i.e. est un ensemble. S'il en est ainsi, il nous arrivera d'utiliser également les notations suivantes (en faisant ainsi référence implicite au fait qu'un graphe à composition localement petit est un "graphe à composition enrichi par la catégorie cartésienne fermée **Ens** ", en un sens que la lecture du §3 permettrait de formaliser complètement) :

- si $D \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$, on notera :

$$selid_{\mathbb{D}}(D) \ : \ 1 = \{0\} \longrightarrow \mathbb{D}(D,D)$$

(ou plus simplement :

$$selid(D) \ : \ 1 = \{0\} \longrightarrow \mathbb{D}(D,D) \ )$$

l'application telle que $selid_{\mathbb{D}}(D)(0) = id_{\mathbb{D}}(D)$ (et on pourra même identifier l'application $selid_{\mathbb{D}}(D)$ à l'élément $id_{\mathbb{D}}(D)$),

- si D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, on posera :

$$\mathbb{D}^{\ddot{\cdot}}(D_1,D_2,D_3) = (\ \mathbb{D}(D_2,D_3) \times \mathbb{D}(D_1,D_2)\ ) \cap \mathrm{CComp}(\mathbb{D}) \ ,$$

on notera :

$$inj_{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3) \ : \ \mathbb{D}^{\ddot{\cdot}}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}(D_2,D_3) \times \mathbb{D}(D_1,D_2)$$

(ou plus simplement :

$$inj(D_1,D_2,D_3) \ : \ \mathbb{D}^{\ddot{\cdot}}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}(D_2,D_3) \times \mathbb{D}(D_1,D_2) \quad)$$

l'injection canonique et on désignera par :

$$comp_{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3) \ : \ \mathbb{D}^{\ddot{\cdot}}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}(D_1,D_3)$$

(ou plus simplement :

$$comp(D_1,D_2,D_3) \ : \ \mathbb{D}^{\ddot{\cdot}}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}(D_1,D_3) \quad)$$

la restriction de $comp_{\mathbb{D}} \ : \ \mathrm{CComp}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Fl}(\mathbb{D})$,

- si D_1 , $D_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, si $d : D_1 \longrightarrow D_2$ est une flèche de $\mathbb{D}$ (i.e. si $d \in \mathbb{D}(D_1,D_2)$), on notera :

$$select_{\mathbb{D},D_1,D_2}(d) \ : \ 1 = \{0\} \longrightarrow \mathbb{D}(D_1,D_2)$$

(ou plus simplement :

$$1 = \{0\} \xrightarrow{\quad select_{D_1,D_2}(d) \ = \ select_{\mathbb{D}}(d) \ = \ select(d) \quad} \mathbb{D}(D_1,D_2) \quad)$$

l'application :

$$select_{\mathbb{D},D_1,D_2}(d)$$
$$=$$
$$1 \xrightarrow{curry_{\mathbb{D}(D_1,D_2),1,\mathbb{D}(D_1,D_2)}(drte_{\mathbb{D}(D_1,D_2)})(d)} \mathbb{D}(D_1,D_2)$$

c'est-à-dire l'application telle que $select_{\mathbb{D}}(d)(0) = d$ (et on pourra même identifier l'application $select_{\mathbb{D}}(d) : 1 \longrightarrow \mathbb{D}(D_1,D_2)$ et $select_{\mathbb{D}}(d)(0) = d$).

On dit qu'un graphe à composition $\mathbb{D}$ est *petit* si et seulement si les classes Ob et Fl (et donc aussi ObId et CComp) sont petites, i.e. sont des ensembles.

On dira qu'un graphe à composition $\mathbb{D}$ est *identitaire* si et seulement si ObId = Ob , i.e. si tout objet de $\mathbb{D}$ est un objet à identité[5].

Enfin, si $\mathbb{D}$ est un graphe à composition et si $n \geq 1$ est un entier, on dit (bien entendu) qu'une famille $c = (d_1, \ldots, d_n)$ de flèches de $\mathbb{D}$ est un *chemin (de longueur* n *) de* $\mathbb{D}$ si et seulement si :

- pour tout entier $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$codom(d_k) = dom(d_{k+1}) \ ,$$

alors, on dit encore que c est de *domaine* $dom(d_1)$ et de *codomaine* $codom(d_n)$ et on note[6] :

(5) Ainsi, les graphes multiplicatifs de [C.A.S.T.] sont exactement les graphes à composition identitaires.

(6) Nous laissons au lecteur le soin d'établir que les chemins de $\mathbb{D}$, de longueur ≥ 1 , sont les flèches d'un graphe à composition $Ch(\mathbb{D})$ ayant mêmes objets que $\mathbb{D}$ et où la composition est la concaténation. Si, pour tout objet D de $\mathbb{D}$, on ajoute un chemin reliant D à D et conventionnellement considéré comme étant "de longueur nulle", on complète $Ch(\mathbb{D})$ en un graphe à composition identitaire.

$$c : \mathrm{dom}(d_1) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{codom}(d_n) \ ,$$
$$\mathrm{dom}(c) = \mathrm{dom}(d_1) \ ,$$
$$\mathrm{codom}(c) = \mathrm{codom}(d_n) \ .$$

La définition des *foncteurs*, i.e. des homomorphismes, entre graphes à composition, s'obtient assez automatiquement. Enonçons-la, cependant, par souci de précision.

<u>Définition 2 :</u> Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux graphes à composition, on dit que $F = (F_{Ob}, F_{Fl}, F_{ObId}, F_{CComp})$ est un *foncteur de* $\mathbb{D}$ *vers* $\mathbb{D}'$ et on note $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ si et seulement si :

- $F_{Ob} : \mathrm{Ob}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbb{D}')$ est une application admettant une restriction $F_{ObId} : \mathrm{ObId}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{ObId}(\mathbb{D}')$,

- $F_{Fl} : \mathrm{Fl}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Fl}(\mathbb{D}')$ est une application et l'application $F_{Fl} \times F_{Fl} : \mathrm{Fl}(\mathbb{D}) \times \mathrm{Fl}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Fl}(\mathbb{D}') \times \mathrm{Fl}(\mathbb{D}')$ admet une restriction $F_{CComp} : \mathrm{CComp}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{CComp}(\mathbb{D}')$,

- pour toute flèche $d \in \mathrm{Fl}(\mathbb{D})$, on a :
$$F_{Ob}(\mathrm{dom}_{\mathbb{D}}(d)) = \mathrm{dom}_{\mathbb{D}'}(F_{Fl}(d))$$
et :
$$F_{Ob}(\mathrm{codom}_{\mathbb{D}}(d)) = \mathrm{codom}_{\mathbb{D}'}(F_{Fl}(d)) \ ,$$

- pour tout objet à identité $D \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$, on a :
$$F_{Fl}(\mathrm{id}_{\mathbb{D}}(D)) = \mathrm{id}_{\mathbb{D}'}(F_{ObId}(D)) \ ,$$

- pour tout couple composable $(d_2, d_1) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{D})$, on a :
$$F_{Fl}(\mathrm{comp}_{\mathbb{D}}(d_2, d_1)) = \mathrm{comp}_{\mathbb{D}'}(F_{CComp}(d_2, d_1)) \ ,$$
c'est-à-dire (bien entendu) :
$$F_{Fl}(d_2 \cdot_{\mathbb{D}} d_1) = F_{Fl}(d_2) \cdot_{\mathbb{D}'} F_{Fl}(d_1) \ .$$

Pour un tel foncteur (entre graphes à composition), on utilise aussi, selon les circonstances, les notations suivantes (bien entendu analogues à celles usuellement utilisées pour les foncteurs entre catégories) :

- pour tout objet $D \in Ob(\mathbb{D})$, on note $F_{Ob}(D) = F(D)$,

- pour toute flèche $d \in Fl(\mathbb{D})$, on note $F_{Fl}(d) = F(d)$.

De plus, si $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ est un foncteur entre graphes à composition localement petits, il nous arrivera d'utiliser également les notations suivantes (en faisant ainsi référence implicite au fait qu'un foncteur entre graphes à composition localement petits est un "foncteur enrichi par la catégorie cartésienne fermée $\mathbb{E}$ns ", en un sens que la lecture du §3 permettrait de formaliser complètement) :

- si D_1 , $D_2 \in Ob(\mathbb{D})$, on notera :

$$F(D_1,D_2) : \mathbb{D}(D_1,D_2) \longrightarrow \mathbb{D}'(F(D_1),F(D_2))$$

ou :

$$\langle F\rangle(D_1,D_2) : \mathbb{D}(D_1,D_2) \longrightarrow \mathbb{D}'(F(D_1),F(D_2))$$

la restriction de $F_{Fl} : Fl(\mathbb{D}) \longrightarrow Fl(\mathbb{D}')$,

- si D_1 , D_2 , $D_3 \in Ob(\mathbb{D})$, on notera :

$$F^{\therefore}(D_1,D_2,D_3) : \mathbb{D}^{\therefore}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}'^{\therefore}(F(D_1),F(D_2),F(D_3))$$

ou :

$$\langle F\rangle^{\therefore}(D_1,D_2,D_3) : \mathbb{D}^{\therefore}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}'^{\therefore}(F(D_1),F(D_2),F(D_3))$$

la restriction de $F_{CComp} : CComp(\mathbb{D}) \longrightarrow CComp(\mathbb{D}')$.

Enfin, on note $\mathbb{G}$rComp la catégorie dont les objets sont les petits graphes à composition et dont les flèches sont les foncteurs.

Bien entendu, une catégorie $\mathbb{A}$ s'identifie à un graphe à composition (encore noté) $\mathbb{A}$ tel que :

- $ObId(\mathbb{A}) = Ob(\mathbb{A})$,

- $CComp(\mathbb{A}) = \{ (a_2,a_1) \in Fl(\mathbb{A}) \times Fl(\mathbb{A}) \ / \ dom(a_2) = codom(a_1) \}$,

- la composition est associative,

ou encore tel que :

- $\mathrm{ObId}(\mathbb{A}) = \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$,

- pour tous objets A_1 , A_2 , $A_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$, on a :

$$\mathbb{A}^{\therefore}(A_1,A_2,A_3) = \mathbb{A}(A_2,A_3) \times \mathbb{A}(A_1,A_2) \ ,$$

- pour tous objets A_1 , A_2 , $A_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$, le diagramme (de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(A_3,A_4) \times (\mathbb{A}(A_2,A_3) \times \mathbb{A}(A_1,A_2)) \arrow[rr, "\mathrm{id}(\mathbb{A}(A_3,A_4)) \times comp(A_1,A_2,A_3)"'] & & \mathbb{A}(A_3,A_4) \times \mathbb{A}(A_1,A_3) \arrow[d, "comp(A_1,A_3,A_4)"'] \\
& & \mathbb{A}(A_1,A_4) \\
(\mathbb{A}(A_3,A_4) \times \mathbb{A}(A_2,A_3)) \times \mathbb{A}(A_1,A_2) \arrow[uu, "\mathrm{ass}", "\simeq"'] \arrow[rr, "comp(A_2,A_3,A_4) \times \mathrm{id}(\mathbb{A}(A_1,A_2))"] & & \mathbb{A}(A_2,A_4) \times \mathbb{A}(A_1,A_2) \arrow[u, "comp(A_1,A_2,A_4)"]
\end{tikzcd}$$

De la même manière, on laisse au lecteur le soin de procéder aux identifications qui s'imposent concernant les foncteurs entre catégories.

Enfin, si $\mathbb{D}$ est un graphe à composition, si $\mathbb{A}$ est une catégorie (par conséquent, un graphe à composition particulier), si F_1 , $F_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{A}$ sont deux foncteurs, il est facile de définir (par pure analogie avec le cas des catégories, i.e. quand $\mathbb{D}$ est aussi une catégorie) ce qu'est une transformation *naturelle* $N : F_1 \Longrightarrow F_2$ de F_1 vers F_2 [7].

---

[7] Il est moins facile de définir ce qu'est une telle transformation encore naturelle $N : F_1 \Longrightarrow F_2$, lorsque $\mathbb{A}$ n'est plus nécessairement une catégorie mais seulement un graphe à composition (voir [P.T.G.M.]). En revanche, on définit facilement ce qu'est une transformation "non naturelle" $T : F_1 \Longrightarrow F_2$, y compris lorsque $\mathbb{A}$ n'est qu'un graphe à composition (voir le §3 où ceci est utilisé pour doter $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$ d'une structure monoïdale symétrique fermée particulière).

2. Syntaxes et algèbres

2.1. Syntaxes[1]

Introduisons la notion de syntaxe (d'algèbres), par une simple traduction - au cas des graphes à composition (au lieu de celui des "graphes multiplicatifs") - de celle introduite en [T.A.E.P.] :

<u>Définition 1 :</u> On dit que $\mathcal{D} = (\mathbb{A}, \mathrm{J}, \mathbb{B}, \mathrm{K}, \mathbb{D})$ est une *syntaxe (d'algèbres) sur* $\mathbb{A}$ si et seulement si :

- $\mathbb{A}$ est une catégorie,
- $\mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ sont des graphes à composition,
- $\mathrm{J} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ est un foncteur injectif,
- $\mathrm{K} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un foncteur bijectif sur les objets.

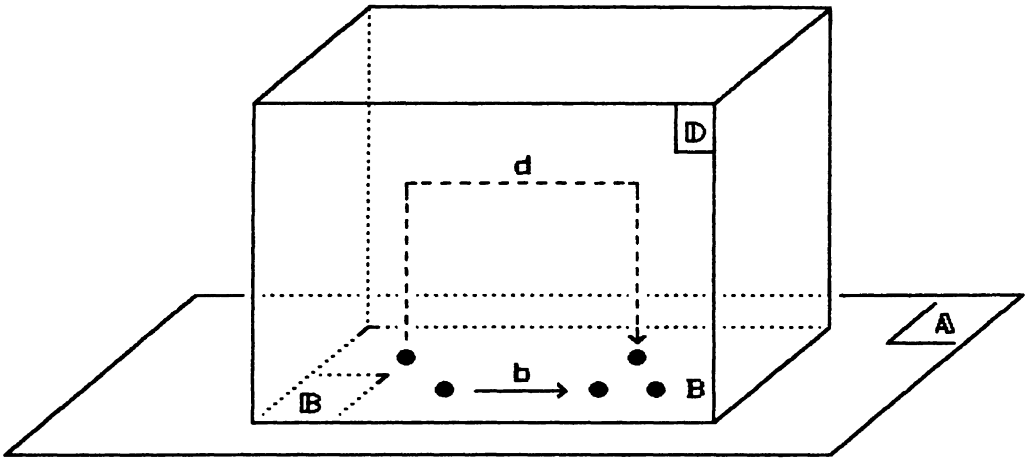
Dans toute la suite, on pourra considérer (pour simplifier ne serait-ce que les représentations graphiques) que $\mathrm{J} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ est une injection *canonique* et que la restriction de K aux objets est une (bijection *canonique* i.e. une) application identité. Ainsi, on pourra poser :

- $\mathrm{J(b)} = \mathrm{b}$ pour toute flèche b de $\mathbb{B}$,
- $\mathrm{J(B)} = \mathrm{B}$ et $\mathrm{K(B)} = \mathrm{B}$ pour tout objet B de $\mathbb{B}$,

et on pourra représenter tout objet D de $\mathbb{D}$ par l'unique objet B de $\mathbb{B}$ tel que $\mathrm{D} = \mathrm{K(B)} = \mathrm{B}$.

[1] On trouvera des exemples de syntaxes en Section C, §6.2 (i.e. en [S.C.C.C.]).

Dans ces conditions, on pourra visualiser les données attachées à une telle syntaxe $\mathcal{D}$ comme suit :



(celles des flèches de $\mathbb{D}$ qui "n'appartiennent pas à" $\mathbb{B}$ - i.e. qui ne sont pas dans l'image de K - étant représentées en pointillé car vues comme "formellement rajoutées à" $\mathbb{B}$).

On dira qu'une syntaxe $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ est *petite* (resp. *localement petite*) si et seulement si $\mathbb{A}$ est localement petite et si $\mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ sont des graphes à composition petits (resp. localement petits). Dans ces conditions, il est trivial de constater[2] que $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ est une syntaxe localement petite si et seulement si :

- $\mathbb{A}$ est une catégorie localement petite,
- $\mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ sont des graphes à composition localement

[2] Nous prions le lecteur de bien vouloir excuser ce passage qui peut paraître particulièrement pédant. Mais, cette manière de présenter les choses prendra tout son intérêt lorsqu'il s'agira d'enrichir - au §4 - les syntaxes.

petits,

- $J : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ est un foncteur injectif sur les objets,

- pour tous objets $B_1, B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, l'application $J(B_1,B_2) : \mathbb{B}(B_1,B_2) \longrightarrow \mathbb{A}(J(B_1),J(B_2))$ est injective,

- $K : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un foncteur bijectif sur les objets.

Si α est un ordinal régulier et si $\mathbb{A}$ est localement petite, on dira que $\mathcal{D}$ est *de rang* $\leq \alpha$ (*sur* $\mathbb{A}$) si et seulement si :

- pour tout objet $B \in Ob(\mathbb{B})$, $J(B)$ est un objet α-présentable (voir [L.P.L.G.]) de $\mathbb{A}$.

Les homomorphismes entre syntaxes sont définis comme suit :

<u>Définition 2 :</u> Si $\mathcal{D}=(\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ et si $\mathcal{D}'=(\mathbb{A}',J',\mathbb{B}',K',\mathbb{D}')$ sont deux syntaxes sur les catégories localement petites respectives $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$, on dit que $\mathcal{H} = (F,\nu,R,Q,H)$ est un *homomorphisme de* $\mathcal{D}$ *vers* $\mathcal{D}'$, et on note $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$, si et seulement si :

- $F : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$ est un foncteur,

- $R : \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{A}$ est un foncteur,

- $\nu : \mathbb{A}(-,R(-)) \Longrightarrow \mathbb{A}'(F(-),-) : \mathbb{A}^{op} \times \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{E}ns$ est une équivalence naturelle,

- $Q : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}'$ est un foncteur,

- $H : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ est un foncteur,

- les deux diagrammes ci-dessous sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "J"'] & \mathbb{B}' \arrow[d, "J'"] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "F"'] & \mathbb{A}'
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{B} \arrow[r, "Q"] \arrow[d, "K"'] & \mathbb{B}' \arrow[d, "K'"] \\
\mathbb{D} \arrow[r, "H"'] & \mathbb{D}'
\end{tikzcd}$$

(en particulier, R est un adjoint à droite de F et (F,ν,R) est une adjonction[3]).

On dira aussi que $\mathcal{H}$ est un homomorphisme *sur* (l'adjonction) (F,ν,R) . Plus particulièrement encore, si $\mathbb{A} = \mathbb{A}'$, si $F = id(\mathbb{A}) = R$ et si $\nu = id(\mathbb{A}(-,-))$, on dira que $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un homomorphisme *sur* $\mathbb{A}$ et on notera plus simplement :

$$\mathcal{H} = (id(\mathbb{A}), id(\mathbb{A}(-,-)), id(\mathbb{A}), Q, H) = (Q,H) \quad .$$

Si $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ sont trois syntaxes sur les catégories localement petites respectives $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$, $\mathbb{A}''$ et si $\mathcal{H}=(F,\nu,R,Q,H) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ et $\mathcal{H}'=(F',\nu',R',Q',H') : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}''$ sont deux homomorphismes, il est clair que :

$$\mathcal{H}' \cdot \mathcal{H} = (F' \cdot F, \nu' @ \nu, R \cdot R', Q' \cdot Q, H' \cdot H) : \mathcal{D} \to \mathcal{D}''$$

est un homomorphisme, appelé *le composé de* $\mathcal{H}'$ *avec* $\mathcal{H}$, où on a successivement posé[4] :

[3] Une adjonction telle que celle notée (F,ν,R) ici pourra aussi être notée dans la suite $(F,\nu,R) = (\mathbb{A},F,\nu,R,\mathbb{A}') = (F,R)$ (selon le degré de sur-précision ou d'ambiguïté acceptable).

[4] Si $\eta : F_1 \Longrightarrow F_2 : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}''$ est une transformation naturelle et si $F : \mathbb{C}'' \to \mathbb{C}'''$ (resp. $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$) est un foncteur, on note $F \circ \eta : F \circ F_1 \Longrightarrow F \circ F_2 : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}'''$ (resp. $\eta \circ F : F_1 \circ F \Longrightarrow F_2 \circ F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}''$) la transformation naturelle composée qui en résulte (et que nous laissons au lecteur le soin de préciser).
si $\eta : F_1 \Longrightarrow F_2 : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}''$ et $\mu : F_2 \Longrightarrow F_3 : \mathbb{C}' \to \mathbb{C}''$

$$\nu(-,R'(-)) = \nu\circ(\mathrm{id}(\mathbb{A})^{op} \times R') ,$$
$$\nu'(F(-),-) = \nu'\circ(F^{op} \times \mathrm{id}(\mathbb{A}''))$$

et :

$$\nu'@\nu = \nu'(F(-),-)*\nu(-,R'(-)) ,$$

de sorte que :

- pour tout objet $A \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A})$ et tout objet $A'' \in \mathrm{Ob}(\mathbb{A}'')$, le diagramme (de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$!) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{A}'(F(A),R'(A'')) \arrow[dr, "\nu'(F(A),A'')"] & \\ \mathbb{A}(A,R(R'(A''))) \arrow[ur, "\nu(A,R'(A''))"] \arrow[rr, "(\nu'@\nu)(A,A'')"'] & & \mathbb{A}''(F'(F(A)),A'') \end{tikzcd}$$

Enfin, si $(\mathbb{A},F,\nu,R,\mathbb{A}')$ est une adjonction et si $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ est une syntaxe, on dit qu'elle est *transportable par* F si et seulement si $F\cdot\mathcal{D} = (\mathbb{A}',F\circ J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ est une syntaxe sur $\mathbb{A}'$ (autrement dit, si le foncteur $F\circ J : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}'$ est encore injectif). Dans ce cas, il est clair que $(F,\nu,R,\mathrm{id}(\mathbb{B}),\mathrm{id}(\mathbb{D})) : \mathcal{D} \longrightarrow F\cdot\mathcal{D}$ est un homomorphisme.

2.2. Algèbres[5]

La notion de syntaxe (d'algèbres) n'a d'intérêt qu'ac-

sont deux transformations naturelles, on note $\mu*\eta : F_1 \Longrightarrow F_3 : \mathbb{C}' \longrightarrow \mathbb{C}''$ la transformation naturelle composée qui en résulte (et que nous laissons au lecteur le soin de préciser).

[5] On trouvera des exemples d'algèbres en Section C, §6.2 (i.e. en [S.C.C.C.]).

compagnée d'une notion de sémantique (i.e. d'algèbre) associée. Introduisons-la sous une forme équivalente à celle de [T.A.E.P.], mais adaptée au cas des graphes à composition (au lieu de celui des "graphes multiplicatifs") et plus appropriée aux développements que nous avons en vue.

<u>Définition 3 :</u> Si $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ est une syntaxe localement petite sur la catégorie localement petite $\mathbb{A}$, on dit que (A,ϑ) est une *$\mathcal{D}$-algèbre* si et seulement si :

- A est un objet de $\mathbb{A}$,

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ de $\mathbb{B}$:

$$\vartheta(B_1,B_2) \;:\; \mathbb{A}(J(B_2),A) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}(J(B_1),A))$$

est une application (i.e. une flèche de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$!),

- pour tout objet $B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ de $\mathbb{B}$ tel que $K(B) \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$, le diagramme (de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$!) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(J(B),A) \arrow[r, "\vartheta(B,B)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(K(B),K(B)),\mathbb{A}(J(B),A)) \arrow[d, "\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathit{selid}_{\mathbb{D}}(K(B)),\mathrm{id}(\mathbb{A}(J(B),A)))"'] \\
\mathbb{A}(J(B),A) \arrow[r, "\mathrm{curry}(\mathrm{drte}_{\mathbb{A}(J(B),A)})"'] & \mathbb{E}\mathrm{ns}(1,\mathbb{A}(J(B),A))
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{curry}(\mathrm{drte}_{\mathbb{A}(J(B),A)}) = \left[\, \mathit{select}_{\mathbb{A},J(B),A}(-) \,\right]$$

- pour tous objets B_1 , B_2 , $B_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, le diagramme (de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$!) ci-dessous est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{E}ns(\mathbb{D}(K(B_2),K(B_3)),\mathbb{A}(J(B_2),A)) \arrow[d, "\mathbb{E}ns(id(\mathbb{D}(K(B_2),K(B_3))),\vartheta(B_1,B_2))"] & \\
\mathbb{E}ns(\mathbb{D}(K(B_2),K(B_3)),\mathbb{E}ns(\mathbb{D}(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}(J(B_1),A))) \arrow[d, "curry^{-1}", "\simeq"'] & \\
\mathbb{E}ns(\mathbb{D}(K(B_2),K(B_3))\times\mathbb{D}(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}(J(B_1),A)) \arrow[d, "\mathbb{E}ns(inj_{\mathbb{D}}(K(B_1),K(B_2),K(B_3)),id(\mathbb{A}(J(B_1),A)))"] & \mathbb{A}(J(B_3),A) \arrow[uul, "\vartheta(B_2,B_3)"'] \arrow[ddl, "\vartheta(B_1,B_3)"] \\
\mathbb{E}ns(\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(K(B_1),K(B_2),K(B_3)),\mathbb{A}(J(B_1),A)) & \\
\mathbb{E}ns(\mathbb{D}(K(B_1),K(B_3)),\mathbb{A}(J(B_1),A)) \arrow[u, "\mathbb{E}ns(comp_{\mathbb{D}}(K(B_1),K(B_2),K(B_3)),id(\mathbb{A}(J(B_1),A)))"] &
\end{tikzcd}
$$

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, le diagramme (de $\mathbb{E}ns$!) ci-dessous est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}(J(B_1),A)) \arrow[d, "\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathit{K}(B_1,B_2),\mathrm{id}(\mathbb{A}(J(B_1),A)))"] \\
\mathbb{A}(J(B_2),A) \arrow[ur, "\vartheta(B_1,B_2)"] \arrow[dr, "\mathrm{curry}(\mathit{comp}_{\mathbb{A}}(J(B_1),J(B_2),A))"'] & \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{B}(B_1,B_2),\mathbb{A}(J(B_1),A)) \\
 & \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{A}(J(B_1),J(B_2)),\mathbb{A}(J(B_1),A)) \arrow[u, "\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathit{J}(B_1,B_2),\mathrm{id}(\mathbb{A}(J(B_1),A)))"']
\end{tikzcd}
$$

Pour une telle $\mathcal{D}$-algèbre (A,ϑ), si B_1, $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, si $x : J(B_2) \longrightarrow A$ est une flèche de $\mathbb{A}$ et si $d : K(B_1) \longrightarrow K(B_2)$ est une flèche de $\mathbb{D}$, alors on note $\vartheta(B_1,B_2)(x)(d) = x \cdot_{\vartheta} d$. Ainsi, les trois axiomes exprimant que (A,ϑ) est une $\mathcal{D}$-algèbre se réécrivent comme suit :

- pour tout objet $B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ tel que $K(B) \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$ et pour toute flèche $x : J(B) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_{\vartheta} \mathrm{id}_{\mathbb{D}}(K(B)) = x \ ,$$

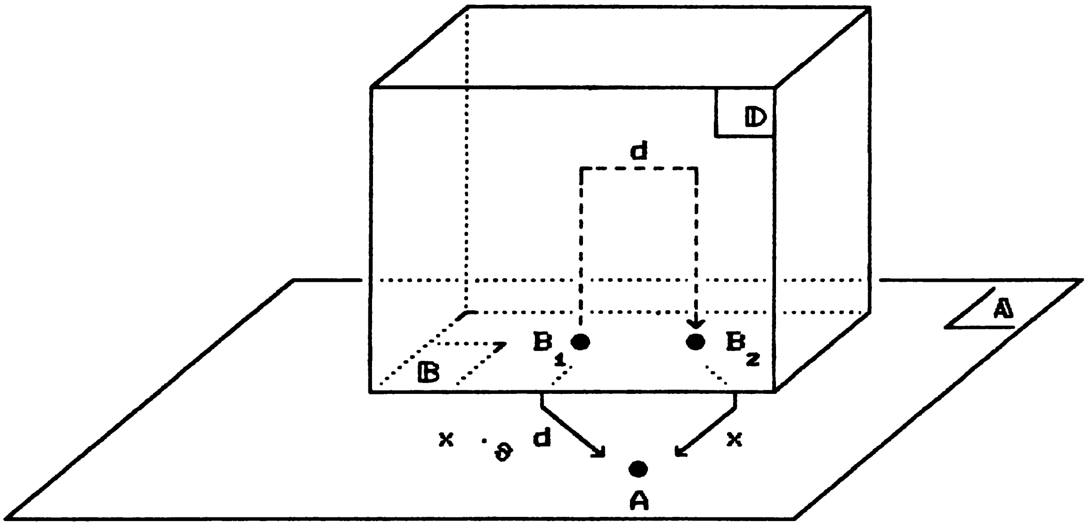
- pour tous objets B_1, B_2, $B_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toutes flèches $d_1 : K(B_1) \longrightarrow K(B_2)$ et $d_2 : K(B_2) \longrightarrow K(B_3)$ composables dans $\mathbb{D}$ et pour toute flèche $x : J(B_3) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_{\vartheta} (d_2 \cdot_{\mathbb{D}} d_1) = (x \cdot_{\vartheta} d_2) \cdot_{\vartheta} d_1 \ ,$$

- pour tous objets B_1, $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute flèche $b : B_1 \longrightarrow B_2$ de $\mathbb{B}$ et pour toute flèche $x : J(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_{\vartheta} K(b) = x \cdot_{\mathbb{A}} J(b) \ .$$

On pourra visualiser cette loi de composition attachée à une telle $\mathcal{D}$-algèbre (A,ϑ) comme suit :



ou, plus simplement, ainsi :

$$\begin{array}{ccc} B_1 & \overset{d}{\dashrightarrow} & B_2 \\ & {\scriptstyle x\,\cdot_\vartheta\, d}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle x} & \\ & A & \end{array}$$

La définition des homomorphismes entre $\mathcal{D}$-algèbres s'obtient assez automatiquement. Explicitons-la.

<u>Définition 4 :</u> Si $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ est une syntaxe localement petite sur la catégorie localement petite $\mathbb{A}$ et si (A_1,ϑ_1) et (A_2,ϑ_2) sont deux $\mathcal{D}$-algèbres, on dit qu'une flèche $a : A_1 \longrightarrow A_2$ de $\mathbb{A}$ définit un *$\mathcal{D}$-homomorphisme* $a^{\mathcal{D}}$ *de* (A_1,ϑ_1) *vers* (A_2,ϑ_2) , et on note

$a^{\mathcal{D}} : (A_1,\vartheta_1) \longrightarrow (A_2,\vartheta_2)$, si et seulement si :

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, le diagramme (de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$!) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{A}(J(B_2),A_1) \arrow[dl, "\vartheta_1(B_1,B_2)"'] \arrow[dr, "\mathbb{A}(J(B_2){,}a)"] & \\
\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}(J(B_1),A_1)) \arrow[dr, "\mathbb{E}\mathrm{ns}(id(\mathbb{D}(K(B_1){,}K(B_2))){,}\mathbb{A}(id(J(B_1)){,}a))"] & & \mathbb{A}(J(B_2),A_2) \arrow[dl, "\vartheta_2(B_1,B_2)"'] \\
& \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}(J(B_1),A_2)) &
\end{tikzcd}$$

On dira plus simplement qu'un tel $\mathcal{D}$-homomorphisme $a^{\mathcal{D}}$ est un *homomorphisme* et il nous arrivera même de noter $a^{\mathcal{D}} = a : (A_1,\vartheta_1) \longrightarrow (A_2,\vartheta_2)$. Enfin, compte tenu des notations adoptées pour les $\mathcal{D}$-algèbres, l'axiome exprimant que $a : A_1 \longrightarrow A_2$ définit un homomorphisme se réécrit comme suit :

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute flèche $d : K(B_1) \longrightarrow K(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute flèche $x : J(B_2) \longrightarrow A_1$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$a \cdot_{\mathbb{A}} (x \cdot_{\vartheta_1} d) = (a \cdot_{\mathbb{A}} x) \cdot_{\vartheta_2} d \ .$$

Alors, on note $\mathbb{A}^{\mathcal{D}}$ la catégorie (évidemment localement petite) dont les objets sont les $\mathcal{D}$-algèbres et dont les flèches sont les $\mathcal{D}$-homomorphismes. On dispose donc du foncteur (évidemment fidèle) :

$$\begin{aligned} U^{\mathcal{D}} : \mathbb{A}^{\mathcal{D}} &\longrightarrow \mathbb{A} \\ (A,\vartheta) &\longmapsto A \\ a^{\mathcal{D}} &\longmapsto a \end{aligned}$$

Etablissons, maintenant, qu'un homomorphisme entre syntaxes *induit* un foncteur entre leurs catégories d'algèbres.

Précisément, si $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ et $\mathcal{D}' = (\mathbb{A}',J',\mathbb{B}',K',\mathbb{D}')$ sont deux syntaxes localement petites sur les catégories localement petites respectives $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$, si $\mathcal{K} = (F,\nu,R,Q,H) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un homomorphisme (de syntaxes) et si (A',ϑ') est une $\mathcal{D}'$-algèbre, alors il est facile de vérifier que $(R(A'),\mathcal{K}(\vartheta'))$ est une $\mathcal{D}$-algèbre, où :

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, pour toute flèche $d : K(B_1) \longrightarrow K(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute flèche $x : J(B_2) \longrightarrow R(A')$, on a :

$$x \cdot_{\mathcal{K}(\vartheta')} d = \nu^{-1}(J(B_1),A')(\nu(J(B_2),A')(x) \cdot_{\vartheta'} H(d)) \quad ,$$

comme représenté par le diagramme ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
J(B_1) \arrow[rr, dashed, "d"] \arrow[dr, "{x \cdot_{\mathscr{X}(\vartheta')} d \overset{=}{\text{déf}} \nu^{-1}(J(B_1),A')(x'')}"'] & & J(B_2) \arrow[dl, "x"] \\
& R(A') &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A} \arrow[d, shift right, "F"'] \\
\mathbb{A}' \arrow[u, shift right, "R"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
J'(Q(B_1)) = F(J(B_1)) \arrow[rr, dashed, "H(d)"] \arrow[dr, "{x'' = x' \cdot_{\vartheta'} H(d)}"'] & & F(J(B_2)) = J'(Q(B_2)) \arrow[dl, "{x' = \nu(J(B_2),A')(x)}"] \\
& A' &
\end{tikzcd}
$$

De la sorte, il est clair qu'on dispose d'un foncteur, dit *induit par* $\mathscr{X}$ **:**

$$
\begin{aligned}
R^{\mathscr{X}} : \mathbb{A}'^{\mathscr{D}'} &\longrightarrow \mathbb{A}^{\mathscr{D}} \\
(A',\vartheta') &\longmapsto (R(A'),\mathscr{X}(\vartheta')) \\
a'^{\mathscr{D}'} &\longmapsto R(a')^{\mathscr{D}}
\end{aligned}
$$

et que le diagramme (*) ci-dessous est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{A}'^{\mathscr{D}'} \arrow[r, "R^{\mathscr{X}}"] \arrow[d, "U'^{\mathscr{D}'}"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & \mathbb{A}^{\mathscr{D}} \arrow[d, "U^{\mathscr{D}}"] \\
\mathbb{A}' \arrow[r, "R"] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}
$$

En particulier, si $\mathcal{D} = \mathrm{vide}(\mathbb{A})$ est la syntaxe vide sur $\mathbb{A}$ (i.e. la syntaxe pour laquelle $\mathbb{B} = \mathbb{D} = \emptyset$), si $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$ et si $\mathcal{H} : \mathrm{vide}(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathcal{D}'$ est l'unique homomorphisme sur $\mathbb{A}$ possible, il est trivial de constater que $\mathbb{A}^{\mathrm{vide}(\mathbb{A})}$ s'identifie à $\mathbb{A}$, puis que $R^{\mathcal{H}} : \mathbb{A}^{\mathcal{D}'} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{vide}(\mathbb{A})}$ s'identifie à $U^{\mathcal{D}'} : \mathbb{A}^{\mathcal{D}'} \longrightarrow \mathbb{A}$. Précisément, ceci signifie que le diagramme (**) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathcal{D}'} \arrow[r, "\mathrm{id}(\mathbb{A})^{\mathcal{H}}"] \arrow[d, "U^{\mathcal{D}'}"'] \arrow[dr, phantom, "(**)"] & \mathbb{A}^{\mathrm{vide}(\mathbb{A})} \arrow[d, "U^{\mathrm{vide}(\mathbb{A})}"] \\
\mathbb{A} \arrow[r, "\mathrm{id}(\mathbb{A})", "\simeq"'] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

Bien entendu, il est également facile de vérifier que "l'induction des foncteurs est fonctorielle", i.e. notamment que, si :

- $\mathcal{D}=(\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$, $\mathcal{D}'=(\mathbb{A}',J',\mathbb{B}',K',\mathbb{D}')$ et $\mathcal{D}''=(\mathbb{A}'',J'',\mathbb{B}'',K'',\mathbb{D}'')$ sont trois syntaxes localement petites sur les catégories localement petites respectives $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$ et $\mathbb{A}''$,

- $\mathcal{H}=(F,\nu,R,Q,H) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ et $\mathcal{H}'=(F',\nu',R',Q',H') : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}''$ sont deux homomorphismes,

alors le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \arrow[dr, "R^{\mathcal{H}}"] & \\
\mathbb{A}''^{\mathcal{D}''} \arrow[ur, "R'^{\mathcal{H}'}"] \arrow[rr, "(R\cdot R')^{(\mathcal{H}'\cdot\mathcal{H})}"] & & \mathbb{A}^{\mathcal{D}}
\end{tikzcd}$$

Pour conclure, on laisse au lecteur le soin de retrouver immédiatement, à partir de cette dernière commutation, la commutation (*) (et donc la commutation (**)) particulière précédente.

2.3. Algèbres libres et théories engendrées

On peut démontrer (voir [A.M.E.N.]) que, moyennant des hypothèses naturelles "en pratique", un objet d'une catégorie engendre librement une algèbre pour une syntaxe donnée sur cette catégorie.

Précisément, nous avons :

Proposition 1 : *Si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathbb{A}$ *est une catégorie localement petite et co-complète et si* $\mathcal{D} = (\mathbb{A}, J, \mathbb{B}, K, \mathbb{D})$ *est une syntaxe petite et de rang* $\leq \alpha$ *sur* $\mathbb{A}$ *, alors le foncteur* $U^{\mathcal{D}} : \mathbb{A}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{A}$ *admet un adjoint à gauche* $L^{\mathcal{D}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{D}}$ *et est monadique.*

Si $\mathcal{D} = (\mathbb{A}, J, \mathbb{B}, K, \mathbb{D})$ est une syntaxe localement petite sur la catégorie localement petite $\mathbb{A}$, on note $\mathcal{Ach}(\mathcal{D}) = (\mathbb{A}, id(\mathbb{A}), \mathbb{A}, ach_{\mathcal{D}}(K), Ach_{\mathcal{D}}(\mathbb{D}))$ (ou, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, $\mathcal{Ach}(\mathcal{D}) = (\mathbb{A}, id(\mathbb{A}), \mathbb{A}, ach(K), Ach(\mathbb{D}))$) la syntaxe sur $\mathbb{A}$, dite *syntaxe achevée engendrée par* $\mathcal{D}$, telle que :

- $Ach(\mathbb{D})$ est la catégorie image pleine (au sens de [A.O.F.S.]) du foncteur[6] :

[6] si $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ sont deux catégories, on désigne par $Fonct(\mathbb{C}, \mathbb{C}')$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}'$ et dont les flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\longrightarrow \mathrm{Fonct}(\mathbb{A}^{\mathcal{D}},\mathbb{E}\mathrm{ns})^{op} \\ A &\longmapsto \mathbb{A}(A,U^{\mathcal{D}}(-)) \\ (a:A_1 \to A_2) &\longmapsto \mathbb{A}(a,U^{\mathcal{D}}(-)) \end{aligned} \quad ,$$

- $\mathrm{ach}(K) : \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Ach}(\mathbb{D})$ est le foncteur associé (voir [A.O.F.S.]), i.e. :

$$\begin{aligned} \mathrm{ach}(K) : \mathbb{A} &\longrightarrow \mathrm{Ach}(\mathbb{D}) \\ A &\longmapsto (A,\mathbb{A}(A,U^{\mathcal{D}}(-))) \\ (a:A_1 \to A_2) &\longmapsto (A_1,\mathbb{A}(a,U^{\mathcal{D}}(-)),A_2) \end{aligned} \quad .$$

Clairement, si B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ et si $d : K(B_1) \to K(B_2)$ est une flèche de $\mathbb{D}$, il est facile de vérifier qu'on dispose d'une transformation naturelle :

$$n_{\mathcal{D}}(d) : \mathbb{A}(J(B_2),U^{\mathcal{D}}(-)) \Longrightarrow \mathbb{A}(J(B_1),U^{\mathcal{D}}(-)) \quad ,$$

si, pour toute $\mathcal{D}$-algèbre (A,ϑ) , la flèche $n_{\mathcal{D}}(d)(A,\vartheta)$ rend commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(J(B_2),A) \arrow[r, "\vartheta(B_1,B_2)"] \arrow[d, "n_{\mathcal{D}}(d)(A,\vartheta)"'] & \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(K(B_1),K(B_2)),\mathbb{A}(J(B_1),A)) \arrow[d, "\mathbb{E}\mathrm{ns}(select_{\mathbb{D}}(d),id(\mathbb{A}(J(B_1),A)))"] \\
\mathbb{A}(J(B_1),A) \arrow[r, "\simeq", "select_{\mathbb{A}}(-)"'] & \mathbb{E}\mathrm{ns}(1,\mathbb{A}(J(B_1),A))
\end{tikzcd}$$

(i.e. si, pour toute flèche $x : J(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$n_{\mathcal{D}}(d)(A,\vartheta)(x) = x \cdot_{\vartheta} d \quad).$$

Ainsi, on construit un foncteur :

$$\begin{aligned} n_{\mathcal{D}} : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathrm{Fonct}(\mathbb{A}^{\mathcal{D}},\mathbb{E}\mathrm{ns})^{op} \\ K(B) &\longmapsto \mathbb{A}(J(B),U^{\mathcal{D}}(-)) \\ d &\longmapsto n_{\mathcal{D}}(d) \end{aligned}$$

et on note $\mathit{cano}(\mathcal{D}) = (J,\mathrm{cano}_{\mathcal{D}}(\mathbb{D})) : \mathcal{D} \to \mathcal{A}ch(\mathcal{D})$ (ou, plus simplement, $\mathit{cano}(\mathcal{D}) = (J,\mathrm{cano}(\mathbb{D})) : \mathcal{D} \to \mathcal{A}ch(\mathcal{D})$) l'homomorphisme, dit *canonique*, de syntaxes sur $\mathbb{A}$ tel que :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{cano}(\mathbb{D}) : \mathbb{D} & \longrightarrow & \mathrm{Ach}(\mathbb{D}) \\ K(B) & \longmapsto & (J(B), \mathbb{A}(J(B), U^{\mathcal{D}}(-))) \\ (d : K(B_1) \to K(B_2)) & \longmapsto & (J(B_1), n_{\mathcal{D}}(d), J(B_2)) \end{array} .$$

Supposons, maintenant, que $\mathcal{D} = (\mathbb{A}, J, \mathbb{B}, K, \mathbb{D})$ et $\mathcal{D}' = (\mathbb{A}', J', \mathbb{B}', K', \mathbb{D}')$ sont deux syntaxes localement petites sur les catégories localement petites respectives $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}'$ et que $\mathcal{H} = (F, \nu, R, Q, H) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un homomorphisme.

Si A_1 et A_2 sont deux objets de la catégorie $\mathbb{A}$ et si $N : \mathbb{A}(A_2, U^{\mathcal{D}}(-)) \Longrightarrow \mathbb{A}(A_1, U^{\mathcal{D}}(-))$ est une transformation naturelle, on désigne (pour simplifier) par $n_{\mathcal{H}}(N) : \mathbb{A}'(F(A_2), U^{\mathcal{D}'}(-)) \Longrightarrow \mathbb{A}'(F(A_1), U^{\mathcal{D}'}(-))$ l'unique transformation naturelle rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}(A_2, U^{\mathcal{D}}(R^{\mathcal{H}}(-))) = \mathbb{A}(A_2, R(U^{\mathcal{D}'}(-))) \arrow[r, Rightarrow, "N \circ R^{\mathcal{H}}"] \arrow[d, Rightarrow, "\nu(A_2, U^{\mathcal{D}'}(-))"', "\simeq"] & \mathbb{A}(A_1, U^{\mathcal{D}}(R^{\mathcal{H}}(-))) = \mathbb{A}(A_1, R(U^{\mathcal{D}'}(-))) \arrow[d, Rightarrow, "\nu(A_1, U^{\mathcal{D}'}(-))", "\simeq"'] \\ \mathbb{A}'(F(A_2), U^{\mathcal{D}'}(-)) \arrow[r, Rightarrow, "n_{\mathcal{H}}(N)"'] & \mathbb{A}'(F(A_1), U^{\mathcal{D}'}(-)) \end{tikzcd}$$

Ainsi, on dispose du foncteur :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Ach}_{\mathcal{H}}(H) : \mathrm{Ach}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathrm{Ach}_{\mathcal{H}}(\mathbb{D}') \\ (A, \mathbb{A}(A, U^{\mathcal{D}}(-)) & \longmapsto & (F(A), \mathbb{A}'(F(A), U^{\mathcal{D}}(-)) \\ (A_1, N, A_2) & \longmapsto & (F(A_1), n_{\mathcal{H}}(N), F(A_2)) \end{array}$$

(noté plus simplement aussi $\mathrm{Ach}(H) : \mathrm{Ach}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Ach}(\mathbb{D}')$).
Dans ces conditions, il est facile de constater que :

$$\mathcal{A}ch(\mathcal{H}) = (F, \nu, R, F, \mathrm{Ach}_{\mathcal{H}}(H)) : \mathcal{A}ch(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{A}ch(\mathcal{D}')$$

est un homomorphisme, dit *homomorphisme achevé engendré par* $\mathcal{K}$, qui rend commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[r, "\mathcal{K}"] \arrow[d, "cano(\mathcal{D})"'] & \mathcal{D}' \arrow[d, "cano(\mathcal{D}')"] \\ \mathcal{A}ch(\mathcal{D}) \arrow[r, "\mathcal{A}ch(\mathcal{K})"] & \mathcal{A}ch(\mathcal{D}') \end{tikzcd}$$

Manifestement, ce processus d'achèvement des homomorphismes entre syntaxes est fonctoriel.

Examinons maintenant dans quelle mesure la syntaxe achevée engendrée par une syntaxe peut être qualifiée de "théorie" et, mieux, de "plus petite théorie engendrée par la syntaxe d'origine" : c'est le cas lorsque les conditions (suffisantes) de la proposition 1 précédente assurent qu'il existe des algèbres libres.

Commençons par définir les théories :

<u>Définition 5 :</u> Si $\mathcal{T}' = (\mathbb{A}, J', \mathbb{B}', K', \mathbb{T}')$ est une syntaxe localement petite sur la catégorie localement petite $\mathbb{A}$ (auquel cas l'opération d'achèvement est licite), on dit que $\mathcal{T}'$ est une *théorie sur* $\mathbb{A}$ si et seulement si l'homomorphisme canonique :

$$cano(\mathcal{T}') : \mathcal{T}' \longrightarrow \mathcal{A}ch(\mathcal{T}')$$

est un isomorphisme sur $\mathbb{A}$ (en particulier, $\mathbb{B}'$ et $\mathbb{T}'$ sont des catégories, le foncteur $J' : \mathbb{B}' \longrightarrow \mathbb{A}$ et le foncteur induit $id(\mathbb{A})^{cano(\mathcal{T}')} : \mathbb{A}^{\mathcal{A}ch(\mathcal{T}')} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{T}'}$ sont évidemment inversibles).

Maintenant, supposons que α est un ordinal régulier et que $\mathcal{D} = (\mathbb{A}, J, \mathbb{B}, K, \mathbb{D})$ est une syntaxe petite de rang $\leq \alpha$ sur la catégorie localement petite et co-complète $\mathbb{A}$.

Dans ces conditions, d'après la proposition 1, le foncteur $U^{\mathcal{D}} : \mathbb{A}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbb{A}$ admet un adjoint à gauche $L^{\mathcal{D}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{D}}$ et est monadique. Notons $\mathbb{A}_{\mathcal{D}}$ l'image pleine de $L^{\mathcal{D}}$ et $L_{\mathcal{D}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathcal{D}}$ le foncteur associé (autrement dit, $L_{\mathcal{D}}$ est le foncteur canonique de $\mathbb{A}$ vers la catégorie de Kleisli $\mathbb{A}_{\mathcal{D}}$ de la monade $M(\mathcal{D})$ sur $\mathbb{A}$, associée à l'adjonction de $L^{\mathcal{D}}$ à gauche de $U^{\mathcal{D}}$). Ainsi, on dispose d'une nouvelle syntaxe localement petite (puisque $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^{\mathcal{D}}$, et donc $\mathbb{A}_{\mathcal{D}}$, sont des catégories localement petites) sur $\mathbb{A}$, qu'on appelle la *syntaxe de Kleisli (de la monade* $M(\mathcal{D})$ *) associée à* $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{K}\ell(\mathcal{D}) = (\mathbb{A}, id(\mathbb{A}), \mathbb{A}, L_{\mathcal{D}}, \mathbb{A}_{\mathcal{D}}) .$$

Il est facile de vérifier (consulter aussi [A.O.F.S.]) que :

<u>Proposition 2 :</u> *Si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ *est une syntaxe petite de rang* $\leq \alpha$ *sur la catégorie localement petite et co-complète* $\mathbb{A}$ *, alors :*

- il existe un unique isomorphisme (de syntaxes) sur $\mathbb{A}$ *:*

$$\mathcal{A}ch(\mathcal{D}) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{K}\ell(\mathcal{D})$$

($\mathcal{A}ch(\mathcal{D})$ *est donc aussi localement petite et l'opération d'achèvement peut être indifféremment appliquée à* $\mathcal{A}ch(\mathcal{D})$ *ou* $\mathcal{K}\ell(\mathcal{D})$ *),*

- $\mathcal{A}ch(\mathcal{D})$ *est une théorie (de même que* $\mathcal{K}\ell(\mathcal{D})$ *).*

De même, on établit sans difficulté que :

<u>Proposition 3 :</u> *Si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathcal{D} = (\mathbb{A},J,\mathbb{B},K,\mathbb{D})$ *est une syntaxe petite de rang* $\leq \alpha$ *sur la catégorie localement petite et co-complète* $\mathbb{A}$ *, si* $\mathcal{T}' = (\mathbb{A},J',\mathbb{B}',K',\mathbb{T}')$ *est une théorie sur la (même) catégorie* $\mathbb{A}$ *et si* $\mathcal{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{T}'$ *est un homomorphisme (de syntaxes) sur* $\mathbb{A}$ *, alors le diagramme ci-dessous est (par*

définition) commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D} \arrow[dl, "cano(\mathcal{D})"'] \arrow[dr, "\mathcal{X}"] & \\
\mathcal{A}ch(\mathcal{D}) \arrow[dr, "\mathcal{A}ch(\mathcal{X})"'] & & \mathcal{T}' \arrow[dl, "\simeq", "cano(\mathcal{T}')"'] \\
& \mathcal{A}ch(\mathcal{T}') &
\end{tikzcd}$$

et $fact(\mathcal{X}) = cano(\mathcal{T}')^{-1}.\mathcal{A}ch(\mathcal{X}) : \mathcal{A}ch(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{T}'$ *est l'unique homomorphisme (de syntaxes) rendant commutatif le diagramme ci-dessous (i.e. factorisant* $\mathcal{X}$ *au travers de* $cano(\mathcal{D})$ *) :*

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D} \arrow[dl, "cano(\mathcal{D})"'] \arrow[dr, "\mathcal{X}"] & \\
\mathcal{A}ch(\mathcal{D}) \arrow[rr, "{fact(\mathcal{X}) = \left[cano(\mathcal{T}')^{-1}.\mathcal{A}ch(\mathcal{X}) \right]}"'] & & \mathcal{T}'
\end{tikzcd}$$

D'après ce qui précède, il est (évidemment) possible qu'un homomorphisme entre deux syntaxes différentes induise un isomorphisme entre leurs catégories d'algèbres : ceci peut se tester en comparant les théories qu'elles engendrent.

Précisément, énonçons la définition suivante :

<u>Définition 6 :</u> Si $\mathcal{D}_1=(\mathbb{A},J_1,\mathbb{B}_1,K_1,\mathbb{D}_1)$ et $\mathcal{D}_2=(\mathbb{A},J_2,\mathbb{B}_2,K_2,\mathbb{D}_2)$ sont deux syntaxes localement petites sur la même catégo-

rie[7] localement petite $\mathbb{A}$ et si $\mathcal{H} = (Q,H) : \mathcal{D}_1 \longrightarrow \mathcal{D}_2$ est un homomorphisme sur $\mathbb{A}$, on dit que $\mathcal{H}$ est une *isologie (sur $\mathbb{A}$) de $\mathcal{D}_1$ vers $\mathcal{D}_2$* et que $\mathcal{D}_1$ est *isologue (sur $\mathbb{A}$, via $\mathcal{H}$) à $\mathcal{D}_2$* si et seulement si :

– le foncteur $R^{\mathcal{H}} : \mathbb{A}^{\mathcal{D}_2} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{D}_1}$ est un isomorphisme.

Plus généralement, on pourra dire que deux syntaxes sur $\mathbb{A}$ sont *isovalentes (sur $\mathbb{A}$)* si et seulement si elles sont isologues (sur $\mathbb{A}$) à une même troisième.

Pour conclure, on déduit des propositions 2 et 3 précèdentes que :

<u>Proposition 4 :</u> *Si α est un ordinal régulier, si $\mathcal{D}_1 = (\mathbb{A},J_1,\mathbb{B}_1,K_1,\mathbb{D}_1)$ et $\mathcal{D}_2 = (\mathbb{A},J_2,\mathbb{B}_2,K_2,\mathbb{D}_2)$ sont deux syntaxes petites de rang $\leq \alpha$ sur la catégorie localement petite et co-complète $\mathbb{A}$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *les syntaxes $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont isovalentes sur $\mathbb{A}$,*

(ii) *les catégories d'algèbres $\mathbb{A}^{\mathcal{D}_1}$ et $\mathbb{A}^{\mathcal{D}_2}$ sont isomorphes au dessus de $\mathbb{A}$, i.e. on dispose d'un diagramme commutatif tel que ci-dessous :*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathcal{D}_2} \arrow[rr, "\simeq"] \arrow[dr, "U^{\mathcal{D}_2}"'] & & \mathbb{A}^{\mathcal{D}_1} \arrow[dl, "U^{\mathcal{D}_1}"] \\
& \mathbb{A} &
\end{tikzcd}$$

[7] On laisse au lecteur le soin de définir les isologies de syntaxes sur des catégories différentes, notion que nous n'utiliserons pas dans la suite.

(iii) *les théories* $\mathcal{A}ch(\mathcal{D}_1)$ *et* $\mathcal{A}ch(\mathcal{D}_2)$ *(i.e. les syntaxes achevées) respectivement engendrées par* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont isomorphes sur* $\mathbb{A}$.

3. Graphes à composition et amphi-graphes à composition

3.1. Tensorisation et exponentiation des graphes à composition

On peut munir la catégorie $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$ des petits graphes à composition d'une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée spécifique (parmi *beaucoup* d'autres possibles), dite *maigre*.

Construisons tout d'abord le foncteur *tensorisation maigre des graphes à composition* :

$$-\otimes- : \mathbb{G}\mathrm{rComp} \times \mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp} .$$

Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux (petits) graphes à composition, on désigne par $\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}'$ le (petit) graphe à composition (bien) défini comme suit :

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}') = \mathrm{Ob}(\mathbb{D}) \times \mathrm{Ob}(\mathbb{D}')$,

- $\mathrm{Fl}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}')$ est la somme fibrée (dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$) représentée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{ObId}(\mathbb{D}) \times \mathrm{ObId}(\mathbb{D}') \arrow[dl, "\mathrm{selid}_{\mathbb{D}} \times \mathrm{injob}_{\mathbb{D}'}"'] \arrow[dr, "\mathrm{injob}_{\mathbb{D}} \times \mathrm{selid}_{\mathbb{D}'}"] & \\
\mathrm{Fl}(\mathbb{D}) \times \mathrm{Ob}(\mathbb{D}') \arrow[dr] & & \mathrm{Ob}(\mathbb{D}) \times \mathrm{Fl}(\mathbb{D}') \arrow[dl] \\
 & \mathrm{Fl}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}') &
\end{tikzcd}$$

(explicitement, ceci signifie que :

$$\mathrm{Fl}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}') = [\mathrm{Fl}(\mathbb{D})\times\mathrm{Ob}(\mathbb{D}')\times\{1\}] \cup [\mathrm{Ob}(\mathbb{D})\times\mathrm{Fl}(\mathbb{D}')\times \{2\}] \big/ \mathcal{R} ,$$

où $\mathcal{R}$ est la plus petite relation d'équivalence pour laquelle, pour tout couple $(D,D') \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D}) \times \mathrm{ObId}(\mathbb{D}')$, on a :

$$(id(D),D',1)\ \mathcal{R}\ (D,id(D'),2)\ ,$$

i.e. :

$$\langle id(D),D'\rangle = \langle D,id(D')\rangle\ ,$$

si l'on note respectivement $\langle\delta,\Delta'\rangle$ et $\langle\Delta,\delta'\rangle$ les classes d'équivalence d'un quelconque élément $(\delta,\Delta',1)$ de $Fl(\mathbb{D})\times Ob(\mathbb{D}')\times\{1\}$ et d'un quelconque élément $(\Delta,\delta',2)$ de $Ob(\mathbb{D})\times Fl(\mathbb{D}')\times\{2\}$),

- pour tout $(d,D')\in Fl(\mathbb{D})\times Ob(\mathbb{D}')$, on a :

$$dom\langle d,D'\rangle = (dom(d),D')$$

et :

$$codom\langle d,D'\rangle = (codom(d),D')\ ,$$

- pour tout $(D,d')\in Ob(\mathbb{D})\times Fl(\mathbb{D}')$, on a :

$$dom\langle D,d'\rangle = (D,dom(d'))$$

et :

$$codom\langle D,d'\rangle = (D,codom(d'))\ ,$$

- pour tout $(d_2,d_1)\in CComp(\mathbb{D})$ et tout $D'\in Ob(\mathbb{D}')$, on a :

$$(\langle d_2,D'\rangle,\langle d_1,D'\rangle)\in CComp(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}')$$

et :

$$\langle d_2,D'\rangle\cdot\langle d_1,D'\rangle = \langle d_2\cdot d_1,D'\rangle\ ,$$

- pour tout $D\in Ob(\mathbb{D})$ et tout $(d'_2,d'_1)\in CComp(\mathbb{D}')$, on a :

$$(\langle D,d'_2\rangle,\langle D,d'_1\rangle)\in CComp(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}')$$

et :

$$\langle D,d'_2\rangle\cdot\langle D,d'_1\rangle = \langle D,d'_2\cdot d'_1\rangle\ ,$$

- $ObId(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}') = [ObId(\mathbb{D})\times Ob(\mathbb{D}')]\cup[Ob(\mathbb{D})\times ObId(\mathbb{D}')]$,

- pour tout $(D,D')\in ObId(\mathbb{D})\times Ob(\mathbb{D}')$, on a :

$$id(D,D') = \langle id(D),D'\rangle\ ,$$

- pour tout $(D,D')\in Ob(\mathbb{D})\times ObId(\mathbb{D}')$, on a :

$$id(D,D') = \langle D,id(D')\rangle\ ,$$

(ces deux derniers axiomes imposant, en particulier, que :

- pour toute flèche $d : D_1 \longrightarrow D_2$ de $\mathbb{D}$ et tout $D'\in ObId(\mathbb{D}')$, on a successivement :

$$(\langle d,D'\rangle,\langle D_1,id(D')\rangle)\in CComp(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}')\ ,$$

$$(\langle D_2,\mathrm{id}(D')\rangle,\langle d,D'\rangle) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}')$$

et :

$$\langle d,D'\rangle\cdot\langle D_1,\mathrm{id}(D')\rangle = \langle d,D'\rangle = \langle D_2,\mathrm{id}(D')\rangle\cdot\langle d,D'\rangle ,$$

– pour tout $D \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$ et toute flèche $d' : D'_1 \longrightarrow D'_2$ de $\mathbb{D}'$, on a successivement :

$$(\langle D,d'\rangle,\langle \mathrm{id}(D),D'_1\rangle) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}') ,$$
$$(\langle \mathrm{id}(D),D'_2\rangle,\langle D,d'\rangle) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}')$$

et :

$$\langle D,d'\rangle\cdot\langle \mathrm{id}(D),D'_1\rangle = \langle D,d'\rangle = \langle \mathrm{id}(D),D'_2\rangle\cdot\langle D,d'\rangle \;).$$

Le foncteur $-\otimes-$ est ainsi défini sur les objets. On laisse au lecteur le soin de le définir sur les flèches.

De même, il lui sera facile d'établir qu'on dispose d'équivalences naturelles "canoniques", cohérentes, d'associativité[1] :

$$\mathrm{ass}_{\mathbb{G}\mathrm{rComp},-,-,-} = \mathrm{ass} : (-\otimes-)\otimes- \xrightarrow{\simeq} -\otimes(-\otimes-) ,$$

de symétrie :

$$\mathrm{sym}_{\mathbb{G}\mathrm{rComp},-_1,-_2} = \mathrm{sym} : -_1\otimes-_2 \xrightarrow{\simeq} -_2\otimes-_1 ,$$

et d'unitarités (à gauche et à droite) :

$$\mathrm{gche}_{\mathbb{G}\mathrm{rComp},-} = \mathrm{gche} : \mathbb{1}_\varnothing\otimes- \xrightarrow{\simeq} - ,$$
$$\mathrm{drte}_{\mathbb{G}\mathrm{rComp},-} = \mathrm{drte} : -\otimes\mathbb{1}_\varnothing \xrightarrow{\simeq} - ,$$

où l'unité est le graphe à composition $\mathbb{1}_\varnothing$ (bien) défini par :

– $\mathrm{Ob}(\mathbb{1}_\varnothing) = \{0\}$, $\mathrm{ObId}(\mathbb{1}_\varnothing) = \varnothing$[2] , $\mathrm{Fl}(\mathbb{1}_\varnothing) = \varnothing$ et $\mathrm{CComp}(\mathbb{1}_\varnothing) = \varnothing$.

[1] Nous utilisons des notations abrégées semblables à celles utilisées au §1.1 pour la catégorie cartésienne fermée $\mathbb{E}\mathrm{ns}$, mais le contexte évitera toute confusion.

[2] Remarquons – accessoirement – que le graphe à composition $\mathbb{1}_\varnothing$ n'est pas objet final de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$.

Construisons maintenant le foncteur *exponentiation*[3] *maigre de graphes à composition* :

$$\mathbb{G}\mathrm{rComp}(-,-) : (\mathbb{G}\mathrm{rComp})^{op} \times \mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp} .$$

Pour ce faire, commmençons par définir les *transformations* entre foncteurs.

<u>Définition 1 :</u> Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux graphes à composition et si F_1 , $F_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ sont deux foncteurs, on dit que $T = (T(D))_{D \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})}$ est une *transformation de* F_1 *vers* F_2 , et on note $T : F_1 \Longrightarrow F_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ ou encore $T : F_1 \Longrightarrow F_2$, si et seulement si :

- pour tout objet D de $\mathbb{D}$, $T(D) : F_1(D) \longrightarrow F_2(D)$ est une flèche de $\mathbb{D}'$.

Dans ces conditions, si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux petits graphes à composition, on note $\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}')$ le petit graphe à composition défini comme suit :

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}'))$ est l'ensemble des foncteurs de la forme $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$,
- $\mathrm{Fl}(\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}'))$ est l'ensemble des transformations de la forme $T : F_1 \Longrightarrow F_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$,
- pour toute transformation $T : F_1 \Longrightarrow F_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$, on a :

$$\mathrm{dom}_{\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}')}(T) = \mathrm{dom}(T) = F_1$$

et :

$$\mathrm{codom}_{\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}')}(T) = \mathrm{codom}(T) = F_2 ,$$

(3) Exponentiation que nous préférons noter ... sans exposant !

- $\mathrm{ObId}(\mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}'))$ est l'ensemble des foncteurs de la forme $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ où, pour tout $D \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, on a $F(D) \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D}')$,

- pour tout foncteur $F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ tel que $F \in \mathrm{ObId}(\mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}'))$, on a :

$$\mathrm{id}_{\mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}')}(F) = \mathrm{id}(F) = (\mathrm{id}_{\mathbb{D}'}(F(D)))_{D \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})} ,$$

- $\mathrm{CComp}(\mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}'))$ est l'ensemble des couples de transformations de la forme :

$$(T_2 : F_2 \Longrightarrow F_3 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}' , T_1 : F_1 \Longrightarrow F_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}')$$

où, pour tout $D \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, on a $(T_2(D),T_1(D)) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{D}')$,

- pour toutes transformations $T_1 : F_1 \Longrightarrow F_2$ et $T_2 : F_2 \Longrightarrow F_3$ telles que $(T_2,T_1) \in \mathrm{CComp}(\mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}'))$, on a :

$$T_2 \cdot_{\mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathbb{D}')} T_1 = T_2 \cdot T_1 = (T_2(D) \cdot_{\mathbb{D}'} T_1(D))_{D \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})} .$$

Le foncteur $\mathrm{GrComp}(-,-)$ est ainsi défini sur les objets. On laisse au lecteur le soin de le définir sur les flèches.

De même, il établira facilement que le foncteur $\mathrm{GrComp}(-,-)$ est une fermeture associée au foncteur $-\otimes-$. Autrement dit, que :

- naturellement en les petits graphes à composition $\mathbb{D}$, $\mathbb{D}'$, $\mathbb{D}''$, on dispose d'un foncteur inversible canonique (qu'on laisse au lecteur le soin d'expliciter) :

$$\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}',\mathbb{D}'') \xrightarrow{\mathrm{curry}_{\mathrm{GrComp},\mathbb{D},\mathbb{D}',\mathbb{D}''}} \mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}',\mathbb{D}''))$$

et, par conséquent, de l'application sous-jacente :

$$\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}\otimes\mathbb{D}',\mathbb{D}'') \xrightarrow{\mathrm{curry}_{\mathrm{GrComp},\mathbb{D},\mathbb{D}',\mathbb{D}''}} \mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}',\mathbb{D}''))$$

(notés plus simplement[4] :

$$\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}\circledast\mathbb{D}',\mathbb{D}'') \xrightarrow{\mathrm{curry}_{\mathbb{D},\mathbb{D}',\mathbb{D}''} = \mathrm{curry}} \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D},\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}',\mathbb{D}''))$$

et :

$$\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}\circledast\mathbb{D}',\mathbb{D}'') \xrightarrow{\mathrm{curry}_{\mathbb{D},\mathbb{D}',\mathbb{D}''} = \mathrm{curry}} \mathrm{GrComp}(\mathbb{D},\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}',\mathbb{D}''))\ ).$$

Ainsi, nous pouvons affirmer :

<u>Proposition 1 :</u> $\mathbb{G}\mathrm{rComp} = (\mathrm{GrComp},-\circledast-,\mathbb{1}_\emptyset,\ldots,\mathbb{G}\mathrm{rComp}(-,-))$ *est une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée sur la catégorie* GrComp *des petits graphes à composition.*

3.2. Amphi-graphes à composition et amphi-foncteurs[5]

En nous inspirant de [G.M.E.N.] et par analogie avec le cas des catégories, définissons les *amphi-graphes à composition*, i.e. les graphes à composition *enrichis* par la catégorie monoïdale symétrique fermée $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$[6] .

<u>Définition 2 :</u> On dit que

$$\mathbb{D} = (\mathrm{Ob},\mathrm{ObId},\mathbb{D}(-,-),\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(-,-,-),i,m,k,j_1,j_2)$$

est un $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$-*graphe à composition*, ou encore un *amphi-*

[4] Le contexte évitera toute confusion, malgré l'omission des indices, avec la notation similaire introduite au §1.1 pour $\mathbb{E}\mathrm{ns}$.

[5] On trouvera des exemples d'amphi-graphes à composition en Section C, §6.2 (i.e. en [S.C.C.C.]).

[6] Nous préférons réserver l'appellation "2-graphes à composition" aux graphes à composition enrichis par la structure de catégorie cartésienne fermée de $\mathbb{C}\mathrm{at}$ ou, mieux encore, par celle (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter) de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$.

graphe à composition, si et seulement si :

- Ob (notée encore Ob($\mathbb{D}$) s'il y a risque d'ambiguïté) est une classe, dite *classe des objets de* $\mathbb{D}$,

- ObId (notée encore ObId($\mathbb{D}$)) est une sous-classe de Ob , dite *classe des objets à identités de* $\mathbb{D}$,

- pour tous D_1 , $D_2 \in$ Ob($\mathbb{D}$) , $\mathbb{D}(D_1,D_2)$ est un objet de GrComp ,

- pour tous D_1 , D_2 , $D_3 \in$ Ob($\mathbb{D}$) , $\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3)$ est un objet de GrComp ,

- pour tout $D \in$ ObId($\mathbb{D}$) , $i(D) : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{D}(D,D)$ (encore notée $i_\mathbb{D}(D) : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{D}(D,D)$) est une flèche de GrComp ,

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in$ Ob($\mathbb{D}$) de $\mathbb{D}$, $m(D_1,D_2,D_3) : \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}(D_2,D_3)\circledast\mathbb{D}(D_1,D_2)$ (encore notée $m_\mathbb{D}(D_1,D_2,D_3) : \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}(D_2,D_3)\circledast\mathbb{D}(D_1,D_2)$) est un monomorphisme de GrComp ,

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in$ Ob($\mathbb{D}$) de $\mathbb{D}$, $k(D_1,D_2,D_3) : \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}(D_1,D_3)$ (encore notée $k_\mathbb{D}(D_1,D_2,D_3) : \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \longrightarrow \mathbb{D}(D_1,D_3)$) est une flèche de GrComp ,

- pour tout $D_1 \in$ ObId($\mathbb{D}$) et tout $D_2 \in$ Ob($\mathbb{D}$) , $j_1(D_1,D_2) : \mathbb{D}(D_1,D_2) \longrightarrow \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_1,D_2)$ (encore notée $j_{1\mathbb{D}}(D_1,D_2) : \mathbb{D}(D_1,D_2) \longrightarrow \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_1,D_2)$) est une flèche de GrComp ,

- pour tout $D_1 \in$ Ob($\mathbb{D}$) et tout $D_2 \in$ ObId($\mathbb{D}$) , $j_2(D_1,D_2) : \mathbb{D}(D_1,D_2) \longrightarrow \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_2)$ (encore notée $j_{2\mathbb{D}}(D_1,D_2) : \mathbb{D}(D_1,D_2) \longrightarrow \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_2)$) est une flèche de GrComp ,

- pour tout $D_1 \in$ ObId($\mathbb{D}$) et tout $D_2 \in$ Ob($\mathbb{D}$) , le diagramme de GrComp ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_1,D_2) \arrow[r, "m(D_1,D_1,D_2)"] \arrow[dd, "k(D_1,D_1,D_2)"'] & \mathbb{D}(D_1,D_2)\otimes\mathbb{D}(D_1,D_1) \\
 & \mathbb{D}(D_1,D_2)\otimes\mathbb{1}_{\emptyset} \arrow[u, "id(\mathbb{D}(D_1,D_2))\otimes i(D_1)"'] \arrow[d, "drte_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}"', "\simeq"] \\
\mathbb{D}(D_1,D_2) & \mathbb{D}(D_1,D_2) \arrow[l, "id(\mathbb{D}(D_1,D_2))"'] \arrow[uul, "j_1(D_1,D_2)"]
\end{tikzcd}$$

- pour tout $D_1 \in Ob(\mathbb{D})$ et tout $D_2 \in ObId(\mathbb{D})$, le diagramme de $\mathbb{G}rComp$ ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_2) \arrow[r, "m(D_1,D_2,D_2)"] \arrow[dd, "k(D_1,D_2,D_2)"'] & \mathbb{D}(D_2,D_2)\otimes\mathbb{D}(D_1,D_2) \\
 & \mathbb{1}_{\emptyset}\otimes\mathbb{D}(D_1,D_2) \arrow[u, "i(D_2)\otimes id(\mathbb{D}(D_1,D_2))"'] \arrow[d, "gche_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}"', "\simeq"] \\
\mathbb{D}(D_1,D_2) & \mathbb{D}(D_1,D_2) \arrow[l, "id(\mathbb{D}(D_1,D_2))"'] \arrow[uul, "j_2(D_1,D_2)"]
\end{tikzcd}$$

Dans ces conditions, on associe à $\mathbf{D}$ le graphe à composition $\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbf{D} = \mathbb{D}$, dit *des 1-flèches de* $\mathbf{D}$ ou encore *sous-jacent à* $\mathbf{D}$, (bien) défini comme suit :

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{D}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{D})$,

- $\mathrm{ObId}(\mathbb{D}) = \mathrm{ObId}(\mathbf{D})$,

- pour tous D_1 , $D_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, on a :

$$\begin{array}{lc} \mathbb{D}(D_1,D_2) & (= \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(D_1,D_2) \quad) \\ = & (=) \\ \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{1}_{\emptyset},\mathbf{D}(D_1,D_2)) & (= \mathrm{Hom}_{\mathbb{G}\mathrm{rComp}}(\mathbb{1}_{\emptyset},\mathbf{D}(D_1,D_2)) \quad) \end{array}$$

(autrement dit, $\mathrm{Fl}(\mathbb{D})$ est la réunion disjointe, i.e. la somme, des ensembles $\mathrm{Hom}_{\mathbb{G}\mathrm{rComp}}(\mathbb{1}_{\emptyset},\mathbf{D}(D_1,D_2))$, quand (D_1,D_2) parcourt $\mathrm{Ob}(\mathbb{D}) \times \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$),

- pour tout $D \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$, on a $id_{\mathbb{D}}(D) = i_{\mathbf{D}}(D)$,

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$ de $\mathbb{D}$ et pour toutes flèches $d_1 : D_1 \longrightarrow D_2$, $d_2 : D_2 \longrightarrow D_3$ et $d : D_1 \longrightarrow D_3$ de $\mathbb{D}$, on a :

> le diagramme de $\mathbb{D}$ ci-dessous est commutatif :
>
> $$\begin{tikzcd} & D_2 \arrow[dr, "d_2"] & \\ D_1 \arrow[ur, "d_1"] \arrow[rr, "d"] & & D_3 \end{tikzcd}$$
>
> (i.e. $(d_2,d_1) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{D})$ et $d_2 \cdot_{\mathbb{D}} d_1 = d$!)

si et seulement si :

> il existe, dans $\mathbb{G}rComp$, une flèche (nécessairement unique) $c(d_2,d_1) : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3)$ rendant commutatif le diagramme de $\mathbb{G}rComp$ ci-dessous :
>
> $$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
\mathbb{D}(D_2,D_3)\otimes\mathbb{D}(D_1,D_2) & \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \arrow[l, "m(D_1,D_2,D_3)"'] \arrow[dd, "k(D_1,D_2,D_3)"'] \\
\mathbb{1}_\emptyset\otimes\mathbb{1}_\emptyset \arrow[u, "d_2\otimes d_1"] \arrow[d, "\simeq", "\begin{smallmatrix} gche_{\mathbb{1}_\emptyset} \\ = \\ drte_{\mathbb{1}_\emptyset}\end{smallmatrix}"'] & \\
\mathbb{1}_\emptyset \arrow[r, "d"] \arrow[uur, "c(d_2,d_1)"] & \mathbb{D}(D_1,D_3)
\end{tikzcd}$$

Plus généralement, si $\mathbb{G}$ est un objet de $\mathbb{G}rComp$, on peut associer à $\mathbb{D}$ le graphe à composition $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ *des 1-flèches et $\mathbb{G}$-flèches* de $\mathbb{D}$ défini comme suit :

- $Ob(\mathbb{G}/\mathbb{D}) = Ob(\mathbb{D})$,

- $ObId(\mathbb{G}/\mathbb{D}) = ObId(\mathbb{D})$,

- pour tous D_1 , $D_2 \in Ob(\mathbb{G}/\mathbb{D})$, la classe des flèches de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ de domaine D_1 et de codomaine D_2 est la réunion de la classe $\mathbb{G}rComp(\mathbb{1}_\emptyset,\mathbb{D}(D_1,D_2))$ (dont les éléments, qui sont des 1-flèches de $\mathbb{D}$, sont encore appelés les *1-flèches* de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ de domaine D_1 et de codomaine D_2) et de la classe $\mathbb{G}rComp(\mathbb{G},\mathbb{D}(D_1,D_2))$ (dont les éléments δ sont appelés les *$\mathbb{G}$-flèches* de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$, ou de $\mathbb{D}$, de domaine D_1 et de codomaine D_2 et notés plus spécifiquement $\delta : D_1 \longrightarrow_{\mathbb{G}} D_2$, si cela s'avère plus suggestif que la notation générique $\delta : D_1 \longrightarrow D_2$),

- pour tout objet à identité $D \in \mathrm{ObId}(\mathbb{G}/\mathbb{D})$, on a $id_{\mathbb{G}/\mathbb{D}}(D) = i_{\mathbb{D}}(D)$,
- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{G}/\mathbb{D})$ de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ et pour toutes 1-flèches $d_1 : D_1 \longrightarrow D_2$, $d_2 : D_2 \longrightarrow D_3$ et $d : D_1 \longrightarrow D_3$ de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$, on a :

> le diagramme de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ ci-dessous est commutatif :
>
> $$\begin{tikzcd} & D_2 \arrow[dr, "d_2"] & \\ D_1 \arrow[ur, "d_1"] \arrow[rr, "d"] & & D_3 \end{tikzcd}$$
>
> (i.e. $(d_2,d_1) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{G}/\mathbb{D})$ et $d_2 \cdot_{\mathbb{G}/\mathbb{D}} d_1 = d$!)

si et seulement si :

> il existe, dans $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, une flèche (nécessairement unique) $c(d_2,d_1) : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \ddot{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3)$ rendant commutatif le diagramme de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$ ci-dessous :
>
> $$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(D_2,D_3)\otimes\mathbb{D}(D_1,D_2) & & \ddot{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3) \arrow[ll, "m(D_1,D_2,D_3)"'] \arrow[dd, "k(D_1,D_2,D_3)"] \\ \mathbb{1}_\emptyset\otimes\mathbb{1}_\emptyset \arrow[u, "d_2\otimes d_1"] \arrow[d, "\simeq", "\substack{gche_{\mathbb{1}_\emptyset} \\ = \\ drte_{\mathbb{1}_\emptyset}}"'] & & \\ \mathbb{1}_\emptyset \arrow[rruu, "c(d_2,d_1)"] \arrow[rr, "d"] & & \mathbb{D}(D_1,D_3) \end{tikzcd}$$

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{G}/\mathbb{D})$, pour toute 1-flèche $d_1 : D_1 \longrightarrow D_2$ et pour toutes $\mathbb{G}$-flèches

$\delta_2 : D_2 \longrightarrow_{\mathbb{G}} D_3$ et $\delta : D_1 \longrightarrow_{\mathbb{G}} D_3$ de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$, on a :

le diagramme de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& D_2 \arrow[dr, "\delta_2", "\mathbb{G}"'] & \\
D_1 \arrow[ur, "d_1"] \arrow[rr, "\delta", "\mathbb{G}"'] & & D_3
\end{tikzcd}$$

(i.e. $(\delta_2, d_1) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{G}/\mathbb{D})$ et $\delta_2 \cdot_{\mathbb{G}/\mathbb{D}} d_1 = \delta$!)

si et seulement si :

il existe, dans $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, une flèche (nécessairement unique) $c(\delta_2, d_1) : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1, D_2, D_3)$ rendant commutatif le diagramme de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$ ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}(D_2,D_3)\otimes\mathbb{D}(D_1,D_2) & & \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1,D_2,D_3) \arrow[ll, "m(D_1,D_2,D_3)"'] \arrow[dd, "k(D_1,D_2,D_3)"] \\
\mathbb{G}\otimes\mathbb{1}_{\emptyset} \arrow[u, "\delta_2\otimes d_1"] \arrow[d, "drte_{\mathbb{G}}"', "\simeq"] & & \\
\mathbb{G} \arrow[uurr, "c(\delta_2,d_1)"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathbb{D}(D_1,D_3)
\end{tikzcd}$$

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{G}/\mathbb{D})$, pour toutes $\mathbb{G}$-flèches $\delta_1 : D_1 \longrightarrow_{\mathbb{G}} D_2$ et $\delta : D_1 \longrightarrow_{\mathbb{G}} D_3$ et pour toute 1-flèche $d_2 : D_2 \longrightarrow D_3$ de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$, on a :

le diagramme de $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} & D_2 \arrow[dr, "d_2"] & \\ D_1 \arrow[ur, "\delta_1", "\mathbb{G}"'] \arrow[rr, "\delta", "\mathbb{G}"'] & & D_3 \end{tikzcd}$$

(i.e. $(d_2, \delta_1) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{G}/\mathbb{D})$ et $d_2 \cdot_{\mathbb{G}/\mathbb{D}} \delta_1 = \delta$!)

si et seulement si :

il existe, dans $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, une flèche (nécessairement unique) $c(d_2, \delta_1) : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1, D_2, D_3)$ rendant commutatif le diagramme de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$ ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(D_2, D_3) \otimes \mathbb{D}(D_1, D_2) & & \mathbb{D}^{\cdot\cdot}(D_1, D_2, D_3) \arrow[ll, "m(D_1, D_2, D_3)"'] \arrow[dd, "k(D_1, D_2, D_3)"] \\ \mathbb{1}_{\emptyset} \otimes \mathbb{G} \arrow[u, "d_2 \otimes \delta_1"] \arrow[d, "\mathrm{gche}_{\mathbb{G}}"', "\simeq"] & & \\ \mathbb{G} \arrow[uurr, "c(d_2, \delta_1)"] \arrow[rr, "\delta"] & & \mathbb{D}(D_1, D_3) \end{tikzcd}$$

Bien entendu, par construction, le graphe à composition $\mathbb{D}$ (des 1-flèches de $\mathbb{D}$) est un sous-graphe à composition du graphe à composition $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ (des 1-flèches et $\mathbb{G}$-flèches de $\mathbb{D}$).

Selon la "nature" de l'objet $\mathbb{G}$ de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, on peut éventuellement munir $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ d'une sur-structure $\mathbb{G}//\mathbb{D}$, et ceci de sorte que la connaissance de $\mathbb{D}$, du foncteur injection canonique $j_{\mathbb{G},\mathbb{D}} : \mathbb{D} = \mathbb{1}_\emptyset/\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{D}$ et de $\mathbb{G}//\mathbb{D}$ (pour un ou plusieurs objets $\mathbb{G}$) permette de reconstruire entièrement $\mathbb{D}$.

Le lecteur vérifiera que c'est bien[7] le cas pour le graphe à composition des 1-flèches et $\mathbb{2}_\emptyset$-flèches (bien entendu appelées *2-flèches*) de $\mathbb{D}$, i.e. si l'on prend (pour seul objet de $\mathbb{G}$rComp autre que $\mathbb{1}_\emptyset$) $\mathbb{G} = \mathbb{2}_\emptyset$, où $\mathbb{2}_\emptyset$ est le graphe à composition (entièrement) défini comme suit :

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{2}_\emptyset) = \{0,1\}$, $\mathrm{ObId}(\mathbb{2}_\emptyset) = \emptyset$ et $(0,1) : 0 \longrightarrow 1$ est l'unique flèche de $\mathbb{2}_\emptyset$.

En effet :

- pour tous objets D_1 , $D_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, pour toutes 1-flèches d , $d' : D_1 \longrightarrow D_2$ et pour toute 2-flèche $\delta : D_1 \longrightarrow_{\mathbb{2}_\emptyset} D_2$ tels que :

$$\mathrm{dom}_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}(\delta(0,1)) = d(0)$$

et :

$$\mathrm{codom}_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}(\delta(0,1)) = d'(0) ,$$

notons :

$$\delta : d \Longrightarrow d' : D_1 \longrightarrow D_2 ,$$

- pour tous objets D_1 , $D_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$, pour toute 1-flèche $d : D_1 \longrightarrow D_2$ et pour toute 2-flèche $\delta : D_1 \longrightarrow_{\mathbb{2}_\emptyset} D_2$ tels que :

$$d(0) \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D}(D_1,D_2))$$

et :

$$\mathrm{id}_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}(d(0)) = \delta(0,1) ,$$

notons :

$$\mathrm{Id}(d) = \delta : d \Longrightarrow d : D_1 \longrightarrow D_2 ,$$

- pour tous objets D_1 , $D_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$ et pour toutes 2-

[7] Nous voulons suggérer qu'on peut enrichir les graphes à composition autrement que par $\mathbb{G}$rComp . Auquel cas, le choix des objets $\mathbb{G}$ permettant de reconstruire $\mathbb{D}$ à partir des $\mathbb{G}/\mathbb{D}$ peut s'avérer plus délicat.

flèches δ_1 , δ_2 , δ : $D_1 \longrightarrow_{\mathbb{2}_\emptyset} D_2$ tels que :

$$(\delta_2(0,1),\delta_1(0,1)) \in \mathrm{CComp}(\mathbb{D}(D_1,D_2))$$

et :

$$\delta_2(0,1) \cdot_{\mathbb{D}(D_1,D_2)} \delta_1(0,1) = \delta(0,1) \quad ,$$

notons encore :

$$\delta = \delta_2 * \delta_1 \ ,$$

alors on peut reconstituer l'amphi-graphe à composition $\mathbb{D}$ à partir de la sur-structure :

$$\mathbb{2}_\emptyset//\mathbb{D} = (\ \mathbb{1}_\emptyset/\mathbb{D}\ ,\mathbb{2}_\emptyset/\mathbb{D}\ ,\quad -:-\!\!\Longrightarrow\!\!-:-\!\!\longrightarrow\!\!-\quad ,\ \mathrm{Id}(-)\ ,\ -*-\ )\ .$$

Enfin, nous dirons évidemment que $\mathbb{D}$ est *petit* si et seulement si la classe $\mathrm{Ob}(\mathbb{D})$ est petite (et donc, par exemple, si et seulement si le graphe à composition de ses 1-flèches et 2-flèches est petit).

En nous inspirant toujours de [G.M.E.N.] et toujours par analogie avec le cas des catégories, définissons maintenant les *amphi-foncteurs*.

<u>Définition 3 :</u> Si $\mathbb{D}$ et $\mathbb{D}'$ sont deux amphi-graphes à composition, on dit que $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_{Ob},\mathbb{F}_{ObId},\mathbb{F}(-,-),\mathbb{F}^{\therefore}(-,-,-))$ est un *amphi-foncteur de* $\mathbb{D}$ *vers* $\mathbb{D}'$, et l'on note $\mathbb{F} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$, si et seulement si :

- $\mathbb{F}_{Ob} : \mathrm{Ob}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathbb{D}')$ est une application admettant pour restriction $\mathbb{F}_{ObId} : \mathrm{ObId}(\mathbb{D}) \longrightarrow \mathrm{ObId}(\mathbb{D}')$,

- pour tous objets D_1 , $D_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$ de $\mathbb{D}$, $\mathbb{F}(D_1,D_2) : \mathbb{D}(D_1,D_2) \longrightarrow \mathbb{D}'(\mathbb{F}_{Ob}(D_1),\mathbb{F}_{Ob}(D_2))$ est une flèche de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$,

- pour tous objets D_1 , D_2 , $D_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$ de $\mathbb{D}$, $\mathbb{F}^{\therefore}(D_1,D_2,D_3) : \mathbb{D}^{\therefore}(D_1,D_2,D_3) \rightarrow \mathbb{D}'^{\therefore}(\mathbb{F}_{Ob}(D_1),\mathbb{F}_{Ob}(D_2),\mathbb{F}_{Ob}(D_3))$ est une flèche de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$,

- pour tout $D \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$, le diagramme de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$ ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}(D,D) \arrow[rr, "F(D,D)"] & & \mathbb{D}'(F_{obId}(D),F_{obId}(D)) \\ & \mathbb{1}_\emptyset \arrow[ul, "i_{\mathbb{D}}(D)"] \arrow[ur, "i_{\mathbb{D}'}(F_{obId}(D))"'] & \end{tikzcd}$$

- pour tous D_1 , D_2 , $D_3 \in Ob(\mathbb{D})$, le diagramme de $\mathbb{G}$rComp ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}^{\because}(D_1,D_2,D_3) \arrow[r, "F^{\because}(D_1,D_2,D_3)"] \arrow[d, "m_{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3)"] & \mathbb{D}'^{\because}(F_{ob}(D_1),F_{ob}(D_2),F_{ob}(D_3)) \arrow[d, "m_{\mathbb{D}'}(F_{ob}(D_1),F_{ob}(D_2),F_{ob}(D_3))"] \\ \mathbb{D}(D_2,D_3) \otimes \mathbb{D}(D_1,D_2) \arrow[r, "F(D_2,D_3) \otimes F(D_1,D_2)"] & \mathbb{D}'(F_{ob}(D_2),F_{ob}(D_3)) \otimes \mathbb{D}'(F_{ob}(D_1),F_{ob}(D_2)) \end{tikzcd}$$

- pour tous D_1 , D_2 , $D_3 \in Ob(\mathbb{D})$, le diagramme de $\mathbb{G}$rComp ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{D}^{\because}(D_1,D_2,D_3) \arrow[r, "F^{\because}(D_1,D_2,D_3)"] \arrow[d, "k_{\mathbb{D}}(D_1,D_2,D_3)"] & \mathbb{D}'^{\because}(F_{ob}(D_1),F_{ob}(D_2),F_{ob}(D_3)) \arrow[d, "k_{\mathbb{D}'}(F_{ob}(D_1),F_{ob}(D_2),F_{ob}(D_3))"] \\ \mathbb{D}(D_1,D_3) \arrow[r, "F(D_1,D_3)"] & \mathbb{D}'(F_{ob}(D_1),F_{ob}(D_3)) \end{tikzcd}$$

Bien entendu, pour tout objet $D \in Ob(\mathbb{D})$, on notera désormais, plus simplement, $\mathbb{F}_{Ob}(D) = \mathbb{F}(D)$.

Dans ces conditions, on associe à $\mathbb{F} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ le foncteur, dit *sous-jacent à* $\mathbb{F}$, $\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{F} = F : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$ (bien) défini comme suit :

- pour tout objet D de $\mathbb{D}$, on a $F(D) = \mathbb{F}(D)$,

- pour tous objets D_1 , D_2 de $\mathbb{D}$, pour toute flèche $d : D_1 \longrightarrow D_2$ de $\mathbb{D}$ et pour toute flèche $d' : F(D_1) \longrightarrow F(D_2)$ de $\mathbb{D}'$, on a :

> le diagramme de $\mathbb{D}'$ ci-dessous est commutatif :
>
> $$\begin{tikzcd} F(D_1) \arrow[r, bend left, "d'"] \arrow[r, bend right, "F(d)"'] & F(D_2) \end{tikzcd}$$
>
> (i.e. $F(d) = d'$!)

si et seulement si :

> le diagramme de $\mathbb{G}rComp$ ci-dessous est commutatif :
>
> $$\begin{tikzcd} \mathbb{1}_{\emptyset} \arrow[rr, bend left, "d'"] \arrow[dr, "d"'] & & \mathbb{D}'(F(D_1),F(D_2)) \\ & \mathbb{D}(D_1,D_2) \arrow[ur, "\mathbb{F}(D_1,D_2)"'] & \end{tikzcd}$$

Plus généralement, si $\mathbb{G}$ est un objet de $\mathbb{G}rComp$, il est facile d'associer à $\mathbb{F} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}'$, d'une manière analogue, un foncteur $\mathbb{G}/\mathbb{F} : \mathbb{G}/\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{D}'$ (de sorte que la connaissance de "suffisamment" de ces $\mathbb{G}/\mathbb{F}$ permet de reconstruire $\mathbb{F}$: c'est le cas si l'on choisit $\mathbb{1}_\emptyset$ et $\mathbb{2}_\emptyset$ pour - seuls - objets $\mathbb{G}$).

Evidemment, une *amphi-catégorie* $\mathbf{A}$, c'est-à-dire une GrComp-catégorie (au sens le plus usuel de [C.L.C.A.]), s'identifie à un amphi-graphe à composition (encore noté) $\mathbf{A}$ tel que :

- $\mathrm{ObId}(\mathbf{A}) = \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$,

- pour tous objets A_1 , A_2 , $A_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$, on a :

$$\mathbf{A}^{\cdot\cdot}(A_1,A_2,A_3) = \mathbf{A}(A_2,A_3) \otimes \mathbf{A}(A_1,A_2)$$

et :

$$m_{\mathbf{A}}(A_1,A_2,A_3) = id_{\mathrm{GrComp}}(\mathbf{A}(A_2,A_3) \otimes \mathbf{A}(A_1,A_2)) \ ,$$

- pour tous objets A_1 , A_2 , $A_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{A})$, le diagramme de GrComp ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}(A_3,A_4) \otimes (\mathbf{A}(A_2,A_3) \otimes \mathbf{A}(A_1,A_2)) \arrow[rr, "id(\mathbf{A}(A_3,A_4)) \otimes k(A_1,A_2,A_3)"'] & & \mathbf{A}(A_3,A_4) \otimes \mathbf{A}(A_1,A_3) \arrow[d, "k(A_1,A_3,A_4)"'] \\
 & & \mathbf{A}(A_1,A_4) \\
(\mathbf{A}(A_3,A_4) \otimes \mathbf{A}(A_2,A_3)) \otimes \mathbf{A}(A_1,A_2) \arrow[uu, "ass", "\simeq"'] \arrow[rr, "k(A_2,A_3,A_4) \otimes id(\mathbf{A}(A_1,A_2))"] & & \mathbf{A}(A_2,A_4) \otimes \mathbf{A}(A_1,A_2) \arrow[u, "k(A_1,A_2,A_4)"]
\end{tikzcd}$$

De la même manière, on laisse le lecteur procéder aux identifications qui s'imposent, concernant les *amphi-foncteurs* entre amphi-catégories, c'est-à-dire les GrComp-foncteurs (au sens le plus usuel de [C.L.C.A.]) entre $\mathbb{G}$rComp-catégories.

Enfin, si $\mathbb{D}$ est un amphi-graphe à composition, si $\mathbb{A}$ est une amphi-catégorie, si $\mathbb{F}_1 , \mathbb{F}_2 : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{A}$ sont deux amphi-foncteurs (et si $\mathbb{G}$ est un objet de $\mathbb{G}$rComp), on laisse encore au lecteur le soin de définir (par analogie avec le cas, classique, où $\mathbb{D}$ est une amphi-catégorie) ce qu'est une amphi-transformation naturelle[8] $\mathbb{N} : \mathbb{F}_1 \longrightarrow \mathbb{F}_2$ de $\mathbb{F}_1$ vers $\mathbb{F}_2$ (ainsi que la transformation naturelle $\mathbb{G}/\mathbb{N} : \mathbb{G}/\mathbb{F}_1 \Longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{F}_2 : \mathbb{G}/\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{G}/\mathbb{A}$).

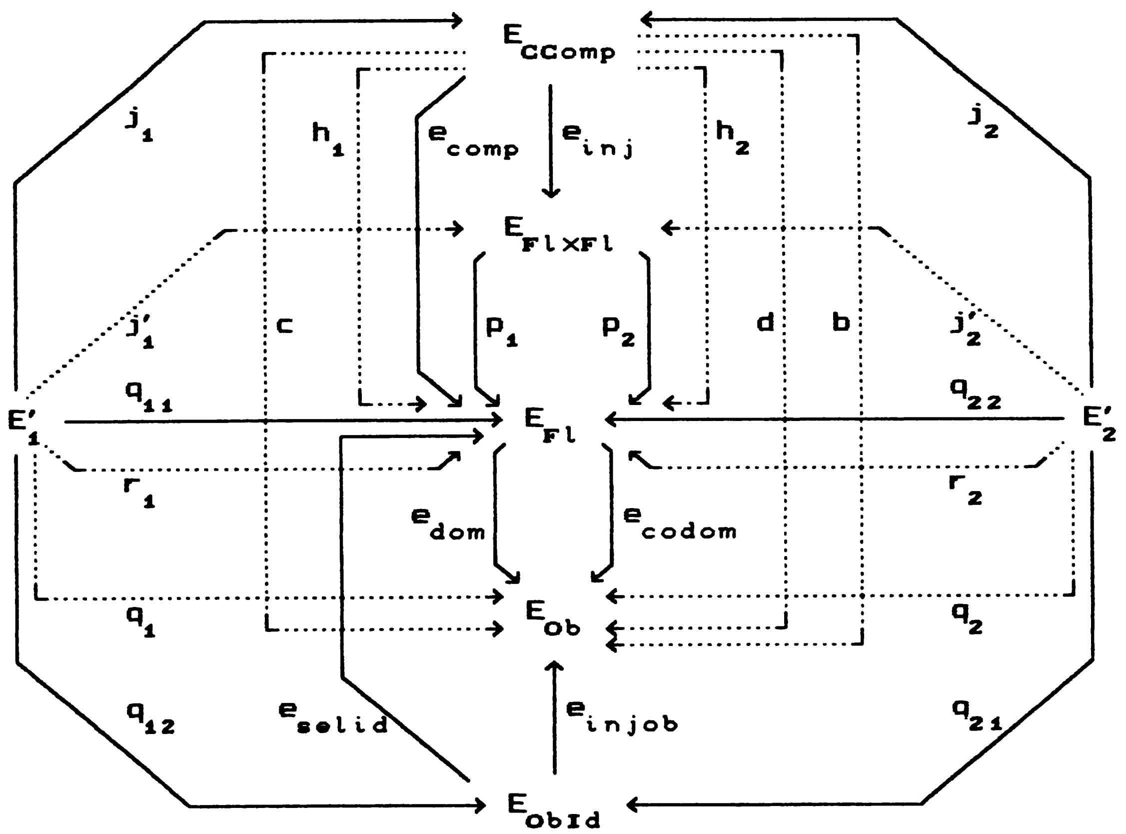
3.3. Esquisse des graphes à composition

Notons $\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}$ l'esquisse construite comme suit[9] :

[8] Il est facile de définir (par analogie avec la notion de transformation) la notion d'amphi-transformation entre amphi-foncteurs allant d'un même amphi-graphe à composition vers un autre amphi-graphe à composition (et non une amphi-catégorie). Mais nous n'en aurons pas l'utilité.
Il serait en revanche plus difficile de définir ce que serait une amphi-transformation naturelle entre deux tels amphi-foncteurs (de codomaine un amphi-graphe à composition seulement).

[9] Par une simple adaptation du sens (classique) de [E.T.S.A.], une esquisse (projective) est, ici, un graphe à composition (au lieu d'un "graphe multiplicatif"), appelé son "support", et où sont distingués des cônes projectifs. Alors, un "modèle" d'une telle esquisse $\mathbb{E}$ dans une catégorie $\mathcal{X}$ est un foncteur $F : \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathcal{X}$ (où $\mathrm{Supp}(\mathbb{E})$ est le support de $\mathbb{E}$) qui transforme les cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}$ en des cônes limites projectives de $\mathcal{X}$ (et l'on note $F : \mathbb{E} \longrightarrow \mathcal{X}$). Enfin, on désigne par $\mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathcal{X})$ la catégorie dont les objets sont les modèles de $\mathbb{E}$ vers $\mathcal{X}$ et dont les flèches sont les transformations naturelles entre ces modèles.

- son support est le graphe à composition $\mathbb{G}_{\mathrm{GrComp}}$ défini par le graphe et les équations ci-dessous :



$$e_{\mathrm{dom}} \cdot e_{\mathrm{selid}} = e_{\mathrm{injob}} = e_{\mathrm{codom}} \cdot e_{\mathrm{selid}} ,$$

$$p_1 \cdot e_{\mathrm{inj}} = h_1 ,$$
$$p_2 \cdot e_{\mathrm{inj}} = h_2 ,$$
$$e_{\mathrm{dom}} \cdot h_1 = b = e_{\mathrm{codom}} \cdot h_2 ,$$
$$e_{\mathrm{dom}} \cdot e_{\mathrm{comp}} = d = e_{\mathrm{dom}} \cdot h_2 ,$$
$$e_{\mathrm{codom}} \cdot e_{\mathrm{comp}} = c = e_{\mathrm{codom}} \cdot h_1 ,$$

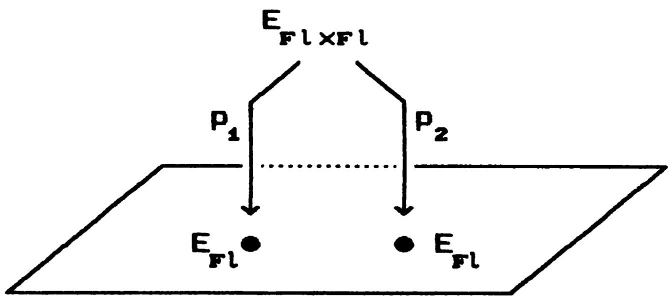
$$e_{dom} \cdot q_{11} = q_1 = e_{injob} \cdot q_{12} \ ,$$
$$e_{injob} \cdot q_{21} = q_2 = e_{codom} \cdot q_{22} \ ,$$

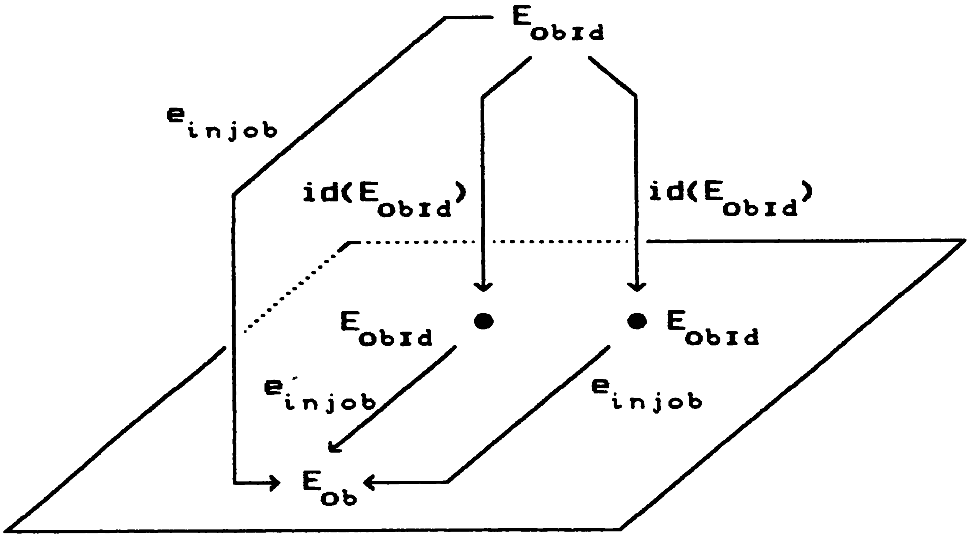
$$p_1 \cdot j'_1 = q_{11} \ ,$$
$$p_2 \cdot j'_1 = r_1 = e_{solid} \cdot q_{12} \ ,$$
$$e_{inj} \cdot j_1 = j'_1 \ ,$$
$$e_{comp} \cdot j_1 = q_{11} \ ,$$

$$p_1 \cdot j'_2 = r_2 = e_{solid} \cdot q_{21} \ ,$$
$$p_2 \cdot j'_2 = q_{22} \ ,$$
$$e_{inj} \cdot j_2 = j'_2 \ ,$$
$$e_{comp} \cdot j_2 = q_{22}$$

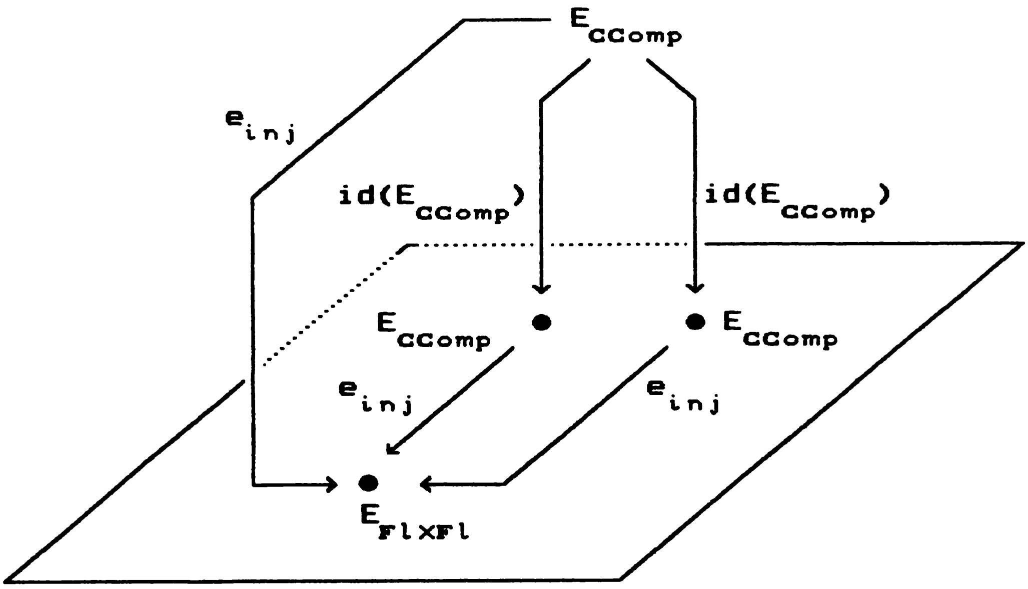
(en particulier, on a $\mathrm{ObId}(\mathbb{G}_{GrComp}) = \varnothing$),

- ses cônes projectifs distingués sont :

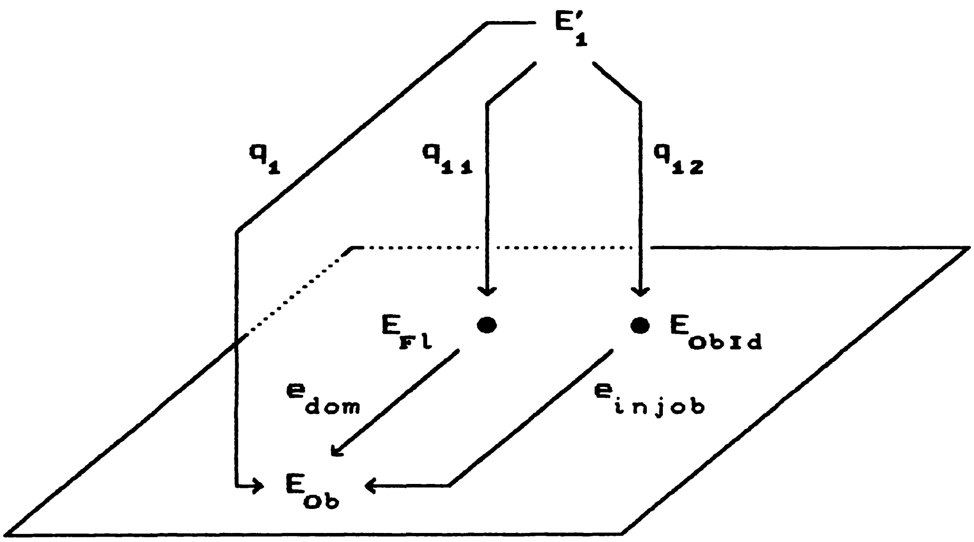


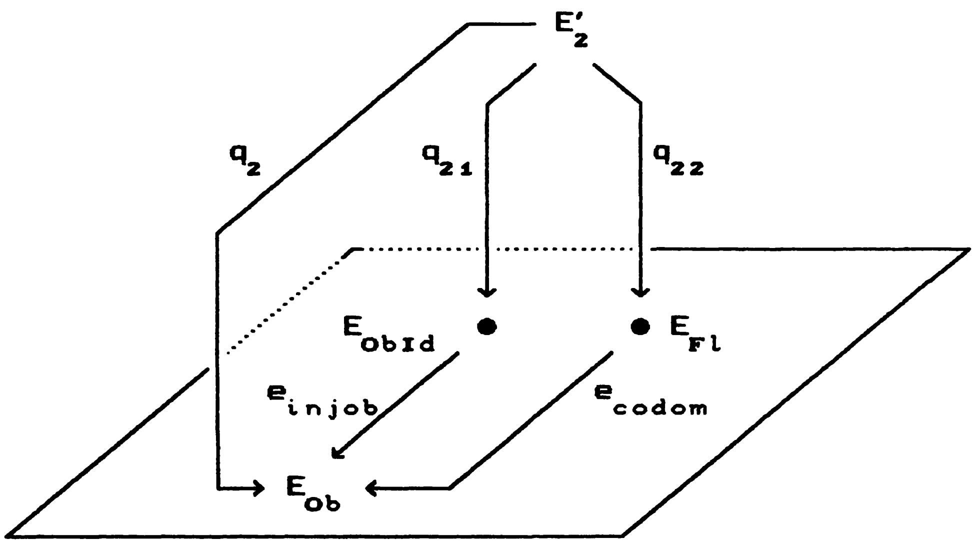


(i.e. l'image, par tout modèle, de e_{injob}
est un monomorphisme)



(i.e. l'image, par tout modèle, de e_{inj}
est un monomorphisme)





Dans ces conditions, il est facile de vérifier qu'il existe un modèle $\Gamma : \mathbb{E}_{GrComp} \longrightarrow \mathbb{G}rComp^{op}$, unique à équivalence naturelle près, tel que :

- $\Gamma(E_{Ob}) = \mathbb{1}_{\emptyset}$ est le graphe à composition (précédemment défini) qu'on peut (donc) représenter comme ci-dessous :

$$0 \bullet$$

- $\Gamma(E_{ObId}) = \mathbb{1}$ est le graphe à composition qu'on peut représenter comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} 0 \bullet \arrow[loop right, "\mathrm{id}(0)"] \end{tikzcd}$$

- $\Gamma(E_{Fl}) = \mathbb{2}_{\emptyset}$ est le graphe à composition (précédemment défini) qu'on peut (donc) représenter comme ci-dessous :

$$0 \bullet \xrightarrow{(0,1)} \bullet\ 1$$

- $\Gamma(E_{CComp}) = \mathbb{3}_{\emptyset}$ est le graphe à composition qu'on peut représenter comme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & \overset{1}{\bullet} \arrow[dr, "{(1,2)}"] & \\ 0 \bullet \arrow[ur, "{(0,1)}"] \arrow[rr, "{(0,2) = (1,2)\cdot(0,1)}"'] & & \bullet\ 2 \end{tikzcd}$$

- $\Gamma(E_{Ob}) = \mathbb{1}_{\emptyset} \xrightarrow{\Gamma(\ e_{dom}\ :\ E_{Fl} \longrightarrow E_{Ob}\ )} \mathbb{2}_{\emptyset} = \Gamma(E_{Fl})$

et :

$\Gamma(E_{Ob}) = \mathbb{1}_{\emptyset} \xrightarrow{\Gamma(\ e_{codom}\ :\ E_{Fl} \longrightarrow E_{Ob}\ )} \mathbb{2}_{\emptyset} = \Gamma(E_{Fl})$

sont les foncteurs tels que :

$$\Gamma(e_{dom})(0) = 0$$

et :

$$\Gamma(e_{codom})(0) = 1 \ ,$$

$$- \Gamma(E_{Fl}) = \mathbb{2}_\emptyset \xrightarrow{\Gamma(\, e_{comp} \,:\, E_{CComp} \longrightarrow E_{Fl}\,)} \mathbb{3}_\emptyset = \Gamma(E_{CComp})$$

est le foncteur tel que :

$$\Gamma(e_{comp})((0,1)) = (0,2) \ .$$

Alors, naturellement en tout objet $\mathbb{G}$ de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, on dispose du modèle de $\mathbb{E}_{GrComp}$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$, dit *associé à* $\mathbb{G}$ (*relativement à* Γ) :

$$\begin{aligned} M_\Gamma(\mathbb{G}) \ : \ \mathbb{E}_{GrComp} &\longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns} \\ E &\longmapsto \mathrm{Hom}_{GrComp}(\Gamma(E),\mathbb{G}) \end{aligned}$$

(autrement dit, on a - ou on peut encore noter :

$$M_\Gamma(\mathbb{G}) = \mathrm{Hom}_{GrComp}(\Gamma(-),\mathbb{G}) \ ).$$

Ainsi, on construit un foncteur, dit *relatif à* Γ :

$$M_\Gamma \ : \ \mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{GrComp},\mathbb{E}\mathrm{ns}) \ ,$$

et il est facile de vérifier que :

<u>Proposition 2 :</u> *La catégorie* $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$ *des petits graphes à composition est projectivement esquissable. Précisément, le foncteur* $M_\Gamma : \mathbb{G}\mathrm{rComp} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{GrComp},\mathbb{E}\mathrm{ns})$ *est une équivalence de catégories.*

Par conséquent, si $\mathbb{G}$ est un (petit) graphe à composition, on pourra l'identifier au modèle $M_\Gamma(\mathbb{G}) : \mathbb{E}_{GrComp} \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$, de sorte que tout objet G (resp. tout objet à identité G , toute flèche g , tout couple (g',g) de flèches composables, etc...) s'identifie au foncteur :

$$\left[\begin{aligned} \mathbb{1}_\emptyset &\longrightarrow \mathbb{G} \\ 0 &\longmapsto G \end{aligned}\right.$$

(resp. :

$$\left[\begin{aligned} \mathbb{1} &\longrightarrow \mathbb{G} \\ 0 &\longmapsto G \end{aligned}\right.$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{2}_{\emptyset} \longrightarrow \mathbb{G} \\ (0,1) \longmapsto g \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbb{3}_{\emptyset} \longrightarrow \mathbb{G} \ , \\ (0,1) \longmapsto g \\ (1,2) \longmapsto g' \\ (0,2) \longmapsto g'\cdot g \end{bmatrix}$$

etc...).

3.4. Amphi-catégories co-représentables[10]

Rappelons (voir [L.C.L.S.]) qu'une amphi-catégorie $\mathbf{A}$ est dite *co-représentable* si et seulement si :

- il existe un foncteur (bien entendu unique à équivalence naturelle près), dit *foncteur de co-représentation*, $C_{\mathbf{A}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}},\mathbb{A}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$ tel que, naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}$ et en tous objets A_1 , A_2 de $\mathbb{A}$, on a :

$$\mathbf{A}(C_{\mathbf{A}}(A_1)(E),A_2) \simeq \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\Gamma(E),\mathbf{A}(A_1,A_2))$$

(en particulier, on dispose de la bijection sous-jacente :

$$\mathbb{A}(C_{\mathbf{A}}(A_1)(E),A_2) \simeq \mathrm{GrComp}(\Gamma(E),\mathbf{A}(A_1,A_2)) \quad).$$

Dans la suite, on notera plus simplement :

$$C_{\mathbf{A}} = C : \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}},\mathbb{A}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} \quad .$$

Pour conclure, établissons un résultat technique simple, qui nous sera utile notamment au §4.3, et montrant déjà l'intérêt des catégories co-représentables.

Par analogie avec le cas non enrichi (voir [L.P.L.G.]),

[10] On trouvera des exemples d'amphi-catégories qui sont co-représentables en Section C, §6.5 (i.e. en [S.C.C.C.]).

disons qu'un objet A d'une amphi-catégorie amphi-co-complète $\mathbf{A}$ est *α-amphi-présentable*, pour un certain ordinal régulier α , si et seulement si :

- l'amphi-foncteur $\mathbf{A}(A,-) : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}$ commute aux amphi-co-limites indexées par des catégories α-filtrantes,

(en particulier, A est donc un objet α-présentable de la catégorie $\mathbb{A}$).

Alors, il est facile de vérifier que :

<u>Proposition 3 :</u> *Si $\mathbf{A}$ est une amphi-catégorie amphi-co-complète et co-représentable (de foncteur de co-représentation $C_{\mathbf{A}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}},\mathbb{A}^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}}$), si α est un ordinal régulier et si A est un objet α-amphi-présentable de $\mathbf{A}$, alors :*

- pour tout objet E de l'esquisse $\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}$ de graphe à composition, $C_{\mathbf{A}}(A)(E)$ est un objet α-présentable de $\mathbb{A}$.

<u>Preuve.</u>
Tout d'abord, on vérifie facilement que, pour tout objet E de $\mathbb{E}_{\mathrm{GrComp}}$, $\Gamma(E)$ est un objet α-présentable de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, puisque ... de présentation finie.
Maintenant, si $X = \underset{I \in \mathbb{I}}{\mathrm{colim}}\, X_I$ est une co-limite dans $\mathbb{A}$ indexée par la catégorie α-filtrante $\mathbb{I}$, on voit que :

$$\mathbb{A}(C_{\mathbf{A}}(A)(E), \underset{I \in \mathbb{I}}{\mathrm{colim}}\, X_I)$$

$$\simeq \text{ (} \mathbf{A} \text{ étant co-représentable)}$$

$$\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\Gamma(E), \mathbf{A}(A, \underset{I \in \mathbb{I}}{\mathrm{colim}}\, X_I))$$

$\simeq$ (A étant α-amphi-présentable et les colimites dans $\mathbb{A}$ étant des amphi-colimites dans $\mathbf{A}$, puisque $\mathbf{A}$ est amphi-co-complète)

$$\mathbb{G}rComp(\Gamma(E), \operatorname{colim}_{I \in \mathbb{D}} \mathbf{A}(A, X_I))$$

$\simeq$ ($\Gamma(E)$ étant α-présentable dans $\mathbb{G}rComp$)

$$\operatorname{colim}_{I \in \mathbb{D}} \mathbb{G}rComp(\Gamma(E), \mathbf{A}(A, X_I))$$

$\simeq$ ($\mathbf{A}$ étant co-représentable)

$$\operatorname{colim}_{I \in \mathbb{D}} \mathbb{A}(C_{\mathbf{A}}(A)(E), X_I)$$

D'où la conclusion.

<u>Fin de la preuve.</u>

4. Amphi-syntaxes et sesqui-algèbres

4.1. Amphi-syntaxes[1]

La notion d'amphi-syntaxe s'obtient par enrichissement automatique de celle de syntaxe (mais, pour qu'il soit automatique, encore nous a-t-il fallu présenter au §2.1 la notion de syntaxe d'une manière adéquate, qui a pu paraître pédante) :

<u>Définition 1 :</u> On dit que $\mathcal{D} = (\mathbb{A},\mathbb{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$ est une *amphi-syntaxe (sur* $\mathbb{A}$) si et seulement si :

- $\mathbb{A}$ est une amphi-catégorie,
- $\mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ sont des amphi-graphes à composition,
- $\mathbb{J} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{A}$ est un amphi-foncteur injectif sur les objets,
- pour tous objets B_1, $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, la flèche $\mathbb{J}(B_1,B_2) : \mathbb{B}(B_1,B_2) \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),\mathbb{J}(B_2))$ est un monomorphisme de $\mathbb{G}$rComp (i.e. un foncteur injectif !),
- $\mathbb{K} : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{D}$ est un amphi-foncteur bijectif sur les objets.

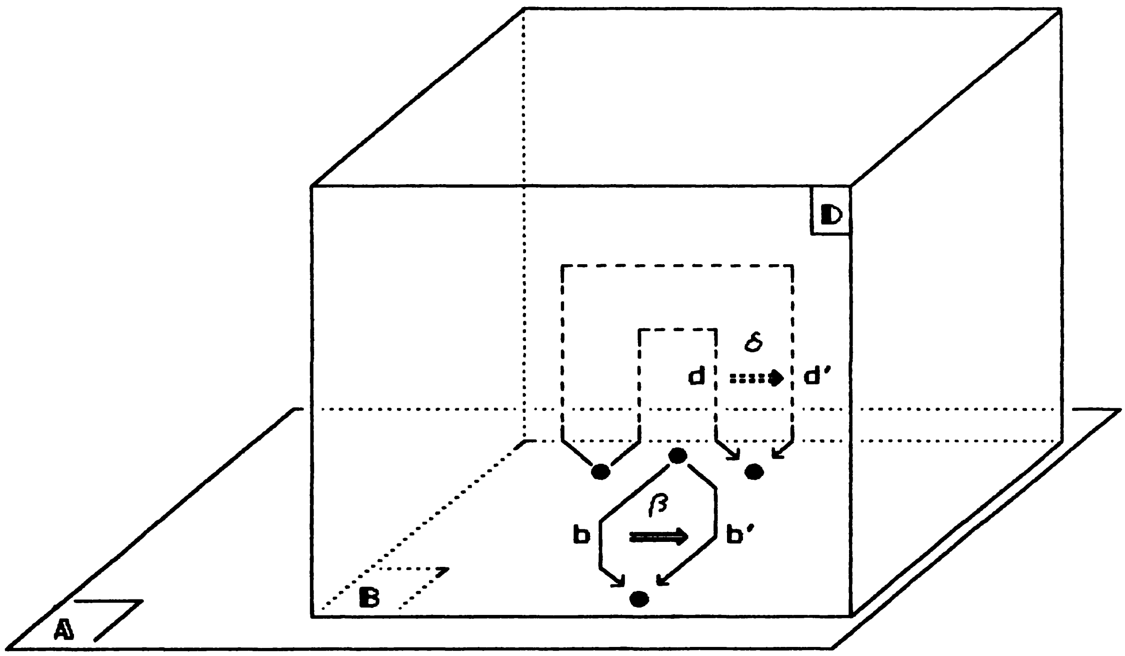
Alors, si $\mathbb{G}$ est un objet de $\mathbb{G}$rComp , on associe à $\mathcal{D}$ la syntaxe (non enrichie) $\mathbb{G}/\mathcal{D} = (\mathbb{G}/\mathbb{A},\mathbb{G}/\mathbb{J},\mathbb{G}/\mathbb{B},\mathbb{G}/\mathbb{K},\mathbb{G}/\mathbb{D})$ des 1-*flèches et* $\mathbb{G}$-*flèches de* $\mathcal{D}$ et la sous-syntaxe (non enrichie) $\mathcal{D}_{\mathbb{G}} = (\mathbb{G}/\mathbb{A},\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{B} \xrightarrow{\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{J}} \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{A} \xrightarrow{j_{\mathbb{G},\mathbb{A}}} \mathbb{G}/\mathbb{A},\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{B},\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{K},\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{D})$.

[1] On trouvera des exemples d'amphi-syntaxes en Section C, §6.4 (i.e. en [S.C.C.C.]).

En particulier, on pose :

$$\mathcal{D} = \mathbb{1}_\emptyset/\mathbb{D} = \mathbb{D}_{\mathbb{1}_\emptyset} \ .$$

Au même titre que, prenant $\mathbb{G} = \mathbb{1}_\emptyset$, $\mathbb{2}_\emptyset$, le graphe à composition des 1-flèches et le graphe à composition des 1-flèches et 2-flèches d'un amphi-graphe à composition permettent de le reconstruire entièrement (voir le §3.3), la syntaxe des 1-flèches et celle des 1-flèches et 2-flèches de $\mathbb{D}$ la décrivent complètement. On pourra donc visualiser les données attachées à une telle amphi-syntaxe $\mathbb{D}$ en représentant, comme indiqué au §2.1, les données attachées à la syntaxe (non enrichie) $\mathbb{2}_\emptyset/\mathbb{D}$ et en se contentant de distinguer graphiquement les 1-flèches des 2-flèches, comme usuellement pour les 2-catégories, i.e. comme suit :



(où, conformément aux conventions du §2.1, on a considéré que :

- $\mathbb{2}_\emptyset/\mathbb{J} : \mathbb{2}_\emptyset/\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{2}_\emptyset/\mathbb{A}$ est un foncteur injection *canoni-*

que sur les flèches de $\mathbb{2}_{\emptyset}/\mathbb{B}$, i.e. sur les 1-flèches et 2-flèches de $\mathbb{B}$,

- la restriction de $\mathbb{2}_{\emptyset}/\mathbb{K} : \mathbb{2}_{\emptyset}/\mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{2}_{\emptyset}/\mathbb{D}$ aux objets est une bijection *canonique*, c'est-à-dire est une application identité,

auquel cas celles des 1-flèches ou des 2-flèches de $\mathbb{D}$ qui "ne sont pas" respectivement des 1-flèches ou des 2-flèches de $\mathbb{B}$ sont représentées en pointillé car vues comme "formellement rajoutées à" $\mathbb{B}$).

On dira qu'une amphi-syntaxe $\mathscr{D} = (\mathbb{A},\mathbb{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$ est *petite* si et seulement si $\mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ sont des amphi-graphes à composition petits.
De plus, si α est un ordinal régulier et si $\mathbb{A}$ est amphi-co-complète, on dira que $\mathscr{D}$ est *d'amphi-rang* $\leq \alpha$ (*sur* $\mathbb{A}$) si et seulement si :

- pour tout objet $B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, $\mathbb{J}(B)$ est un objet α-amphi-présentable de $\mathbb{A}$.

La définition des amphi-homomorphismes entre amphi-syntaxes s'obtient par enrichissement automatique de celle des homomorphismes entre syntaxes : elle figure dans (les "resp." de) la définition ci-dessous. Mais il faut d'abord lire cette dernière comme étant celle des sesqui-homomorphismes, qui sont des homomorphismes plus faiblement (et donc moins automatiquement) enrichis que les amphi-homomorphismes.

<u>Définition 2 :</u> Si $\mathscr{D} = (\mathbb{A},\mathbb{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$ et $\mathscr{D}' = (\mathbb{A}',\mathbb{J}',\mathbb{B}',\mathbb{K}',\mathbb{D}')$ sont deux amphi-syntaxes, on dit que $\mathscr{H} = (\mathbb{F},\nu,\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{H})$ est un *sesqui-homomorphisme* (resp. un *amphi-homomorphisme*) *de* $\mathscr{D}$ *vers* $\mathscr{D}'$, et on note $\mathscr{H} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$, si et seulement

si :

- $\mathbf{F} : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}'$ est un amphi-foncteur,

- $\mathbf{R} : \mathbf{A}' \longrightarrow \mathbf{A}$ est un amphi-foncteur,

- $\nu : \mathbb{A}(-,R(-)) \Longrightarrow \mathbb{A}'(F(-),-) : \mathbb{A} \times \mathbb{A}' \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$ est une équivalence naturelle, de sorte que le foncteur R (sous-jacent à l'amphi-foncteur $\mathbf{R}$) est un adjoint à droite du foncteur F (sous-jacent à l'amphi-foncteur $\mathbf{F}$),

(resp. :

- $\nu : \mathbf{A}(-,R(-)) \Longrightarrow \mathbf{A}'(F(-),-)$ est une équivalence naturelle, de sorte que $\mathbf{R}$ est un amphi-adjoint, i.e. un GrComp-adjoint, à droite de $\mathbf{F}$),

- $\mathbf{Q} : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{B}'$ est un amphi-foncteur,

- $\mathbf{H} : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{D}'$ est un amphi-foncteur,

- les deux diagrammes ci-dessous sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathbf{Q}"] \arrow[d, "\mathbf{J}"'] & \mathbf{B}' \arrow[d, "\mathbf{J}'"] \\ \mathbf{A} \arrow[r, "\mathbf{F}"'] & \mathbf{A}' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{B} \arrow[r, "\mathbf{Q}"] \arrow[d, "\mathbf{K}"'] & \mathbf{B}' \arrow[d, "\mathbf{K}'"] \\ \mathbf{D} \arrow[r, "\mathbf{H}"'] & \mathbf{D}' \end{tikzcd}$$

On dira aussi que $\mathcal{K}$ est un sesqui-homomorphisme (resp. un amphi-homomorphisme *sur* l'adjonction (resp. l'amphi-adjonction) (F,ν,R) (resp. $(\mathbf{F},\nu,\mathbf{R})$).
En particulier, si $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$, si $\mathbf{F} = id(\mathbf{A}) = \mathbf{R}$ et si $\nu = id(\mathbb{A}(-,-))$ (resp. $\nu = id(\mathbf{A}(-,-))$), on dit que $\mathcal{K} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un sesqui-homomorphisme (resp. un amphi-homomorphisme) *sur* $\mathbf{A}$ et on note plus simplement :

$$\mathcal{K} = (id(\mathbf{A}),id(\mathbb{A}(-,-)),id(\mathbf{A}),\mathbf{Q},\mathbf{H}) = (\mathbf{Q},\mathbf{H})$$

(resp. $\mathcal{K} = (id(\mathbf{A}),id(\mathbf{A}(-,-)),id(\mathbf{A}),\mathbf{Q},\mathbf{H}) = (\mathbf{Q},\mathbf{H})$).

Enfin, si $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ et $\mathscr{D}''$ sont trois amphi-syntaxes sur les amphi-catégories respectives $\mathbb{A}$, $\mathbb{A}'$, $\mathbb{A}''$ et si $\mathscr{H}=(\mathbb{F},\nu,\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{H}) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$ et $\mathscr{H}'=(\mathbb{F}',\nu',\mathbb{R}',\mathbb{Q}',\mathbb{H}') : \mathscr{D}' \longrightarrow \mathscr{D}''$ sont deux sesqui-homomorphismes (resp. deux amphi-homomorphismes), il est clair que[2] :

$$\mathscr{H}'.\mathscr{H} = (\mathbb{F}'.\mathbb{F},\nu'\circledcirc\nu,\mathbb{R}.\mathbb{R}',\mathbb{Q}'.\mathbb{Q},\mathbb{H}'.\mathbb{H}) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}''$$

est un sesqui-homomorphisme (resp. un amphi-homomorphisme), que l'on appelle *le composé de* $\mathscr{H}'$ *avec* $\mathscr{H}$.

Supposons que $\mathscr{H} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$ est un amphi-homomorphisme. Bien entendu, il détermine un sesqui-homomorphisme *sous-jacent* $\mathscr{S}(\mathscr{H}) : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$ (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter). De même, pour tout objet $\mathbb{G}$ de $\mathbb{G}$rComp , $\mathscr{H}$ définit deux homomorphismes $\mathbb{G}/\mathscr{H} : \mathbb{G}/\mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{G}/\mathscr{D}'$ et $\mathscr{H}_{\mathbb{G}} : \mathscr{D}_{\mathbb{G}} \longrightarrow \mathscr{D}'_{\mathbb{G}}$ (que nous laissons au lecteur le soin d'expliciter).

Supposons, en revanche, que $\mathscr{H} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$ n'est qu'un sesqui-homomorphisme. Il n'est donc pas, en général, sous-jacent à un amphi-homomorphisme. De plus, ce n'est que pour l'objet $\mathbb{G} = \mathbb{1}_{\emptyset}$ de $\mathbb{G}$rComp que l'on peut affirmer, en général, que $\mathscr{H}$ définit un homomorphisme $\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathscr{H} : \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathscr{D} \longrightarrow \mathbb{1}_{\emptyset}/\mathscr{D}'$ entre les syntaxes des (seules) 1-flèches associées à $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Si $\mathscr{H} : \mathscr{D} \longrightarrow \mathscr{D}'$ est un amphi-homomorphisme (resp. un sesqui-homomorphisme), on pose évidemment :

$$\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathscr{H} = \mathscr{H} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}' .$$

[2] Si l'on pose, comme au (resp. par analogie avec le) §2.1, $\nu'\circledcirc\nu = \nu'(F(-),-)*\nu(-,R'(-))$

4.2. Amphi-algèbres et sesqui-algèbres[3]

La notion d'amphi-algèbre s'obtient par enrichissement automatique de celle d'algèbre (mais, pour qu'il soit automatique, encore nous a-t-il fallu présenter d'une manière adéquate au §2.2 la notion d'algèbre) : nous l'explicitons ci-dessous par souci de précision.
Nous introduirons ensuite celle de sesqui-algèbre, obtenue par un enrichissement plus faible et donc moins automatique.
Alors, on verra qu'une amphi-algèbre est entièrement déterminée par une algèbre et une sesqui-algèbre; par ailleurs, en Section B, §5.4, et Section C, §6.6, (i.e. en [S.C.C.B.] et [S.C.C.C.]), les sesqui-algèbres apparaîtront mieux adaptées à l'étude, que nous avons en vue, du problème de "l'assouplissement" des syntaxes.

Les amphi-algèbres sont définies comme suit :

<u>Définition 3 :</u> Si $\mathcal{D} = (\mathbb{A},\mathbb{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$ est une amphi-syntaxe, on dit que (A,Φ) est une *$\mathcal{D}$-amphi-algèbre* si et seulement si :

- A est un objet de $\mathbb{A}$,

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ de $\mathbb{B}$, $\Phi(B_1,B_2) : \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \longrightarrow \mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A))$ est un foncteur (i.e. une flèche de GrComp),

- pour tout objet $B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ tel que $\mathbb{K}(B) \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$, le diagramme (de GrComp) ci-dessous est commutatif :

[3] On trouvera des exemples d'amphi-algèbres et de sesqui-algèbres en Section C, §6.4 (i.e. en [S.C.C.C.]).

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A) \arrow[r, "\circledast(B,B)"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B),\mathbb{K}(B)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A)) \arrow[d, "{\mathrm{GrComp}(i_{\mathbb{D}}(\mathbb{K}(B)),\mathrm{id}(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A)))}"] \\
\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A) \arrow[r, "\mathrm{curry}(\mathrm{drte}_{\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A)})"'] & \mathrm{GrComp}(\mathbf{1}_{\emptyset},\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A))
\end{tikzcd}$$

- pour tous objets B_1 , B_2 , $B_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, le diagramme (de GrComp) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A)) \arrow[d, "{\mathrm{GrComp}(\mathrm{id}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3))),\circledast(B_1,B_2))}"] & \\
\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A))) \arrow[d, "\mathrm{curry}^{-1}", "\simeq"'] & \\
\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3))\otimes\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \arrow[d, "{\mathrm{GrComp}(m_{\mathbb{D}}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\mathrm{id}(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))}"] & \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_3),A) \arrow[luu, "{\circledast(B_2,B_3)}"'] \arrow[ldd, "{\circledast(B_1,B_3)}"] \\
\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) & \\
\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_3)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \arrow[u, "{\mathrm{GrComp}(k_{\mathbb{D}}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\mathrm{id}(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))}"'] &
\end{tikzcd}$$

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, le diagramme (de GrComp) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GrComp}(\mathbf{D}(\mathbf{K}(B_1),\mathbf{K}(B_2)),\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A)) \arrow[d, "\mathrm{GrComp}(\mathbf{K}(B_1,B_2),\mathrm{id}(\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A)))"] \\
\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_2),A) \arrow[ur, "\mathfrak{D}(B_1,B_2)"] \arrow[dr, "\mathrm{curry}(k_{\mathbf{A}}(\mathbf{J}(B_1),\mathbf{J}(B_2),A))"'] & \mathrm{GrComp}(\mathbf{B}(B_1,B_2),\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A)) \\
 & \mathrm{GrComp}(\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),\mathbf{J}(B_2)),\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A)) \arrow[u, "\mathrm{GrComp}(\mathbf{J}(B_1,B_2),\mathrm{id}(\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A)))"']
\end{tikzcd}$$

Pour une telle $\mathfrak{D}$-amphi-algèbre $(A,\mathfrak{D})$, si B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{B})$, si $x : \mathbf{J}(B_2) \longrightarrow A$ est une 1-flèche de $\mathbf{A}$ et si $d : \mathbf{K}(B_1) \longrightarrow \mathbf{K}(B_2)$ est une 1-flèche de $\mathbf{D}$, alors on désigne par $x \cdot_{\mathfrak{D}} d : \mathbf{J}(B_1) \longrightarrow A$ la 1-flèche de $\mathbf{A}$ telle que le diagramme (de GrComp) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_{\emptyset} \arrow[r, "x \cdot_{\mathfrak{D}} d"] & \mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A) \\
\mathbb{1}_{\emptyset}\otimes\mathbb{1}_{\emptyset} \arrow[u, "\mathrm{drte}_{\mathbb{1}_{\emptyset}} = \mathrm{gche}_{\mathbb{1}_{\emptyset}}", "\simeq"'] \arrow[r, "\mathrm{id}(\mathbb{1}_{\emptyset})\otimes d"'] & \mathbb{1}_{\emptyset}\otimes\mathbf{D}(\mathbf{K}(B_1),\mathbf{K}(B_2)) \arrow[u, "\mathrm{curry}^{-1}(\mathfrak{D}(B_1,B_2)\cdot x)"']
\end{tikzcd}$$

(sachant que, concrètement :

$$x : \mathbb{1}_{\emptyset} \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{J}(B_2),A) \ ,$$

$$\mathfrak{D}(B_1,B_2) : \mathbf{A}(\mathbf{J}(B_2),A) \longrightarrow \mathrm{GrComp}(\mathbf{D}(\mathbf{K}(B_1),\mathbf{K}(B_2)),\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A)) \ ,$$

$$d : \mathbb{1}_{\emptyset} \longrightarrow \mathbf{D}(\mathbf{K}(B_1),\mathbf{K}(B_2)) \ ,$$

$$x \cdot_{\mathfrak{D}} d : \mathbb{1}_{\emptyset} \longrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A)$$

sont des foncteurs). De la sorte, il est facile de vérifier qu'on dispose d'une $\mathcal{D}$-algèbre (i.e. d'une $\mathbb{D}_{\mathbb{1}_\emptyset}$ -algèbre) (A,ϑ) , appelée *la $\mathcal{D}$-algèbre des 1-flèches de* $(A,\mathbb{D})$, lorsque :

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ et pour toute 1-flèche $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$, on pose :

$$x \cdot_{\vartheta} d = x \cdot_{\mathbb{D}} d \ .$$

Plus généralement, si $\mathbb{G}$ est un objet de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, si B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, si $\chi : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow_{\mathbb{G}} A$ est une $\mathbb{G}$-flèche de $\mathbb{A}$ et si $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$, alors on désigne par $\chi \cdot_{\mathbb{D}} d : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$ la $\mathbb{G}$-flèche de $\mathbb{A}$ telle que le diagramme (de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r, "\chi \cdot_{\mathbb{D}} d"] & \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A) \\
\mathbb{G}\otimes\mathbb{1}_\emptyset \arrow[u, "\mathrm{drte}_{\mathbb{G}}", "\simeq"'] \arrow[r, "\mathrm{id}(\mathbb{G})\otimes d"'] & \mathbb{G}\otimes\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)) \arrow[u, "\mathrm{curry}^{-1}(\mathbb{D}(B_1,B_2)\cdot\chi)"']
\end{tikzcd}$$

(sachant que, concrètement :

$$\chi : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \ ,$$

$$\mathbb{D}(B_1,B_2) : \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \ ,$$

$$d : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)) \ ,$$

$$\chi \cdot_{\mathbb{D}} d : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)$$

sont des foncteurs). De la sorte, il est facile de vérifier qu'on dispose encore d'une $\mathbb{D}_{\mathbb{G}}$-algèbre $(A,\mathbb{D}_{\mathbb{G}})$, appelée *la $\mathbb{D}_{\mathbb{G}}$-algèbre des 1-flèches et $\mathbb{G}$-flèches de* $(A,\mathbb{D})$, lorsque :

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ et pour toute 1-flèche

$d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$, on pose :

$$x \cdot_{\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}} d = x \cdot_{\mathfrak{D}} d$$

(en particulier, si $\mathbb{G} = \mathbb{1}_{\emptyset}$, on a bien entendu $(A,\mathfrak{D}_{\mathbb{1}_{\emptyset}}) = (A,\vartheta)$),

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute $\mathbb{G}$-flèche $\chi : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow_{\mathbb{G}} A$ de $\mathbb{A}$ et pour toute 1-flèche $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$, on pose :

$$\chi \cdot_{\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}} d = \chi \cdot_{\mathfrak{D}} d \, .$$

Bien entendu, la $\mathcal{D}$-algèbre des 1-flèches de $(A,\mathfrak{D})$ et les $\mathfrak{D}_{\mathbb{G}}$-algèbres des 1-flèches et $\mathbb{G}$-flèches de $(A,\mathfrak{D})$ ne suffisent pas en général (et ceci quels que soient les $\mathbb{G}$ choisis) à reconstituer la $\mathfrak{D}$-amphi-algèbre $(A,\mathfrak{D})$: en effet, aucune ne contient d'informations concernant l'opération des $\mathbb{G}$-flèches de $\mathbb{D}$ sur les "1-flèches de $(A,\mathfrak{D})$ " (i.e. les 1-flèches de codomaine A).

Pour combler ces lacunes, si B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, si $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ est une 1-flèche de $\mathbb{A}$ et si $\delta : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{\mathbb{G}} \mathbb{K}(B_2)$ est une $\mathbb{G}$-flèche de $\mathbb{D}$, désignons par $x \cdot_{\mathfrak{D}} \delta : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow_{\mathbb{G}} A$ la $\mathbb{G}$-flèche de $\mathbb{A}$ telle que le diagramme (de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{G} \arrow[r, "x \cdot_{\mathfrak{D}} \delta"] & \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A) \\
\mathbb{1}_{\emptyset}\otimes\mathbb{G} \arrow[u, "\mathrm{gche}_{\mathbb{G}}", "\simeq"'] \arrow[r, "\mathrm{id}(\mathbb{1}_{\emptyset})\otimes\delta"'] & \mathbb{1}_{\emptyset}\otimes\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)) \arrow[u, "\mathrm{curry}^{-1}(\mathfrak{D}(B_1,B_2)\cdot x)"']
\end{tikzcd}$$

(sachant que, concrètement :

$$x : \mathbb{1}_{\emptyset} \to \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \ ,$$

$\mathfrak{D}(B_1,B_2) : \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \to \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A))$,

$$\delta : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)) \ ,$$
$$x \cdot_{\circledast} \delta : \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)$$

sont des foncteurs).

De la sorte, on n'obtient ni une "$(\mathbb{G}/\mathfrak{D})$-algèbre des 1-flèches de $(A,\circledast)$ " (puisque la composée d'une 1-flèche et d'une $\mathbb{G}$-flèche n'est pas une 1-flèche, à moins que $\mathbb{G} = \mathbb{1}_\emptyset$!), ni une "$(\mathbb{G}/\mathfrak{D})$-algèbre des 1-flèches et $\mathbb{G}$-flèches de $(A,\circledast)$ " (puisque la composée de deux $\mathbb{G}$-flèches n'est pas, a priori, définie, à moins que $\mathbb{G} = \mathbb{1}_\emptyset$!) : la structure obtenue est celle d'une $(\mathbb{G}/\mathfrak{D})$-algèbre *partielle* (au sens de [A.M.E.N.]) très particulière sur les 1-flèches et $\mathbb{G}$-flèches de $(A,\circledast)$. En fait, nous verrons plus bas qu'il est possible et préférable de rendre compte de cette partialité très particulière en termes de sesqui-algèbre.

En tout cas, moyennant les notations qui précèdent, il est facile de constater que les axiomes exprimant que $(A,\circledast)$ est une $\mathfrak{D}$-amphi-algèbre impliquent les suivants (ré-écrits en utilisant des notations analogues à celles introduites au §3.2 et concernant les sur-structures $\mathfrak{L}_\emptyset//\mathbb{D}$ et $\mathfrak{L}_\emptyset//\mathbb{A}$ de $\mathfrak{L}_\emptyset/\mathbb{D}$ et $\mathfrak{L}_\emptyset/\mathbb{A}$) puis leurs sont équivalents :

(i) pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 2-flèche $\chi : x \Longrightarrow x' : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a la 2-flèche :
$$\chi \cdot_{\circledast} \delta : x \cdot_{\circledast} d \Longrightarrow x' \cdot_{\circledast} d : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$$
de $\mathbb{A}$,

(ii) pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 2-flèche identité $\mathrm{Id}(x) : x \Longrightarrow x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :
$$\mathrm{Id}(x) \cdot_{\circledast} d = \mathrm{Id}(x \cdot_{\circledast} d) : x \cdot_{\circledast} d \Longrightarrow x \cdot_{\circledast} d : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$$
dans $\mathbb{A}$,

(iii) pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 2-flèche composée $\chi' * \chi : x \Longrightarrow x' \Longrightarrow x'' : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$(\chi' * \chi) \cdot_{\mathfrak{S}} d = (\chi' \cdot_{\mathfrak{S}} d) * (\chi \cdot_{\mathfrak{S}} \delta) :$$
$$x \cdot_{\mathfrak{S}} d \Longrightarrow x' \cdot_{\mathfrak{S}} d \Longrightarrow x'' \cdot_{\mathfrak{S}} d : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$$

dans $\mathbb{A}$,

(j) pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 2-flèche $\delta : d \Longrightarrow d' : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a la 2-flèche :

$$x \cdot_{\mathfrak{S}} \delta : x \cdot_{\mathfrak{S}} d \Longrightarrow x \cdot_{\mathfrak{S}} d' : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$$

de $\mathbb{A}$,

(jj) pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 2-flèche identité $\mathrm{Id}(d) : d \Longrightarrow d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_{\mathfrak{S}} \mathrm{Id}(d) = \mathrm{Id}(x \cdot_{\mathfrak{S}} d) : x \cdot_{\mathfrak{S}} d \Longrightarrow x \cdot_{\mathfrak{S}} d : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$$

dans $\mathbb{A}$,

(jjj) pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 2-flèche composée $\delta' * \delta : d \Longrightarrow d' \Longrightarrow d'' : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_{\mathfrak{S}} (\delta' * \delta) = (x \cdot_{\mathfrak{S}} \delta') * (x \cdot_{\mathfrak{S}} \delta) :$$
$$x \cdot_{\mathfrak{S}} d \Longrightarrow x \cdot_{\mathfrak{S}} d' \Longrightarrow x \cdot_{\mathfrak{S}} d'' : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$$

dans $\mathbb{A}$,

(k) pour tout objet $B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ tel que $\mathbb{K}(B) \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_{\mathfrak{S}} \mathrm{id}(\mathbb{K}(B)) = x \quad ,$$

(kk) pour tous objets B_1 , B_2 , $B_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toutes 1-flèches ou 2-flèches $\delta_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ et $\delta_2 : \mathbb{K}(B_2) \longrightarrow \mathbb{K}(B_3)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 1-flèche ou 2-flèche $\xi : \mathbb{J}(B_3) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, dès que l'un des membres de l'égalité ci-dessous est défini, l'autre l'est également et cette égalité est vérifiée :

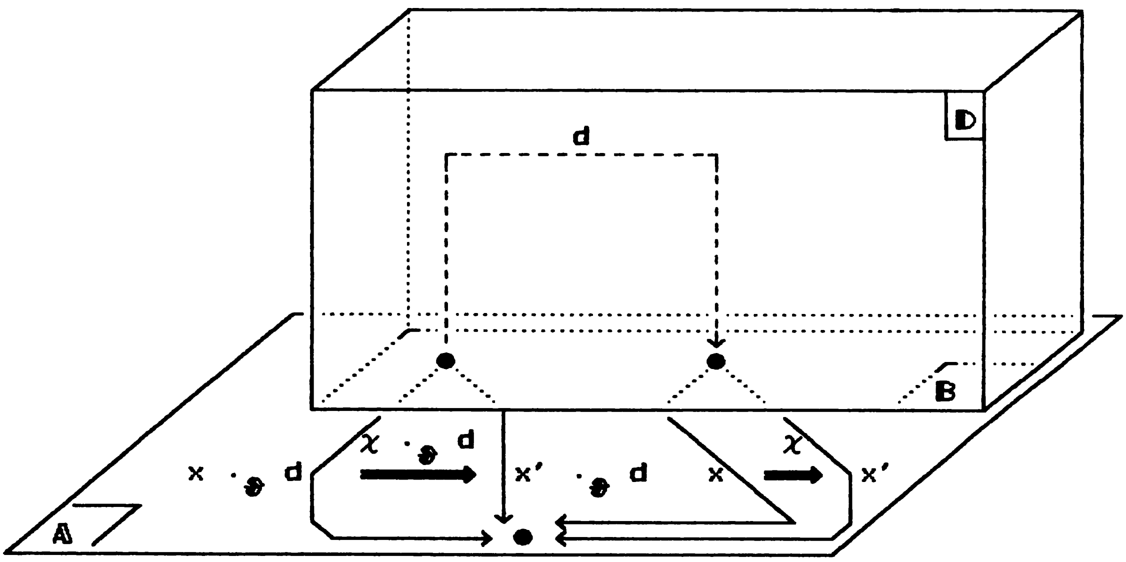
$$\mathfrak{x} \cdot_{\mathfrak{D}} (\mathfrak{d}_2 \cdot \mathfrak{d}_1) = (\mathfrak{x} \cdot_{\mathfrak{D}} \mathfrak{d}_2) \cdot_{\mathfrak{D}} \mathfrak{d}_1 \quad ,$$

(kkk) pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche ou 2-flèche $\mathfrak{b} : B_1 \longrightarrow B_2$ de $\mathbb{B}$ et pour toute 1-flèche ou 2-flèche $\mathfrak{x} : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, dès que l'un des membres de l'égalité ci-dessous est défini, l'autre l'est également et cette égalité est vérifiée :

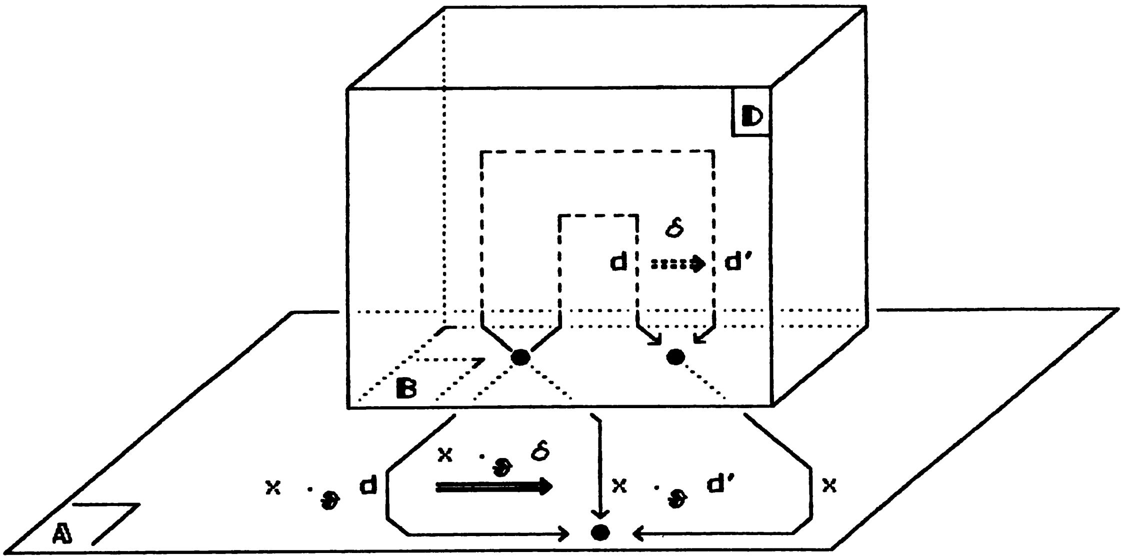
$$\mathfrak{x} \cdot_{\mathfrak{D}} \mathbb{K}(\mathfrak{b}) = \mathfrak{x} \cdot \mathbb{J}(\mathfrak{b})$$

(évidemment, les axiomes (i) à (iii) expriment la "fonctorialité à gauche, Hom interne par Hom interne" de la "loi de composition" $- \cdot_{\mathfrak{D}} -$, tandis que les axiomes (j) à (jjj) expriment sa fonctorialité à droite).

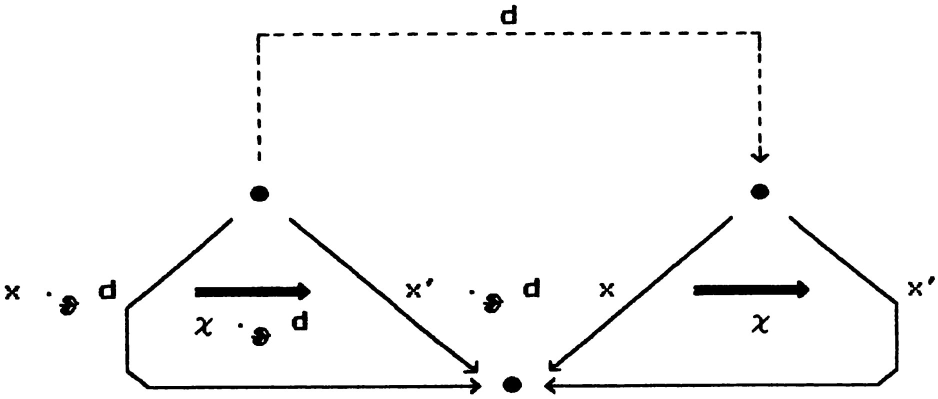
On pourra donc visualiser cette loi de composition - attachée à une telle $\mathbb{D}$-amphi-algèbre $(A,\mathfrak{D})$ comme suit :



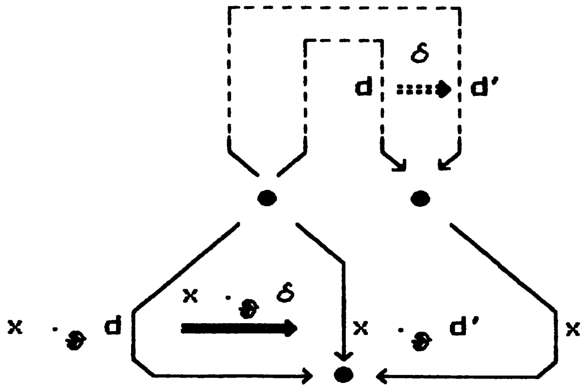
et comme suit :



ou, plus simplement, ainsi :



et ainsi :



Si on ne peut donc pas dire qu'une $\mathcal{D}$-amphi-algèbre $(A,\mathcal{D})$ est entièrement déterminée par la seule $\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}_\emptyset}$-algèbre $(A,\mathcal{D}_{\mathfrak{Z}_\emptyset})$ de ses 1-flèches et 2-flèches, des conditions (i) à (kkk) résulte néanmoins qu'elle peut être "entièrement reconstruite à partir de la composition - mais qui est partielle - des 1-flèches ou 2-flèches de $\mathbb{D}$ avec les 1-flèches ou 2-flèches de $\mathbf{A}$ de codomaine A ".

Définissons les sesqui-algèbres comme suit :

<u>Définition 4 :</u> Si $\mathcal{D} = (\mathbf{A},\mathbf{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$ est une amphi-syntaxe, on dit que (A,σ) est une *$\mathcal{D}$-sesqui-algèbre* si et seulement si :

- A est un objet de $\mathbf{A}$,

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ de $\mathbb{B}$:
$\sigma(B_1,B_2) : \mathbb{A}(\mathbf{J}(B_2),A) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbf{A}(\mathbf{J}(B_1),A))$
est une application (i.e. une flèche de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$!) pour laquelle on note :

$$\sigma(B_1,B_2) : \mathbb{A}(\mathbf{J}(B_2),A) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbf{J}(B_1),A))$$

l'application définie comme rendant commutatif le diagramme ci-dessous[4] :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \arrow[r, "\sigma(B_1,B_2)"] \arrow[dr, "\sigma(B_1,B_2)"'] & \mathbb{G}r\mathrm{Comp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \arrow[d, "\langle \mathbb{G}r\mathrm{Comp}(\mathbb{1}_\emptyset,-)\rangle (\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A))"] \\
& \mathbb{E}ns(\mathbb{G}r\mathrm{Comp}(\mathbb{1}_\emptyset,\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))),\mathbb{G}r\mathrm{Comp}(\mathbb{1}_\emptyset,\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))
\end{tikzcd}$$

$$= \mathbb{E}ns(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A))$$

- pour tout objet $B \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$ tel que $\mathbb{K}(B) \in \mathrm{ObId}(\mathbb{D})$, le diagramme (de $\mathbb{E}ns$) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A) \arrow[r, "\sigma(B,B)"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{G}r\mathrm{Comp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B),\mathbb{K}(B)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A)) \arrow[d, "\mathbb{G}r\mathrm{Comp}(i_{\mathbb{D}}(K(B)),\mathrm{id}(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A)))"] \\
& \mathbb{G}r\mathrm{Comp}(\mathbb{1}_\emptyset,\mathbb{A}(\mathbb{J}(B),A))
\end{tikzcd}$$

- pour tous objets B_1 , B_2 , $B_3 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, le diagramme (de $\mathbb{E}ns$) ci-dessous est commutatif :

[4] La notation $\langle \mathbb{G}r\mathrm{Comp}(\mathbb{1}_\emptyset,-)\rangle$ est conforme à la convention générale choisie au §1.2, appliquée au foncteur $\mathbb{G}r\mathrm{Comp}(\mathbb{1}_\emptyset,-) : \mathbb{G}r\mathrm{Comp} \longrightarrow \mathbb{E}ns$.

Le lecteur voudra bien pardonner la lourdeur - intentionnelle ici - de la présentation adoptée : nous voulons de nouveau suggérer qu'on pourrait "enrichir" (ou "partiellement enrichir") les graphes à composition puis les syntaxes autrement que par $\mathbb{G}r\mathrm{Comp}$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A))) & \\
 & \mathbb{E}\mathrm{ns}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A)) \arrow[ul, "{\mathbb{E}\mathrm{ns}(id(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3))),\sigma(B_1,B_2))}"'] \\
\begin{array}{l}\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\\ \quad \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))\end{array} \arrow[uu, "{\begin{array}{l}\langle \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{1}_{\emptyset},-)\rangle \\ (\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)), \\ \quad \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))\end{array}}"] & \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_3),A) \arrow[u, "{\sigma(B_2,B_3)}"'] \\
\begin{array}{l}\mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3))\otimes\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\\ \quad \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A))\end{array} \arrow[u, "\mathrm{curry}"] & \mathrm{PF} \arrow[l, "{\hat{m}(B_1,B_2,B_3,A)}"'] \arrow[u, "{\hat{k}(B_1,B_2,B_3,A)}"']
\end{tikzcd}$$

si le diagramme ci-dessous représente un produit fibré (de projections $\hat{k}(B_1,B_2,B_3,A)$ et $\hat{m}(B_1,B_2,B_3,A)$) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}^{\cdot\cdot}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\ \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) & \mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_3)),\ \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \arrow[l, "\mathrm{GrComp}(k_{\mathbb{D}}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\ id(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))"'] \\
 & \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_3),A) \arrow[u, "\sigma(B_1,B_3)"'] \\
\mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3))\otimes\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\ \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \arrow[uu, "\mathrm{GrComp}(m_{\mathbb{D}}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2),\mathbb{K}(B_3)),\ id(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))"] & PF \arrow[u, "\hat{k}(B_1,B_2,B_3,A)"'] \arrow[l, "\hat{m}(B_1,B_2,B_3,A)"']
\end{tikzcd}$$

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, le diagramme (de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{GrComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \arrow[d, "\mathrm{GrComp}(\mathbb{K}(B_1,B_2),\ id(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))"] \\
\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \arrow[ur, "\sigma(B_1,B_2)"] \arrow[dr, "\mathrm{GrComp}(\mathbb{1}_{\emptyset},\ \mathrm{curry}(k_{\mathbb{A}}(\mathbb{J}(B_1),\mathbb{J}(B_2),A)))"'] & \mathrm{GrComp}(\mathbb{B}(B_1,B_2),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \\
 & \mathrm{GrComp}(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),\mathbb{J}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \arrow[u, "\mathrm{GrComp}(\mathbb{J}(B_1,B_2),\ id(\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)))"']
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si (A,σ) est une $\mathbb{D}$-sesqui-algèbre, alors (A,σ)

est une $\mathcal{D}$-algèbre. Nous dirons que c'est la *$\mathcal{D}$-algèbre des 1-flèches de* (A,σ) et (par analogie avec le cas des amphi-algèbres) on pourra noter $(A,\sigma) = (A,\sigma_{\mathbb{1}_\emptyset})$.

Pour une telle $\mathcal{D}$-sesqui-algèbre (A,σ) , si B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, si $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ est une 1-flèche de $\mathbb{A}$ et si $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$, alors on désigne par $x \cdot_\sigma d : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$ la 1-flèche de $\mathbb{A}$ telle que le diagramme (de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$) ci-dessous est commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{1}_\emptyset \arrow[r, "d"'] \arrow[rr, bend left, "x \cdot_\sigma d"] & \mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)) \arrow[r, "\sigma(B_1,B_2)(x)"'] & \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)
\end{tikzcd}
$$

(sachant que, concrètement :

$$x : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \ ,$$
$$\sigma(B_1,B_2) : \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \longrightarrow \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) ,$$
$$d : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)) \ ,$$
$$x \cdot_\sigma d : \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)$$

sont des foncteurs).

Trivialement, on voit que :

- pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ et pour toute 1-flèche $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$, on a :

$$x \cdot_\sigma d = x \cdot_\sigma d \ .$$

De même, si $\mathbb{G}$ est un objet de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$, si B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, si $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ est une 1-flèche de $\mathbb{A}$ et si $\delta : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{\mathbb{G}} \mathbb{K}(B_2)$ est une $\mathbb{G}$-flèche de $\mathbb{D}$, on désigne par $x \cdot_\sigma \delta : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow_{\mathbb{G}} A$ la $\mathbb{G}$-flèche de $\mathbb{A}$ telle que le diagramme (de $\mathbb{G}\mathrm{rComp}$) ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{G} \arrow[r, "\delta"'] \arrow[rr, bend left, "x \cdot_{\sigma} \delta"] & \mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)) \arrow[r, "\sigma(B_1,B_2)(x)"'] & \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A) \end{tikzcd}$$

(sachant que, concrètement :

$$x : \mathbb{1}_{\emptyset} \to \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \ ,$$

$$\sigma(B_1,B_2) : \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_2),A) \to \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)),\mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)) \ ,$$

$$\delta : \mathbb{G} \to \mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2)) \ ,$$

$$x \cdot_{\sigma} \delta : \mathbb{G} \to \mathbb{A}(\mathbb{J}(B_1),A)$$

sont des foncteurs).

Cependant, de la sorte on n'obtient qu'une $(\mathbb{G}/\mathfrak{D})$-algèbre *partielle* (au sens de [A.M.E.N.]) très particulière sur les 1-flèches et $\mathbb{G}$-flèches de (A,σ) . *C'est la nature même du mode d'enrichissement partiel choisi pour les sesqui-algèbres qui précise le "genre de partialité" de cette $(\mathbb{G}/\mathfrak{D})$-algèbre partielle* (et qui nous dispensera dans la suite de parler en termes d'algèbres partielles "générales" - i.e. trop générales ici).

Moyennant les notations qui précèdent, il est facile de vérifier que les axiomes exprimant que (A,σ) est une $\mathfrak{D}$-sesqui-algèbre impliquent les suivants (ré-écrits en utilisant des notations analogues à celles introduites au §3.2 et concernant la sur-structure $\mathcal{Z}_{\emptyset}//\mathbb{D}$ de $\mathcal{Z}_{\emptyset}/\mathbb{D}$) puis leurs sont équivalents :

(j') pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 2-flèche $\delta : d \Longrightarrow d' : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a la 2-flèche :

$$x \cdot_{\sigma} \delta : x \cdot_{\sigma} d \Longrightarrow x \cdot_{\sigma} d' : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$$

de $\mathbb{A}$,

(jj') pour tous objets B_1 , $B_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbb{B})$, pour toute 2-flèche identité $\mathrm{Id}(d) : d \Longrightarrow d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$

et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :
$x \cdot_\sigma Id(d) = Id(x \cdot_\sigma d) : x \cdot_\sigma d \Longrightarrow x \cdot_\sigma d : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$
dans $\mathbb{A}$,

(jjj') pour tous objets B_1 , $B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, pour toute 2-flèche composée $\delta' * \delta : d \Longrightarrow d' \Longrightarrow d'' : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_\sigma (\delta' * \delta) = (x \cdot_\sigma \delta') * (x \cdot_\sigma \delta) :$$
$$x \cdot_\sigma d \Longrightarrow x \cdot_\sigma d' \Longrightarrow x \cdot_\sigma d'' : \mathbb{J}(B_1) \longrightarrow A$$

dans $\mathbb{A}$,

(k') pour tout objet $B \in Ob(\mathbb{B})$ tel que $\mathbb{K}(B) \in ObId(\mathbb{D})$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_\sigma id(\mathbb{K}(B)) = x \quad ,$$

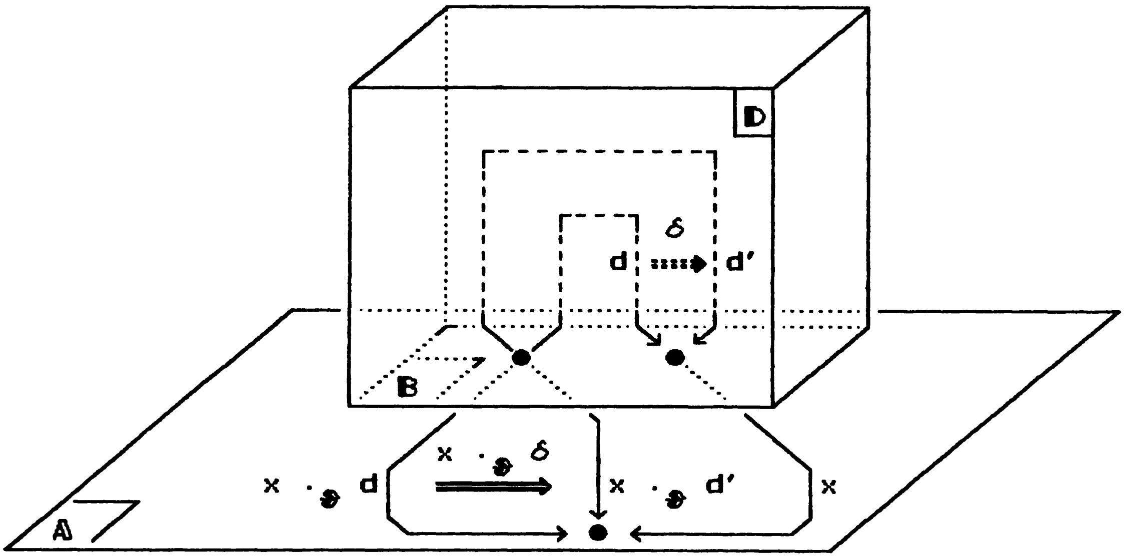
(kk') pour tous objets B_1 , B_2 , $B_3 \in Ob(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche ou 2-flèche $\delta_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$, pour toute 1-flèche $\delta_2 : \mathbb{K}(B_2) \longrightarrow \mathbb{K}(B_3)$ de $\mathbb{D}$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_3) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, dès que l'un des membres de l'égalité ci-dessous est défini, l'autre l'est également et cette égalité est vérifiée :

$$x \cdot_\sigma (\delta_2 \cdot \delta_1) = (x \cdot_\sigma \delta_2) \cdot_\sigma \delta_1 \quad ,$$

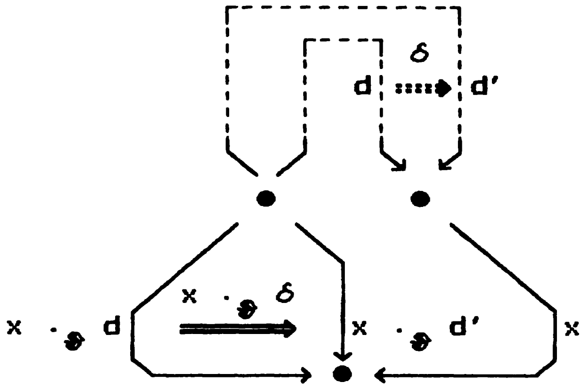
(kkk') pour tous objets B_1 , $B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, pour toute 1-flèche ou 2-flèche $\mathfrak{b} : B_1 \longrightarrow B_2$ de $\mathbb{B}$ et pour toute 1-flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, dès que l'un des membres de l'égalité ci-dessous est défini, l'autre l'est également et cette égalité est vérifiée :

$$x \cdot_\sigma \mathbb{K}(\mathfrak{b}) = x \cdot \mathbb{J}(\mathfrak{b}) \quad .$$

On pourra donc visualiser cette loi de composition attachée à une telle $\mathfrak{D}$-sesqui-algèbre (A,σ) comme suit :



ou, plus simplement, ainsi :



Si on ne peut évidemment pas dire qu'une $\mathfrak{D}$-sesqui-algèbre $(A,\boldsymbol{\sigma})$ est entièrement déterminée par la seule $\mathcal{D}$-algèbre (A,σ) de ses 1-flèches, des conditions (j') à (kkk') résulte néanmoins qu'elle peut être "entièrement reconstruite à partir de la composition des 1-flèches ou 2-flèches de $\mathbb{D}$ avec les (seules) 1-flèches de $\mathbb{A}$ de codomaine A ".

Compte tenu des définitions (et notations) adoptées pour les amphi-algèbres et sesqui-algèbres, il est maintenant clair que :

Proposition 1 : *Si* $\mathcal{D} = (\mathbb{A},\mathbb{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$ *est une amphi-syntaxe, alors une* $\mathcal{D}$*-amphi-algèbre* $(A,\circledast)$ *est entièrement déterminée par la donnée d'une* $\mathcal{D}_{\mathfrak{L}_\varnothing}$*-algèbre* (A,τ) *("sur les 1-flèches et 2-flèches de* $(A,\circledast)$ *") et d'une* $\mathcal{D}$*-sesqui-algèbre* (A,σ) *("sur les 1-flèches de* $(A,\circledast)$ *") telles que :*

- *pour tous objets* B_1 , $B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, *pour toute 1-flèche* $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ *de* $\mathbb{D}$ *et pour toute 1-flèche* $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ *de* $\mathbb{A}$, *on a :*

$$x \cdot_{\circledast} d = x \cdot_{\tau} d = x \cdot_{\sigma} d \ ,$$

- *pour tous objets* B_1 , $B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, *pour toute 1-flèche* $d : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ *de* $\mathbb{D}$ *et pour toute 2-flèche* $\chi : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow_{\mathfrak{L}_\varnothing} A$ *de* $\mathbb{A}$, *on a :*

$$\chi \cdot_{\circledast} d = \chi \cdot_{\tau} d \ ,$$

- *pour tous objets* B_1 , $B_2 \in Ob(\mathbb{B})$, *pour toute 2-flèche* $\delta : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{\mathfrak{L}_\varnothing} \mathbb{K}(B_2)$ *de* $\mathbb{D}$ *et pour toute 1-flèche* $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ *de* $\mathbb{A}$, *on a :*

$$x \cdot_{\circledast} \delta = x \cdot_{\sigma} \delta \ .$$

Clairement, (A,τ) est la $\mathcal{D}_{\mathfrak{L}_\varnothing}$-algèbre des 1-flèches et 2-flèches de $(A,\circledast)$: on a donc $(A,\tau) = (A,\circledast_{\mathfrak{L}_\varnothing})$ et on note aussi $(A,\tau) = T(A,\circledast)$. De même, on appelle (A,σ) la $\mathcal{D}$-sesqui-algèbre des 1-flèches de $(A,\circledast)$ et on note $(A,\sigma) = (A,\sigma(\circledast)) = S(A,\circledast)$.

La définition des amphi-homomorphismes (resp. des sesqui-homomorphismes) entre $\mathcal{D}$-amphi-algèbres (resp. entre

$\mathcal{D}$-sesqui-algèbres) s'obtient automatiquement : nous laissons au lecteur le soin de l'écrire, en enrichissant (resp. en enrichissant partiellement) la définition 4 du §2.2.

Alors, on note $\mathbf{A}^{\mathcal{D}}$ la catégorie (évidemment localement petite) dont les objets sont les $\mathcal{D}$-amphi-algèbres et dont les flèches sont les $\mathcal{D}$-amphi-homomorphismes[5]. On dispose donc du foncteur (évidemment fidèle)[6] :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{U}^{\mathcal{D}} : \mathbf{A}^{\mathcal{D}} & \longrightarrow & \mathbb{A} \\ (A,\sigma) & \longmapsto & A \\ ((A_1,\sigma_1),a:A_1 \longrightarrow A_2,(A_2,\sigma_2)) & \longmapsto & a \end{array}$$

De même, on note $\mathbb{A}^{\mathcal{D}}$ [7] la catégorie (évidemment localement petite) dont les objets sont les $\mathcal{D}$-sesqui-algèbres et

[5] On ne se préoccupe pas de détailler l'enrichissement canonique qui permet de munir la catégorie notée commodément ici $\mathbf{A}^{\mathcal{D}}$ d'une structure d'amphi-catégorie (qui mériterait, davantage que sa catégorie sous-jacente, d'être notée $\mathbf{A}^{\mathcal{D}}$).

[6] Le foncteur noté commodément ici $\mathbf{U}^{\mathcal{D}}$ est canoniquement sous-jacent à un amphi-foncteur (que nous ne nous préoccupons pas d'expliciter) $\mathbf{A}^{\mathcal{D}} \longrightarrow \mathbf{A}$ (qui mériterait, davantage que son foncteur sous-jacent, d'être noté $\mathbf{U}^{\mathcal{D}}$).

[7] La notation $\mathbb{A}^{\mathcal{D}}$ nous semble assez parlante, elle présente cependant quelque danger si l'on oublie que, (A,σ) étant une $\mathcal{D}$-sesqui-algèbre :
- certes, les 1-flèches et les 2-flèches de $\mathbf{D}$ ne peuvent se composer qu'avec les 1-flèches de $\mathbf{A}$ de codomaine A (i. e. avec les flèches de $\mathbb{A}$ de codomaine A, ce qui est une justification de l'utilisation du "$\mathbb{A}$" dans la notation $\mathbb{A}^{\mathcal{D}}$),
- en revanche, le composé d'une 2-flèche de $\mathbf{D}$ avec une 1-flèche de $\mathbf{A}$ de codomaine A est une 2-flèche de $\mathbf{A}$ (et non pas une flèche de $\mathbb{A}$).

dont les flèches sont les $\boldsymbol{\mathcal{D}}$-sesqui-homomorphismes.

On laisse au lecteur le soin de compléter, à la lumière de ces considérations, la proposition 1 précédente, en constatant qu'on dispose canoniquement d'un produit fibré représenté par le diagramme commutatif (des foncteurs "$\boldsymbol{\mathcal{D}}$-sesqui-algèbre des 1-flèches sous-jacente", "$\mathcal{D}$-algèbre des 1-flèches et 2-flèches sous-jacente" et de trois foncteurs "$\mathcal{D}$-algèbre des 1-flèches sous-jacente") suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{A}^{\boldsymbol{\mathcal{D}}} \arrow[dl, "S"'] \arrow[dr, "T"] \arrow[dd] & \\
\mathbb{A}^{\boldsymbol{\mathcal{D}}} \arrow[dr] & & (\mathbb{2}_{\emptyset}/\mathbf{A})^{\boldsymbol{\mathcal{D}}_{\mathbb{2}_{\emptyset}}} \arrow[dl] \\
 & \mathbb{A}^{\mathcal{D}} &
\end{tikzcd}$$

Bien entendu, un amphi-homomorphisme (resp. un sesqui-homomorphisme) entre amphi-syntaxes *induit* un foncteur entre leurs catégories d'amphi-algèbres (resp. de sesqui-algèbres) : nous laissons au lecteur le soin de le constater, en "enrichissant" (resp. en "enrichissant partiellement"), les développements correspondants du §2.2[8].

Formellement, si $\boldsymbol{\mathcal{D}} = (\mathbf{A},\mathbf{J},\mathbf{B},\mathbf{K},\mathbf{D})$ et $\boldsymbol{\mathcal{D}}' = (\mathbf{A}',\mathbf{J}',\mathbf{B}',\mathbf{K}',\mathbf{D}')$

[8] Nous ne faisons figurer ici que des considérations très brèves sur les foncteurs induits par les amphi-homomorphismes (resp. les sesqui-homomorphismes). D'une part, parce qu'elles se déduisent par enrichissement automatique (resp. partiel) des considérations du §2.2 et, d'autre part, parce que nous n'en aurons pas l'utilité dans la suite, puisque nous ne chercherons pas à y construire, a fortiori à caractériser, la théorie enrichie (resp. partiellement enrichie) engendrée par une amphi-syntaxe.

sont deux amphi-syntaxes, si $\mathcal{H} = (\mathbb{F}, \nu, \mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{H}) : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}'$ est un amphi-homomorphisme (resp. un sesqui-homomorphisme), on note :

$$\mathbb{R}^{\mathcal{H}} : \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{D}}$$

(resp. :

$$R^{\mathcal{H}} : \mathbb{A}'^{\mathcal{D}'} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{D}} \quad)$$

le foncteur qu'il induit.

Dans la même veine qu'au §2.2, nous laissons au lecteur le soin d'exhiber "tous" les diagrammes commutatifs qu'on peut déduire canoniquement de ces foncteurs.

Enfin, il vérifiera que "l'induction des foncteurs est fonctorielle".

4.3. Amphi-algèbres libres et sesqui-algèbres libres

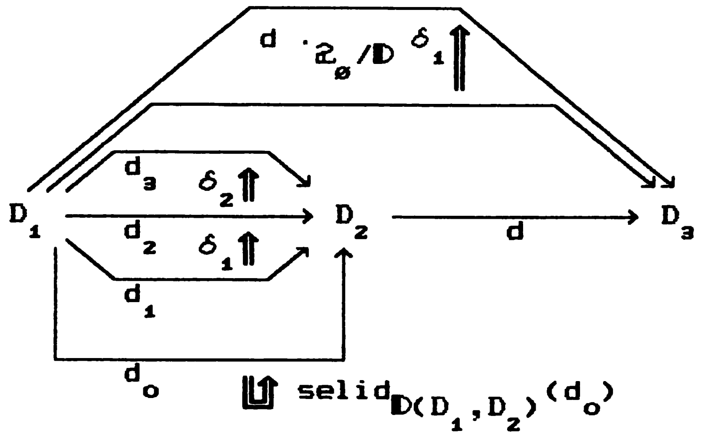
On va associer à chaque amphi-syntaxe sur une amphi-catégorie co-représentable deux syntaxes (non enrichies) :

- l'une dont les algèbres seront exactement les sesqui-algèbres de cette amphi-syntaxe,
- l'autre dont les algèbres seront exactement les amphi-algèbres de cette amphi-syntaxe.

Alors, il sera facile de prouver qu'il existe des sesqui-algèbres et des amphi-algèbres libres.

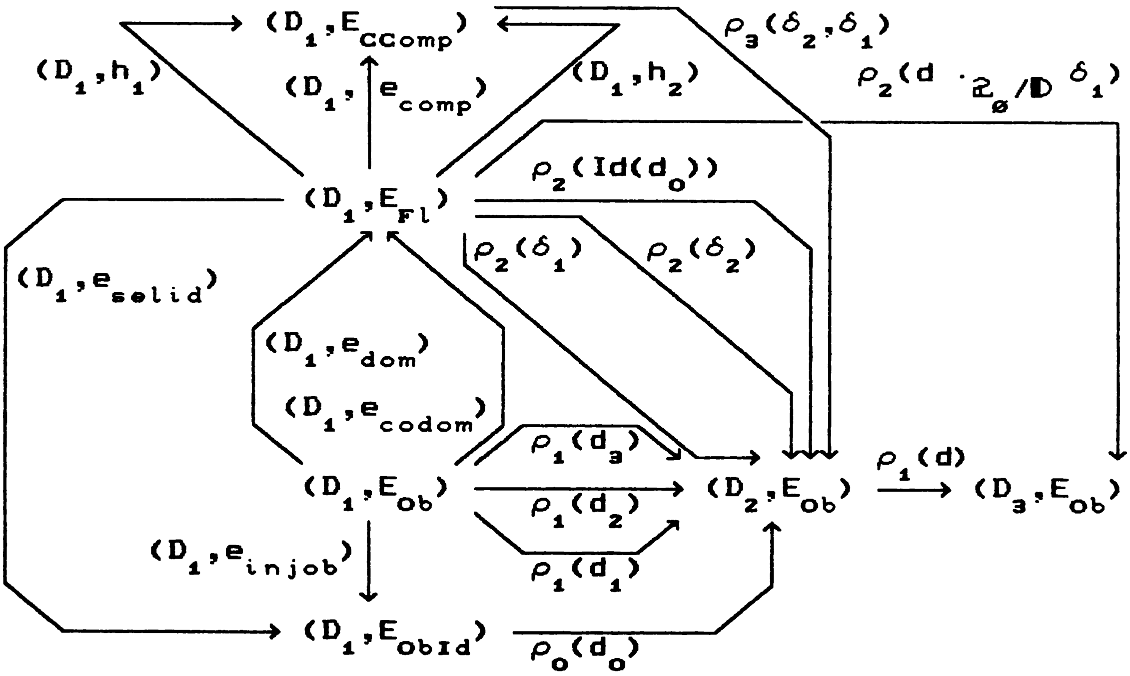
Supposons donc que $\mathcal{D} = (\mathbb{A}, \mathbb{J}, \mathbb{B}, \mathbb{K}, \mathbb{D})$ est une amphi-syntaxe.

On désigne par pSSA($\mathbb{D}$) le graphe à composition représenté par le schéma (de principe) ci-dessous et construit selon les modalités qui suivent :



$\mathbb{D}$

pSSA($\mathbb{D}$)



- Ob(pSSA($\mathbb{D}$)) = Ob($\mathbb{D}$) × Ob($\mathbb{G}_{GrComp}$) (où, comme précisé au §3.3, $\mathbb{G}_{GrComp}$ est le graphe à composition sous-jacent à l'esquisse $\mathbb{E}_{GrComp}$ des graphes à composition),

- $\mathrm{ObId}(\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})) = \mathrm{ObId}(\mathbb{D}) \times \{E_{Ob}\}$,

- si $g : G_1 \longrightarrow G_2$ est une flèche de $\mathbb{G}_{GrComp}$ (i.e. si $g : G_2 \longrightarrow G_1$ est une flèche de $\mathbb{G}_{GrComp}{}^{op}$) et si $D \in \mathrm{Ob}(\mathbb{D})$ est un objet de $\mathbb{D}$, alors $(D,g) : (D,G_2) \longrightarrow (D,G_1)$ est une flèche de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})$,

- si $d_1 : D_1 \longrightarrow D_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$, i.e. s'identifie à un *objet* du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, alors $\rho_1(d_1) = (d_1,E_{Ob}) : (D_1,E_{Ob}) \longrightarrow (D_2,E_{Ob})$ est une flèche de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})$,

- si $\delta_1 : D_1 \longrightarrow_{\mathfrak{L}_\emptyset} D_2$ est une 2-flèche de $\mathbb{D}$, i.e. s'identifie à une *flèche* du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, alors $\rho_2(\delta_1) : (D_1,E_{Fl}) \longrightarrow (D_2,E_{Ob})$ est une flèche de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})$,

- si $d_0 : D_1 \longrightarrow D_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$ qui s'identifie à un *objet à identité* du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, alors $\rho_0(d_0) : (D_1,E_{ObId}) \longrightarrow (D_2,E_{Ob})$ est une flèche de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})$,

- si $(\delta_2 : D_1 \longrightarrow_{\mathfrak{L}_\emptyset} D_2 , \delta_1 : D_1 \longrightarrow_{\mathfrak{L}_\emptyset} D_2)$ est un couple de 2-flèches de $\mathbb{D}$ qui s'identifie à un *couple de flèches composables* du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, alors $\rho_3(\delta_2,\delta_1) : (D_1,E_{CComp}) \longrightarrow (D_2,E_{Ob})$ est une flèche de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})$,

- si D est un objet à identité du graphe à composition $\mathbb{1}_\emptyset/\mathbb{D}$ des 1-flèches de $\mathbb{D}$ (i.e. si D est un objet à identité de $\mathbb{D}$, autrement dit si (D,E_{Ob}) est un objet à identité de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})$), alors on a :

$$\mathrm{id}_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})}(D,E_{Ob}) = (\mathrm{id}_{\mathbb{1}_\emptyset/\mathbb{D}}(D),E_{Ob}) \ ,$$

autrement dit :

$$\mathrm{id}_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})}(D,E_{Ob}) = \rho_1(\mathrm{id}_{\mathbb{1}_\emptyset/\mathbb{D}}(D)) \ ,$$

- si $d_1 : D_1 \longrightarrow D_2$ et $d : D_2 \longrightarrow D_3$ sont deux flèches composables du graphe à composition $\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{D}$ des 1-flèches de $\mathbb{D}$, alors (le composé ci-dessous est défini et) on a :

$$(d,E_{ob}) \cdot_{pSSA(\mathbb{D})} (d_1,E_{ob}) = (d \cdot_{\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{D}} d_1 , E_{ob}) ,$$

autrement dit :

$$\rho_1(d) \cdot_{pSSA(\mathbb{D})} \rho_1(d_1) = \rho_1(d \cdot_{\mathbb{1}_{\emptyset}/\mathbb{D}} d_1) ,$$

- si $\delta_1 : D_1 \longrightarrow_{\mathbb{2}_{\emptyset}} D_2$ est une 2-flèche de $\mathbb{D}$ et $d : D_2 \longrightarrow D_3$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$ qui sont composables dans le graphe à composition $\mathbb{2}_{\emptyset}/\mathbb{D}$ des 1-flèches et 2-flèches de $\mathbb{D}$, alors (le composé ci-dessous est défini et) on a :

$$(d,E_{ob}) \cdot_{pSSA(\mathbb{D})} \rho_2(\delta_1) = \rho_2(d \cdot_{\mathbb{2}_{\emptyset}/\mathbb{D}} \delta_1) ,$$

autrement dit :

$$\rho_1(d) \cdot_{pSSA(\mathbb{D})} \rho_2(\delta_1) = \rho_2(d \cdot_{\mathbb{2}_{\emptyset}/\mathbb{D}} \delta_1) ,$$

- si $d_0 : D_1 \longrightarrow D_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$ qui s'identifie à un objet à identité du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, alors (le composé ci-dessous est défini et) on a :

$$\rho_0(d_0) \cdot_{pSSA(\mathbb{D})} (D_1,e_{injob}) = (d_0,E_{ob}) ,$$

autrement dit :

$$\rho_0(d_0) \cdot_{pSSA(\mathbb{D})} (D_1,e_{injob}) = \rho_1(d_0) = \rho_1(injob_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}(d_0)) ,$$

- si $d_0 : D_1 \longrightarrow D_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$ qui s'identifie à un objet à identité du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, alors (le composé ci-dessous est défini et) on a :

$$\rho_0(d_0) \cdot_{pSSA(\mathbb{D})} (D_1,e_{selid}) = \rho_2(selid_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}(d_0)) ,$$

- si $d_1 , d_2 : D_1 \longrightarrow D_2$ sont deux 1-flèches de $\mathbb{D}$, i.e. s'identifient à deux objets du graphe à composition

$\mathbb{D}(D_1,D_2)$, et si $\delta_1 : d_1 \Longrightarrow d_2 : D_1 \longrightarrow D_2$ est une 2-flèche de $\mathbb{D}$, qui s'identifie donc à une flèche $\delta_1 : d_1 \longrightarrow d_2$ du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, alors (les composés ci-dessous sont définis et) on a :

$$\rho_2(\delta_1) \cdot_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})} (D_1, e_{dom}) = (d_1, E_{ob})$$

et :

$$\rho_2(\delta_1) \cdot_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})} (D_1, e_{codom}) = (d_2, E_{ob}) ,$$

autrement dit :

$$\rho_2(\delta_1) \cdot_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})} (D_1, e_{dom}) = \rho_1(d_1) = \rho_1(\mathrm{dom}_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}(\delta_1))$$

et :

$$\rho_2(\delta_1) \cdot_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})} (D_1, e_{codom}) = \rho_1(d_2) = \rho_1(\mathrm{codom}_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}(\delta_1)),$$

- si d_1 , d_2 , $d_3 : D_1 \longrightarrow D_2$ sont trois 1-flèches de $\mathbb{D}$, i.e. s'identifient à trois objets du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, et si $\delta_1 : d_1 \Longrightarrow d_2 : D_1 \longrightarrow D_2$ et $\delta_2 : d_2 \Longrightarrow d_3 : D_1 \longrightarrow D_2$ sont deux 2-flèches de $\mathbb{D}$ qui s'identifient à des flèches composables du graphe à composition $\mathbb{D}(D_1,D_2)$, alors (les composés ci-dessous sont définis et) on a :

$$\rho_3(\delta_2,\delta_1) \cdot_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})} (D_1, h_1) = \rho_2(\delta_2) ,$$

$$\rho_3(\delta_2,\delta_1) \cdot_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})} (D_1, h_2) = \rho_2(\delta_1)$$

et :

$$\rho_3(\delta_2,\delta_1) \cdot_{\mathrm{pSSA}(\mathbb{D})} (D_1, e_{comp}) = \rho_2(\mathrm{comp}_{\mathbb{D}(D_1,D_2)}(\delta_2,\delta_1)) .$$

La même construction s'applique à $\mathbb{B}$ et, comme elle est évidemment fonctorielle, on note :

$$\mathrm{pSSA}(\mathbb{K}) : \mathrm{pSSA}(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathrm{pSSA}(\mathbb{D})$$

le foncteur ("commutant avec les opérations ρ_0 , ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 etc...") ainsi associé à $\mathbb{K}$. Par construction, il est facile de vérifier que, tout comme $\mathbb{K}$, le foncteur $\mathrm{pSSA}(\mathbb{K})$ est bijectif sur les objets.

Maintenant, supposons que $\mathbb{A}$ est une amphi-catégorie co-représentable pour laquelle (comme au §3.4) :

$$C : \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{GrComp}, \mathbb{A}^{op})^{op}$$

est un foncteur de co-représentation, de sorte que, naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}_{GrComp}$ et en tous objets A_1 et A_2 de $\mathbf{A}$, on a une bijection :

$$c(E,A_1,A_2) : \mathbb{G}\mathrm{rComp}(\Gamma(E),\mathbf{A}(A_1,A_2)) \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}(C(A_1)(E),A_2) .$$

(de sorte qu'on ne nuit en rien à la généralité en "identifiant $C(A_1)(E_{Ob})$ et A_1", i.e. en supposant - pour simplifier les notations - que $C(A_1)(E_{Ob}) = A_1$ et que $c(E_{Ob},A_1,A_2) = id(\mathbb{A}(A_1,A_2)) = id(\mathbb{A}(C(A_1)(E_{Ob}),A_2))$).

Alors, on désigne par :

$$pssa(\mathbf{J}) : pSSA(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

le foncteur qu'on obtient en imposant que :

- si $B \in Ob(\mathbb{B})$ est un objet de $\mathbb{B}$ et si $G \in \mathbb{G}_{GrComp}$ est un objet de $\mathbb{G}_{GrComp}$, on a :

$$pssa(\mathbf{J})(B,G) = C(\mathbf{J}(B))(G) ,$$

- si $B \in Ob(\mathbb{B})$ est un objet de $\mathbb{B}$ et si $g : G_1 \longrightarrow G_2$ est une flèche de $\mathbb{G}_{GrComp}$, alors on a :

$$pssa(\mathbf{J})(B,g) = C(\mathbf{J}(B))(g) ,$$

- si $b_1 : B_1 \longrightarrow B_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{B}$ (i.e. s'identifie à un objet du graphe à composition $\mathbb{B}(B_1,B_2)$), i.e. si $b_1 : \Gamma(E_{Ob}) = \mathbb{1}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{B}(B_1,B_2)$ est un foncteur, alors on a :

$$pssa(\mathbf{J})(b_1,E_{Ob}) = \mathbb{J}(b_1) ,$$

autrement dit :

$$pssa(\mathbf{J})(b_1,E_{Ob}) = c(E_{Ob},\mathbf{J}(B_1),\mathbf{J}(B_2))(\mathbf{J}(B_1,B_2)\circ b_1) ,$$

- si $\beta_1 : B_1 \longrightarrow_{\mathbb{2}_\emptyset} B_2$ est une 2-flèche de $\mathbb{B}$ (i.e. s'identifie à une flèche du graphe à composition $\mathbb{B}(B_1,B_2)$), i.e. si $\beta_1 : \Gamma(E_{Fl}) = \mathbb{2}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{B}(B_1,B_2)$ est un foncteur , alors on a :

$$\mathrm{pssa}(\mathbb{J})(\rho_2(\beta_1)) = c(E_{Fl}, \mathbb{J}(B_1), \mathbb{J}(B_2))(\mathbb{J}(B_1,B_2)\circ\beta_1) \;,$$

- si $b_0 : B_1 \longrightarrow B_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{B}$ qui s'identifie à un objet à identité du graphe à composition $\mathbb{B}(B_1,B_2)$, i.e. si b_0 est (identifié à) un foncteur (encore noté) $b_0 : \Gamma(E_{ObId}) = \mathbb{1} \longrightarrow \mathbb{B}(B_1,B_2)$, alors on a :

$$\mathrm{pssa}(\mathbb{J})(\rho_0(b_0)) = c(E_{ObId}, \mathbb{J}(B_1), \mathbb{J}(B_2))(\mathbb{J}(B_1,B_2)\circ b_0) \;,$$

- si $(\beta_2 : B_1 \longrightarrow_{\mathfrak{L}_\emptyset} B_2 \;,\; \beta_1 : B_1 \longrightarrow_{\mathfrak{L}_\emptyset} B_2)$ est un couple de 2-flèches de $\mathbb{B}$ qui s'identifie à un couple de flèches composables du graphe à composition $\mathbb{B}(B_1,B_2)$, i.e. si (β_2,β_1) est (identifié à) un foncteur (encore noté) $(\beta_2,\beta_1) : \Gamma(E_{CComp}) = \mathbb{3}_\emptyset \longrightarrow \mathbb{B}(B_1,B_2)$, alors on a :
$\mathrm{pssa}(\mathbb{J})(\rho_3(\beta_2,\beta_1)) = c(E_{CComp}, \mathbb{J}(B_1), \mathbb{J}(B_2))(\mathbb{J}(B_1,B_2)\circ(\beta_2,\beta_1))$.

Dans ces conditions, on désigne par $\mathrm{rssa}(\mathbb{J})$ la relation d'équivalence "a même image par $\mathrm{pssa}(\mathbb{J})$ que" sur (les objets et les flèches de) $\mathrm{pSSA}(\mathbb{B})$.
Alors, on note $\mathrm{SSA}(\mathbb{B}) = \mathrm{pSSA}(\mathbb{B})/\mathrm{rssa}(\mathbb{J})$ le graphe à composition quotient. Trivialement, on voit que, pour l'essentiel :

- ses objets sont les classes d'équivalence $\langle Z\rangle$ des objets Z de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{B})$,

- ses objets à identités sont les classes $\langle Z\rangle$ contenant au moins un objet à identité Z de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{B})$,

- ses flèches sont les classes d'équivalence $\langle z\rangle$ des flèches z de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{B})$,

- ses couples composables sont les couples $(\langle z_2\rangle,\langle z_1\rangle)$ de classes contenant au moins une flèche z_2 , pour la première, et une flèche z_1 , pour la seconde, telles que (z_2,z_1) soit un couple composable de $\mathrm{pSSA}(\mathbb{B})$ (auquel cas on a, évidemment, $\langle z_2 \rangle \cdot_{SSA(\mathbb{B})} \langle z_1 \rangle = \langle z_2 \cdot_{pSSA(\mathbb{B})} z_1 \rangle$).

On en déduit un foncteur passage au quotient :

$$qssa(\mathbb{J}) : pSSA(\mathbb{B}) \longrightarrow pSSA(\mathbb{B})/rssa(\mathbb{J}) = SSA(\mathbb{B})$$

puis l'unique foncteur, évidemment injectif :

$$ssa(\mathbb{J}) : pSSA(\mathbb{B})/rssa(\mathbb{J}) = SSA(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
pSSA(\mathbb{B}) \arrow[d, "qssa(\mathbb{J})"'] \arrow[dr, "pssa(\mathbb{J})"] & \\
\begin{array}{c} SSA(\mathbb{B}) \\ = \\ pSSA(\mathbb{B})/rssa(\mathbb{J}) \end{array} \arrow[r, "ssa(\mathbb{J})"] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

Enfin, on construit la somme fibrée représentée par le diagramme commutatif (de foncteurs) ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
pSSA(\mathbb{B}) \arrow[r, "pSSA(\mathbb{K})"] \arrow[d, "qssa(\mathbb{J})"'] & pSSA(\mathbb{D}) \arrow[d, "q'ssa(\mathbb{J})"'] \\
\begin{array}{c} SSA(\mathbb{B}) \\ = \\ pSSA(\mathbb{B})/rssa(\mathbb{J}) \end{array} \arrow[r, "SSA(\mathbb{K})"] & \begin{array}{c} SSA(\mathbb{D}) \\ = \\ pSSA(\mathbb{D})/r'ssa(\mathbb{J}) \end{array}
\end{tikzcd}$$

où il est facile de vérifier que :

- $SSA(\mathbb{D}) = pSSA(\mathbb{D})/r'ssa(\mathbb{J})$ est le graphe à composition quotient de $pSSA(\mathbb{D})$ par la relation d'équivalence $r'ssa(\mathbb{J})$, engendrée par "l'image" de $rssa(\mathbb{J})$ par $pSSA(\mathbb{K})$,

- $q'ssa(\mathbb{J}) : pSSA(\mathbb{D}) \longrightarrow pSSA(\mathbb{D})/r'ssa(\mathbb{J}) = SSA(\mathbb{D})$ est le foncteur passage au quotient (et l'on note encore $\langle Z' \rangle = q'ssa(\mathbb{J})(Z')$, pour tout objet Z' de $pSSA(\mathbb{D})$, et

$\langle z' \rangle = q'ssa(\mathbb{J})(z')$, pour toute flèche z' de $pSSA(\mathbb{D})$).

Ainsi, par construction, il est aisé de constater que, tout comme $pSSA(\mathbb{K})$, le foncteur $SSA(\mathbb{K})$ est bijectif sur les objets.

On conclut de toutes les constructions précédentes que :

$$\mathcal{SSA}(\mathcal{D}) = (\mathbb{A}, ssa(\mathbb{J}), SSA(\mathbb{B}), SSA(\mathbb{K}), SSA(\mathbb{D}))$$

est une syntaxe (non enrichie) associée à $\mathcal{D}$.

La proposition suivante montre qu'il est légitime d'appeler $\mathcal{SSA}(\mathcal{D})$ la *syntaxe de co-représentation pour les $\mathcal{D}$-sesqui-algèbres* :

Proposition 2 : *Si $\mathcal{D} = (\mathbb{A}, \mathbb{J}, \mathbb{B}, \mathbb{K}, \mathbb{D})$ est une amphi-syntaxe sur une amphi-catégorie co-représentable $\mathbb{A}$, alors la catégorie de ses sesqui-algèbres est une catégorie d'algèbres. Précisément, si $\mathcal{SSA}(\mathcal{D})$ est la syntaxe de co-représentation pour les $\mathcal{D}$-sesqui-algèbres, alors on dispose d'un isomorphisme canonique, dit de co-représentation (des $\mathcal{D}$-sesqui-algèbres en des $\mathcal{SSA}(\mathcal{D})$-algèbres) :*

$$coreps(\mathcal{D}) = coreps : \mathbb{A}^{\mathcal{D}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}^{\mathcal{SSA}(\mathcal{D})}$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^{\mathcal{D}} \arrow[rr, "coreps(\mathcal{D})", "\simeq"'] \arrow[dr, "U^{\mathcal{D}}"'] & & \mathbb{A}^{\mathcal{SSA}(\mathcal{D})} \arrow[dl, "U^{\mathcal{SSA}(\mathcal{D})}"] \\ & \mathbb{A} & \end{tikzcd}$$

Preuve.

En effet, si (A,σ) est une $\mathcal{D}$-sesqui-algèbre, il suffit de prendre pour $coreps(A,\sigma)$ la $\mathcal{SSA}(\mathcal{D})$-algèbre (A,λ) telle que (essentiellement) :

- pour tous objets B_1 , B_2 de $\mathbb{B}$, pour toute 1-flèche $d_0 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ qui s'identifie à un objet à identité du graphe à composition $\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))$ et pour toute flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_\lambda \langle \rho_0(d_0)\rangle = c(E_{ObId},\mathbb{J}(B_1),A)\ (x \cdot_\sigma d_0) .$$

- pour tous objets B_1, B_2 de $\mathbb{B}$, pour toute 1-flèche $d_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ (s'identifiant donc à un objet du graphe à composition $\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))$) et pour toute flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_\lambda \langle \rho_1(d_1)\rangle = x \cdot_\sigma d_1 = c(E_{Ob},\mathbb{J}(B_1),A)\ (x \cdot_\sigma d_1) ,$$

- pour tous objets B_1, B_2 de $\mathbb{B}$, pour toute 2-flèche $\delta_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{2_{\mathfrak{C}_\emptyset}} \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ (s'identifiant donc à une flèche du graphe à composition $\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))$) et pour toute flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_\lambda \langle \rho_2(\delta_1)\rangle = c(E_{Fl},\mathbb{J}(B_1),A)\ (x \cdot_\sigma \delta_1) .$$

- pour tous objets B_1, B_2 de $\mathbb{B}$, pour tout couple $(\delta_2 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{2_{\mathfrak{C}_\emptyset}} \mathbb{K}(B_2)\ ,\ \delta_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{2_{\mathfrak{C}_\emptyset}} \mathbb{K}(B_2))$ de 2-flèches de $\mathbb{D}$ qui s'identifie à un couple de flèches composables du graphe à composition $\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))$ et pour toute flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_\lambda \langle \rho_3(\delta_2,\delta_1)\rangle = c(E_{CComp},\mathbb{J}(B_1),A)\ ((x \cdot_\sigma \delta_2),(x \cdot_\sigma \delta_1)).$$

<u>Fin de la preuve.</u>

De la proposition précédente, de la proposition 1 du §2.3 et de la proposition 3 du §3.4, on déduit immédiatement que :

<u>Proposition 3 :</u> *Si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathbb{A}$ *est une amphi-catégorie amphi-co-complète et si* $\mathfrak{D} = (\mathbb{A},\mathbb{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$ *est une amphi-syntaxe petite et d'amphi-rang* $\leq \alpha$ *sur* $\mathbb{A}$ *, alors le foncteur* $U^{\mathfrak{D}} : \mathbb{A}^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathbb{A}$ *(de la catégorie* $\mathbb{A}^{\mathfrak{D}}$ *des* $\mathfrak{D}$*-sesqui-algèbres vers la catégorie*

$\mathbb{A}$) admet un adjoint à gauche $L^{\mathfrak{D}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathfrak{D}}$ *et est monadique.*

<u>Preuve.</u>

De la proposition 3 du §3.4 et de la construction de $\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})$, il est facile de déduire que $\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})$ est une syntaxe petite, de rang $\leq \alpha$, sur la catégorie localement petite et co-complète $\mathbb{A}$. Vu la proposition 1 du §2.3, on en infère que $U^{\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})} : \mathbb{A}^{\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})} \longrightarrow \mathbb{A}$ admet un adjoint à gauche $L^{\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})}$.

La proposition précédente permet alors de conclure. Plus précisément, $L^{\mathfrak{D}}$ est défini comme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{A}^{\mathfrak{D}} \arrow[rr, "\text{coreps}", "\simeq"'] & & \mathbb{A}^{\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})} \\
& \mathbb{A} \arrow[ul, "L^{\mathfrak{D}}"] \arrow[ur, "L^{\mathcal{SSA}(\mathfrak{D})}"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Fin de la preuve.</u>

Supposons toujours que $\mathfrak{D} = (\mathbb{A}, \mathbb{J}, \mathbb{B}, \mathbb{K}, \mathbb{D})$ est une amphi-syntaxe.

On désigne maintenant par pSAA($\mathbb{D}$) le graphe à composition complètant pSSA($\mathbb{D}$) (qui en est donc un sous-graphe à composition) comme représenté par le schéma (de principe) ci-dessous et construit à partir de pSSA($\mathbb{D}$) selon les modalités qui suivent :

$$\begin{tikzcd}[column sep=large]
D_o \arrow[r, "d'"] \arrow[rr, bend right=35] \arrow[rr, bend right=55, ""{name=L}] \arrow[rr, phantom, bend right=45, "\delta_1 \cdot \mathfrak{Z}_{\emptyset}/\mathbb{D}\, d' \Uparrow"'] & D_1 \arrow[r, bend left, "d_2"] \arrow[r, bend right, "d_1"'] \arrow[r, phantom, "\delta_1 \Uparrow"] & D_2
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{D}$

pSAA($\mathbb{D}$)

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
(D_1,G_1) \arrow[r, "{(d_1,G_1)}"] & (D_2,G_1) \\
(D_1,G_2) \arrow[u, "{(D_1,g)}"] \arrow[r, "{(d_1,G_2)}"'] \arrow[ur, "{(d_1,g)}"] & (D_2,G_2) \arrow[u, "{(D_2,g)}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
(D_o,E_{Fl}) \arrow[r, "{(d',E_{Fl})}"] \arrow[rrd, bend right=60, "{\rho_2(\delta_1 \cdot \mathfrak{Z}_{\emptyset}/\mathbb{D}\, d')}"'] & (D_1,E_{Fl}) \arrow[rd, "\rho_2(\delta_1)"] & \\
(D_o,E_{ob}) \arrow[r, "\rho_1(d')"] & (D_1,E_{ob}) \arrow[u, shift left, "{(D_1,e_{dom})}"] \arrow[u, shift right, "{(D_1,e_{codom})}"'] \arrow[r, bend left, "\rho_1(d_2)"] \arrow[r, bend right, "\rho_1(d_1)"'] & (D_2,E_{ob})
\end{tikzcd}$$

- si $d_1 : D_1 \rightarrow D_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$ et si G_1 est un objet de $\mathbb{G}_{GrComp}$, alors $(d_1,G_1) : (D_1,G_1) \rightarrow (D_2,G_1)$ est une flèche de pSAA($\mathbb{D}$) ,

- si $d_1 : D_1 \longrightarrow D_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$ et si $g : G_1 \longrightarrow G_2$ est une flèche de $\mathbb{G}_{GrComp}$, alors $(d_1,g) : (D_1,G_2) \longrightarrow (D_2,G_1)$ est une flèche de $pSAA(\mathbb{D})$,

- si $d_1 : D_1 \longrightarrow D_2$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$ et si $g : G_1 \longrightarrow G_2$ est une flèche de $\mathbb{G}_{GrComp}$, alors (les composés ci-dessous sont définis et) on a :

$$(D_2,g) \cdot_{pSAA(\mathbb{D})} (d_1,G_2) = (d_1,g) = (d_1,G_1) \cdot_{pSAA(\mathbb{D})} (D_1,g),$$

- si $\delta_1 : D_1 \longrightarrow_{\mathbb{2}_\emptyset} D_2$ est une 2-flèche de $\mathbb{D}$, si $d' : D_0 \longrightarrow D_1$ est une 1-flèche de $\mathbb{D}$ et si (δ_1,d') est un couple de flèches composables du graphe à composition $\mathbb{2}_\emptyset/\mathbb{D}$ (des 1-flèches et 2-flèches de $\mathbb{D}$), alors (le composé ci-dessous est défini et) on a :

$$\rho_2(\delta_1) \cdot_{pSAA(\mathbb{D})} (d',E_{Fl}) = \rho_2(\delta_1 \cdot_{\mathbb{2}_\emptyset/\mathbb{D}} d') .$$

La même construction s'applique à $\mathbb{B}$ et, comme elle est évidemment fonctorielle, on note :

$$pSAA(\mathbb{K}) : pSAA(\mathbb{B}) \longrightarrow pSAA(\mathbb{D})$$

le foncteur ("commutant avec les opérations ρ_0, ρ_1, ρ_2, ρ_3 etc...") ainsi associé à $\mathbb{K}$ et qui, évidemment, prolonge le foncteur $pSSA(\mathbb{K}) : pSSA(\mathbb{B}) \longrightarrow pSSA(\mathbb{D})$. Par construction, il est facile de vérifier que, tout comme $\mathbb{K}$, le foncteur $pSAA(\mathbb{K})$ est bijectif sur les objets.

Maintenant, supposons de nouveau que $\mathbb{A}$ est une amphi-catégorie co-représentable pour laquelle :

$$C : \mathbb{A} \longrightarrow Mod(\mathbb{E}_{GrComp},\mathbb{A}^{op})^{op}$$

est de nouveau un foncteur de co-représentation, de sorte que, naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}_{GrComp}$ (i.e. de son graphe à composition sous-jacent $\mathbb{G}_{GrComp}$) et en tous objets A_1 et A_2 de $\mathbb{A}$, on a de nouveau une bijection :

$$c(E,A_1,A_2) : GrComp(\Gamma(E),\mathbb{A}(A_1,A_2)) \xrightarrow{\cong} \mathbb{A}(C(A_1)(E),A_2)$$

(et, de nouveau, on ne nuit en rien à la généralité en "identifiant $C(A_1)(E_{Ob})$ et A_1 ", i.e. en supposant - pour simplifier les notations - que $C(A_1)(E_{Ob}) = A_1$ et que $c(E_{Ob},A_1,A_2) = id(\mathbb{A}(A_1,A_2)) = id(\mathbb{A}(C(A_1)(E_{ob}),A_2))$).

Alors, on désigne par :

$$psaa(\mathbb{J}) : pSAA(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

le foncteur prolongeant $pssa(\mathbb{J}) : pSSA(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{A}$ et tel que :

- pour toute 1-flèche $b_1 : B_1 \longrightarrow B_2$ de $\mathbb{D}$ et pour tout objet G_1 de $\mathbb{G}_{GrComp}$, on a :

$$psaa(\mathbb{J})(b_1,G_1) = C(\mathbb{J}(b_1))(G_1) \ .$$

Dans ces conditions et en procédant "comme pour le cas des sesqui-algèbres", on désigne par $rsaa(\mathbb{J})$ la relation d'équivalence "a même image par $psaa(\mathbb{J})$ que" sur (les objets et les flèches de) $pSAA(\mathbb{B})$.
Alors, on note $SAA(\mathbb{B}) = pSAA(\mathbb{B})/rsaa(\mathbb{J})$ le graphe à composition quotient.
On en déduit un foncteur passage au quotient :

$$qsaa(\mathbb{J}) : pSAA(\mathbb{B}) \longrightarrow pSAA(\mathbb{B})/rsaa(\mathbb{J}) = SAA(\mathbb{B}) \ ,$$

puis l'unique foncteur, évidemment injectif :

$$saa(\mathbb{J}) : pSAA(\mathbb{B})/rsaa(\mathbb{J}) = SAA(\mathbb{B}) \longrightarrow \mathbb{A}$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
pSAA(\mathbb{B}) \arrow[d, "qsaa(\mathbb{J})"'] \arrow[dr, "psaa(\mathbb{J})"] & \\
SAA(\mathbb{B}) \arrow[r, "saa(\mathbb{J})"] & \mathbb{A}
\end{tikzcd}$$

$$SAA(\mathbb{B}) = pSAA(\mathbb{B})/rsaa(\mathbb{J})$$

Enfin, on construit la somme fibrée représentée par le diagramme commutatif (de foncteurs) ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} pSAA(\mathbb{B}) & \xrightarrow{pSAA(\mathbb{K})} & pSAA(\mathbb{D}) \\ {\scriptstyle qsaa(\mathbb{J})}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q'saa(\mathbb{J})} \\ SAA(\mathbb{B}) & \xrightarrow{SAA(\mathbb{K})} & SAA(\mathbb{D}) \\ = & & = \\ pSAA(\mathbb{B})/rsaa(\mathbb{J}) & & pSAA(\mathbb{D})/r'saa(\mathbb{J}) \end{array}$$

où il est facile de vérifier que :

- $SAA(\mathbb{D}) = pSAA(\mathbb{D})/r'saa(\mathbb{J})$ est le graphe à composition quotient de $pSAA(\mathbb{D})$ par la relation d'équivalence $r'saa(\mathbb{J})$, engendrée par "l'image" de $rsaa(\mathbb{J})$ par $pSAA(\mathbb{K})$,

- $q'saa(\mathbb{J}) : pSAA(\mathbb{D}) \longrightarrow pSAA(\mathbb{D})/r'saa(\mathbb{J}) = SAA(\mathbb{D})$ est le foncteur passage au quotient (et l'on note $\langle\langle Z'\rangle\rangle = q'saa(\mathbb{J})(Z')$, pour tout objet Z' de $pSAA(\mathbb{D})$, et $\langle\langle z'\rangle\rangle = q'saa(\mathbb{J})(z')$, pour toute flèche z' de $pSAA(\mathbb{D})$).

Ainsi, par construction, il est aisé de constater que, tout comme $pSAA(\mathbb{K})$, le foncteur $SAA(\mathbb{K})$ est bijectif sur les objets.

De nouveau, on conclut, de toutes les constructions précédentes que :

$$\mathcal{SAA}(\mathcal{D}) = (\mathbb{A}, saa(\mathbb{J}), SAA(\mathbb{B}), SAA(\mathbb{K}), SAA(\mathbb{D}))$$

est une syntaxe (non enrichie) associée à $\mathcal{D}$ [9].

[9] Il est facile de constater que $\mathcal{SSA}(\mathcal{D})$ est une sous-syntaxe sur $\mathbb{A}$ de $\mathcal{SAA}(\mathcal{D})$ et qu'on dispose d'un homomorphisme injection "canonique" $inj(\mathcal{D}) : \mathcal{SSA}(\mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{SAA}(\mathcal{D})$ sur $\mathbb{A}$.

Et la proposition suivante montre qu'il est de nouveau légitime d'appeler $\mathcal{SAA}(\mathcal{D})$ la *syntaxe de co-représentation pour les $\mathcal{D}$-amphi-algèbres.*

<u>Proposition 4 :</u> *Si $\mathcal{D} = (\mathbf{A},\mathbf{J},\mathbb{B},\mathbb{K},\mathbb{D})$ est une amphi-syntaxe sur une amphi-catégorie co-représentable $\mathbf{A}$, alors la catégorie de ses amphi-algèbres est une catégorie d'algèbres. Précisément, si $\mathcal{SAA}(\mathcal{D})$ est la syntaxe de co-représentation pour les $\mathcal{D}$-amphi-algèbres, alors on dispose d'un isomorphisme canonique, dit de co-représentation (des $\mathcal{D}$-amphi-algèbres en des $\mathcal{SAA}(\mathcal{D})$-algèbres) :*

$$\mathrm{corepa}(\mathcal{D}) = \mathrm{corepa} : \mathbf{A}^{\mathcal{D}} \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathcal{D})}$$

rendant commutatif le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^{\mathcal{D}} \arrow[rr, "\mathrm{corepa}(\mathcal{D})", "\simeq"'] \arrow[dr, "\mathbf{U}^{\mathcal{D}}"'] & & \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathcal{D})} \arrow[dl, "\mathbf{U}^{\mathcal{SAA}(\mathcal{D})}"] \\
& \mathbb{A} &
\end{tikzcd}$$

<u>Preuve.</u>

En effet, si $(A,\mathfrak{S})$ est une $\mathcal{D}$-amphi-algèbre, il suffit de prendre pour $\mathrm{corepa}(A,\mathfrak{S})$ la $\mathcal{SAA}(\mathcal{D})$-algèbre (A,μ) telle que :

- la première condition suivante est tout d'abord vérifiée[10] :

[10] On sait (voir la proposition 1) qu'une $\mathcal{D}$-amphi-algèbre $(A,\mathfrak{S})$ est entièrement déterminée par les données, "compatibles" entre elles, de la $\mathcal{D}_{2_{\emptyset}}$-algèbre $T(A,\mathfrak{S})$ (des "1-flèches et 2-flèches de $(A,\mathfrak{S})$") et de la $\mathcal{D}$-sesqui-algèbre $S(A,\mathfrak{S})$ (des "1-flèches de $(A,\mathfrak{S})$"). Cette première condition que nous énonçons permet, si l'on y prend $G_1 = E_{Fl}$, de "co-représenter" l'algèbre $T(A,\mathfrak{S})$ des 1-flèches et 2-flèches de $(A,\mathfrak{S})$ en une algèbre de 1-flèches.

pour tous objets B_1 , B_2 de $\mathbb{B}$, pour toute 1-flèche $d_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$, pour tout objet G_1 de $\mathbb{G}_{arcomp}$ et pour toute flèche $y : C(\mathbf{J}(B_2))(G_1) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$ (à laquelle est donc associée la $\Gamma(G_1)$-flèche de $\mathbf{A}$:
$c(G_1, \mathbf{J}(B_2), A)^{-1}(y) : \mathbf{J}(B_2) \longrightarrow_{\Gamma(G_1)} A$
puisque :
$$\mathbb{A}(C(\mathbf{J}(B_2))(G_1), A) \xrightarrow{c(G_1, \mathbf{J}(B_2), A)^{-1}} \mathbb{G}rComp(\Gamma(G_1), \mathbf{A}(\mathbf{J}(B_2), A)) \quad),$$
on a :
$$y \cdot_\mu \langle\langle(d_1, G_1)\rangle\rangle = c(G_1, \mathbf{J}(B_1), A) \; (c(G_1, \mathbf{J}(B_2), A)^{-1}(y) \cdot_{\mathcal{D}} d_1) ,$$

- les conditions suivantes sont également vérifiées[11] :

pour tous objets B_1 , B_2 de $\mathbb{B}$, pour toute 1-flèche $d_0 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$, qui s'identifie à un objet à identité du graphe à composition $\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1), \mathbb{K}(B_2))$ et pour toute flèche $x : \mathbf{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :
$$x \cdot_\mu \langle\langle\rho_0(d_0)\rangle\rangle = c(E_{obId}, \mathbf{J}(B_1), A) \; (x \cdot_{\mathcal{D}} d_0) ,$$

[11] Ces dernières conditions permettent de "co-représenter" la $\mathcal{D}$-sesqui-algèbre $S(A, \mathcal{D})$ des 1-flèches de $(A, \mathcal{D})$. Elles reprennent donc intégralement, à dessein (voir la note suivante), les conditions énoncées dans la preuve de la proposition 2 précédente (compte tenu du fait que $\mathcal{SSA}(\mathcal{D})$ est une sous-syntaxe de $\mathcal{SAA}(\mathcal{D})$, induite par le foncteur injectif :
$$\begin{array}{ccc} SSA(\mathbb{D}) & \longrightarrow & SAA(\mathbb{D}) \\ \langle z'\rangle & \longmapsto & \langle\langle z'\rangle\rangle \end{array} \quad).$$

pour tous objets B_1 , B_2 de $\mathbb{B}$, pour toute 1-flèche $d_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ (s'identifiant donc à un objet du graphe à composition $\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))$) et pour toute flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a[12] :

$$x \cdot_{\mu} \langle\langle \rho_1(d_1) \rangle\rangle = x \cdot_{\mu} \langle\langle (d_1, E_{Ob}) \rangle\rangle =$$
$$x \cdot_{\mathfrak{D}} d_1 = c(E_{Ob}, \mathbb{J}(B_1), A)\ (x \cdot_{\mathfrak{D}} d_1) \ ,$$

pour tous objets B_1 , B_2 de $\mathbb{B}$, pour toute 2-flèche $\delta_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{2_{\emptyset}} \mathbb{K}(B_2)$ de $\mathbb{D}$ (s'identifiant donc à une flèche du graphe à composition $\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))$) et pour toute flèche $x : \mathbb{J}(B_2) \longrightarrow A$ de $\mathbb{A}$, on a :

$$x \cdot_{\mu} \langle\langle \rho_2(\delta_1) \rangle\rangle = c(E_{Fl}, \mathbb{J}(B_1), A)\ (x \cdot_{\mathfrak{D}} \delta_1) \ ,$$

pour tous objets B_1 , B_2 de $\mathbb{B}$, pour tout couple $(\delta_2 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{2_{\emptyset}} \mathbb{K}(B_2) \ , \ \delta_1 : \mathbb{K}(B_1) \longrightarrow_{2_{\emptyset}} \mathbb{K}(B_2))$ de 2-flèches de $\mathbb{D}$ qui s'identifie à un couple de flèches composables du graphe à composition $\mathbb{D}(\mathbb{K}(B_1),\mathbb{K}(B_2))$, on a :

$$x \cdot_{\mu} \langle\langle \rho_3(\delta_2, \delta_1) \rangle\rangle =$$
$$c(E_{CComp}, \mathbb{J}(B_1), A)\ ((x \cdot_{\mathfrak{D}} \delta_2), (x \cdot_{\mathfrak{D}} \delta_1)) \ .$$

<u>Fin de la preuve.</u>

(12) Cette condition est un cas particulier, obtenu pour $G_1 = E_{Ob}$, de la toute première condition que nous avons énoncée. C'est donc elle qui "co-représente" la "compatibilité" de $T(A,\mathfrak{D})$ et $S(A,\mathfrak{D})$ (voir les deux notes précédentes).

De la proposition précédente, de la proposition 1 du §2.3 et de la proposition 3 du §3.4, on déduit immédiatement que :

<u>Proposition 5 :</u> *Si* α *est un ordinal régulier, si* $\mathbf{A}$ *est une amphi-catégorie amphi-co-complète et si* $\mathfrak{D} = (\mathbf{A},\mathbf{J},\mathbf{B},\mathbf{K},\mathbf{D})$ *est une amphi-syntaxe petite et d'amphi-rang* $\leq \alpha$ *sur* $\mathbf{A}$ *, alors le foncteur* $\mathbf{U}^{\mathfrak{D}} : \mathbf{A}^{\mathfrak{D}} \longrightarrow \mathbb{A}$ *(de la catégorie* $\mathbf{A}^{\mathfrak{D}}$ *des* $\mathfrak{D}$*-amphi-algèbres vers la catégorie* $\mathbb{A}$ *) admet un adjoint à gauche* $\mathbf{L}^{\mathfrak{D}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbf{A}^{\mathfrak{D}}$ *et est monadique.*

<u>Preuve.</u>

De la proposition 3 du §3.4 et de la construction de $\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})$, il est facile de déduire que $\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})$ est une syntaxe petite, de rang $\leq \alpha$, sur la catégorie localement petite et co-complète $\mathbb{A}$. Vu la proposition 1 du §2.3, on en infère que $U^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})} : \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})} \longrightarrow \mathbb{A}$ admet un adjoint à gauche $L^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})}$.

La proposition précédente permet alors de conclure. Plus précisément, $\mathbf{L}^{\mathfrak{D}}$ est défini comme rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A}^{\mathfrak{D}} \arrow[rr, "\mathrm{corepa}", "\simeq"'] & & \mathbb{A}^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})} \\
& \mathbb{A} \arrow[ul, "\mathbf{L}^{\mathfrak{D}}"] \arrow[ur, "L^{\mathcal{SAA}(\mathfrak{D})}"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Fin de la preuve.</u>

On laisse au lecteur le soin de développer les considérations adéquates concernant les amphi-théories engendrées par les amphi-syntaxes, du point de vue des amphi-algèbres. Il suffit "d'enrichir" les considérations analogues du §2.3 concernant les théories.

Nous n'aborderons pas ici le problème des "sesqui-théories" qu'engendreraient les amphi-syntaxes, du point de vue des sesqui-algèbres.

De toute manière, nous n'aurons besoin, dans la suite, ni de l'une, ni de l'autre de ces procédures de génération : nous utiliserons, au contraire, systématiquement, les résultats de co-représentabilité des propositions 2 et 4 précédentes, qui permettent de "revenir" à des algèbres de syntaxes (non enrichies) et, si besoin est, aux seules théories (non totalement ou partiellement enrichies) qu'elles engendrent.

Bibliographie de la Section A

[A.M.E.N.] L. Coppey et C. Lair, Algébricité, monadicité, esquissabilité et non-algébricité, Diagrammes 13, Paris, 1985.

[A.O.F.S.] F. E. J. Linton, An outline of functorial semantics, Lect. Notes in Math. 80, Springer, 1969.

[C.A.S.T.] C. Ehresmann, Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

[C.L.C.A.] S. Eilenberg et G. M. Kelly, Closed categories, Proceedings of the Conference on categorical algebra (La Jolla, 1965), ed. by S. Eilenberg, D. K. Harrison, S. MacLane, H. Röhrl, Springer, 1966.

[E.S.C.C.] F. Cury, Catégories lax-localement cartésiennes et catégories localement cartésiennes : un exemple de suffisante complétude connexe de sémantiques initiales, Diagrammes 25, Paris, 1991.

[E.T.S.A.] C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, Bull. Instit. Polit., Iaşi, XIV, 1968.

[F.S.A.T.] F. W. Lawvere, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, Lect. Notes in Math. 61, Springer, 1968.

[G.M.E.N.] F. Cury, Graphes multiplicatifs enrichis, Esquisses Math. 27, Amiens, 1978.

[L.C.L.S.] C. Lair, Lax colimites structurées, Diagrammes 20, Paris, 1988.

[L.P.L.G.] F. Ulmer, Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

[P.T.G.M.] L. Coppey, Quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3, Paris, 1980.

[S.C.C.B.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Section B : théorie générale, Diagrammes 31, (à paraître).

[S.C.C.C.] F. Cury, La suffisante complétude connexe, Section C : exemples, Diagrammes 32, Paris, (à paraître).

[T.A.E.P.] L. Coppey, Théories algébriques et extensions de préfaisceaux et compléments, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XIII,1 et XIII,4, Paris, 1972.

Table de la Section A