DIAGRAMMES

C. HENRY

Propriétés de permanence et existence de réalisations minimales pour les algèbres multisortes

Diagrammes, tome 27 (1992), exp. n° 3, p. CH1-CH53

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1992__27__A3_0>

PROPRIETES DE PERMANENCE

ET

EXISTENCE DE REALISATIONS MINIMALES

POUR LES

ALGEBRES MULTISORTES

C. Henry

On sait qu'on peut toujours *concrétiser* un comportement "entrées/sorties" comme étant le comportement *effectif* d'au moins un automate, *minimal* (en nombre d'états).
En (I.I.A.C.), J. A. Goguen et J. Meseguer ont montré comment replacer ce résultat, très classique, dans la systématique des algèbres de signatures multisortes.
Dans le présent travail, nous montrons comment il est naturel d'élargir cette systématique jusqu'à celle des algèbres de théories multisortes (d'ailleurs suggérée en (I.I.A.C.), mais non utilisée dans le passage concernant justement les "machines abstraites" - §5, pp. 485 à 490). Ainsi, tant la construction de l'automate minimal, ayant même comportement qu'un automate donné, que la construction du *monoïde syntaxique* de cet automate, apparaissent comme deux cas particuliers (l'un "au dessus des comportements" et l'autre "au dessus des états") d'une même procédure générale de minimalisation.

Nous avons cru devoir rappeler, dans la PARTIE 0, les quelques éléments, indispensables pour la compréhension de la suite, concernant les théories multisortes. Dès lors, il nous a semblé utile d'y rappeler aussi, très rapidement, quelques rudiments

A.M.S. Sub. Class. : 18 C 10 , 08 A 30 , 08 B 20 , 68 D 30

assez techniques de théorie des catégories (concernant le lemme de Yoneda ou, surtout, une construction particulière d'adjoints à gauche ...) constamment utilisés dans le reste du texte. Bien entendu, le lecteur averti pourra ne voir dans cette partie que le catalogue des notations systématiques utilisées.

La PARTIE I est consacrée à la propriété de "suffisante complétude" (i. e. lorsque les algèbres d'une théorie "forte", engendrées par les algèbres d'une théorie plus "faible", sont obtenues par quotient de ces dernières), puis à la propriété de "cohérence hiérarchique" (i. e. de plongement des algèbres d'une théorie "faible" dans les algèbres d'une théorie plus "forte" qu'elles engendrent) et, enfin, à la propriété de "permanence" (i. e. quand les algèbres d'une théorie "forte", engendrées par les algèbres d'une théorie plus "faible" les ont encore - à isomorphisme près - pour algèbres faibles sous-jacentes). Dans chaque cas la règle du jeu est d'établir des conditions nécessaires et/ou suffisantes *syntaxiques*, i. e. portant exclusivement sur les théories (les syntaxes) concernées.

La PARTIE II adapte et complète les méthodes de J. A. Goguen et J. Meseguer concernant l'indiscernabilité, l'accessibilité et l'existence de réalisations minimales. Dans chaque cas, il s'est agi de passer du concept de "sortes invisibles" de (I.I.A.C.) à celui d'homomorphisme entre théories multisortes (possédant éventuellement la propriété de permanence). Cela a d'ailleurs également imposé le passage d'un traitement "ensembliste" des algèbres à un traitement "catégorique et interne aux catégories concernées" de ces algèbres. Cette partie s'achève par un retour à l'exemple des automates (minimalisation des états, puis du monoïde des transitions) et par un autre exemple (inspiré de la construction du monoïde syntaxique) concernant les groupes d'opérations.

PARTIE 0

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS

Si I est un ensemble, nous désignons évidemment par I^* l'ensemble de ses mots (le mot vide étant noté 1 , s'il n'y a pas risque d'ambiguïté). Alors, si M est un tel mot, nous notons $\Lambda(M)$ sa longueur et, pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant \Lambda(M)$, nous désignons par $M(i)$ sa $i^{\text{ème}}$ lettre.

Si $n \geqslant 1$ est un entier, on note z_n la catégorie (triviale) représentée ci-dessous:

$$1 \leftarrow 2 \rightarrow 3 \leftarrow \dots \rightarrow 2n-1 \leftarrow 2n \rightarrow 2n+1 \ ,$$

Supposons que C est une catégorie.
Nous notons $\mathrm{Gro}(C)$ le graphe orienté (sans identités sélectionnées) sous-jacent à C .
Si C' est une autre catégorie et si $F: C \rightarrow C'$ est un foncteur, on note $\langle F(C) \rangle$ l'*image pleine de* F , i. e. la sous-catégorie pleine de C' dont les objets sont les images par F des objets de C .
Enfin, si $n \geqslant 1$ est un entier, un foncteur $Z : z_n \rightarrow C$ sera appelé un *zigzag* (de longueur $2n+1$) de C .

On dit que $T = (T_s, T_c, ((P^M{}_i)_{1 \leqslant i \leqslant \Lambda(M)})_{M \in I^*}$ est une *théorie multisorte* si, et seulement si:
- T_s est un ensemble, dit des *sortes* de T ,
- T_c est une catégorie, dite *sous-jacente* à T , ayant $T_s{}^*$ pour ensemble d'objets,
- pour tout mot $M \in T_s{}^*$ (i. e. pour tout objet), la famille $(P^M{}_i : M \rightarrow M(i))_{1 \leqslant i \leqslant \Lambda(M)}$ définit un produit, dit *distingué*, dans T_c (ainsi, en particulier, le mot vide 1 est un $\emptyset$-produit, i.e un élément final).

Dans la suite, si K est un "constructeur" prenant en argument une catégorie, on notera indifféremment $K(T_c) = K(T)$. Par exemple, $Ob(T) = Ob(T_c)$ est l'ensemble des objets de T_c ou encore de T ...

On dit que $H = (T, H_s, H_c, T')$: $T \to T'$ est un *homomorphisme* de théories multisortes si, et seulement si:
- T et T' sont deux théories multisortes,
- $H_s : T_s \to T'_s$ est une application (entre les ensembles de sortes de T et T' et dont on note $H_s{}^* : T_s{}^* \to T'_s{}^*$ le prolongement aux ensembles de mots),
- H_c: $T_c \to T'_c$ est un foncteur (entre les catégories sous-jacentes), injectif sur les objets et tel que:
  + pour tout mot (i, e, pour tout objet) $M \in T_s{}^* = Ob(T)$, on a $\Lambda(H_c(M)) = \Lambda(M)$,
  + pour tout mot (i, e, pour tout objet) $M \in T_s{}^* = Ob(T)$, et pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant \Lambda(M)$, on a $H_c(M(i)) = H_c(M)(i)$,
  + pour tout mot (i, e, pour tout objet) $M \in T_s{}^* = Ob(T)$, et pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant \Lambda(M)$, on a $H_c(P^M{}_i) = P^{H_c(M)}{}_i$,

(autrement dit, la restriction de H_c aux objets est $H_s{}^*$ et H_c transforme les produits distingués de T en des produits distingués de T').
Dans la suite, si K est un "constructeur" prenant en argument un foncteur, on notera indifféremment, $K(H_c) = K(H)$. Par exemple, la resricion de H_c aux objets sera encore notée H . De même, on notera $\langle H(T) \rangle$ *l'image pleine* de H_c ou encore de H ... D'ailleurs, on ne fera aucune mention, le plus souvent, des indices "s" ou "c" .

Si T est une théorie multisorte, on dit que A: $T \to Ens$ est une *algèbre* de T , ou encore une T-*algèbre*, si, et seulement si:
- A: $T_c \to Ens$ est un foncteur,
- pour tout mot $M \in T_s{}^*$ (i, e, pour tout objet M de T), la famille $(A(P^M{}_i)\text{: } A(M) \to A(M(i)))_{1 \leqslant i \leqslant \Lambda(M)}$ est un produit dans Ens (en particulier, $A(1)$ est un ensemble à un élément).

Dans ces conditions, on note $Alg(T)$ la sous-catégorie pleine de (la catégoie de foncteurs) Ens^{T_c} ($= Ens^T$) dont les objets sont ces algèbres et les flèches les transformations naturelles.
Alors, on sait (ou on voit facilement) que le plongement de Yoneda (relatif à la catégorie T_c sous-jacente à T) $\underline{Y}_{T_c} = \underline{Y}$: $T \to (Ens^T)^{op}$ admet une restriction (évidemment pleine et fidèle) Y_T: $T \to Alg(T)^{op}$ et on peut vérifier que (voir

(C.F.W.M.));

Lemme de Yoneda. Naturellement en tout objet M *de* T *et en toute algèbre* $A: T \to Ens$ *, on a:*

$$Hom_{Alg(T)}(Y_T(M),A) \cong A(M) .$$

Si $H: T \to T'$ est un homomorphisme entre deux théories multisortes, son foncteur sous-jacent $H_c: T_c \to T'_c$ induit un foncteur ("composition par H"):

$$Ens^H = Ens^{H_c}: Ens^{T'} \to Ens^T$$
$$(F': T'_c \to Ens) \to (F'.H_c: T_c \to Ens) ,$$

qui admet évidemment une restriction:

$$Alg(H): Alg(T') \to Alg(T)$$
$$(A': T \to Ens) \to (A'.H: T \to Ens) .$$

Mieux, on sait que Ens^H admet un adjoint à gauche (le foncteur "extension de Kan inductive le long de H", voir (C.F.W.M.)):

$$\underline{G}_H: Ens^T \to Ens^{T'} ,$$

qui, lui aussi, admet une restriction:

$$G_H: Alg(T) \to Alg(T') .$$

Dans ces conditions, s'il n'y a pas rique d'ambiguïté, on notera encore:

- $\underline{Y} = \underline{Y}_T$,
- $\underline{Y}' = \underline{Y}_{T'}$,
- $Y = Y_T$,
- $Y' = Y_{T'}$,
- $\underline{G} = \underline{G}_H$,
- $G = G_H$,
- $e(A): A \to Alg(H)(G(A))$ *l'homomorphisme canonique d'adjonction* associé à toute T-algèbre $A: T \to Ens$,
- $\varepsilon(M) = e(M) : Y(M) \to Alg(H)(G(Y(M)) = Alg(H)(Y'(H(M))$ l'homomorphisme canonique d'adjonction associé à tout mot $M \in T_s{}^*$ (i. e. à tout objet M de T).

De même, si $A: T \to Ens$ est une T-algèbre, si $A': T' \to Ens$ est une T'-algèbre et si $m: A \to Alg(H)(A')$ est une flèche de $Alg(T)$, on désignera par $fact(m): G(A) \to A'$ l'unique flèche de $Alg(T')$ (dont l'existence et l'unicité sont assurés par l'adjonction de G à gauche de $Alg(H)$) telle que:

$$Alg(H)(fact(m)).e(A) = m .$$

Enfin, pour achever de préciser les notations et pour fixer un peu mieux les idées, rappelons (le plus brièvement possible!) comment est construite la T'-algèbre $G(A): T' \to Ens$, librement engendrée par une T-algèbre $A: T \to Ens$, et l'homomorphisme canonique associé $e(A): A \to Alg(H)(G(A)) = G(A).H$;

- on commence par associer au *foncteur* $A : T_c \to Ens$ la catégorie $1/A$ telle que:
  + ses objets sont les (x,M), où M est objet de T et x élément de $A(M)$,
  + ses flèches sont les:
  $((x_1,M_1),t,(x_2,M_2)):(x_1,M_1) \to (x_2,M_2)$,
  où $t:M_1 \to M_2$ est une flèche de T telle que:
  $A(t)(x_1) = x_2$,
- on dispose alors du foncteur "de projection":

$$\begin{aligned} 1//A : 1/A &\to T \\ (x,M) &\mapsto M , \end{aligned}$$

- ensuite, à tout objet M' de T', on associe la catégorie H/M' telle que:
  + ses objets sont les (M,t'), où M est objet de T et $t':H(M) \to M'$ est flèche de T',
  + ses flèches sont les:
  $((M_1,t'_1),t,(M_2,t'_2)):(M_1,t'_1) \to (M_2,t'_2)$,
  où $t:M_1 \to M_2$ est une flèche de T telle que:
  $t'_2.H(t) = t'_1$,
- de la sorte, on dispose d'un nouveau foncteur "de projection":

$$\begin{aligned} H//M':H/M' &\to T \\ (M,t') &\mapsto M , \end{aligned}$$

- on peut alors construire la catégorie produit fibré des deux foncteurs $1//A:1/A \to T \leftarrow H/M':H//M'$:

$$1/A/H/M' = (1/A) \times_T (H/M') ,$$

(c'est, à isomorphisme près, la catégorie telle que:
  + ses objets sont les (x,M,t'), où (x,M) est objet de $1/A$ et (M,t') est objet de H/M',
  + ses flèches sont les
  $((x_1,M_1,t'_1),t,(x_2,M_2,t'_2):(x_1,M_1,t'_1) \to (x_2,M_2,t'_2)$,
  où $((x_1,M_1),t,(x_2,M_2))$ est flèche de $1/A$ et $((M_1,t'_1),t,(M_2,t'_2))$ est flèche de H/M',

autrement dit, et de manière plus concrète, les objets de $1/A/H/M'$ peuvent être représentés comme des couples de flèches *formellement consécutives* de la forme suivante - où $1 = \{ 0 \}$:

$$1 \xrightarrow[x]{} A(M) \qquad M \qquad H(M) \xrightarrow[t']{} M'$$

et, de même, les flèches de $1/A/H/M'$ peuvent être représentées comme des couples de triangles commutatifs *formellement consécutifs*:

$$\begin{tikzcd}
 & A(M_1) \arrow[dd, "A(t)"] & M_1 \arrow[dd, "t"] & H(M_1) \arrow[dd, dashed, "H(t)"] \arrow[dr, "t'_1"] & \\
1 \arrow[ur, "x_1"] \arrow[dr, "x_2"'] \arrow[r, phantom, "="] & {} & & {} \arrow[r, phantom, "="] & M' \\
 & A(M_2) & M_2 & H(M_2) \arrow[ur, "t'_2"'] &
\end{tikzcd}$$
),

- dans ces conditions, il est facile de vérifier que:
  - \+ pour tout objet M' de T', l'ensemble $G(A)(M') = \Pi_0(1/A/H/M')$ a pour éléments les composantes connexes $◀(x,M,t')▶$ des objets (x,M,t') de la catégorie $1/A/H/M'$,
  - \+ pour tout objet M de T, l'application $e(A)(M): A(M) \to Alg(H)(G(A))(M)$ associe à tout élément x la composante connexe $◀(x,M,1_{H(M)})▶$ de $(x,M,1_{H(M)})$ dans la catégorie $1/A/H/H(M)$.

En particulier, on voit aisément que:
- naturellement en tout objet M de T, on a:

$$G(Y(M)) \cong Y'(H(M)),$$

(on supposera même qu'on a l'égalité),
- pour toute flèche $t: M \to N$ de T, on a:

$$\begin{array}{cccc}
\varepsilon(M)(N) & : & Y(M)(N) & \to Alg(H)(G(Y(M)))(N) \\
 & & = & \cong \\
 & & Hom_T(M,N) & Alg(H)(Y'(H(M)))(N) \\
 & & = & = \\
 & & Hom_T(M,N) & Y'(H(M))(H(N)) \\
 & & = & = \\
 & & Hom_T(M,N) & Hom_{T'}(H(M),H(N))
\end{array}$$

$$t \mapsto H(t) \quad .$$

De ces constructions résulte, entre autre, que:

Lemme de commutation. Si $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre deux théories multisortes, les trois diagrammes ci-dessous* *commutent;*

$$\begin{tikzcd} Alg(T') \arrow[r, hook] & Ens^{T'} \\ Alg(T) \arrow[u, "G"] \arrow[r, hook] & Ens^{T} \arrow[u, "G"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Alg(T') \arrow[r, hook] & Ens^{T'} \\ Alg(T) \arrow[u, "Alg(H)"] \arrow[r, hook] & Ens^{T} \arrow[u, "Ens^{H}"'] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} T' \arrow[r, "Y'"] & Alg(T')^{op} \\ T \arrow[u, "H"] \arrow[r, "Y"'] & Alg(T)^{op} \arrow[u, "G^{op}"'] \end{tikzcd}$$

Pour conclure cette PARTIE O, énonçons le lemme qui suit, utile dans la suite (et qui se démontre immédiatement):

Lemme de transition. Si C *est une catégorie à sommes finies, si* $x, y: X_1 \to X_2$, $m': X_2 \to X_3$ *et* $t: X \to X_2$ *en sont des flèches telles que* $m'.x = m'.y$, *alors* $m'.]x,t[= m'.]y,t[$ *(si l'on désigne par* $]x,t[,]y,t[: X_1+X \to X_2$ *les flèches obtenues par transition relative à* t *, i. e. les uniques flèches telles que:*

$$]x,t[.s_1 = x \quad et \quad]x,t[.s = t ,$$
$$]y,t[.s_1 = y \quad et \quad]y,t[.s = t ,$$

où $s_1: X_1 \to X_1+X$ *et* $s: X \to X_1+X$ *sont les co-projections).*

PARTIE I

SUFFISANTE COMPLETUDE
ET
COHERENCE HIERARCHIQUE

1. Suffisante complétude.

On dit qu'un homomorphisme de théories multisortes $H: T \to T'$ est *sectionnable* si, et seulement si, il existe un homomorphisme de graphes orientés $K: Gro(\langle H(T)\rangle) \to Gro(T)$ tel que:

(i) pour tous objets M et M_1 de T et pour toute flèche $t': H(M) \to H(M_1)$ de T' (i. e. de $\langle H(T)\rangle$), on a:

$$H(K(t')) = t' ,$$

(ii) pour tous objets M , M_1 et M_2 de T , pour toute flèche $t': H(M) \to H(M_1)$ de $\langle H(T)\rangle$ et pour toute flèche $t: M_1 \to M_2$ de T , on a:

$$K(H(t).t') = t.K(t') .$$

Montrons que:

Proposition 1. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre théories multisortes, alors les assertions suivantes sont équivalentes* :

(1) H *est sectionnable,*

(2) *pour tout objet* M *de* T *et naturellement en tout objet* M_1 *de* T *, il existe (et on peut choisir) une application:*

$$\lambda(M)(M_1): Alg(H)(G(Y(M)))(M_1) \to Y(M)(M_1)$$

telle que:

$$\varepsilon(M)(M_1).\lambda(M)(M_1) = Id_{Alg(H)(G(Y(M)))(M_1)}$$

(où $\varepsilon(M): Y(M) \to Alg(H)(G(Y(M)))$ *est la flèche canonique associée à l'adjonction du foncteur* G *à gauche du foncteur* $Alg(H)$ *- voir la* PARTIE 0*),*

[Remarque. On peut, évidemment, remplacer la condition (2) précédente par la condition (3) suivante, qui lui est trivialement équivalente:

(3) *pour tout objet* M *de* T *, il existe (et on peut choisir) une transformation naturelle* :

$$\lambda(M)) : Alg(H)(G(Y(M))) \to Y(M)$$

telle que :

$$\varepsilon(M).\lambda(M)) = Id_{Alg(H)(G(Y(M)))} \,.$$

Nous avons préféré faire figurer la condition (2), plutôt que la (3), dans l'énoncé de la proposition 1 pour rendre immédiatement explicite le parallèle à faire avec la proposition 3 - voir la remarque qui suit cette dernière.]

Preuve. a) Montrons tout d'abord que (1) implique (2) .
Pour tous objets M et M_1 de T , considérons l'application:

$$\begin{array}{rcl} \lambda(M)(M_1) : Alg(H)(G(Y(M)))(M_1) & \to & Y(M)(M_1) \\ = & & = \\ Hom_{T'}(H(M),H(M_1)) & & Hom_T(M,M_1) \\ & & \\ t' & \longmapsto & K(t') \end{array}$$

Alors, pour toute flèche $t : M_1 \to M_2$ de T , le diagramme suivant commute:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\begin{array}{c} Alg(H)(G(Y(M)))(M_1) \\ = \\ Hom_{T'}(H(M),H(M_1)) \end{array} \arrow[r, "\lambda(M)(M_1)"] \arrow[d, "\begin{array}{c} Alg(H)(G(Y(M)))(t) \\ = \\ Hom_{T'}(H(M),H(t)) \end{array}"'] & \begin{array}{c} Y(M)(M_1) \\ = \\ Hom_T(M,M_1) \end{array} \arrow[d, "\begin{array}{c} Y(M)(t) \\ = \\ Hom_T(M,t) \end{array}"] \\
\begin{array}{c} Hom_{T'}(H(M),H(M_2)) \\ = \\ Alg(H)(G(Y(M)))(M_2) \end{array} \arrow[r, "\lambda(M)(M_2)"'] & \begin{array}{c} Hom_T(M,M_2) \\ = \\ Y(M)(M_2) \end{array}
\end{tikzcd}$$

puisqu'en effet, pour toute flèche $t' : H(M) \to H(M_1)$ de T' , nous avons:

$$\begin{aligned}
Y(M)(t)(\lambda(M)(M_1)(t')) &= Y(M)(t)(K(t')) \\
&= \mathrm{Hom}_T(M,t)(K(t')) \\
&= t.K(t') \\
&= K(H(t),t') \\
&\quad \text{(d'après (ii))} \\
&= \lambda(M)(M_2)(H(t),t') \\
&= \lambda(M)(M_2)(\mathrm{Hom}_{T'}(H(M),H(t))(t')) \\
&= \lambda(M)(M_2)(\mathrm{Alg}(H)(G(Y(M)))(t)\ (t')) \ .
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour tout objet M de T, la famille $(\lambda(M)(M_1))_{M_1\in Ob(T)}$ est "naturelle en M_1 ".
Enfin, pour tous objets M et M_1 de T et pour toute flèche $t':H(M) \to H(M_1)$ de T', nous avons:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(M)(M_1)(\lambda(M)(M_1)(t')) &= \varepsilon(M)(M_1)(K(t')) \\
&= H(K(t')) \\
&\quad \text{(d'après les propriétés de } \varepsilon \text{ - voir la PARTIE 0)} \\
&= t' \\
&\quad \text{(d'après (i))} \ .
\end{aligned}$$

b) Montrons maintenant que (2) implique (1) .
Par hypothèse, pour tout objet M de T, nous disposons de la transformation naturelle, i. e. de la flèche de $\mathrm{Alg}(T)$:

$$\lambda(M) : \mathrm{Alg}(H)(G(Y(M))) \to Y(M) \ ,$$

de sorte que:

$$\varepsilon(M).\lambda(M) = \mathrm{Id}_{\mathrm{Alg}(H).G(Y(M))} \ .$$

Par conséquent, pour tous objets M et M_1 de T et pour toute flèche $t':H(M) \to H(M_1)$ de T', nous disposons du diagramme (évidemment) commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(H)(Y'(H(M_1))) \arrow[r, "\mathrm{Alg}(H)(Y'(t'))"] \arrow[d, equal] & \mathrm{Alg}(H)(Y'(H(M))) \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Alg}(H)(G(Y(M_1))) & \mathrm{Alg}(H)(G(Y(M))) \arrow[d, "\lambda(M)"] \\
Y(M_1) \arrow[u, "\varepsilon(M_1)"] \arrow[r, "\lambda(M).\mathrm{Alg}(H)(Y'(t')).\varepsilon(M_1)"'] & Y(M)
\end{tikzcd}$$

et, puisque $Y:T \to \mathrm{Alg}(T)^{op}$ est un foncteur plein et fidèle, il existe donc une unique flèche $K(t'):M \to M_1$ de T telle que:

$$Y(K(t')) = \lambda(M).Alg(H)(Y'(t')).\varepsilon(M_1) \ .$$

Clairement, on définit bien ainsi un homomorphisme de graphes orientés:

$$K:Gro(\langle H(T)\rangle) \to Gro(T) \ .$$

Alors, pour tous objets M et M_1 de T et pour toute flèche $t':H(M) \to H(M_1)$ de T', on a:

$$\varepsilon(M).Y(K(t')) = \varepsilon(M).\lambda(M).Alg(H)(Y'(t')).\varepsilon(M_1)$$

(par définition)

$$= Alg(H)(Y'(t')).\varepsilon(M_1)$$

(puisque, par hypothèse, $\varepsilon(M).\lambda(M) = Id_{Alg(H).G(Y(M))}$),

autrement dit $Y'(t'):Y'(H(M_1)) \to Y'(H(M))$ est, par l'adjonction du foncteur G à gauche du foncteur $Alg(H)$, l'unique flèche de $Alg(T')$ rendant le diagramme ci-dessous commutatif:

$$\begin{tikzcd}
Alg(H)(Y'(H(M_1))) \arrow[r, "Alg(H)(Y'(t'))"] & Alg(H)(Y'(H(M))) \\
Y(M_1) \arrow[u, "\varepsilon(M_1)"] \arrow[r, "Y(K(t'))"'] & Y(M) \arrow[u, "\varepsilon(M)"']
\end{tikzcd}$$

d'où il résulte que:

$$Y'(t') = G(Y(K(t')))$$

(par unicité)

$$= Y'(H(K(t')))$$

(puisque $Y'.H = G^{op}.Y$ - comme rappelé dans la PARTIE 0) ,

mais, Y' étant fidèle, on en déduit que $t' = H(K(t'))$, i. e. que K vérifie la condition (i) .

Maintenant, pour tous objets M , M_1 et M_2 de T , pour toute flèche $t':H(M) \to H(M_1)$ de $\langle H(T)\rangle$ et pour toute flèche $t:M_1 \to M_2$ de T , on voit que:

- le diagramme suivant commute (le rectangle de gauche, grâce à l'adjonction de G à gauche de $Alg(H)$, et celui de droite, en vertu de la définition de K):

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(H)(G(Y(M_2))) \arrow[r, "{\substack{\mathrm{Alg}(H)(Y'(H(t)) \\ = \\ \mathrm{Alg}(H)(G(Y(t)))}}"] & \mathrm{Alg}(H)(G(Y(M_1))) \arrow[r, "\mathrm{Alg}(H)(Y'(t'))"] & \mathrm{Alg}(H)(G(Y(M))) \arrow[d, "\lambda(M)"] \\
Y(M_2) \arrow[u, "\varepsilon(M_2)"] \arrow[r, "Y(t)"'] & Y(M_1) \arrow[u, "\varepsilon(M_1)"] \arrow[r, "Y(K(t'))"'] & Y(M)
\end{tikzcd}
$$

- le diagramme suivant commute, par définition de K :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(H)(G(Y(M_2))) \arrow[r, "\mathrm{Alg}(H)(Y'(H(t)))"] \arrow[rr, bend left, "{\mathrm{Alg}(H)(Y'(H(t),t'))}"] & \mathrm{Alg}(H)(G(Y(M_1))) \arrow[r, "\mathrm{Alg}(H)(Y'(t'))"] & \mathrm{Alg}(H)(G(Y(M))) \arrow[d, "\lambda(M)"] \\
Y(M_2) \arrow[u, "\varepsilon(M_2)"] \arrow[rr, "{Y(K(H(t),t'))}"'] & & Y(M)
\end{tikzcd}
$$

d'où on déduit que:

$$Y(K(H(t),t')) = Y(K(t')).Y(t) = Y(t.K(t')) \ ,$$

et donc, puisque Y est fidèle, que:

$$K(H(t),t') = t.K(t') \ ,$$

autrement dit que K vérifie (ii). *Fin de la preuve.*

Etablissons maintenant la *condition syntaxique de suffisante complétude* suivante:

Proposition 2. Si $H: T \to T'$ *est un homomorphisme sectionnable entre théories multisortes, alors, pour toute algèbre* $A: T \to \mathrm{Ens}$ *, la flèche canonique (associée à l'adjonction du foncteur* G *à gauche du foncteur* $\mathrm{Alg}(H)$ *- voir la* PARTIE 0*)* $e(A):A \to \mathrm{Alg}(H)(G(A))$ *est un épimorphisme point par point (donc un épimorphisme) ; autrement dit, pour tout objet* M_1 *de* T *, l'application* $e(A)(M_1):A(M_1) \to G(A)(H(M_1))$ *est surjective.*

[Remarque. Si H est sectionnable, la proposition 1 indique -

voir la remarque qui la suit - que, pour tout objet M de T (i. e. pour tout objet de $Alg(T)$ *de la forme* $Y(M)$), la flèche canonique d'adjonction *particulière* $e(Y(M)) = \varepsilon(M)$ possède une section (i. e. est *naturellement* sectionnable point par point). Par contre, la proposition 2 indique *seulement* que, pour un *quelconque* objet A de $Alg(T)$, la flèche canonique d'adjonction $e(A)$ est certainement point par point sectionnable mais, en général, *non naturellement*.]

Preuve. Supposons que M_1 est un objet de T et y est un élément de $G(A)(H(M_1))$.
Par construction (voir la PARTIE 0), $y = \langle\!\langle(x, M, t')\rangle\!\rangle$ est la composante connexe d'un de ses représentants (x, M, t') , comme figuré ci-dessous:

$$1 \xrightarrow[x]{} A(M) \quad M \quad H(M) \xrightarrow[t']{} H(M_1) \ .$$

Alors, dans le schéma ci-dessous, le diagramme de gauche est trivialement commutatif dans Ens et celui de droite commute dans T' (puisque, par hypothèse, H est sectionnable par K):

$$\begin{tikzcd}
 & A(M_1) & M_1 & H(M_1) \arrow[ddr, bend left, "Id"] & \\
 & A(M_1) \arrow[u, "Id"'] \arrow[d, "Id"] & M_1 \arrow[u, "Id"] \arrow[d, "Id"'] & H(M_1) \arrow[u, "Id"] \arrow[d, "Id"'] \arrow[dr, "Id"] & \\
1 \arrow[uur, bend left, "A(K(t')).x"] \arrow[ur, "A(K(t')).x"] \arrow[r, "A(K(t')).x"'] \arrow[dr, "x"] \arrow[ddr, bend right, "x"'] & A(M_1) & M_1 & H(M_1) \arrow[r, "Id"'] & H(M_1) \\
 & A(M) \arrow[u, "A(K(t'))"'] \arrow[d, "Id"] & M \arrow[u, "K(t')"] \arrow[d, "Id"'] & H(M) \arrow[u, "H(K(t')) = t'"] \arrow[d, "Id"'] \arrow[ur, "t'"'] & \\
 & A(M) & M & H(M) \arrow[uur, bend right, "t'"'] &
\end{tikzcd}$$

Par conséquent, (x, M, t') et $(A(K(t')), x, M_1, 1_{H(M_1)})$ sont dans la même composante connexe de $1/A/H/H(M_1)$. On a donc:

$$\begin{aligned} e(A)(M_1)(A(K(t')), x) &= \blacktriangleleft(A(K(t')), x, M_1, 1_{H(M_1)})\blacktriangleright \\ &= \blacktriangleleft(x, M, t')\blacktriangleright \\ &= y, \end{aligned}$$

d'où la surjectivité annoncée. *Fin de la preuve.*

2. Cohérence hiérarchique.

On dit qu'un homomorphisme de théories multisortes $H: T \to T'$ est *rétractable* si, et seulement si, il existe un homomorphisme de graphes orientés $K: \mathrm{Gro}(\langle H(T)\rangle) \to \mathrm{Gro}(T)$ tel que:

(j) pour tous objets M_2 et M_1 de T et pour toute flèche $t: M_2 \to M_1$, on a $H(K(t)) = t$,

(jj) pour tous objets M, M_1 et M_2 de T, pour toute flèche $t: M_2 \to M_1$ de T et pour toute flèche $t': H(M_1) \to H(M)$ de T', on a $K(t'.H(t)) = K(t').t$.

Montrons que:

Proposition 3. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre théories multisortes, alors les assertions suivantes sont équivalentes;*

(1) $H: T \to T'$ *est rétractable,*

(2) *pour tout objet* M *de* T *et naturellement en tout objet* M_1 *de* T, *il existe (et on peut choisir) une application;:*

$$v(M_1)(M): \mathrm{Alg}(H)(G(M_1))(M) \to Y(M_1)(M)$$

telle que:

$$v(M_1)(M).\varepsilon(M_1)(M) = \mathrm{Id}_{Y(M_1)(M)},$$

(où $\varepsilon(M_1): Y(M_1) \to \mathrm{Alg}(H)(G(Y(M_1)))$ *est la flèche canonique associée à l'adjonction du foncteur* G *à gauche du foncteur* $\mathrm{Alg}(H)$ *- voir la* PARTIE 0).

[Remarque. Si H est rétractable, on déduit de la proposition 3 que la transformation naturelle $\varepsilon(M_1): Y(M_1) \to \mathrm{Alg}(H)(G(M_1))$ est *point par point* rétractable, mais en général *non naturellement*; ainsi, la famille $(v(M_1)(M))_{M \in Ob(T)}$ *ne définit* *pas* une transformation naturelle $v(M_1): Alg(H)(G(M_1)) \to Y(M_1)$ (qui serait rétraction de $\varepsilon(M_1)$) - re-voir la remarque qui suit la proposition 1.]

Preuve. a) Montrons tout d'abord que (1) implique (2) .
Pour tous objets M et M_1 de T , considérons l'application:

$$\begin{array}{ccc} v(M_1)(M) : Alg(H)(G(Y(M_1)))(M) & \to & Y(M_1)(M) \\ = & & = \\ Hom_{T'}(H(M_1), H(M)) & & Hom_T(M_1, M) \\ t' & \longmapsto & K(t') \end{array}$$

Alors, pour toute flèche $t: M_2 \to M_1$ de T , le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc} Alg(H)(G(Y(M_1)))(M) = Hom_{T'}(H(M_1), H(M)) & \xrightarrow{v(M_1)(M)} & Y(M_1)(M) = Hom_T(M_1, M) \\ \Big\downarrow {\scriptstyle Alg(H)(G(Y(t)))(M) \,=\, Hom_{T'}(H(t), H(M))} & & \Big\downarrow {\scriptstyle Y(t)(M) \,=\, Hom_T(t, M)} \\ Hom_{T'}(H(M_2), H(M)) = Alg(H)(G(Y(M_2)))(M) & \xrightarrow[v(M_2)(M)]{} & Hom_T(M_2, M) = Y(M_2)(M) \end{array}$$

puisqu'en effet, pour toute flèche $t': H(M_1) \to H(M)$ de T' , nous avons:

$$\begin{aligned} Y(t)(M)(v(M_1)(M)(t')) &= Y(t)(M)\ (K(t')) \\ &= Hom_T(t, M)\ (K(t')) \\ &= K(t').t \\ &= K(t'.H(t)) \end{aligned}$$

(d'après (jj))

$$= v(M_2)(M)\ (t',H(t))$$
$$= v(M_2)(M)\ (\ Hom_{T'}(H(t),H(M))(t')\ )$$
$$= v(M_2)(M)(Alg(H)(G(Y(t)))(M)(t'))\ .$$

Par conséquent, pour tout objet M de T, la famille $(v(M_1)(M))_{M_1 \in Ob(T)}$ est "naturelle en M_1 ".
Enfin, pour toute flèche $t:M_1 \to M$ de T, nous avons:

$$v(M_1)(M)(\varepsilon(M_1)(M)(t)) = v(M_1)(M)(H(t))$$
(d'après les propriétes de ε - voir la PARTIE 0)
$$= K(H(t))$$
$$= t$$
(d'après (j)) .

b) Montrons, maintenant, que (2) implique (1) .
Pour tous objets M et M_1 de T, nous disposons, par hypothèse, de l'application:

$$\begin{array}{cccc} v(M_1)(M) & : & Alg(H)(G(Y(M_1)))(M) \longrightarrow & Y(M_1)(M) \\ & & = & = \\ & & Alg(H)(Y'(H(M_1))(M) & Hom_T(M_1,M) \\ & & = & = \\ & & Y'(H(M_1))(H(M)) & Hom_T(M_1,M) \\ & & = & = \\ & & Hom_{T'}(H(M_1),H(M)) & Hom_T(M_1,M)\ . \end{array}$$

Autrement dit, si, pour tous objets M et M_1 de T et toute flèche $t':H(M_1) \to H(M)$ de T', nous posons:

$$K(t') = v(M_1)(M)(t')\ ,$$

nous définissons bien un homomorphisme de graphes orientés:

$$K : \langle H(T)\rangle \to T\ .$$

En particulier, pour toute flèche $t:M_1 \to M$ de T, on a successivement:

$$K(H(t)) = v(M_1)(M)(H(t))$$
(par définition de K)
$$= v(M_1)(M)(\varepsilon(M_1)(M)(t))$$
(en vertu des propriétés de ε - voir la PARTIE 0)
$$= t$$
(d'après (2)),

par conséquent, la condition (j) est vérifiée.
Enfin, si M , M_1 et M_2 sont trois objets de T , si

$t:M_2 \to M_1$ est une flèche de T et si $t':H(M_1) \to H(M)$ est une flèche de T', on voit que:
- tout d'abord, le diagramme suivant commute, en vertu de l'hypothèse de naturalité contenue dans (2):

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{T'}(H(M_1),H(M)) \arrow[r, "v(M_1)(M)"] \arrow[d, "\mathrm{Hom}_{T'}(H(t),H(M))"'] & \mathrm{Hom}_T(M_1,M) \arrow[d, "\mathrm{Hom}_T(t,M)"] \\ \mathrm{Hom}_{T'}(H(M_2),H(M)) \arrow[r, "v(M_2)(M)"'] & \mathrm{Hom}_T(M_2,M) \end{tikzcd}$$

- ensuite, on a successivement:

$K(t'.H(t)) = v(M_2)(M)(t'.H(t))$
(par définition de K)
$= v(M_2)(\mathrm{Hom}_{T'}(H(t),H(M))(t'))$
$= \mathrm{Hom}_T(t,M)(v(M_1)(M)(t'))$
(puisque le diagramme précédent commute)
$= \mathrm{Hom}_T(t,M)(K(t'))$
(par définition de K)
$= K(t').t$,

autrement dit, la condition (jj) est vérifiée. *Fin de la preuve.*

Etablissons maintenant la *condition syntaxique suffisante de cohérence hiérarchique* suivante:

Proposition 4. Si $H: T \to T'$ *est un homomorphisme rétractable entre théories multisortes, alors, pour toute algèbre* $A: T \to \mathrm{Ens}$, *la flèche canonique (associée à l'adjonction du foncteur* G *à gauche du foncteur* $\mathrm{Alg}(H)$ *- voir la* PARTIE 0*)* $e(A):A \to \mathrm{Alg}(H)(G(A))$ *est un monomorphisme point par point (donc un monomorphisme) : autrement dit, pour tout objet* M_1 *de* T *, l'application* $e(A)(M):A(M_1) \to G(A)(H(M_1))$ *est injective.*

Preuve. On sait qu'une condition syntaxique suffisante pour que, pour toute algèbre $A: T \to \mathrm{Ens}$, la flèche $e(A):A \to \mathrm{Alg}(H)(G(A))$ soit un monomorphisme est que (voir (C.S.D.P.)):
(CS) *pour tout objet* M_1 *de* T , *pour tout entier* $n \geq 1$, *pour tout zigzag* $Z:z_n \to T$ *fermé en* M_1 *(i. e. tel que*

$Z(1) = M_1 = Z(2n+1)$), *alors s'il existe un diagramme commutatif de* T' *tel que le diagramme* (*) *ci-desous;*

$$
(*) \qquad
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longleftarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \ldots & 2n-1 & \longleftarrow \; 2n \; \longrightarrow & 2n+1 \\
 & & & & \Big\downarrow Z & & & & \\
Z(1) & & Z(2) & & & & Z(2n) & & Z(2n+1) \\
= & & = & & & & = & & = \\
M_1 & \longleftarrow & M_2 \;\ldots & & \ldots & & \ldots\; M_{2n} & \longrightarrow & M_1 \\
 & & & & \Big\downarrow H & & & & \\
H(M_1) & \leftarrow & H(M_2)\ldots & & \ldots & & \ldots H(M_{2n}) & \rightarrow & H(M_1) \\
 & t'_1 = Id_{H(M_1)} \searrow & & t'_2 \searrow & & \swarrow t'_{2n} & & \swarrow t'_{2n+1} = Id_{H(M_1)} & \\
 & & & & H(M_1) & & & &
\end{array}
$$

alors il existe un entier $m \geq 1$, *il existe un foncteur* $N: z_m \to z_n$, *tel que* $N(1) = 1$ *et* $N(2m+1) = 2n+1$, *et il existe un diagramme commutatif de* T *tel que le diagramme* (**) *ci-dessous;*

$$
(**) \qquad
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longleftarrow & 2 & \longrightarrow & 3 & \ldots & 2n-1 & \longleftarrow \; 2n \; \longrightarrow & 2n+1 \\
 & & & & \Big\downarrow Z, N & & & & \\
M_1 & \longleftarrow & M_{N(2)} & & \ldots & & M_{N(2m)} & \longrightarrow & M_1 \\
 & g_1 = Id_{M_1} \searrow & & g_2 \searrow & & \swarrow g_{2m} & & \swarrow g_{2m+1} = Id_{M_1} & \\
 & & & & M_1 & & & &
\end{array}
$$

Comme en (S.Q.P.A.), il nous suffit donc d'établir que l'homomorphisme rétractable $H: T \to T'$ vérifie la condition (CS) (avec $n = m$ et $N = Id$).
Pour ce faire, supposons que l'on dispose d'un diagramme commutatif de T' tel que (*) . Si, pour tout $1 \leq p \leq 2n+1$, on pose $g_p = K(t'_p)$, on voit que:
- on a tout d'abord:

$$\begin{aligned} g_1 &= K(t'_1) \\ &= K(Id_{H(M_1)}) \\ &= K(H(Id_{M_1}) \\ &= Id_{M_1} \end{aligned}$$

(puisque H est rétractable),

- on a ensuite:

$$\begin{aligned} g_{2n+1} &= K(t'_{2n+1}) \\ &= K(Id_{H(M_1)}) \\ &= K(H(Id_{M_1}) \\ &= Id_{M_1} \end{aligned}$$

(puisque H est rétractable),

- pour tout $1 \leq p \leq n$, on a également:

$$\begin{aligned} g_{2p+1}.t_{2p} &= K(t'_{2p+1}).t_{2p} \\ &= K(t'_{2p+1}.H(t_{2p}) \end{aligned}$$

(puisque H est rétractable)

$$= K(t'_{2p})$$

(puisque (*) est un diagramme commutatif)

$$= g_{2p}$$

(par définition),

- pour tout $0 \leq p \leq n-1$, on a enfin:

$$\begin{aligned} g_{2p+1}.t_{2p+1} &= K(t'_{2p+1}).t_{2p+1} \\ &= K(t'_{2p+1}.H(t_{2p+1})) \end{aligned}$$

(puisque H est rétractable)

$$= K(t'_{2p+2})$$

(puisque (*) est un diagramme commutatif)

$$= g_{2p+2}$$

(par définition).

Au total, on dispose donc d'un diagramme commutatif dans T de la forme (**) recherchée (où $n = m$ et $N = Id$). *Fin de la preuve.*

3. Permanence.

Etablissons la *condition syntaxique nécessaire et suffisante de permanence* suivante:

Proposition 5. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre théories multisortes, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) H *est sectionnable et rétractable,*

(2) *(permanence) pour toute algèbre* $A: T \to Ens$, la flèche $e(A): A \to Alg(H)(G(A))$ *est un isomorphisme (où la flèche* $e(A): A \to Alg(H)(G(A))$ *est la flèche canonique associée à l'adjonction du foncteur* G *à gauche du foncteur* $Alg(H)$ *- voir la* PARTIE 0).

Preuve. Clairement, si H est sectionnable et rétractable, en appliquant les propositions 2 et 4 on voit que, pour tout objet M_1 de T , $e(A)(M_1): A(M_1) \to G(A)(H(M_1))$ est un épimorphisme et un monomorphisme de Ens ; c'est donc une application inversible. En conséquence $e(A) = e(A)(-): A(-) \to G(A))(H(-)) = Alg(H)(G(A))$ est une transformation naturelle inversible et donc un isomorphisme.
Inversement, supposons que, pour toute algèbre $A: T \to Ens$, la flèche $e(A): A \to Alg(H)(G(A))$ soit un isomorphisme. Cela signifie en particulier que, naturellement en tout objet N de T , la flèche $e(Y(N)) = \varepsilon(N)$ est un isomorphisme. Par conséquent, naturellement en tout objet N de T et naturellement en tout objet P de T , l'application $\varepsilon(N)(P): Y(N)(P) \to Alg(H)(G(Y(N)))(P)$ est inversible:
- de la proposition 1, il résulte que H est sectionnable (si l'on pose $\lambda(N)(P) = [\varepsilon(N)(P)]^{-1}$),
- de la proposition 3, il résulte que H est rétractable (si l'on pose $\nu(N)(P) = [\varepsilon(N)(P)]^{-1}$).
Fin de la preuve.

On peut "présenter", c'est-à-dire énoncer, la proposition précédente un peu différemment. Etablissons tout d'abord que:

Lemme 1. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre théories multisortes, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
(1) H *est sectionnable et rétractable,*
(2) H *est un isomorphisme sur son image pleine.*

Preuve. Supposons que H est un isomorphisme sur son image pleine $\langle H(T) \rangle$. Notons $K = H'^{-1}$ le foncteur inverse du foncteur $H': T_c \to \langle H(T) \rangle$, restriction de H . Clairement, H est rétractable et sectionnable par K .
Inversement, supposons que H est sectionnable par K et rétractable par K' . Alors, on voit que:
- si M et M_1 sont deux objets quelconques de T et si $t': H(M_1 \to H(M)$ est une quelconque flèche de T' , nous avons $H(K(t')) = t'$ et donc H est plein,
- si M_2 et M_1 sont deux objets quelconques de T et si $s, t: M_2 \to M_1$ sont deux quelconques flèches de T , telles que $H(s) = H(t)$, on a $s = K'(H(s)) = K'(H(t)) = t$ et donc H est fidèle.
Ainsi, H étant plein et fidèle, mais aussi injectif sur les objets (puisque c'est un homomorphisme entre théories), c'est un isomorphisme sur son image pleine. *Fin de la preuve.*

Tenant compte maintenant de la proposition 5 et du lemme 1, nous obtenons immédiatement l'autre condition syntaxique nécessaire et suffisante de permanence suivante:

Proposition 6. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre théories multisortes, alors les assertions suivantes sont équivalentes:*
(1) H *est un isomorphisme sur son image pleine,*
(2) *pour tout algèbre* $A: T \to Ens$, $e(A): A \to Alg(H)(G(A))$ *est un isomorphisme (où* $e(A): A \to Alg(H)(G(A))$ *est la flèche canonique associée à l'adjonction du foncteur* G *à gauche du foncteur* Alg(H) *- voir la* PARTIE 0).

PARTIE II

INDISCERNABILITE, ACCESSIBILITE ET REALISATIONS MINIMALES

1. Indiscernabilité.

Supposons que $H : T \to T'$ est un homomorphisme entre deux théories multisortes, que M' est un objet de T' et que $A' : T' \to Ens$ est une algèbre de T'.
On note $\approx_{A',M'}$ la relation binaire (dont il est facile de prouver que c'est une relation d'équivalence) définie sur l'ensemble $Hom(Y'(M'),A')$ (ou sur l'ensemble $M'(A')$ qui lui est isomorphe - voir la PARTIE 0) telle que, pour tous $x,y \in Hom(Y'(M'),A')$, on a:

$$x \approx_{A',M'} y$$

si, et seulement si:
- pour tout objet M de T et pour toute flèche $u : M' \to H(M)$ (ou encore, pour toute flèche $v : Y'(H(M)) \to Y'(M')$ de $Alg(T')$, nécessairement de la forme $v = Y'(u)$ - voir la PARTIE 0), on a:

$$x . Y'(u) = y . Y'(u) ,$$

comme représenté sur le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
Y'(M') \arrow[d, bend right=60, dashed, "x"'] \arrow[d, bend left=30, "y"] \arrow[d, phantom, "x \approx_{A',M'} y"] & & Y'(H(M)) \arrow[ll, "Y'(u) = v"'] \\
A' & &
\end{tikzcd}$$

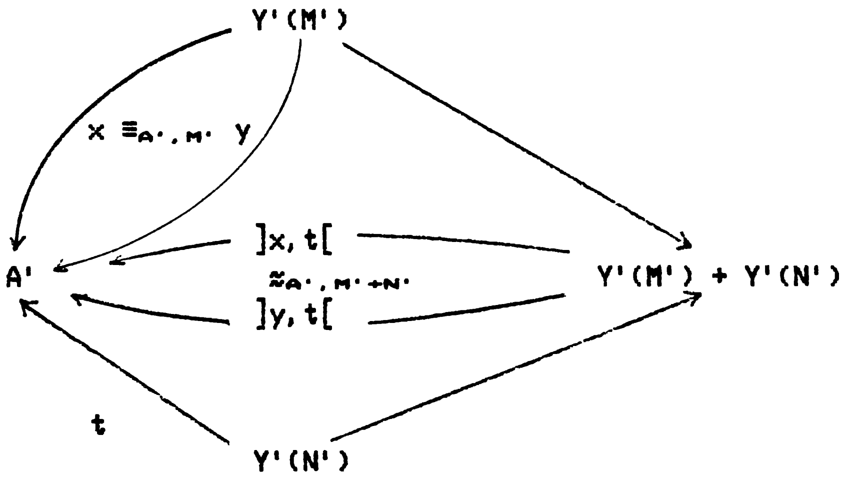
Ceci fait, on note maintenant $\equiv_{A',M'}$ la relation binaire définie sur l'ensemble $Hom(Y'(M'),A')$ et telle que, pour tous éléments $x,y \in Hom(Y'(M'),A')$, on a:

$$x \equiv_{A',M'} y$$

si, et seulement si:
- pour tout objet N' de T' et tout élément $t \in \mathrm{Hom}(Y'(N'),A')$ (ou encore, pour tout élément $t \in A'(N')$ - voir la PARTIE 0), on a:

$$]x,t[\ \approx_{A',M'+N'}\ ]y,t[\ ,$$

(pour la notation] , [, voir la PARTIE 0)
comme représenté sur le diagramme commutatif suivant:



Dans ces conditions, on vérifie facilement que $\equiv_{A',M'}$ est une relation d'équivalence, dite d'*indiscernabilité* ; ainsi, si on a $x \equiv_{A',M'} y$, on dit que x et y sont *indiscernables* (dans A' , relativement à M' , du point de vue de T).
Mieux, les lemmes 1 et 2 et la proposition 3 qui suivent établissent que $(\equiv_{A',M'})_{M' \in \mathrm{Ob}(T')}$ est une famille de congruences (i. e. de relations d'équivalence compatibles avec les "lois de composition").

Lemme 1. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre théories multisortes, si* $A': T' \to \mathrm{Ens}$ *est une algèbre de* T' *, si* M' *est un objet de* T' *et si* $x,y \in \mathrm{Hom}(Y'(M'),A')$ *sont deux éléments de* $\mathrm{Hom}(Y'(M'),A')$ *(ou de* $A'(M')$ *) tels que* $x \equiv_{A',M'} y$ *, alors, pour tout objet* P' *de* T' *et toute flèche* $h: M' \to P'$ *de* T' *(ou encore, pour toute flèche* $k: Y'(P') \to Y'(M')$ *de* $\mathrm{Alg}(T')$ *, nécessairement de la forme* $k = Y'(h)$ *), on a* $x.Y'(h) \equiv_{A',P'} y.Y'(h)$.

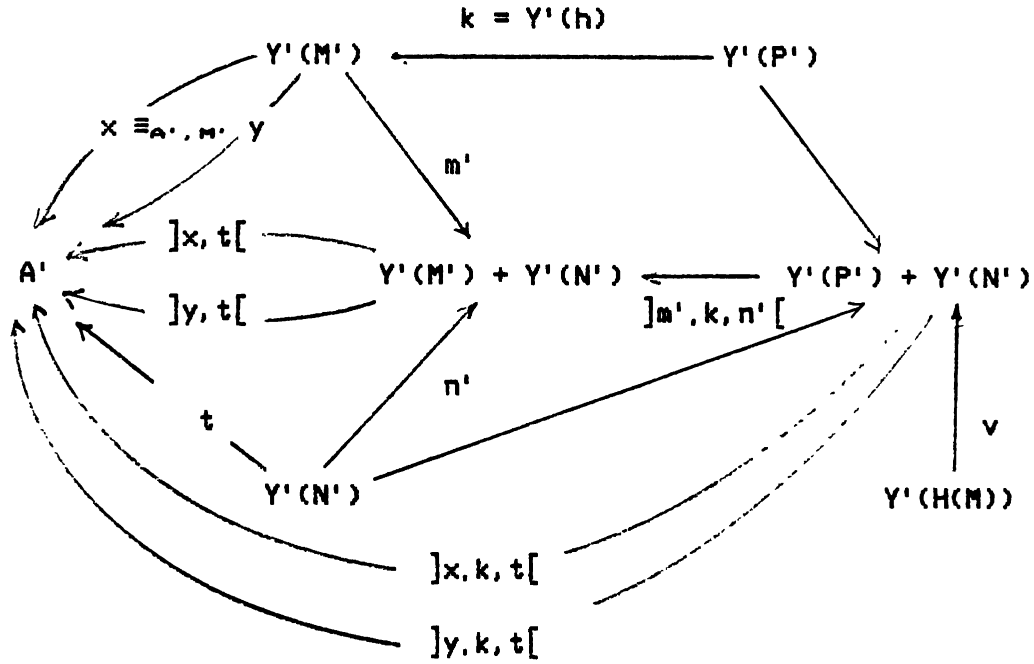
Preuve. Il nous faut prouver (par définition) que :
- pour tout objet N' de T' et tout $t \in \mathrm{Hom}(Y'(N'),A')$, on a:

$$]x.k,t[\ \approx_{A',P'+N'}\ ]y.k,t[\ ,$$

c'est-à-dire encore que:
- pour tout objet M de T et tout $v \in Hom(Y'(H(M)), Y'(P')+Y'(N'))$, on a:

$$]x,k,t[.v =]y,k,t[.v ,$$

(on pourra se reporter au diagramme suivant:



),

Mais, par raison d'unicité, on a :

$$]x,k,t[=]x,t[.]m',k,n'[$$

et

$$]y,k,t[=]y,t[.]m',k,n'[$$

(en notant $m' : Y'(M') \to Y'(M')+Y'(N')$ et $n' : Y'(N') \to Y'(M')+Y'(N')$ les co-projections),
D'où l'on déduit

$$\begin{aligned}]x,k,t[.v &= (]x,t[.]m',k,n'[).v \\ &=]x,t[.(]m',k,n'[.v) \\ &=]y,t[.(]m',k,n'[.v) \\ &\text{(car, par hypothèse, }]x,t[\equiv_{A',M'+N'}]y,t[\text{)} \\ &= (]y,t[.]m',k,n'[).v \\ &=]y,k,t[.v . \end{aligned}$$

Fin de la preuve.

Lemme 2. Si $H : T \to T'$ *est un homomorphisme entre théories multisortes, si* $A' : T' \to Ens$ *est une algèbre de* T' *, si* M' *et* N' *sont deux objets de* T' *, si* $x, y \in Hom(Y'(M'), A')$ *sont deux* *éléments de* Hom(Y'(M'),A') *(ou de* A'(M') *) tels que* $x \equiv_{A',M'} y$ *et si* r,s∈Hom(Y'(N'),A') *sont deux éléments de* Hom(Y'(N'),A') *(ou de* A'(N') *) tels que* $r \equiv_{A',N'} s$ *, alors on a* $]x,r[\equiv_{M'+N'}]y,s[$ *(en reprenant les notations de la PARTIE 0).*

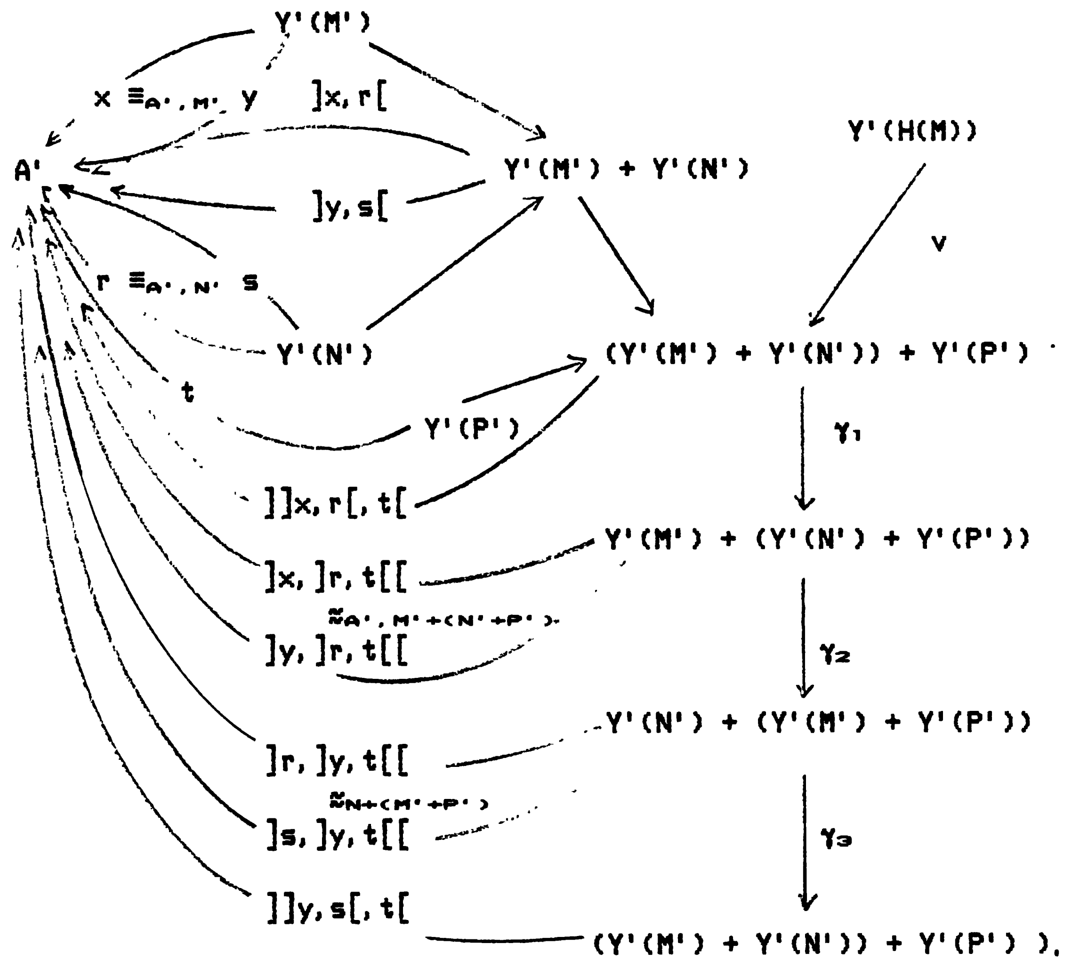
Preuve. Il nous faut prouver (par définition) que:
- pour tout objet P' de T' et tout t ∈ Hom(Y'(P'),A'), on a:

$$]]x,r[,t[\approx_{(M'+N')+P'}]]y,s[,t[,$$

c'est-à-dire encore que:
- pour tout objet M de T et tout v appartenant à Hom(Y'(H(M)),(Y'(M')+Y'(N'))+Y'(P')) , on a:

$$]]x,r[,t[.v =]]y,s[,t[.v ,$$

(on pourra se reporter au diagramme suivant;



Mais, si on note successivement:

$\gamma_1: (Y'(M')+Y'(N'))+Y'(P') \to Y'(M')+(Y'(N')+Y'(P'))$,
$\gamma_2: Y'(M')+(Y'(N')+Y'(P')) \to Y'(N')+(Y'(M')+Y'(P'))$,
$\gamma_3: Y'(N')+(Y'(M')+Y'(P')) \to (Y'(M')+Y'(N'))+Y'(P')$,
les isomorphismes canoniques, il est facile de voir que:

(1) $]]x,r[,t[=]x,]r,t[[.\gamma_1$,

(2) $]y,]r,t[[=]r,]y,t[[.\gamma_2$,

(3) $]s,]y,t[[=]]y,s[,t[.\gamma_3$,

(4) $\gamma_3.\gamma_2.\gamma_1 = Id_{(Y'(M')+Y'(N'))+Y'(P')}$.

D'où l'on déduit :

$]]x,r[,t[.v =]x,]r,t[[.\gamma_1.v$
(d'après (1))
$=]y,]r,t[[.\gamma_1.v$
(car $x \equiv_{A',M'} y$)
$=]r,]y,t[[.\gamma_2.\gamma_1.v$
(d'après (2))
$=]s,]y,t[[.\gamma_2.\gamma_1.v$
(car $r \equiv_{A',N'} s$)
$=]]y,s[,t[.\gamma_3.\gamma_2.\gamma_1.v$
(d'après (3))
$=]]y,s[,t[.v$
(d'après (4)) .

Fin de la preuve.

Proposition 1. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre théories multisortes, alors, pour toute algèbre* $A':T' \to Ens$ *de* T' *, la famille* $\equiv_{A'} = (\equiv_{A',M'})_{M' \in Ob(T')}$ *est une famille de congruences, i. e. de relations d'équivalence compatibles avec les lois de composition (de* T' *).*

Preuve. En effet, si $x,y \in Hom(Y'(M'),A')$ et $r,s \in Hom(Y'(N'),A')$ sont tels que $x \equiv_{A',M'} y$ et si $r \equiv_{A',N'} s$, alors on voit (d'après le lemme 2) que $]x,r[\equiv_{M'+N'}]y,s[$ d'où l'on déduit (en utilisant le lemme 1) que, pour tout objet P' de T' et pour toute loi (i. e. toute flèche) $h : M' \times N' \to P'$ de T' , on a bien $]x,r[.Y'(h) \equiv_{A',P'}]y,s[.Y'(h)$. *Fin de la preuve.*

Supposons que $H : T \to T'$ est un homomorphisme entre deux théories multisortes et que $A' : T' \to Ens$ est une T'-algèbre.
Pour tout objet M' de T' , on dispose de l'ensemble quotient $A'/\equiv_{A'}(M') = A'(M')/\equiv_{A',M'}$ et de l'application (surjective) "passage au quotient" $p_{A',M'}:A'(M') \to A'(M')/\equiv_{A',M'}$.
Puisque (d'après la proposition 1 précédente) $\equiv_{A'}$ est une

famille de congruences, il est facile de vérifier qu'on définit ainsi un foncteur $A'/\equiv_{A'}$: $T'_c \to$ Ens (de source la catégorie T'_c sous-jacente à T') et une transformation naturelle $p_{A'}$: $A' \to A'/\equiv_{A'}$ surjective "point par point".
Plus précisément encore, il est clair que:

Proposition 2. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre deux théories multisortes et si* $A': T' \to$ Ens *est une algèbre de* T' *, alors* $A'/\equiv_{A'}: T' \to$ Ens *est une algèbre de* T' *(appelée l'algèbre des classes d'indiscernabilté de* A' *, du point de vue de* T *) et le "passage au quotient"* $p_{A'}: A' \to A'/\equiv_{A'}$ *est un homomorphisme surjectif point par point.*

2. Accessibilité.

Supposons que T' est une théorie multisorte et que A': $T' \to$ Ens en est une algèbre.
Si B': $T' \to$ Ens est une autre T'-algèbre et si m': $A' \to B'$ est un homomorphisme de A' vers B' (i. e. une flèche de $Alg(T')$), on dit que m' *présente* B' comme une algèbre A'-*accessible* si, et seulement si:
- pour tout objet M' de T' , $m'_{M'}$: $A'(M') \to B'(M')$ est une application surjective.
(autrement dit, si m' est un épimorphisme point par point).

Supposons que $H: T \to T'$ est un homomorphisme entre deux théories multisortes et que A': $T' \to$ Ens est T'-une algèbre.
On désigne par $C'(A')$ la catégorie définie comme suit:
- ses objets sont les flèches m': $A' \to B'$ de $Alg(T')$ telles que:
  + m' présente B' comme une algèbre A'-accessible,
  + $m'.H : A'.H \to B'.H$ est un isomorphisme dans $Alg(T)$,
- ses flèches sont les triplets:

$$(m'_1: A' \to B'_1, n': B'_1 \to B'_2, m'_2: A' \to B'_2): m'_1 \to m_2$$

où $n': B'_1 \to B'_2$ est une flèche de $Alg(T')$ telle que $n'.m'_1 = m'_2$,
(autrement dit, $C'(A')$ est la catégorie des algèbres de T' qui sont A'-accessibles et qui ont, à isomorphisme près, la même T-algèbre sous-jacente que A').

Dans ces conditions (et en reprenant la terminologie et les notations du §1), montrons que:

Lemme 3. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre deux théories multisortes et si* $A': T' \to Ens$ *est une* T'*-algèbre, alors la flèche "passage au quotient vers l'algèbre des classes d'indiscernabilité"* $p_{A'}: A' \to A'/\equiv_{A'}$ *est un objet de* $C'(A')$.

Preuve. D'après la proposition 2 du §1, on sait déjà que $p_{A'}$ présente effectivement $A'/\equiv_{A'}$ comme une algèbre A'-accessible.
Comme, pour tout objet M de T (en particulier), l'application $p_{A',H(M)}: A'(H(M)) \to A'(H(M))/\equiv_{A',H(M)}$ est évidemment surjective, pour conclure il suffit de montrer qu'elle est injective.
Pour ce faire, supposons que $x, y \in Hom(Y'(H(M)), A')$ sont deux éléments (de $A'H(M)$)) tels que $x \equiv_{A',H(M)} y$ (on pourra se reporter aux deux diagrammes ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & Y'(H(M)) \arrow[dl, bend right, "x"'] \arrow[dl, bend left, "y"] \arrow[dl, phantom, "x \equiv_{A',H(M)} y"] \arrow[dr, "m'"] & & \\
A' & & Y'(H(M)) + Y'(N') \arrow[ll, bend right=15, "{]x, t[}"'] \arrow[ll, bend left=15, "{]y, t[}"] \arrow[ll, phantom, "\approx_{A',H(M)\times N'}"] & Y'(H(N)) \arrow[l, "v"] \\
 & Y'(N') \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "n'"'] & &
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
 & Y'(H(M)) \arrow[dl, bend right, "x"'] \arrow[dl, bend left, "y"] \arrow[dl, phantom, "x \equiv_{A',H(M)} y"] \arrow[dr, "v"] & & \\
A' & & Y'(H(M)) + Y'(1) \arrow[ll, bend right=15, "{]x, t[}"'] \arrow[ll, bend left=15, "{]y, t[}"] \arrow[ll, phantom, "\approx_{A',H(M)\times 1}"] & Y'(H(M)) \arrow[l, "v"] \\
 & Y'(1) \arrow[ul, "t"] \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$
).

Ainsi, pour tout objet N' de T', pour tout élément $t \in \mathrm{Hom}(Y'(N'),A')$, pour tout objet N de T et pour toute flèche $v: Y'(H(N)) \to Y'(H(M))+Y'(N')$ de $\mathrm{Alg}(T')$, on a (par définition) $]x,t[.v =]y,t[.v$. En particulier, on peut prendre:
- $N' = 1$,
- pour t, l'unique flèche $t: Y'(1) \to A'$ de $\mathrm{Alg}(T')$, puisque $Y'(1)$ est initial dans $\mathrm{Alg}(T')$ car 1 est terminal dans T' (voir la PARTIE 0),
- $N = M$,
- pour $v: Y'(H(N)) = Y'(H(M)) \to Y'(H(M)) + Y'(1)$, la première co-projection,

d'où l'on déduit que:

$$x =]x,t[.v$$
(puisque v est la première co-projection)
$$=]y,t[.v$$
(par hypothèse)
$$= y$$
(puisque v est la première co-projection),

Fin de la preuve.

Etablissons, maintenant, que la T'-algèbre des classes d'indiscernabilité d'une T'-algèbre donnée A' est la T'-algèbre accessible "minimale" ayant même T-algèbre sous-jacente que A'. Plus précisément, on a:

Proposition 3. *Si* $H: T \to T'$ *est un homomorphisme entre deux théories multisortes et si* $A': T' \to \mathrm{Ens}$ *est une* T'*-algèbre, alors la flèche identité* $\mathrm{Id}_{A'}: A' \to A'$ *est un objet initial de la catégorie* $C'(A')$ *et la flèche "passage au quotient vers l'algèbre des classes d'indiscernabilité"* $p_{A'}: A' \to A'/\equiv_{A'}$ *en est un objet terminal.*

Preuve. Il est évidemment trivial de constater que $\mathrm{Id}_{A'}: A' \to A'$ est bien un objet initial de la catégorie $C'(A')$.
Pour prouver que $p_{A'}: A' \to A'/\equiv_{A'}$ est un objet terminal de $C'(A')$, supposons que $m': A' \to B'$ est un (autre) objet de $C'(A')$; il nous faut donc établir qu'il existe une unique flèche $n': B' \to A'/\equiv_{A'}$ de sorte que $n'.m' = p_{A'}$. Mais, pour tout objet M' de T', l'application $p_{A',M'}: A'(M') \to A'/\equiv_{A'}(M')$ est une surjection, il nous suffit donc de montrer que:
- si $x,y \in \mathrm{Hom}(Y'(M'),A')$ sont tels que $m'.x = m'.y$, alors on a $x \equiv_{A',M'} y$,

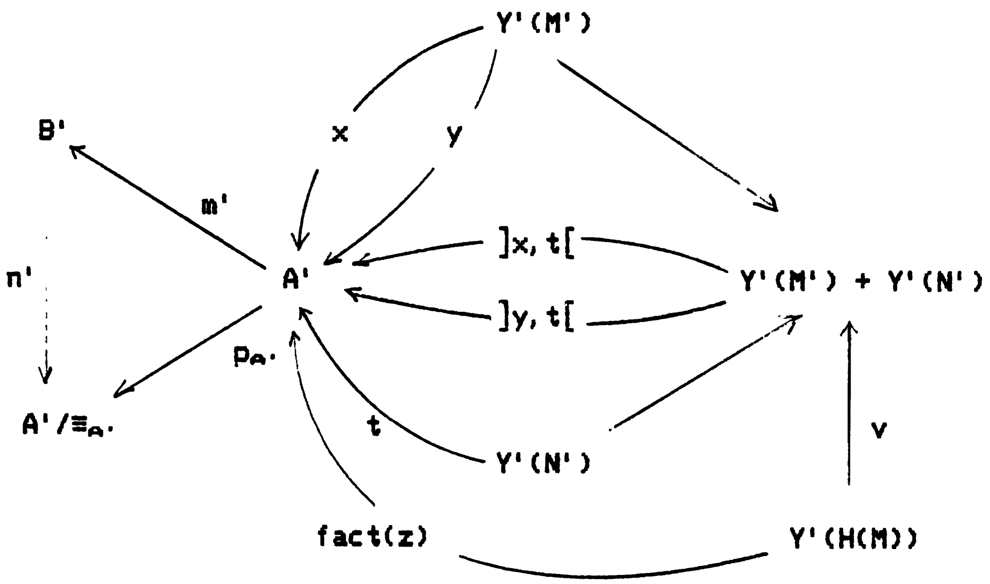
ou encore que:

- si $x, y \in \mathrm{Hom}(Y'(M'), A')$ sont tels que $m'.x = m'.y$, alors, pour tout objet N' de T' et tout $t \in \mathrm{Hom}(Y'(N'), A')$, on a $]x,t[\approx_{A', M'+N'}]y,t[$,

autrement dit, que:

- si $x, y \in \mathrm{Hom}(Y'(M'), A')$ sont tels que $m'.x = m'.y$, alors, pour tout objet N' de T' , tout $t \in \mathrm{Hom}(Y'(N'), A')$, tout objet M de T et tout $v \in \mathrm{Hom}(Y'(H(M)), Y'(M')+Y'(N'))$, on a l'égalité $]x,t[.v =]y,t[.v$,

(on pourra se référer au diagramme ci-dessous: .



Alg(T')

Alg(H)

Alg(T)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(H)(A') & & \mathrm{Alg}(H)(Y'(H(M))) \arrow[ll, "\mathrm{Alg}(H)(\mathrm{fact}(z))"'] \\
& & Y(M) \arrow[u, "\varepsilon(M)"'] \arrow[ull, "z = \mathrm{Alg}(H)(]x,t[.v).\varepsilon(M)"]
\end{tikzcd}$$

),

Mais, grâce au lemme de transition (voir la PARTIE 0), de l'égalité $m'.x = m'.y$, on déduit que $m'.]x,t[= m'.]y,t[$ d'où $m'.]x,t[.v = m'.]y,t[.v$ et, par conséquent, en appliquant le foncteur $\mathrm{Alg}(H): \mathrm{Alg}(T') \to \mathrm{Alg}(T)$, on voit que:

$$\mathrm{Alg}(H)(m').\mathrm{Alg}(H)(]x,t[,v) = \mathrm{Alg}(H)(m').\mathrm{Alg}(H)(]y,t[,v) ,$$
et donc que:
$$\mathrm{Alg}(H)(]x,t[,v) = \mathrm{Alg}(H)(]y,t[,v) ,$$
puisque $\mathrm{Alg}(H)(m')$ est un isomorphisme, m': $A' \to B'$ étant un objet de $C'(A')$.
Or $Y'(H(M))$ est l'algèbre de T' , librement engendrée par $Y(M)$ (voir la PARTIE 0), en conséquence il existe une unique flèche $\mathrm{fact}(z)$: $Y'(H(M)) \to A'$ de $\mathrm{Alg}(T')$ telle que:
$$\mathrm{Alg}(H)(\mathrm{fact}(z)).\varepsilon(M) = \mathrm{Alg}(H)(]x,t[,v).\varepsilon(M) = \mathrm{Alg}(H)(]y,t[,v).\varepsilon$$
(en posant $z = \mathrm{Alg}(H)(]x,t[,v) = \mathrm{Alg}(H)(]y,t[,v)$),
donc, par unicité, on conclut que:
$$]x,t[,v = \mathrm{fact}(z) =]y,t[,v .$$
Fin de la preuve.

3. Réalisations.

Supposons que H: $T \to T'$ est un homomorphisme entre deux théories multisortes et que A: $T \to \mathrm{Ens}$ est une algèbre de T .
Si B': $T' \to \mathrm{Ens}$ est une algèbre de T' et si m: $A \to B'.H$ est un isomorphisme de A vers $B'.H$ (i. e. une flèche inversible dans $\mathrm{Alg}(T)$), on dit que m *présente* B' comme une *réalisation de* A si, et seulement si (en reprenant les notations de la PARTIE 0):
- pour tout objet M' de T' , $\mathrm{fact}(m)_{M'}$: $G(A)(M') \to B'(M')$ est une application surjective,
(autrement dit, si $\mathrm{fact}(m)$: $G(A) \to B'$ est un épimorphisme point par point).
Alors, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté, on dira plus simplement que B' est une *A-réalisation*; ainsi, B' est une A-réalisation si, et seulement si, B' est $G(A)$-accessible - au sens du §2 précédent - et admet A pour T-algèbre sous-jacente (à isomorphisme près).

Supposons que H: $T \to T'$ est un homomorphisme entre deux théories multisortes et que A: $T \to \mathrm{Ens}$ est une algèbre de T .
On désigne par $C(A)$ la catégorie telle que:
- ses objets sont les $(B',m$: $A \to B'.H)$ vérifiant:
  + B': $T' \to \mathrm{Ens}$ est une algèbre de T' ,
  + m: $A \to B'.H$ est un isomorphisme de $\mathrm{Alg}(T)$ présentant B'

comme une réalisation de A ,
- ses flèches sont les triplets:
$((B'_1, m_1 : A \to B'_1, H), n' : B'_1 \to B'_2, (B'_2, m_2 : A \to B'_2, H)) : (B'_1, m_1) \to (B'_2, m_2)$,
tels que $\mathrm{Alg}(H)(n').m_1 = m_2$,
(autrement dit, $C(A)$ est la catégorie des algèbres de T' qui sont des A-réalisations).

Montrons maintenant que toute algèbre de T *permanente* (relativement à H), i. e. qui est aussi la T-algèbre sous-jacente à la T'-algèbre qu'elle engendre, possède une réalisation "minimale". Précisément, établissons la proposition suivante:

Proposition 4. Si $H : T \to T'$ *est un homomorphisme entre deux théories multisortes et si* $A : T \to \mathrm{Ens}$ *est une algèbre de* T *permanente, i. e. telle que:*
- la flèche canonique $e(A) : A \to \mathrm{Alg}(H)(G(A))$ *(associée à l'adjonction du foncteur* $G : \mathrm{Alg}(T) \to \mathrm{Alg}(T')$ *à gauche de* $\mathrm{Alg}(H) : \mathrm{Alg}(T') \to \mathrm{Alg}(T)$. *) est un isomorphisme dans* $\mathrm{Alg}(T)$,
alors:
- la catégorie $C(A)$ *a un objet initial et un objet terminal.*

Preuve. D'après la proposition 3, il suffit de montrer que la catégorie $C(A)$ est isomorphe à la catégorie $C'(G(A))$.
Pour ce faire, construisons tout d'abord un foncteur:

$$\Phi : C(A) \to C'(G(A)).$$

Dans cette optique, supposons que (B', m) est un objet de $C(A)$ (on pourra se référer au diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(T') & B' & G(A) \arrow[l, "fact(m)"'] & {} \arrow[d, bend left, "\mathrm{Alg}(H)"] \\
\mathrm{Alg}(T) \arrow[u, bend left, "G"] & \mathrm{Alg}(H)(B') & \mathrm{Alg}(H)(G(A)) \arrow[l, "\mathrm{Alg}(H)(fact(m))"] & {} \\
 & & A \arrow[u, "e(A)"'] \arrow[ul, "m"] &
\end{tikzcd}$$

),

Alors, on voit que:

- $Alg(H)(fact(m)) = m.e(A)^{-1}$ est un isomorphisme, puisque $Alg(H)(fact(m)).e(A) = m$ et puisque m et $e(A)$ sont, par hypothèse, inversibles,
- $fact(m)$ est, par hypothèse, un épimorphisme point par point, par conséquent, $fact(m): G(A) \to B'$ est un objet de $C'(G(A))$.

De même, supposons, que $((B'_1, m_1), n': B'_1 \to B'_2, (B'_2, m_2))$ est une flèche de $C(A)$ (on pourra se référer au diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & B'_1 \arrow[dd, "n'"'] & \\
 & & G(A) \arrow[ul, "fact(m_1)"'] \arrow[dl, "fact(m_2)"] \\
Alg(T') & B'_2 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Alg(T) \arrow[d, phantom] \arrow[u, bend left, "G"] \arrow[rrr, dash, dashed] & & & \arrow[d, bend left, "Alg(H)"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Alg(H)(B'_1) \arrow[dd, dash, "Alg(H)(n')"'] & & \\
 & Alg(H)(G(A)) \arrow[ul, "Alg(H)(fact(m_1))"'] \arrow[dl, "Alg(H)(fact(m_2))"] & A \arrow[l, "e(A)"'] \arrow[ull, bend right, "m_1"'] \arrow[dll, bend left, "m_2"] \\
Alg(H)(B'_2) & &
\end{tikzcd}$$

).

Alors, on voit successivement, que:
- $Alg(H)(n').m_1 = m_2$, par hypothèse,
- $Alg(H)(n').m_1.e(A)^{-1}.e(A) = m_2.e(A)^{-1}.e(A)$, puisque $e(A)$ est, par hypothèse, inversible,
- $Alg(H)(n').Alg(H)(fact(m_1)).e(A) = Alg(H)(fact(m_2)).e(A)$, car $e(A)$ est, par hypothèse, inversible et puisque, pour $i = 1,2$, on a, par définition, $Alg(H)(fact(m_i)).e(A) = m_i$,
- $Alg(H)(n'.fact(m_1)).e(A) = Alg(H)(fact(m_2)).e(A)$, car $Alg(H)$ est un foncteur,
- $n'.fact(m_1) = fact(m_2)$, par unicité, puisque la flèche

$e(A): A \to Alg(H)(G(A))$ est la flèche canonique associée à l'adjonction de G à gauche de $Alg(H)$,
d'où il résulte que:
$((B'_1, fact(m_1)), n', (B'_2, fact(m_2))): (B'_1, fact(m_1)) \to (B'_2, fact(m_2))$
est bien une flèche de $C'(G(A))$.
Dans ces conditions, il est trivial de vérifier qu'on dispose bien d'un foncteur:

$$\begin{aligned} \Phi : C(A) &\longrightarrow C'(G(A)) \\ (B', m) &\longmapsto (B', fact(m)) \\ ((B'_1, m_1), n', (B'_2, m_2)) &\longmapsto ((B'_1, fact(m_1)), n', (B'_2, fact(m_2))) \ . \end{aligned}$$

Inversement, construisons maintenant un foncteur:

$$\Psi : C'(G(A)) \to C(A) \ .$$

Pour y parvenir, supposons que $m': G(A) \to B'$ est une flèche de $Alg(T')$ qui soit aussi un objet de $C'(G(A))$ (on pourra se reporter au diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
Alg(T') & B' & & G(A) \arrow[ll, "m'"'] \arrow[d, bend left, "Alg(H)"] \\
Alg(T) \arrow[u, bend left, "G"] & & & \\
& Alg(H)(B') & & Alg(H)(G(A)) \arrow[ll, "Alg(H)(m')"] \\
& & & A \arrow[u, "e(A)"'] \arrow[ull, "\alpha(m')"]
\end{tikzcd}$$
),

Alors, il est clair que:
- $\alpha(m') = Alg(H)(m').e(A): A \to Alg(H)(B') = B'.H$ est un isomorphisme de $Alg(T)$, puisque $Alg(H)(m')$ et $e(A)$ sont, par hypothèse, deux isomorphismes,
- $fact(Alg(H)(m').e(A))$ est un épimorphisme point par point, puisqu'on vérifie facilement (par unicité) que $fact(Alg(H)(m').e(A)) = m'$ et puisque m' est, par hypothèse, un épimorphisme point par point,

d'où il résulte que $(B', Alg(H)(m').e(A)) = (B', \alpha(m'))$ est bien un objet de $C(A)$.
De même, supposons que $(m'_1: G(A) \to B'_1, n': B'_1 \to B'_2, m'_2: G(A) \to B'_2)$ est une flèche de $C'(G(A))$ (on pourra se référer au diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
B'_1 \arrow[dd, "n'"'] & \\
& G(A) \arrow[ul, "m'_1"'] \arrow[dl, "m'_2"] \\
B'_2 &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(T') \\
\mathrm{Alg}(T) \arrow[u, bend left, "G"]
\end{tikzcd} \qquad \longmapsto \qquad \mathrm{Alg}(H)$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Alg}(H)(B'_1) \arrow[dd, "\mathrm{Alg}(H)(n')"'] & & \\
& \mathrm{Alg}(H)(G(A)) \arrow[ul, "\mathrm{Alg}(H)(m'_1)"'] \arrow[dl, "\mathrm{Alg}(H)(m'_2)"] & A \arrow[l, "e(A)"'] \arrow[ull, bend right, "\alpha(m'_1)"'] \arrow[dll, bend left, "\alpha(m'_2)"] \\
\mathrm{Alg}(H)(B'_2) & &
\end{tikzcd}$$

),

Alors, il est clair que:

$\mathrm{Alg}(H)(n').(\mathrm{Alg}(H)(m'_1).e(A)) = \mathrm{Alg}(H)(n'.m'_1).e(A)$

(puisque Alg(H) est un foncteur)

$= \mathrm{Alg}(m'_2).e(A)$

(puisque, par hypothèse, $n'.m'_1 = m'_2$)

ce qui signifie que:

$((B'_1,\alpha(m'_1)),n',(B'_2,\alpha(m'_2))):(B'_1,\alpha(m'_1))\to(B'_2,\alpha(m'_2))$

est bien une flèche de $C(A)$.

Dans ces conditions, il est trivial de vérifier qu'on dispose bien d'un foncteur:

$$\Psi : \quad C'(G(A)) \longrightarrow C(A)$$

$$m' \longmapsto (B',\mathrm{Alg}(H)(m').e(A))$$

$(m'_1:G(A)\to B'_1,n',m'_2:G(A)\to B'_2) \longmapsto ((B'_1,\alpha(m'_1)),n',(B'_2,\alpha(m'_2)))$.

Finalement, un calcul élémentaire montre que les foncteurs $\Phi : C(A) \to C'(G(A))$ et $\Psi : C'(G(A)) \to C(A)$, ainsi définis, sont bien inverses l'un de l'autre. *Fin de la preuve.*

Evidemment, dans le cas où H *a la propriété de permanence*, i. e. quand toute T-algèbre est permanente (relativement à H), et compte tenu de la proposition 6, §3, PARTIE I, et du lemme 1, §3, PARTIE I, on déduit immédiatement de la proposition 4 précédente que:

Corollaire 1. *Si* H: T → T' *est un homomorphisme entre deux théories multisortes et si:*
- H: T → T' *est un isomorphisme sur son image pleine,*

alors:
- *pour toute algèbre* A: T → Ens *de* T , *la catégorie* C(A) *a un objet initial et un objet terminal.*

et:

Corollaire 2. *Si* H: T → T' *est un homomorphisme entre deux théories multisortes et si:*
- H: T → T' *est un homomorphisme rétractable et sectionnable,*

alors:
- *pour toute algèbre* A: T → Ens *de* T , *la catégorie* C(A) *a un objet initial et un objet terminal.*

Supposons que H : T → T' est un homomorphisme entre deux théories multisortes.
Si A' : T' → Ens est une algèbre de T' , on note (en reprenant les notations introduites dans la PARTIE 0):
- F(A') = G(Alg(H)(A')) la T'-algèbre librement engendrée par la T-algèbre sous-jacente à A' ,
- f(A') = fact(Id(Alg(H)(A'))) : F(A') → A' , l'unique flèche de Alg(T') telle que:

$$Alg(H)(f(A')).e(Alg(H)(A')) = Id(Alg(H)(A')) ,$$

et on dit que A' est *librement accessible* (relativement à H) si, et seulement si:
- Alg(H)(A') est permanente (relativement à H),
- f(A') : F(A') → A' présente A' comme une algèbre F(A')-accessible.

Alors, vérifions que:

Lemme 4. *Si* H: T → T' *est un homomorphisme entre deux théories multisortes et si* A': T' → Ens *est une algèbre, librement accessible, de* T' , *alors:*
- *on dispose d'un foncteur ("composition - des triangles - par* f(A') *"):*

$$\begin{aligned} \Omega' \; : \; & C'(A') \to C'(F(A')) \\ & m' : A' \to B' \mapsto m'.f(A') \\ & (m'_1, n', m'_2) \mapsto (m'_1.f(A'), n', m'_2.f(A')) \; , \end{aligned}$$

- *on dispose d'un foncteur ("trace de* Alg(H) *sur les côtés des triangles");*

$$\begin{aligned} \Omega \; : \; & C'(A') \to C(Alg(H)(A')) \\ & m' : A' \to B' \mapsto (B', Alg(H)(m')) \end{aligned}$$

$$(m'_1 : A' \to B'_1, n', m'_2 : A' \to B'_2) \mapsto (B'_1, Alg(H)(m'_1)), n', (B'_2, Alg(H)(m'_2))$$

Preuve. Le composé de deux épimorphismes point par point de Alg(T') étant encore un épimorphisme point par point de Alg(T') et le composé de deux isomorphismes de Alg(T) étant encore un isomorphisme, Ω' est trivialement un foncteur (bien défini).
Enfin, il est facile de vérifier que $\Omega = \Psi.\Omega'$ est bien un foncteur (puisque, d'après la preuve de la proposition 4 et Alg(H)(A') étant permanente, on dispose des deux foncteurs inverses l'un de l'autre:

$$\Phi \; : \; C(Alg(H)(A')) \to C'(F(A'))$$

et

$$\Psi \; : \; C'(F(A')) \to C(Alg(H)(A')) \;).$$

Fin de la preuve.

Ainsi, compte tenu de la preuve de la proposition 4 (dont nous reprenons les notations) et du lemme 4 qui précèdent, si $A' : T' \to Ens$ est une algèbre librement accessible, nous disposons d'un diagramme commutatif:

(*)

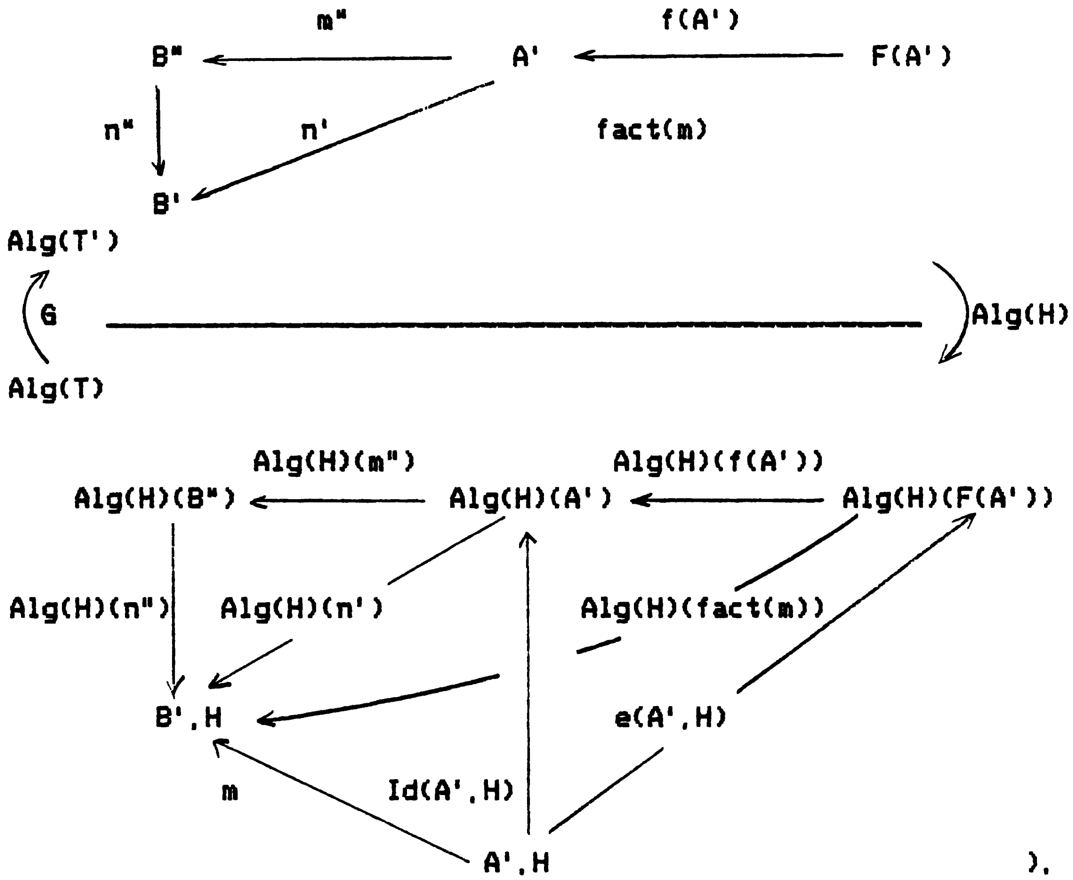
$$\begin{tikzcd} & C'(A') \arrow[dl, "\Omega"'] \arrow[dr, "\Omega'"] & \\ C(Alg(H)(A')) \arrow[rr, shift left, "\Phi"] & & C'(F(A')) \arrow[ll, shift left, "\Psi"] \end{tikzcd}$$

(où Φ et Ψ sont inverses l'un de l'autre). Dans ces conditions, nous pouvons établir que ces foncteurs "font coïncider" les trois T'-algèbres suivantes:
- la réalisation minimale de Alg(H)(A') , i. e. de la T-algèbre sous-jacente à A' ,
- la T'-algèbre des classes d'indiscernabilité de A' ,
- la T'-algèbre des classes d'indiscernabilité de F(A') (i. e.

de la T'-algèbre librement engendrée par la T-algèbre sous-jacente à A'). Précisément, nous avons en effet:

Proposition 5. *Si* H: T → T' *est un homomorphisme entre deux théories multisortes et si* A': T' → Ens *est une algèbre librement accessible, alors dans le diagramme commutatif* (*) *ci-dessus, tous les foncteurs créent (voir* (C.F.W.M.)*), et donc préservent et reflètent, les objets terminaux.*

Preuve. Comme Φ et Ψ sont des isomorphismes (puisqu'inverses l'un de l'autre - d'après la preuve de la proposition 4), il est trivial de voir qu'ils créent les objets terminaux.
Comme Φ et Ψ sont inverses l'un de l'autre, pour montrer que Ω et Ω' créent les objets terminaux, il suffit de montrer que c'est Ω (par exemple) qui les crée.
Pour ce faire, supposons que (B',m: A'.H → B'.H) est un objet terminal de la catégorie C(Alg(H)(A')) = C(A'.H) (on pourra se reporter au diagramme suivant:



).

Il est clair que:
- $Id(A',H) : A',H \to A',H$ est un isomorphisme de $Alg(T)$,
- $fact(Id(A',H)) = f(A') : G(A',H) = F(A') \to A'$ est un épimorphisme point par point, puisque A' est, librement accessible, par conséquent, $(A',Id(A',H):A',H \to Alg(H)(A'))$ est un objet de la catégorie $C'(A',H)$ et donc, puisque (B',m) en est un objet terminal:

(1) il existe une unique flèche $n':A' \to B'$ de $Alg(T')$ telle que $Alg(H)(n').Id(A',H) = m$, i. e. telle que $Alg(H)(n') = m$.

On voit que:

$$\begin{aligned}
Alg(H)(n'.f(A')).e(A',H) &= Alg(H)(n').Alg(H)(f(A')).e(A',H)\\
&= Alg(H)(n').Alg(fact(Id(A',H))).e(A',H)\\
&\quad \text{(par définition de } f(A')\text{)}\\
&= Alg(H)(n').Id(A',H)\\
&\quad \text{(par définition de fact)}\\
&= Alg(H)(n')\\
&= m\\
&\quad \text{(d'après (1))}\\
&= Alg(H)(fact(m)).e(A',H)\\
&\quad \text{(par définition de fact)}
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit, par unicité, que:

(2) $n'.f(A') = fact(m)$.

Maintenant, il est clair que:
- $Alg(H)(n')$ est un isomorphisme de $Alg(T)$, d'après (1) et puisque m en est un, par hypothèse,
- n' est un épimorphisme point par point de $Alg(T')$, d'après (2) et puisque $f(A')$ et $fact(m)$ en sont deux, par hypothèse (i. e. A' étant librement accessible et (B',m) étant un objet de $C(A',H)$),
d'où il résulte que la flèche $n' : A' \to B'$ de $Alg(T')$ est aussi un objet de $C'(A')$ et, d'après (1), que c'est l'unique objet de $C'(A')$ tel que $\Omega(n') = (B',m)$.
Pour conclure, il nous reste donc à prouver que n' est bien terminal dans $C'(A')$. Mais, si $m'':A' \to B''$ est un (autre) objet de $C'(A')$, on voit que:

$$Alg(H)(m''.f(A')).e(A',H) = Alg(H)(m'').Alg(H)(f(A')).e(A',H)$$

$= Alg(H)(m").Alg(H)(fact(Id(A',H))).e(A',H)$
(par définition de $f(A')$)
$= Alg(H)(m")$
(par définition de fact)

d'où l'on déduit, par unicité, que:

(3) $m".f(A') = fact(Alg(H)(m"))$,

Alors, il apparaît que:
- $Alg(H)(m")$ est un isomorphisme de $Alg(T)$, puisque $m"$ est objet de $C'(A')$,
- $fact(Alg(H)(m"))$ est un épimorphisme point par point de $Alg(T')$, d'après (3) et puisque $f(A')$ et $m"$ en sont deux, par hypothèse (i. e. A' étant librement accessible et $m"$ étant objet de $C'(A')$) ,
d'où l'on déduit que $(B",Alg(H)(m"))$ est un objet de $C(A',H)$ et, par conséquent, que:

(4) il existe une unique flèche $n": B" \to B'$ de $Alg(T')$ telle que $Alg(H)(n").Alg(H)(m") = m$.

Mais on voit que:

$Alg(H)(n".m".f(A')).e(A',H) = Alg(H)(n".m").Alg(H)(f(A')).e(A',H)$
$= Alg(H)(n".m").Alg(H)(fact(Id(A',H))).e(A',H)$
(par définition de $f(A')$)
$= Alg(H)(n".m")$
(par définition de fact)
$= Alg(H)(n").Alg(H)(m")$
$= m$
(d'après (4))
$= Alg(H)(fact(m)).e(A',H)$
(par définition de fact)
$= Alg(H)(n'.f(A')).e(A',H)$
(d'après (2))

d'où il résulte, par unicité que:

$$n".m".f(A') = n'.f(A') ,$$

et, comme $f(A')$ est un épimorphisme point par point de $Alg(T')$, il vient:

(5) $n''.m'' = n'$.

De (5) résulte que $(m'',n'',n'): m'' \to n'$ est une flèche de $C'(A')$. C'est manifestement la seule, puisque, si $(m'',n''_1,n'): m'' \to n$ en est une autre, on a:

$$n''_1.m'' = n'$$
(par définition)
$$= n''.m''$$
(d'après (5))

et donc $n''_1 = n''$ puisque m'' est, par hypothèse, un épimorphisme point par point de $Alg(T')$. *Fin de la preuve.*

4. Automates: le retour.

Désignons par Aut la catégorie des *automates* (déterministes, complètement spécifiés), i. e. la catégorie dont les objets sont les $((S,.,1_S),E,S',e,\tau,\sigma)$ tels que:

- $(S,.,1_S)$ est un monoïde (dit des *signaux d'entrée* et dont la loi de composition est " . " et l'élément neutre 1_S),
- E est un ensemble (dit des ***états internes***),
- S' est un ensemble (dit des ***signaux de sortie***),
- $e \in E$ est un élément (dit ***état initial***) distingué dans l'ensemble E ,
- $\tau: E \times S \to E$ est une opération (dite de *transition*) du monoïde $(S,.,1_S)$, à droite, sur l'ensemble E ,
- $\sigma: E \to S'$ est une application,

et dont les flèches sont les homomorphismes (aisés à définir naturellement) entre ces structures.
Il est, alors, facile de construire une théorie T' à 3 sortes (Ent , Etat et Sor) et une équivalence de catégories $\Gamma_A : Alg(T') \to Aut$. Plus précisément, T' contient au moins le diagramme (*) ci-dessous:

(*)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ent} \times \mathrm{Ent} \arrow[d, "\mathrm{mult}"'] & \mathrm{Etat} \times \mathrm{Ent} \arrow[dl, bend left, "\mathrm{proj}_{\mathrm{Ent}}"] \arrow[d, "\mathrm{proj}_{\mathrm{Etat}}"] \arrow[dr, "\mathrm{trans}"] & \\
\mathrm{Ent} \arrow[ur, bend left, "q"] \arrow[rr, bend left=60, "\mathrm{comp}"] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{cst}"] & \mathrm{Etat} \arrow[r, "\mathrm{sor}"'] & \mathrm{Sor} \\
& 1 \arrow[ul, bend left, "\mathrm{neutr}"] \arrow[u, "\mathrm{init}"'] &
\end{tikzcd}$$

et les équations suivantes y sont valides:

$$\mathrm{proj}_{\mathrm{Ent}}.q = \mathrm{Id}(\mathrm{Ent})$$
$$\mathrm{proj}_{\mathrm{Etat}}.q = \mathrm{init}.\mathrm{cst} \ ,$$

De la sorte, si $A' : T' \to \mathrm{Ens}$ est une algèbre, alors:

- $A'(1) = \{0\}$ (à une bijection près),
- $A'(\mathrm{neutr})(0) = 1_{A'}$ est un élement de $A'(\mathrm{Ent})$,
- $A'(\mathrm{init})(0) = e_{A'}$ est un élément de $A'(\mathrm{Etat})$,
- $A'(\mathrm{Ent} \times \mathrm{Ent}) = A'(\mathrm{Ent}) \times A'(\mathrm{Ent})$ (à une bijection près),
- $A'(\mathrm{Etat} \times \mathrm{Ent}) = A'(\mathrm{Etat}) \times A'(\mathrm{Ent})$ (à une bijection près),

et on a:

$$\Gamma_*(A') = ((A'(\mathrm{Ent}), A'(\mathrm{mult}), 1_{A'}), A'(\mathrm{Etat}), A'(\mathrm{Sor}), e_{A'}, A'(\mathrm{trans}), A'(\mathrm{sor})).$$

Désignons par Comp la catégorie des *comportements*, i. e. la catégorie dont les objets sont les $((S, ., 1_S), S', \lambda)$ tels que:

- $(S, ., 1_S)$ est un monoïde (dont la loi de composition est " . " et l'élément neutre est 1_S),
- S' est un ensemble,
- $\lambda : S \to S'$ est une application,

et dont les flèches sont les homomorphismes (aisés à définir naturellement) entre ces stuctures.
Il est alors facile de construire une théorie T à 2 sortes (Ent

et Sor) ainsi qu'une équivalence Γ_c: Alg(T) $\to$ Comp entre catégories . Plus précisément, T contient au moins le diagramme (**) ci-dessous:

(**)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Entr} \times \mathrm{Entr} \arrow[d, "\mathrm{mult}"'] & & \\
\mathrm{Entr} \arrow[rr, bend left, "\mathrm{comp}"] \arrow[r, bend left, "\mathrm{cst}"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mathrm{neutr}"] & \mathrm{Sort}
\end{tikzcd}$$

De la sorte, si A : T $\to$ Ens est une algèbre, alors:

- A(1) = $\{0\}$ (à une bijection près),
- A(neutr)(0) = 1_A est un élement de A(Ent) ,
- A(Ent $\times$ Ent) = A(Ent) $\times$ A(Ent) (à une bijection près),

et on a:

$$\Gamma_c(A) \\ = \\ ((A(Ent), A(mult), 1_A), A'(Sor), A(comp)).$$

Si on désigne par Ens_* la catégorie des ensembles pointés, il est encore plus facile de construire une théorie T_* à une sorte (notée ici Etat - pour les besoins de la cause) et une équivalence de catégories Γ_*: Alg(T_*) $\to$ Ens_* . Plus précisément, T_* contient au moins le diagramme (***) ci-dessous:

(***)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Etat} \\
1 \arrow[u, "\mathrm{init}"']
\end{tikzcd}$$

De la sorta, si A : T_* $\to$ Ens est une algèbre, alors on a:

$$\Gamma_*(A) = A(Etat) \ .$$

Les deux catégories Aut et Comp ne sont évidemment pas étrangères l'une à l'autre. On dispose, en effet, du foncteur "comportement sous-jacent":

$$\mathrm{comp} \;:\; \mathrm{Aut} \to \mathrm{Comp}$$

$$((S,.,1_S),E,S',e,\tau,\sigma) \to ((S,.,1_S),S',\sigma(\tau(e,-))) \;,$$

Alors, il est facile de construire un homomorphisme $H: T \to T'$ (dont une restriction est l'injection canonique du diagramme (**) dans le diagramme (*)) de sorte que $Alg(H): Alg(T') \to Alg(T)$ et $comp: Aut \to Comp$ soient "équivalents", i. e. tel que le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{array}{ccc} Alg(T') & \xrightarrow{\Gamma_a} & Aut \\ {\scriptstyle Alg(H)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle comp} \\ Alg(T) & \xrightarrow[\Gamma_c]{} & Comp \end{array}$$

On en déduit immédiatement (voir la PARTIE 0) que comp admet un adjoint à gauche. Une vérification rapide montre, en effet, que tout comportement $A = ((S,.,1_S),S',\lambda)$ engendre librement l'automate $G(A) = ((S,.,1_S),S,S',1_S,.,\lambda)$.
Alors, on constate que, pour tout comportement A , l'automate $G(A)$ a encore A pour comportement sous-jacent (c'est donc une réalisation particulière de A , au sens du §3 précédent). Par conséquent, H a la propriété de permanence et, d'après le proposition 6, §3, PARTIE I, H est un isomorphisme sur son image pleine.
Maintenant, si $B' = ((S,.,1_S),E,S',e,\tau,\sigma)$ est un automate, de comportement $A = ((S,.,1_S),S',\lambda)$, et si $m': G(A) \to B'$ présente B' comme étant $G(A)$-accessible, au sens du §2 précédent, alors $m'_{Etat}: S \to E$ est une surjection "compatible avec l'opération du monoïde": c'est exactement dire que tout état, élément de E , est dans l'orbite de l'état intial e de E et donc que A' est accessible au sens usuel.
Enfin, tout automate (ou plus, généralement, tout comportement) engendre, d'après la proposition 3 (ou la proposition 4) précédente, un automate minimal (en nombre d'états) de même comportement. Supposons que $((S,.,1_S),E,S',e,\tau,\sigma)$ est un automate, associé (par l'équivalence entre $Alg(T')$ et Aut) à une algèbre $A': T' \to Ens$ et interprétons-en les classes d'indiscernabilité, au sens du §1 précédent, (on pourra se

reporter au diagramme ci-dessous;

$$\begin{tikzcd}
 & Y'(Etat) \arrow[dl, bend right, "x"'] \arrow[dl, "y"] \arrow[d, "Y'(proj_{Etat})"] & \\
A' & Y'(Etat)+Y'(Ent)=Y'(EtatxEnt) \arrow[l, shift right, "{]x,t[}"'] \arrow[l, shift left, "{]y,t[}"] & Y'(Sor) = Y'(H(Sor)) \arrow[l, "{Y'(sor,trans)}"'] \\
 & Y'(Ent) \arrow[ul, bend left, "t"] \arrow[u, "Y'(proj_{Ent})"'] &
\end{tikzcd}$$

),

Si $x, y \in E = A'(Etat)$ sont deux états, ils s'identifient (d'après le lemme de Yoneda - voir la PARTIE 0) à deux flèches (encore notées) $x, y : Y'(Etat) \to A'$. Alors, si on a:

(1) $$x \equiv_{A', Etat} y \; ,$$

on voit que, nécessairement (par définition):

(2) pour toute flèche t: $Y'(Ent) \to A'$, on a:

$$]x, t[. Y'(sor, trans) =]y, t[. Y'(sor, trans) \; .$$

Réciproquement, on peut établir que (2) implique (1) , donc que (1) équivaut à (2), i. e. que c'est (2) qui est la partie *consistante* ou *significative* de la relation (1).

Mais, une flèche $t : Y'(Ent) \to A'$ s'identifie (d'après le lemme de Yoneda - voir la PARTIE 0) à un élément (encore noté) $t \in S$ et, de même:

- $]x, t[\; : Y'(Etat) + Y'(Ent) = Y'(Etat \times Ent) \to A'$ s'identifie au couple $(x, t) \in E \times S$,
- $]y, t[\; : Y'(Etat) + Y'(Ent) = Y'(Etat \times Ent) \to A'$ s'identifie au couple $(y, t) \in E \times S$,
- $]x, t[. Y'(sor, trans)$ s'identifie à:
$$A'(sor)(A'(trans)(x, t)) = \sigma(\tau(x, t)) \; ,$$
- $]y, t[. Y'(sor, trans)$ s'identifie à:
$$A'(sor)(A'(trans)(y, t)) = \sigma(\tau(y, t)) \; ,$$

par conséquent, on a:

(1) $$x \equiv_{A', Etat} y \; ,$$

si, et seulement si:

(3) pour tout signal d'entrée $t \in S$, on a:

$$\sigma(\tau(x, t)) = \sigma(\tau(y, t)) \; .$$

Ainsi, la relation d'indiscernabilité, au sens général du §1, s'interprète exactement comme étant la relation d'indiscernabilité usuelle (pour les automates). Si l'on préfère, à l'objet terminal de $C'(A')$ correspond, par l'équivalence de catégories entre $Alg(T')$ et Aut, l'automate à ensemble d'états minimal, de même comportement que $((S,.,1_S),E,S',e,\tau,\sigma)$.

Les deux catégories Aut et Ens_* ne sont pas non plus étrangères l'une à l'autre. On dispose évidemment du foncteur "ensemble (des états) pointé (par l'état initial) sous-jacent":

$$\text{état} \;:\; Aut \to Ens_*$$
$$((S,.,1_S),E,S',e,\tau,\sigma) \to (E,e) \;,$$

Alors, il est facile de construire un homomorphisme $H_*: T_* \to T'$ (dont une restriction est l'injection canonique du diagramme (***) dans le diagramme (*)), de sorte que $Alg(H_*): Alg(T') \to Alg(T_*)$ et $\text{état}: Aut \to Ens_*$ soient "équivalents", i. e. tel que le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
Alg(T') \arrow[r, "\Gamma_a"] \arrow[d, "Alg(H_*)"'] & Aut \arrow[d, "\text{état}"] \\
Alg(T_*) \arrow[r, "\Gamma_*"'] & Ens_*
\end{tikzcd}$$

On en déduit immédiatement (voir la PARTIE 0) que état admet un adjoint à gauche G_*. Une vérification rapide montre, en effet, que tout ensemble pointé (E,e) engendre librement l'automate $G_*((E,e)) = ((\{1\},.,1),E,E,e,proj:1\times E\to E,Id(E):E\to E)$.

Alors, on constate que, pour tout ensemble pointé (E,e), l'automate $G_*(E,e)$ a encore (E,e) pour comportement sous-jacent (c'est donc une réalisation particulière de (E,e), au sens du §3 précédent). Par conséquent, H_* a la propriété de permanence et, d'après le proposition 6, §3, PARTIE I, H_* est un isomorphisme sur son image pleine.

Maintenant, tout automate (ou plus, généralement, tout ensemble pointé) engendre, d'après la proposition 3 (ou la proposition 4) précédente, un automate minimalisé ayant même ensemble pointé sous-jacent, i. e. un automate dont le monoïde et l'ensemble des signaux de sortie sont minimaux, mais dont l'ensemble des états est inchangé. Il est facile de constater, en interprétant d'une manière analogue à la précédente la relation d'indiscernabilité, que l'automate minimal obtenu a pour monoïde opérant un monoïde isomorphe à celui que l'on appelle, usuellement, le *monoïde syntaxique* de l'automate de départ.

5. Un autre exemple.

Le cas des automates, traité au §4 précédent, suggère des exemples nouveaux d'application des considérations générales précédentes, mais de nature analogue. Indiquons-en un, relativement "esthétique" ou suggestif (en ce qu'il a de semblable à la construction du monoïde syntaxique, évoquée précédemment), sans pour autant le détailler outre mesure.

Désignons par GrOp la catégorie des groupes opérant à gauche (pour varier) sur les ensembles pointés (sans pour autant que cette opération respecte le point) et par ens: $GrOp \to Ens_*$ le foncteur "ensemble pointé sous-jacent" (lorsqu'on note, comme au §4 précédent, Ens_* la catégorie des ensembles pointés).
Il est, alors, facile de construire une théorie T' à 2 sortes (Grp et $\in ns$) et une équivalence de catégories $\Gamma_g : Alg(T') \to GrOp$. Plus précisément, T' contient au moins le diagramme (*) ci-dessous:

(*)
$$\begin{tikzcd}
Grp \times Grp \arrow[d, "mult"'] \arrow[d, bend left, "proj_{Grp}"] & & Grp \times \in ns \arrow[d, "oper"] \arrow[d, bend left=60, "proj_{\in ns}"] \\
Grp & & \in ns \\
& & 1 \arrow[u, "point"'] \arrow[ull, bend left, "neutr"]
\end{tikzcd}$$

De même, on construit sans difficulté (i. e. comme au §4 précédent) une théorie T_* à 1 sorte (que nous préférons noter $\in ns$, cette fois) ainsi qu'une équivalence $\Gamma_*: Alg(T_*) \to Ens_*$

entre catégories , Plus précisément, T_* contient au moins le diagramme (**) ci-dessous:

(**)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}ns \\ 1 \arrow[u, bend left, "\text{point}"'] \end{tikzcd}$$

Il est tout aussi simple de construire un homomorphisme $H: T_* \to T'$ (dont une restriction est l'injection canonique du diagramme (**) dans le diagramme (*)) de sorte que $Alg(H): Alg(T') \to Alg(T_*)$ et $ens: GrOp \to Ens_*$ soient "équivalents", i. e. tel que le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd} Alg(T') \arrow[r, "\Gamma_g"] \arrow[d, "Alg(H)"'] & GrOp \arrow[d, "ens"] \\ Alg(T_*) \arrow[r, "\Gamma_*"'] & Ens_* \end{tikzcd}$$

On en déduit immédiatement (voir la PARTIE 0) que ens admet un adjoint à gauche. Une vérification immédiate montre, en effet, que tout ensemble pointé (E,e) engendre librement le groupe trivial $(\{1\},1)$ opérant à gauche trivialement sur (E,e) .
Par conséquent, H a la propriété de permanence et, d'après le proposition 6, §3, PARTIE I, H est un isomorphisme sur son image pleine.
De même, toute structure $A' = (G,(E,e),\tau)$ de groupe (G) opérant (grâce à l'opération τ) sur un ensemble pointé ((E,e)) engendre, d'après la proposition 3 précédente, une structure minimale $(G',(E,e),\tau')$, "réalisant" le même ensemble pointé sous-jacent mais avec un groupe opérant G' minimalisé. Pour le construire, il nous suffit d'interpréter la relation d'indiscernabilité, au sens du §1 précédent, (on pourra se reporter au diagramme ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & Y'(Grp) \arrow[dl, bend right, "g"'] \arrow[dl, "g'"] \arrow[d, "Y'(proj_{Grp})"] & \\
A' & Y'(Grp)+Y'(\mathcal{E}ns)=Y'(Grp\times\mathcal{E}ns) \arrow[l, shift right, "]g,t["'] \arrow[l, shift left, "]g',t["] & Y'(\mathcal{E}ns)=Y'(H(\mathcal{E}ns)) \arrow[l, "Y'(oper)"'] \\
 & Y'(\mathcal{E}ns) \arrow[ul, bend left, "t"] \arrow[u, "Y'(proj_{\mathcal{E}ns})"'] &
\end{tikzcd}$$
),

Si $g, g' \in G = A'(Grp))$, ils s'identifient (d'après le lemme de Yoneda - voir la PARTIE 0) à deux flèches (encore notées) $g, g' : Y'(Grp) \to A'$. Alors, il est facile d'établir qu'on a:

(1) $$g \equiv_{A', Grp} g' ,$$

si, et seulement si, on a:

(2) pour toute flèche $t: Y'(\mathcal{E}ns) \to A'$, on a:
$$]g,t[.Y'(oper) =]g',t[.Y'(oper) .$$

Mais, une flèche $t: Y'(\mathcal{E}ns) \to A'$ s'identifie (d'après le lemme de Yoneda - voir la PARTIE 0) à un élément (encore noté) $t \in E$ et, de même:
- $]g,t[$ s'identifie au couple (g,t) ,
- $]g',t[$ s'identifie au couple (g',t) ,
- $]g,t[.Y'(oper)$ s'identifie à $A'(oper)(g,t)) = \tau(g,t) = g.t$,
- $]g',t[.Y'(oper)$ s'identifie à $A'(oper)(g',t))=\tau(g',t)=g'.t$,

par conséquent, on a:

(1) $$g \equiv_{A', Grp} g' ,$$

si, et seulement si:

(3) pour tout élément t de l'ensemble sous-jacent E , on a:
$$g.t = g'.t ,$$
(autrement dit, si on ne peut discerner la manière dont opérent g et g' !),

ou encore si, et seulement si:

(4) pour tout élément t de l'ensemble sous-jacent E , on a:

$$g.g'^{-1} \in Stab(t)$$

(si on note $Stab(t)$ le sous-groupe de G stabilisateur de t).

Mais, si on pose $\Delta = \cap_{t \in E} Stab(t)$, il est facile de vérifier que Δ est un sous-groupe distingué de G . En conséquence, on a $G' = G/\Delta$, i. e. le groupe minimalisé G' est quotient de G par son sous-groupe distingué, intersection de tous les stabilisateurs.

BIBLIOGRAPHIE

(C.F.W.M.) S. MacLane:
Categories for the Working Mathematician, Springer, 1971.

(C.S.D.P.) C. Lair:
Conditions Syntaxiques de Plongement, I et II, Diagrammes, vols. 2 et 3, Paris, 1979 et 1980.

(I.I.A.C.) J. A. Goguen et J. Meseguer:
Initiality, Induction, and Computability, in Algebraic Methods in Semantics, edité par M. Nivat et J. C. Reynolds, Cambridge Univ. Press, 1985.

(S.Q.P.A.) C. Henry:
Sur Quelques Problèmes de Plongements en Algèbre, Diagrammes, vol. 10, Paris, 1983.