DIAGRAMMES

MONIQUE MATHIEU

Extensions de théories de Lawvere. Thèse de doctorat de mathématiques

Diagrammes, tome 26 (1991), p. I-90

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1991__26__R1_0>

THESE DE DOCTORAT DE MATHEMATIQUES

soutenue à l'Université Paris 7
le 7 Octobre 1991

par

Monique MATHIEU

Sujet:

EXTENSIONS DE THEORIES DE LAWVERE

Rapporteurs désignés par la Commission aux Thèses:

F. LAMARCHE, Dalhousie University (Halifax, Canada)
F. LINTON, Wesleyan University (Middletown, U.S.A.)

Jury de soutenance:

H. KLEISLI, Université de Fribourg (Fribourg, Suisse), président

D. BARSKY, C.N.R.S.-Université Paris 13
F.-M. CLEMENT, Ecole Centrale de Paris
L. COPPEY, Université Paris 7
D. DUVAL, Université de Limoges
M. ZISMAN, Université Paris 7

C. LAIR, Université Paris 7, directeur de la recherche

A Nicole

REMERCIEMENTS

Je dois avouer mon profond embarras pour m'acquitter de cette tâche, pourtant sympathique a priori. Le problème est que je crois que chacun de nos actes est conséquence d'une multitude de choses plus ou moins petites, plus ou moins grandes, plus ou moins importantes, bref je crois en l'Histoire. Ainsi, si aujourd'hui j'ai pu mener à bien ce travail, en sont co-responsables toutes les personnes, famille, amis, enseignants, mathématiciens ou non, qui m'ont côtoyée, accompagnée jusque là, et qui je l'espère continueront à le faire, qui ont fait que je me suis intéressée aux Mathématiques et ont aidé à développer chez moi la curiosité, la persévérance... d'autres que je ne connais pas encore ou mal et qui feront que cet instant n'est qu'un instant, ce travail qu'une étape.

Où débuter alors ma petite histoire ? Sans doute à ma naissance, puisque sans cet évènement capital... N'ayant d'autre part aucun goût pour parler de moi à des gens que je ne connais pas, je me sens contrainte de taire le nom de maintes personnes et en ressens une sorte de sentiment de frustation désagréable. Tout ce préambule pour expliquer que cette page est de loin la plus difficile à écrire pour moi. Je vais donc me retrancher derrière une froideur de style toute académique, oublier le passé et l'avenir et me contenter de concrétiser la satisfaction que j'éprouve, à cet instant, à l'achèvement de ce travail en remerciant chaleureusement les personnes qui lui ont accordé quelque intérêt.

Je remercie tout d'abord mon directeur de recherches, Christian Lair sans lequel, selon l'expression consacrée, ce travail n'aurait pas pu se faire. Je tiens à saluer son honnêteté intellectuelle et son immense enthousiasme, partagés d'ailleurs avec Laurent Coppey, qu'il met (qu'ils mettent) à initier, expliquer, dire et redire la théorie des esquisses. Cet enthousiasme étant fondé sur leur conviction de l'intérêt et de la profondeur de cette théorie (les temps leur donnent d'ailleurs raison puisque, depuis que les esquisses s'appellent "sketches", elles trouvent droit de cité dans différents domaines dont l'Informatique théorique, pour ne citer que celui qui a le vent en poupe).

Je remercie :

Messieurs F. Lamarche et F.E.J. Linton, les deux rapporteurs désignés par la commission des thèses de Paris 7, pour avoir confirmé l'intérêt que ce travail pouvait présenter, également pour leurs commentaires et suggestions,

Monsieur H. Kleisli, sur les travaux duquel ma thèse s'appuie en bonne partie, d'accepter de présider mon jury,

Madame D. Duval, Messieurs D. Barsky, F.-M. Clément, L. Coppey et M. Zisman de bien vouloir y participer.

Enfin, je n'oublie ni le service de reprographie, ni le secrétariat du troisième cycle et remercie en particulier Mesdames S. Barrier et M. Wasse pour leur gentillesse et leur efficacité.

PREFACE

On sait depuis Lawvere [1968] qu'un certain nombre de concepts spécifiques aux structures algébriques classiques possèdent des *analogues* en algèbre universelle "catégorique", i.e. en l'espèce en termes de *théories de Lawvere*. Par exemple, on sait ce qu'est une théorie de Lawvere *commutative* (voir Linton [1966]) ou bien ce qu'est le *produit tensoriel* de deux théories de Lawvere (voir Freyd [1966]) ou bien encore ce qu'est une théorie de Lawvere *affine* (voir Lawvere [1968]) ...
De ce point de vue, le présent travail aboutit à une théorie des "extensions de théories de Lawvere" qui est bien l'analogue de la théorie classique des extensions (de degré fini) de corps ou d'anneaux (et qui, d'ailleurs, l'englobe).

En fait, initialement, je ne m'étais posé qu'un classique problème de caractérisation syntaxique d'une certaine propriété sémantique. Ce n'est qu'au fur et à mesure que cette caractérisation s'est avérée fournir des homomorphismes entre théories de Lawvere se comportant exactement "comme" des extensions (de degré fini) de corps.
Le problème initial se posait en ces termes :
- si $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ est un homomorphisme entre deux théories de Lawvere, alors on sait (voir essentiellement Lawvere [1968] et / ou l'Annexe) qu'il induit un foncteur d'oubli $\mathrm{Mod}([H]) : \mathrm{Mod}([T']) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$ entre leurs catégories de modèles (ou algèbres) et que ce foncteur admet un adjoint à gauche $L_{[H]} : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T'])$,
- alors, sachant cela, à quelles conditions portant sur $[H]$ peut-on affirmer que l'endofoncteur $\mathrm{Mod}([H]) . L_{[H]} : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$ est *r-déployé* (resp. *r-co-déployé*), i.e. équivalent au foncteur $(-)^r$ (resp. $r.(-)$), lorsque r est un entier fixé ?
Ce problème général est évidemment suggéré par le cas particulier classique décrit comme suit :
- si K (resp. K') est un corps commutatif, alors la catégorie K-Vect (resp. K'-Vect) des K-espaces vectoriels (resp. des K'-espaces vectoriels) est (canoniquement) équivalente à la catégorie $\mathrm{Mod}([T_K])$ (resp. $\mathrm{Mod}([T_{K'}])$) d'une certaine théorie de Lawvere $[T_K]$ (resp. $[T_{K'}]$),
- si, de plus, $h : K \dashrightarrow K'$ est un homomorphisme de corps, alors il lui est associé un homomorphisme $[H] : [T_K] \dashrightarrow [T_{K'}]$ entre théories de Lawvere, de sorte que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
K'\text{-Vect} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "U"'] & \mathrm{Mod}([T_{K'}]) \arrow[d, "\mathrm{Mod}([H])"] \\
K\text{-Vect} \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{Mod}([T_K])
\end{tikzcd}$$

(où $U : K'\text{-Vect} \dashrightarrow K\text{-Vect}$ est le foncteur " K-espace vectoriel sous-jacent "),
- sachant cela, si h présente K' comme une extension de K de degré fini r, alors il est facile de vérifier que l'on a (simultanément) :

$$(-)^r \simeq r.(-) \simeq \mathrm{Mod}([H]).L_{[H]} : \mathrm{Mod}([T_K] \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T_K])$$

(puisqu'il en est de même pour $U.V : K\text{-Vect} \dashrightarrow K\text{-Vect}$, si V désigne l'adjoint à gauche de U).

C'est le but essentiel des Chap. 1, 2 et 3 que de résoudre complètement ce problème de caractérisation.
Ainsi, nous établissons que l'endofoncteur $\mathrm{Mod}([H]).L_{[H]}$ est r-déployé (resp. r-co-déployé) si, et seulement si, l'adjonction canonique $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ peut se "prolonger" en une (ou encore est une *contraction* d'une) *sur-adjonction* (i.e succession d'adjonctions) $(L', L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ (resp. $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]), R')$).
Alors, dans ces deux cas de sur-adjonctions, on prouve que la duale de l'adjonction "la plus à gauche" $(L', L_{[H]})$ (resp. $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ se restreint (le long des plongements de Yoneda) en une adjonction (H, D) (resp. (G, H)) où :
- $D : [T'] \dashrightarrow [T]$ (resp. G) est une *réalisation* (i.e un homomorphisme ayant un certain *exposant*, en l'occurrence r),
- $D.H : T \dashrightarrow T$ (resp. $G.H$) est un endofoncteur qui est r-déployé.
Evidemment, pour formaliser et démontrer précisément ce résultat, on ne peut pas s'abstenir de choisir les projections présentant les puissances $r^{\text{ièmes}}$ utilisées. Ceci conduit à traiter le problème de la *cohérence* de ces choix avec, notamment, les choix canoniques donnés dans la théorie de Lawvere $[T]$.

Les Chap. 4, 5, 6 sont consacrés à une analyse plus poussée de la solution obtenue.
Si $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ admet une réalisation, d'exposant r, adjointe à droite (resp. à gauche) $D : T' \dashrightarrow T$ (resp. $G : T' \dashrightarrow T$), alors on établit que la catégorie de Kleisli de la monade (resp. de la co-monade) $D.H : T \dashrightarrow T$ (resp. $G.H : T \dashrightarrow T$) est canoniquement munie d'une structure de théorie de Lawvere isomorphe à $[T']$. Autrement dit, les homomorphismes $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$, solutions du problème initialement posé, sont totalement déterminés (en même temps que $[T']$) par les seules propriétés de $[T]$: précisément, par la seule donnée d'une monade (resp. co-monade) particulière sur $[T]$.
C'est seulement parvenu à ce point qu'une interprétation précise de ces catégories de Kleisli permet de découvrir que ce sont :
- dans le premier cas (des monades), des structures de théories de Lawvere sur le *graphe des r-uples* de flèches (ayant même domaine et même co-domaine) de $[T]$,
- dans le deuxième (des co-monades), des structures de théories de Lawvere engendrées par $[T]$ à laquelle on adjoint des racines d'équations à coefficients dans $[T]$,
par conséquent, qu' il est complètement justifié d'appeler ces homomorphimes $[H]$, solutions du problème posé, des *extensions*. Cependant, il convient ici de préciser davantage : dans le premier cas nous dirons qu' il s'agit d'extensions *gauches* et, dans le second, d'extensions *droites*. En effet, contrairement à ce qui se passe dans le cas particulier des corps (où toute extension K' de degré fini r sur K peut tout autant s'interpréter comme une structure de corps sur les r-uples de K que comme un corps de rupture d'un polynôme à coefficients dans K), les extensions gauches que nous obtenons *ne sont pas* en général

des extensions droites et inversement (ce n'est vrai que si [H] est un homomorphisme de Frobénius, au sens de Lawvere [1968]).
Enfin, on souligne l'effectivité de ces interprétations en montrant, d'une part, comment on peut *pratiquement* présenter (par générateurs et relations) les monades (resp. les co-monades) considérées sur [T] et, d'autre part, en nous attachant à décrire dans quelques exemples (qu'on peut considérer comme génériques) toutes les extensions tant gauches que droites de certaines théories de Lawvere particulières.

Certains points sont seulement signalés au passage : nous avons jugé que leur développement, qui ne présente aucune difficulté vu ce que nous en suggérons, nous éloignerait du sujet. C'est le cas, par exemple, de l'interprétation d'une théorie de Lawvere en termes d'algèbre d'une monade sur la catégorie des théories de Lawvere.
Au contraire, d'autres points, sur lesquels ce travail débouche tout naturellement, doivent faire l'objet d'une étude spécifique qui déborderait trop largement le cadre du présent travail. Il en est ainsi, notamment, de "la théorie de Galois" des théories de Lawvere, dans laquelle les "groupes de Galois" y deviennent autant de groupes de "dualités" de structures algébriques (voir Lair [1974]).

Afin de rendre ce travail aussi "auto-contenu" que possible, nous avons rassemblé dans une Annexe les résultats classiques que nous utilisons (concernant essentiellement les monades et les théories de Lawvere) . Les références courantes sur ces sujets sont Mac Lane [1971] et Lawvere [1968] .
La terminologie introduite dans ce texte au fur et à mesure pourrait, en première lecture, paraître surabondante. Mais il était nécessaire d'isoler graduellement suffisamment de concepts pour dégager, de la solution du problème initialement posé, les fondements de la théorie des extensions des théories de Lawvere. Ainsi, nous espérons que le lecteur sera finalement convaincu qu'on ne pratique ni le jeu de mots gratuit ni l'usage abusif d'un luxe inutile de précisions lorsqu'on énonce par exemple que : "aux contractions droites d'indice r correspondent exactement les extensions gauches de degré r " .

CHAPITRE 1

Point de vue sémantique : foncteurs théorisables et contractions

Sommaire

0. Introduction

Soit $h : A \dashrightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires.

Le foncteur d'oubli évident (" A-module sous-jacent ") $U : A'\text{-Mod} \dashrightarrow A\text{-Mod}$, de la catégorie des A'-modules vers celle des A-modules, admet évidemment un adjoint à gauche $L : A\text{-Mod} \dashrightarrow A'\text{-Mod}$; il est facile de voir que, pour tout A-module E , $L(E)$ est la structure canonique de A'-module sur le A-module $E \otimes_A A'$.

Si A' est un A-module *libre* de dimension *finie* r sur A , alors cette adjonction (L, U) est assez particulière : naturellement en tout objet E de A-Mod , le A-module $U . L(E)$ est *produit* mais aussi *somme* de r copies de E .

Aux §§ 1 et 2 , nous étudions de telles adjonctions (L, U) , ou de tels endofoncteurs de la forme $U . L$, pour lesquelles on a une présentation (appelée *déploiement*) sous forme de *puissance* $U . L = (-)^r$, ou encore une présentation (appelée *co-déploiement*) sous forme d'une *co-puissance* $U . L = r . (-)$.

Un fait plus remarquable se produit.

On sait que la catégorie A-Mod (resp. A'-Mod) est la catégorie des modèles d'une théorie de Lawvere [T] (resp. [T']), de sorte que le foncteur d'oubli U : A'-Mod ----> A-Mod est un foncteur théorisable , i.e. induit par un homomorphisme [H] : [T] ----> [T'] (voir Annexe , § 4) . Ainsi L est l'adjoint à gauche que U possède (comme en possède tout foncteur théorisable) .

On montre au § 5 que, si l'adjonction (L , U) , associée à un quelconque foncteur théorisable U , est de puissance (resp. co-puissance) r , alors on dispose de plus d'adjoints que le seul L prévu (voir Annexe , § 4 , prop. 9) . Précisément , L admet aussi un adjoint à gauche L' (resp. U admet aussi un adjoint à droite R) et donc l'adjonction canonique (L, U) *s'étend* en une *sur-adjonction* (L', L, U) (resp. (L, U, R)) telle que celles introduites et étudiées aux § 3 . A contrario, on peut exprimer que (L, U) est une *contraction* de (L', L, U) (resp. (L, U, R)) telle que celles introduites et étudiées au § 4 .

Ce sont les propriétés sémantiques établies au § 5 qui nous seront essentielles dans la suite pour caractériser syntaxiquement ces homomorphismes [H] : [T] ----> [T'] de théories de Lawvere présentant [T'] comme *extension* de [T] .

1. Foncteurs déployés et foncteurs co-déployés

Soit C une catégorie , M : C ----> C un foncteur et r un entier.

On dit que M est *r-déployé* si, et seulement si :
- pour tout objet C de C , on peut choisir un cône projectif produit dans C :

$$P(C) = (P(C)_i : M(C) \dashrightarrow C)_{1 \leq i \leq r} \; .$$

de sorte que :

+ pour toute flèche c : C ----> C' de C et pour tout $1 \leq i \leq r$, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} M(C) \arrow[r, "M(c)"] \arrow[d, "P(C)_i"'] & M(C') \arrow[d, "P(C')_i"] \\ C \arrow[r, "c"'] & C' \end{tikzcd}$$

Alors on dit que P est un *r-déploiement* de M.

Clairement, si M est r-déployé et si P et P' en sont deux r-déploiements, on dispose d'une unique transformation naturelle inversible $p(P, P') : M \Longrightarrow M$ telle que :
- pour tout objet C de $\mathbf{C}$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} M(C) \arrow[rr, "p(P,P')(C)"] \arrow[dr, "P(C)_i"'] & & M(C) \arrow[dl, "P'(C)_i"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

On dit, dualement, que M est *r-co-déployé* si, et seulement si :
- pour tout objet C de $\mathbf{C}$, on peut choisir un cône inductif somme dans $\mathbf{C}$:

$$S(C) = (S(C)_i : C \dashrightarrow M(C))_{1 \leq i \leq r},$$

de sorte que :

+ pour toute flèche $c : C \dashrightarrow C'$ de $\mathbf{C}$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} M(C) \arrow[rr, "M(c)"] & & M(C') \\ C \arrow[u, "S(C)_i"] \arrow[rr, "c"'] & & C' \arrow[u, "S(C')_i"'] \end{tikzcd}$$

Alors on dit que S est un *r-co-déploiement* de M.

Clairement, si M est r-co-déployé et si S et S' en sont deux r-co-déploiements, on dispose d'une unique transformation naturelle inversible $s(S, S') : M \Longrightarrow M$ telle que :
- pour tout objet C de $\mathbf{C}$ et pour tout $1 \leq i \leq r$, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} M(C) \arrow[rr, "s(S,S')(C)"] & & M(C) \\ & C \arrow[ul, "S(C)_i"] \arrow[ur, "S'(C)_i"'] & \end{tikzcd}$$

Par exemple, soit $h : A \dashrightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires où A' est un A-module libre de dimension r et dont $b = (b_1, \ldots\ldots, b_r)$ est une base.

Pour tout A-module E, le cône projectif :

$$P_\beta(E) = (id(E) \otimes_A \beta_i : E \otimes_A A' \dashrightarrow E)_{1 \leq i \leq r}$$

où :
- $\beta_i : A' \dashrightarrow A$ est, pour tout $1 \leq i \leq r$, l'application A-linéaire définie par $\beta_i(b_i) = 1_A$ et $\beta_i(b_j) = 0_A$, si $i \neq j$,
- E est identifié à $E \otimes_A A$,

est un cône produit dans A-Mod.
Ainsi, si $U : A'\text{-Mod} \dashrightarrow A\text{-Mod}$ est le foncteur A-module sous-jacent et L son adjoint à gauche, alors l'endofoncteur $U.L$ est r-déployé et P_β en est un r-déploiement.

De façon analogue, pour tout A-module E, le cône inductif :

$$S_{\beta'}(E) = (id(E) \otimes_A \beta'_i : E \dashrightarrow E \otimes_A A')_{1 \leq i \leq r}$$

où :
- $\beta'_i : A \dashrightarrow A'$ est, pour tout $1 \leq i \leq r$, l'application A-linéaire définie par $\beta'_i(1_A) = b_i$,
- E est identifié à $E \otimes_A A$,

est un cône somme dans A-Mod.
Ainsi $U.L$ est r-co-déployé et S_β en est un r-co-déploiement.

2. Puissances et co-puissances

Soit $(L : C \dashrightarrow B, R : B \dashrightarrow C)$ une adjonction (voir Annexe, § 1).

On dit que (L, R) est de *puissance* l'entier r si, et seulement si :
- le foncteur $R.L : C \dashrightarrow C$ est r-déployé.

On dit, de même, que (L, R) est de *co-puissance* l'entier r si, et seulement si :
- le foncteur $R.L : C \dashrightarrow C$ est r-co-déployé.

D'après le § 1, si $h : A \dashrightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, si A' est un A-module libre de dimension r, si $U : A'\text{-Mod} \dashrightarrow A\text{-Mod}$ désigne le foncteur d'oubli évident et L son adjoint à gauche, alors l'adjonction (L, U) est de puissance et de co-puissance r.

3. Sur-adjonctions et indices

On dit que $(E : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y}, F : \mathbf{Y} \dashrightarrow \mathbf{X}, G : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y})$ est une *sur-adjonction* si, et seulement si (voir Annexe, § 1) :
- (E, F) est une adjonction,
- (F, G) est une adjonction.

Dans la suite, on supposera que $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ ont suffisamment de sommes et produits.

Il est facile de vérifier que :

***Proposition* 1**. *Si* r *est un entier et si* (E, F, G) *est une sur-adjonction, alors le foncteur* $E.F$ *est r-co-déployé si, et seulement si,* $G.F$ *est r-déployé.*

Preuve. Si $(E : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y}, F : \mathbf{Y} \dashrightarrow \mathbf{X}, G : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y})$ est une sur-adjonction alors, naturellement en tous objets Y et Y' de $\mathbf{Y}$, on a :

$$\mathrm{Hom}(E(F(Y)), Y') \simeq \mathrm{Hom}(F(Y), F(Y')) \simeq \mathrm{Hom}(Y, G(F(Y'))).$$

Par conséquent, si $E.F$ est r-co-déployé, naturellement en tous objets Y et Y' de $\mathbf{Y}$, on a :

$$\mathrm{Hom}(Y, G(F(Y'))) \simeq \mathrm{Hom}(E(F(Y)), Y')$$
$$\simeq \mathrm{Hom}(r.Y, Y') \simeq \mathrm{Hom}(Y, Y')^r \simeq \mathrm{Hom}(Y, Y'^r)$$
(puisque $\mathbf{Y}$ a assez de produits).

On en déduit que, naturellement en tout objet Y' de $\mathbf{Y}$, on a $G(F(Y')) \simeq Y'^r$, i.e. que $G.F$ est r-déployé.

Réciproquement, si $G.F$ est r-déployé, naturellement en tous objets Y et Y' de $\mathbf{Y}$ on a :

$$\mathrm{Hom}(E(F(Y)), Y') \simeq \mathrm{Hom}(Y, G(F(Y')))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}(Y, Y'^r) \simeq \mathrm{Hom}(Y, Y')^r \simeq \mathrm{Hom}(r.Y, Y')$$
(puisque $\mathbf{Y}$ a assez de sommes).

On en déduit que, naturellement en tout objet Y de $\mathbf{Y}$, on a $E(F(Y)) \simeq r.Y$, i.e. que $E.F$ est r-co-déployé. ***Fin de la preuve***.

De même, il est clair que :

***Proposition* 2**. *Si* r *est un entier et si* (E, F, G) *est une sur-adjonction, alors le foncteur* $F.E$ *est r-co-déployé si, et seulement si, le foncteur* $F.G$ *est r-déployé*.

Preuve. Si $(E : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y}, F : \mathbf{Y} \dashrightarrow \mathbf{X}, G : \mathbf{X} \dashrightarrow \mathbf{Y})$ est une sur-adjonction, alors naturellement en tous objets X et X' de $\mathbf{X}$, on a :

$$\mathrm{Hom}(X, F(G(X'))) \simeq \mathrm{Hom}(E(X), G(X')) \simeq \mathrm{Hom}(F(E(X)), X').$$

Par conséquent, si $F \cdot G$ est r-déployé, naturellement en tous objets X et X' de $\mathbf{X}$, on a :

$$\mathrm{Hom}(F(E(X)), X') \simeq \mathrm{Hom}(X, F(G(X')))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}(X, X'^{r}) \simeq \mathrm{Hom}(X, X')^{r} \simeq \mathrm{Hom}(r.X, X').$$

On en déduit que, naturellement en tout objet X de $\mathbf{X}$, on a $F(E(X)) \simeq r.X$, i.e. que $F \cdot E$ est r-co-déployé.

Réciproquement, si $F \cdot E$ est r-co-déployé, naturellement en tous objets X et X' de $\mathbf{X}$ on a :

$$\mathrm{Hom}(X, F(G(X'))) \simeq \mathrm{Hom}(F(E(X)), X')$$
$$\simeq \mathrm{Hom}(r.X, X') \simeq \mathrm{Hom}(X, X')^{r} \simeq \mathrm{Hom}(X, X'^{r}).$$

On en déduit que, naturellement en tout objet X' de $\mathbf{X}$, on a $F(G(X')) \simeq X'^{r}$, i.e. que $F \cdot G$ est r-déployé. ***Fin de la preuve***.

Soit (E, F, G) une sur-adjonction.

On dit que (E, F, G) est *d'indice droit* l'entier r si, et seulement si, l'une des deux conditions suivantes, équivalentes d'après la proposition 1, est vérifiée :
- le foncteur $E \cdot F$ est r-co-déployé,
- le foncteur $G \cdot F$ est r-déployé.

De même, on dit que (E, F, G) est *d'indice gauche* l'entier r si, et seulement si, l'une des deux conditions suivantes, équivalentes d'après la proposition 2, est vérifiée :
- le foncteur $F \cdot E$ est r-co-déployé,
- le foncteur $F \cdot G$ est r-déployé.

(On remarque que, dans la proposition 1, le foncteur F, *central* dans la sur-adjonction, s'écrit à *droite* dans les deux assertions équivalentes.
De même, on remarque que, dans la proposition 2, le foncteur F, *central* dans la sur-adjonction, s'écrit à *gauche* dans les deux assertations équivalentes de cette proposition.
Ainsi, la terminologie adoptée dans les deux définitions qui précèdent se trouve-t-elle justifiée : les adjectifs droite et gauche, font référence à la *place* occupée dans les *composés* par le foncteur central de la sur-adjonction.)

Par exemple, soit $h : A \dashrightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, où A' est un A-module libre de dimension r, et soit $U : A'\text{-Mod} \dashrightarrow A\text{-Mod}$ le foncteur d'oubli.

Non seulement U admet un adjoint à gauche L, mais U admet aussi un adjoint à droite R : il est facile de vérifier que pour tout A-module E, $R(E)$ est la structure de A'-module canonique sur le A-module A-Lin (A', E) (des applications A-linéaires de A' vers E). Alors (L, U, R) est une sur-adjonction et, comme (L, U) est de co-puissance r (d'après le § 2), on voit que (L, U, R) est une sur-adjonction d'indice gauche r.

4. Contractions

Soit $(L : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{B}, R : \mathbf{B} \dashrightarrow \mathbf{C})$ une adjonction (voir Annexe, § 1).

On dit que (L, R) est une *contraction droite d'indice* l'entier r si, et seulement si :
- L admet un adjoint à gauche $L' : \mathbf{B} \dashrightarrow \mathbf{C}$,
- la sur-adjonction (L', L, R) est d' indice droit r.

(Ici, l'adjectif *droite* exprime deux choses :
- l'adjonction (L, R) occupe la place de *droite* dans la sur-adjonction construite,
- dans les composés de foncteurs que nous devrons considérer, le foncteur central de cette sur-adjonction s'écrit à *droite*.)

On dit, de même, que (L, R) est une *contraction gauche d'indice* l'entier r si, et seulement si :
- R admet un adjoint à droite $R' : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{B}$,
- la sur-adjonction (L, R, R') est d'indice gauche r.

(Des considérations analogues aux précédentes justifient l'usage de l'adjectif *gauche*.)

Les propositions 1 et 2 qui précèdent peuvent alors s'écrire :

***Proposition* 3**. *Si* r *est un entier et si l'adjonction* (L, R) *est une contraction droite d'indice* r, *alors l'adjonction* (L, R) *est de puissance* r.

***Proposition* 4**. *Si* r *est un entier et si l'adjonction* (L, R) *est une contraction gauche d'indice* r, *alors l'adjonction* (L, R) *est de co-puissance* r.

D'après le § 3 qui précède, si $h : A \dashrightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires où A' est un A-module libre de dimension r, nous pouvons dire que l'adjonction (L, U) est une contraction gauche d'indice r.

Au paragraphe suivant, nous serons en mesure d'établir que le foncteur L : A-Mod ----> A'-Mod admet également un adjoint à gauche de sorte que cette même adjonction (L, U) est aussi une contraction droite d'indice r.

5. Une propriété des foncteurs théorisables

Soit $[H]:[T] \dashrightarrow [T']$ un homomorphisme de théories de Lawvere (voir Annexe, § 4).

On sait (voir Annexe, § 4, prop. 9) que le foncteur théorisable :

$$\mathrm{Mod}([H]) : \mathrm{Mod}([T']) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$$

admet un adjoint à gauche :

$$L_{[H]} : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T']).$$

Par conséquent, on dispose d'une adjonction *canonique* $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$. Pour cette adjonction particulière, les réciproques des propositions 3 et 4 précédentes sont exactes (ce qui est faux pour des adjonctions quelconques).

Précisément, montrons que :

Proposition 5. *Si* $[H]:[T] \dashrightarrow [T']$ *est un homomorphisme entre théories de Lawvere et si* r *est un entier, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *l'adjonction canonique* $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ *est de puissance* r,
(ii) *l'adjonction canonique* $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ *est une contraction droite d'indice* r.

Preuve. La proposition 3 prouve que (ii) implique (i).

Réciproquement, supposons que le foncteur :

$$\mathrm{Mod}([H]) . L_{[H]} : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$$

est r-déployé.
Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ et naturellement en tout objet F de $\mathrm{Mod}([T])$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^m), L_{[H]}(F)) &= \mathrm{Hom}(L_{[H]}(Y_{[T]}(T^m)), L_{[H]}(F)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^m), \mathrm{Mod}([H]) . L_{[H]}(F)) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^m), F^r) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^m), F)^r \\
&\simeq \mathrm{Hom}(r . Y_{[T]}(T^m), F)
\end{aligned}$$

(voir Annexe, § 4).

Par conséquent, $r . Y_{[T]}(T^m)$ est un objet libre engendré par $Y_{[T]}(T^m)$ relativement à $L_{[H]}$.
Comme $Y_{[T]}{}^{op}$ est dense et $\mathrm{Mod}[T]$ est co-complète (voir Annexe, § 4, prop. 8 et 12), on en déduit que $L_{[H]}$ admet un adjoint à gauche L'.
D'après la proposition 1, $L' . L_{[H]}$ est r-co-déployé.
Ainsi, l'assertion (i) implique l'assertion (ii). ***Fin de la preuve***.

Montrons, de même, que :

***Proposition* 6**. *Si* $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ *est un homomorphisme entre théories de Lawvere et si* r *est un entier, alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) *l'adjonction canonique* $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ *est de co-puissance* r,
(ii) *l'adjonction canonique* $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ *est une contraction gauche d'indice* r.

Preuve. L'assertion (ii) implique l'assertion (i), d'après la proposition 4.

Réciproquement, supposons que le foncteur :

$$\mathrm{Mod}([H]) . L_{[H]} : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$$

est r-co-déployé.
Pour tout entier m, on a les "isomorphismes de cônes inductifs" de $\mathrm{Mod}([T])$ suivants :

$$\mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(\pi'_m)) \simeq \mathrm{Mod}([H]) . L_{[H]}(Y_{[T]}(\pi_m)) \simeq r . Y_{[T]}(\pi_m)$$

(voir Annexe, § 4).

Comme $Y_{[T]} : [T] \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])^{op}$ est un modèle (voir Annexe, § 4, prop. 8), pour tout entier m, le cône $Y_{[T]}(\pi_m)$ est un cône limite inductive dans $\mathrm{Mod}([T])$. Les limites inductives commutant entre elles, il en résulte que, pour tout entier m, le cône $\mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(\pi'_m))$ est aussi un cône limite inductive dans $\mathrm{Mod}([T])$.
On en déduit que $Z_{[H]} = \mathrm{Mod}([H])^{op} . Y_{[T']} : [T'] \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$ est un modèle et qu'alors (voir Diers [1976] et Lair [1979]), le foncteur $\mathrm{Mod}([H])$ admet pour adjoint à droite le foncteur :

$$\begin{array}{l} R' : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T']) \\ \qquad F \dashrightarrow (\mathrm{Hom}(Z_{[H]}(-), F) : [T'] \dashrightarrow \mathrm{Ens}). \end{array}$$

D'après la proposition 2, le foncteur $\mathrm{Mod}([H]) . R'$ est r-déployé.
Ainsi, l'assertion (i) implique l'assertion (ii). ***Fin de la preuve***.

Reprenons l'exemple type des modules, i.e. supposons que $h : A \dashrightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires.

On sait (voir, notamment, Annexe, § 4, prop. 8) que le foncteur "A-module sous-jacent" $U : A'\text{-Mod} \dashrightarrow A\text{-Mod}$ est théorisable, i.e. "équivalent" au foncteur :

$$\mathrm{Mod}([H]) : \mathrm{Mod}([T']) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T]),$$

où :
- $[T]$ (resp. $[T']$) est la duale de la sous-catégorie pleine de A-Mod (resp. A'-Mod) dont les objets sont les A^m (resp. A'^m), quand m parcourt $\mathbf{N}$,
- $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ est le foncteur dual de la restriction de l'adjoint à gauche L de U.

Si A' est un A-module libre de dimension r, on a vu que l'adjonction (L, U) est de puissance r, donc aussi l'adjonction $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$.
La proposition 5 prouve que $L_{[H]}$ admet un adjoint à gauche. Par équivalence, elle prouve également que le foncteur L admet un adjoint à gauche.
Ainsi, l'adjonction canonique (L, U) est une contraction droite d'indice r.

La proposition 6 explique pourquoi U admet également un adjoint à droite R. En effet, par équivalence, l'adjonction $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est de co-puissance r : c'est donc une contraction gauche d'indice r, et l'adjonction canonique (L, U) a cette même propriété.

CHAPITRE 2

Point de vue syntaxique : théories de Lawvere et extensions

Sommaire

0. Introduction

Reprenons l'exemple des modules, i.e. supposons que $h : A \dashrightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, puis désignons par $U : A'\text{-Mod} \dashrightarrow A\text{-Mod}$ le foncteur A-module sous-jacent et par $L : A\text{-Mod} \dashrightarrow A'\text{-Mod}$ son adjoint à gauche.

Si A' est un A-module libre de dimension r sur A, alors on sait, d'après le Chap. 1, que L admet aussi un adjoint à gauche ou que U admet aussi un adjoint à droite. Autrement dit, il y a correspondance entre la propriété pour h de présenter A' comme extension (au sens classique) de A et la propriété pour (L, U) d'être une contraction (au sens du Chap. 1).

On sait que la catégorie A-Mod (resp. A'-Mod) est théorisable, i.e. est équivalente à la catégorie des modèles d'une théorie de Lawvere $[T]$ (resp. $[T']$), et que U est induit par un homomorphisme $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$. Mieux, A (resp. A') est (une structure canonique d'anneau sur) l'ensemble des flèches $T \dashrightarrow T$ (resp. $T' \dashrightarrow T'$) et h est alors la restriction de $[H]$ (voir Annexe, § 4). Aussi les propriétés de h sont des propriétés de $[H]$.

Il est donc naturel de rechercher quelle est la propriété d'un quelconque homomorphisme $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ entre théories de Lawvere susceptible de correspondre à celle d'être une contraction pour l'adjonction canonique $(L, \mathrm{Mod}([H]))$ qu'il induit : c'est l'objet de ce Chap. 2 .

Essentiellement, le foncteur H doit avoir un adjoint à gauche (resp. à droite) K qui commute aux produits finis. Un tel K est une ***réalisation*** au sens du § 1 et [H] est une extension, telle que celles introduites au § 3. En général, bien que commutant aux produits finis, K ne commute pas aux produits finis *choisis* dans T et T' : se pose alors un problème de *cohérence*, étudié aux §§ 2 et 4.

1. Réalisations et exposants

Soit [T] et [T'] deux théories de Lawvere (voir Annexe, § 4).

On dit que [K] = ([T], K, [T']) est une ***réalisation*** de [T] vers [T'], ***d'exposant*** l'entier r, et l'on note encore [K] : [T] ----> [T'], si et seulement si :
- K : T ----> T' est un foncteur,
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, on a $K(T^m) = T'^{rm}$,
- K commute aux produits finis.

En particulier, tout homomorphisme [H] : [T] ----> [T'] est une réalisation d'exposant 1. (Remarquons cependant qu'une réalisation d'exposant 1 n'est pas nécessairement un homomorphisme, puisque l'image d'un produit *choisi* n'est plus nécessairement un produit *choisi*.)

Soit r un entier, C une catégorie, [T] et [T'] deux théories de Lawvere et [K] : [T] ----> [T'] une réalisation d'exposant r.

On dispose du foncteur "composition par K" :

$$\begin{aligned} \mathrm{Mod}([K], C) : \mathrm{Mod}([T'], C) &\longrightarrow \mathrm{Mod}([T], C) \\ M' &\longmapsto M'.K \end{aligned}$$

de sorte que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}([T'], C) \arrow[r, "\mathrm{Mod}([K], C)"] \arrow[d, "i_{[T'], C}"'] & \mathrm{Mod}([T], C) \arrow[d, "i_{[T], C}"] \\ \mathrm{Fonct}(T', C) \arrow[r, "\mathrm{Fonct}(K, C)"'] & \mathrm{Fonct}(T, C) \end{tikzcd}$$

(voir Annexe, § 4).

En particulier, si $C = Ens$, on note plus simplement $Mod([K], Ens) = Mod([K])$.

Dans ces conditions, une preuve en tous points analogue à celle utilisée pour les homomorphismes entre théories de Lawvere (voir Lawvere [1968] et aussi Annexe, § 4, prop. 9) permet d'établir que :

***Proposition* 1.** *Si* r *est un entier, si* $[T]$ *et* $[T']$ *sont deux théories de Lawvere et si* $[K] : [T] \dashrightarrow [T']$ *est une réalisation d'exposant* r*, alors le foncteur (composition par* K*)* $Mod([K]) : Mod([T']) \dashrightarrow Mod([T])$ *admet un adjoint à gauche que l'on note* $L_{[K]} : Mod([T]) \dashrightarrow Mod([T'])$ *et qui rend le diagramme ci-dessous commutatif :*

$$\begin{tikzcd}
T' \arrow[r, "Y_{[T']}"] & Mod([T'])^{op} \\
T \arrow[u, "K"] \arrow[r, "Y_{[T]}"'] & Mod([T])^{op} \arrow[u, "L_{[K]}^{op}"']
\end{tikzcd}$$

Par exemple, supposons que $h : A \dashrightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, où A' est un A-module libre de dimension finie r.

On sait que la catégorie A-Mod (resp. A'-Mod) est une catégorie théorisable, i.e. équivalente à la catégorie des modèles de la théorie $[T]$ (resp. $[T']$) duale de la sous-catégorie pleine de A-Mod (resp. A'-Mod) dont les objets sont les A^m (resp. A'^m), quand m parcourt $\mathbf{N}$.

Si $U : A'\text{-Mod} \dashrightarrow A\text{-Mod}$ est le foncteur d'oubli, il est facile de vérifier que :

- pour tout entier m, $U(A'^m) \simeq A^{mr}$,
- le foncteur U commute aux sommes finies (et même aux co-limites, puisqu'il admet un adjoint à droite).

Ainsi, $U^{op} : A'\text{-Mod}^{op} \dashrightarrow A\text{-Mod}^{op}$ admet une restriction $K : T' \dashrightarrow T$, de sorte que $[K] : [T'] \dashrightarrow [T]$ est une réalisation d'exposant r.

2. Cohérence

Soit r un entier.

Si $[T]$ est une théorie de Lawvere, nous serons amenés dans la suite à considérer les objets T^{rm} de T soit comme produits de rm copies de T, soit comme produits de r copies de T^m, soit comme produits de m copies de T^r. Il nous faudra donc renoter les couples appartenant à $\{1, ..., r\} \times \{1,..., m\}$ en des éléments de $\{1,......, rm\}$ pour comparer les projections de ces différents produits (choisis).

Par commodité, nous appelerons *r-renotation* une famille de bijections :

$$\sigma = (\sigma_m : \{1, ..., r\} \times \{1, ..., m\} \dashrightarrow \{1, ..., rm\})_{m \in N}$$

Soit $[T]$ et $[T']$ deux théories de Lawvere, r un entier et σ une r-renotation.

On dit qu'une réalisation $[K] : [T] \dashrightarrow [T']$, d'exposant r, est *σ-cohérente* si, et seulement si :
- pour tout $1 \leq j \leq r$, pour tout entier m et pour tout $1 \leq i \leq m$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T'^{r} \arrow[d, "\pi'_r(\sigma_1(j,1))"'] & & T'^{rm} \arrow[ll, "K(\pi_m(i))"'] \arrow[dll, "\pi'_{rm}(\sigma_m(j,i))"] \\
T' & &
\end{tikzcd}$$

Etablissons que :

Proposition 2. *Si $[T]$ et $[T']$ sont deux théories de Lawvere, si r est un entier et si σ est une r-renotation, alors toute réalisation $[K] : [T] \dashrightarrow [T']$ d'exposant r est naturellement équivalente à une réalisation $[K_\sigma] : [T] \dashrightarrow [T']$, d'exposant r et σ-cohérente.*

Preuve. Pour tout entier m, $(K(\pi_m(i)) : T'^{rm} \dashrightarrow T'^{r})_{1 \leq i \leq m}$ est, par hypothèse (voir Annexe, § 4), un cône produit dans T', présentant T'^{rm} comme produit de m copies de T'^{r}. Il en résulte que $(\pi'_r(j) . K(\pi_m(i)) : T'^{rm} \dashrightarrow T')_{1 \leq j \leq r, 1 \leq i \leq m}$ est un cône produit dans T', présentant T'^{rm} comme produit de rm copies de T'. En

conséquence, il existe une unique flèche (nécessairement inversible) $k_m : T'^{rm} \dashrightarrow T'^{rm}$ de T' telle que :
- pour tout $1 \leq j \leq r$ et pour tout $1 \leq i \leq m$, on a

$$(\alpha) \qquad \pi'_r(j) . K(\pi_m(i)) . k_m = \pi'_{rm}(\sigma_m(j,i)).$$

Définissons alors un foncteur $K_\sigma : T \dashrightarrow T'$ en posant :
- pour tout entier m ,

$$(\beta) \qquad K_\sigma(T^m) = K(T^m) = T'^{rm} ,$$

- pour tous entiers m et n et pour toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T^n$ de T,

$$(\gamma) \qquad K_\sigma(t) = k_n^{-1} . K(t) . k_m .$$

Clairement, K_σ est naturellement équivalent à K.
Comme K commute, par hypothèse, aux produits finis, il en est de même de K_σ . En utilisant (β) , on voit que $[K_\sigma] : [T] \dashrightarrow [T']$ est une réalisation d'exposant r naturellement équivalente à $[K]$.

Pour tout $1 \leq j \leq r$, pour tout entier m et pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$\begin{aligned}
\pi'_r(\sigma_1(j,1)) . K_\sigma(\pi_m(i)) &= \pi'_r(\sigma_1(j,1)) . k_1^{-1} . K(\pi_m(i)) . k_m \\
&= \pi'_r(j) . K(\pi_1(1)) . K(\pi_m(i)) . k_m \\
&\text{(en appliquant } (\alpha) \text{ , où l'on fait } m = 1 \text{)} \\
&= \pi'_r(j) . K(\pi_m(i)) . k_m \\
&\text{(puisque } \pi_1(1) = id(T) \text{ - voir Annexe , § 4)} \\
&= \pi'_{rm}(\sigma_m(j,i)) \\
&\text{(d'après } (\alpha) \text{) .}
\end{aligned}$$

Ainsi, $[K_\sigma]$ est σ-cohérente . ***Fin de la preuve***.

En particulier, il est facile de vérifier que, si $r = 1$, si σ est une r-renotation et si pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $1 \leq i \leq m$ on a $\sigma_m(1, i) = i$, alors les réalisations d'exposant 1 et σ-cohérentes sont exactement les homomorphismes.

De même, si $[T_{Ens}]$ désigne la théorie de Lawvere des ensembles (i.e. la duale de la sous-catégorie pleine de Ens dont les objets sont les $\{1, \dots, m\}$, quand m parcourt $\mathbf{N}$ - voir Lawvere [1968]) et si $[T]$ est une quelconque théorie de Lawvere, on sait qu'il existe un et un seul homomorphisme $Cano_{[T]} : [T_{Ens}] \dashrightarrow [T]$.
Mieux, si r est un entier et si σ est une r-renotation, on voit qu'il existe une et une seule réalisation $Cano_{\sigma,[T]} : [T_{Ens}] \dashrightarrow [T]$ d'exposant r et σ-cohérente.

Alors, si $[T']$ est une autre théorie de Lawvere et si $[K] : [T] \dashrightarrow [T']$ est une réalisation d'exposant r, les deux assertions suivantes sont équivalentes :
- $[K]$ est σ-cohérente,
- le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} & {[T_{\mathrm{Ens}}]} \arrow[dl, "\mathrm{Cano}_{[T]}"'] \arrow[dr, "\mathrm{Cano}_{\sigma, [T']}"] & \\ {[T]} \arrow[rr, "{[K]}"'] & & {[T']} \end{tikzcd}$$

Supposons de nouveau que $h : A \dashrightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, où A' est un A-module libre de dimension r.
Avec les notations du § 1, dire que $[K]$ (restriction de $U^{op} : A'\text{-Mod}^{op} \dashrightarrow A\text{-Mod}^{op}$) est "cohérente" revient à choisir une A-base particulière de A'.

3. Extensions et degrés

Soit $[T]$ et $[T']$ deux théories de Lawvere et r un entier.

On dit que l'homomorphisme (ou, plus généralement, la réalisation) $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ admet la réalisation $[G] : [T'] \dashrightarrow [T]$, d'exposant r, pour *adjointe à gauche* si et seulement si :
- le foncteur (sous-jacent) $G : T' \dashrightarrow T$ est adjoint à gauche du foncteur (sous-jacent) $H : T \dashrightarrow T'$.

Dualement, on dit que l'homomorphisme (ou, plus généralement, la réalisation) $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ admet la réalisation $[D] : [T'] \dashrightarrow [T]$, d'exposant r, pour *adjointe à droite* si, et seulement si :
- le foncteur (sous-jacent) $D : T' \dashrightarrow T$ est adjoint à droite du foncteur (sous-jacent) $H : T \dashrightarrow T'$.

Clairement, en vertu de la proposition 2 qui précède, si $[H]$ admet une réalisation d'exposant r, adjointe à gauche (resp. adjointe à droite) et si σ est une r-renotation, alors $[H]$ admet une réalisation, d'exposant r, adjointe à gauche (resp. à droite) et σ-cohérente.

Soit $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ un homomorphisme de théories de Lawvere et r un entier.

On dit que [H] est une *extension droite de degré* r si, et seulement si :
- il existe une réalisation [G] : [T'] ----> [T] , d'exposant r , telle que :
    + [G] est adjointe à gauche de [H] ,
    + le foncteur G . H : T ----> T est r-déployé.

S'il n'y a aucun risque de confusion concernant [H] , on dira plus simplement que c'est [T'] qui est une *extension droite de degré* r de [T].

De même, on dit que [H] est une *extension gauche de degré* r si, et seulement si :
- il existe une réalisation [D] : [T'] ----> [T] , d'exposant r , telle que :
    + [D] est adjointe à droite de [H] ,
    + le foncteur D . H : T ----> T est r-déployé.

S'il n'y a aucun risque de confusion concernant [H] , on dira plus simplement que c'est [T'] qui est une *extension gauche de degré* r de [T].

(Les adjectifs *droite* et *gauche* utilisés dans les deux définitions qui précèdent font référence aux côtés où H est adjoint.)

Par exemple, si A est un anneau commutatif unitaire, la théorie [T] des A-modules est aussi une catégorie additive et End (T) = Hom $_{[T]}$ (T , T) = A suffit à reconstruire [T] (dont les flèches s'interprètent comme des matrices à coefficients dans A) . De même, si h : A ----> A' est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, alors h : End (T) ---> End(T') permet de reconstruire l'homomorphisme (également additif) [H] : [T] ----> [T'] dont h est une restriction.

Ceci constaté et pour ne s'en tenir qu'à une situation ultra-standard, on voit que si h : A ----> A' est un homomorphisme entre *corps de caractéristique nulle* , alors un pur calcul matriciel permet de vérifier (purement syntaxiquement) que [H] est une extension (au sens précédent) , indifféremment droite ou gauche, de degré r si et seulement si A' est une extension (au sens classique) de A de degré r .

4. Cohérence totale des extensions

Si [H] : [T] ----> [T'] est une extension droite (resp. gauche) de degré r , nous allons montrer que non seulement la réalisation adjointe à gauche (resp. à droite) [G] (resp. [D]) peut-être choisie cohérente, en vertu de la prop. 2 , § 2 , mais aussi le déploiement de G . H (resp. de D . H) : ainsi, non seulement on peut dire que toute extension est cohérente (comme son adjoint) mais aussi doublement - ou *totalement* - cohérente.

Précisément, soit r un entier, σ une r-renotation et [T] une théorie de Lawvere.

Pour tout entier $1 \leq j \leq r$ et pour tout entier m, on note $\pi^{\sigma}{}_m(j) : T^{rm} \dashrightarrow T^m$ l'unique flèche de T telle que :
- pour tout entier $1 \leq i \leq m$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& T^{rm} \arrow[dl, "\pi_{rm}(\sigma_m(j,i))"'] \arrow[d, "\pi^{\sigma}{}_m(j)"] \\
T & T^m \arrow[l, "\pi_m(i)"]
\end{tikzcd}$$

autrement dit, on a :

$$\pi_{rm}(\sigma_m(j,i)) = \pi_m(i) . \pi^{\sigma}{}_m(j) .$$

En particulier, pour $m = 1$, on vérifie que :
- pour tout $1 \leq j \leq r$, on a,

$$\pi^{\sigma}{}_1(j) = \pi_r(\sigma_1(j,1)),$$
$$(\text{puisque } \pi_1(1) = \mathrm{id}(T)).$$

Ainsi, pour tout entier m, $\pi^{\sigma}{}_m = (\pi^{\sigma}{}_m(j))_{1 \leq j \leq r}$ est un cône produit dans T, présentant T^{rm} comme produit de r copies de T^m.

Dans ces conditions, montrons donc que :

***Proposition* 3**. *Si* $[T]$ et $[T']$ *sont deux théories de Lawvere, si* r *est un entier, si* $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ *est une extension gauche de degré* r *et si* σ *est une* r*-renotation, alors il existe une unique réalisation* $[D^{\sigma}] : [T'] \dashrightarrow [T]$, *d'exposant* r, *telle que :*
- $[D^{\sigma}]$ *est adjointe à droite de* $[H]$,
- *le foncteur* $D^{\sigma}.H : T \dashrightarrow T'$ *est* r*-déployé et* $\pi^{\sigma} = (\pi^{\sigma}{}_m)_{m \in N}$ *en est un* r*-déploiement,*
- $[D^{\sigma}]$ *est* σ*-cohérente*.

Il en résulte, notamment, que pour tout entier $1 \leq j \leq r$, *pour tous entiers* m *et* n *et pour toute flèche* $t : T^m \dashrightarrow T^n$ *de* T, *le diagramme ci-dessous commute :*

$$\begin{tikzcd}
T^{rn} \arrow[d, "\pi^{\sigma}{}_n(j)"'] & T^{rm} \arrow[l, "D^{\sigma}.H(t)"'] \arrow[d, "\pi^{\sigma}{}_m(j)"] \\
T^n & T^m \arrow[l, "t"]
\end{tikzcd}$$

En particulier, pour tout entier $1 \leq j \leq r$, pour tout entier m et pour tout entier $1 \leq i \leq m$, le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
T^r \arrow[d, "{\pi_r(\sigma_1(j,1)) = \pi^{\sigma}_1(j)}"'] & & T^{rm} \arrow[ll, "{D^{\sigma}.H(\pi_m(i))}"'] \arrow[d, "\pi^{\sigma}_m(j)"] \\
T & & T^m \arrow[ll, "\pi_m(i)"]
\end{tikzcd}$$

Preuve. Soit $[D]:[T] \dashrightarrow [T']$ une réalisation d'exposant r, adjointe à droite de $[H]$, et P un r-déploiement du foncteur $D.H: T \dashrightarrow T$.
Alors, pour tout entier m, $P(T^m) = (P(T^m)_j : T^{rm} \dashrightarrow T^m)_{1 \leq j \leq r}$ est un cône produit dans T, présentant T^{rm} comme produit de r copies de T^m.
En conséquence, pour tout entier m, il existe une unique flèche (nécessairement inversible), $d_m : T^{rm} \dashrightarrow T^{rm}$ de T telle que :
- pour tout entier $1 \leq j \leq r$, on a :

$$(\alpha) \qquad P(T^m)_j \,.\, d_m = \pi^{\sigma}_m(j)\,.$$

Définissons un foncteur $D^{\sigma} : T' \dashrightarrow T$, de la façon suivante :
- pour tout entier m, on pose

$$(\beta) \qquad D^{\sigma}(T'^m) = D(T'^m) = T^{rm},$$

- pour tous entiers m et n et pour toute flèche $t' : T'^m \dashrightarrow T'^n$ de T', on pose

$$(\gamma) \qquad D^{\sigma}(t') = d_n^{-1} \,.\, D(t') \,.\, d_m\,.$$

Il est clair que D^{σ} est naturellement équivalent au foncteur $D : T' \dashrightarrow T$ et donc, comme lui, commute aux produits finis. De plus, d'après (β), $[D^{\sigma}] : [T'] \dashrightarrow [T]$ est une réalisation d'exposant l'entier r.
Comme $[D]$ est adjointe à droite de $[H]$, il en est de même de $[D^{\sigma}]$.

Pour tous entiers m et n, pour tout entier $1 \leq j \leq r$ et pour toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T^n$ de T, on a :

$$\pi^{\sigma}{}_n(j) . D^{\sigma}(H(t)) = \pi^{\sigma}{}_n(j) . d_n^{-1} . D(H(t)) . d_m$$
(d'après (γ))
$$= P(T^n)_j . D(H(t)) . d_m$$
(d'après (α))
$$= t . P(T^m)_j . d_m$$
(puisque P est un r-déploiement de $D . H$)
$$= t . \pi^{\sigma}{}_m(j)$$
(d'après (α)).

Par conséquent, $D^{\sigma} . H : T \dashrightarrow T$ est un foncteur r-déployé dont π^{σ} est un r-déploiement.

Pour tout entier $1 \leq j \leq r$, pour tout entier m et pour tout entier $1 \leq i \leq m$, on a :

$$\pi_r(\sigma_1(j,1)) . D^{\sigma}(\pi'_m(i)) = \pi^{\sigma}{}_1(j) . D^{\sigma}(\pi'_m(i))$$
(par définition)
$$= \pi^{\sigma}{}_1(j) . D^{\sigma}(H(\pi_m(i)))$$
(puisque $[H]$ est un homomorphisme)
$$= \pi_m(i) . \pi^{\sigma}{}_m(j)$$
(puisque π^{σ} est un r-déploiement de $D^{\sigma} . H$)
$$= \pi_{rm}(\sigma_m(j,i))$$
(par définition).

On en déduit que $[D^{\sigma}]$ est une réalisation σ-cohérente.

L'unicité de $[D^{\sigma}]$ est évidente. ***Fin de la preuve.***

En changeant "droite" en "gauche" et D en G dans la preuve précédente, on établit de même que :

Proposition 4. *Si* $[T]$ et $[T']$ *sont deux théories de Lawvere, si* r *est un entier, si* $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ *est une extension droite de degré* r *et si* σ *est une r-renotation, alors il existe une unique réalisation* $[G^{\sigma}] : [T'] \dashrightarrow [T]$, *d'exposant* r, *telle que :*
- $[G^{\sigma}]$ *est adjointe à droite de* $[H]$,
- *le foncteur* $G^{\sigma} . H : T \dashrightarrow T$ *est r-déployé et* $\pi^{\sigma} = (\pi^{\sigma}{}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *en est un r-déploiement,*
- $[G^{\sigma}]$ *est* σ*-cohérente.*

Il en résulte, notamment, que pour tout entier $1 \leq j \leq r$, *pour tous entiers* m *et* n *et pour toute flèche* $t : T^m \dashrightarrow T^n$ *de* T, *le diagramme ci-dessous commute :*

$$\begin{tikzcd}
T^{rn} \arrow[d, "\pi^{\sigma}{}_n(j)"'] & & T^{rm} \arrow[ll, "G^{\sigma}.H(t)"'] \arrow[d, "\pi^{\sigma}{}_m(j)"] \\
T^n & & T^m \arrow[ll, "t"]
\end{tikzcd}$$

En particulier, pour tout entier $1 \leq j \leq r$ *, pour tout entier* m *et pour tout entier* $1 \leq i \leq m$ *, le diagramme ci-dessous commute :*

$$\begin{tikzcd}
T^r \arrow[d, "\pi_r(\sigma_1(j,1)) = \pi^{\sigma}{}_1(j)"'] & & T^{rm} \arrow[ll, "G^{\sigma}.H(\pi_m(i))"'] \arrow[d, "\pi^{\sigma}{}_m(j)"] \\
T & & T^m \arrow[ll, "\pi_m(i)"]
\end{tikzcd}$$

CHAPITRE 3

Traduction syntaxe vs. sémantique : extensions et contractions

Sommaire

0. Introduction

Nous avons établi au Chap. 1 que l'adjonction canonique $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$, induite par un homomorphisme $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ entre théories de Lawvere (voir Annexe, § 4), était de puissance (resp. de co-puissance) r si, et seulement si, elle était la contraction droite (resp. gauche) d'indice r d'une sur-adjonction $(L', L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ (resp. $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]), R')$. Nous y avons donc établi l'équivalence de deux propriétés *sémantiques*:
- la première, constructive, énoncée en termes de déploiements (resp. co-déploiements) et puissances (resp. co-puissances),
- la deuxième, globale, énoncée en termes d'existence d'adjoints (en plus grand nombre que prévu).

Au Chap. 2 nous avons développé un autre cadre, purement *syntaxique*, celui des extensions droites (resp. gauches), en signalant notamment comment il englobe celui, ultra-standard, des extensions de corps de degré fini.

L'objet de ce Chap. 3 est justement de prouver que le point de vue du Chap. 1 n'est que la version sémantique du point de vue syntaxique élaboré au Chap. 2.

Ainsi, nous montrons au § 1 que $[H]$ est une extension gauche de degré r si, et seulement si, $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est une contraction droite d'indice r.

Dualement (la terminologie mise au point aux Chap. 1 et 2 justifiant l'utilisation de cet adverbe), nous prouvons au § 2 que [H] est une extension droite de degré r si, et seulement si, $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est une contraction gauche d'indice r.

1. Extensions gauches et contractions droites

Montrons que :

Proposition 1. *Si r est un entier, si [T] et [T'] sont deux théories de Lawvere et si $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ est un homomorphisme (voir Annexe, § 4), alors [H] est une extension gauche de degré r si, et seulement si, l'une des deux conditions suivantes, équivalentes d'après la prop.* 5, *Chap.* 1, § 5, *est vérifiée*:
- *l'adjonction canonique* $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ *est une contraction droite d'indice* r,
- *l'adjonction canonique* $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ *est de puissance* r.

Preuve. Supposons que [H] est une extension gauche de degré r et choisissons une r-renotation σ.
Nous pouvons appliquer la prop. 3, Chap. 2, § 4, dont nous reprenons les notations.
Comme π^σ est un r-déploiement de $D^\sigma . H : T \dashrightarrow T$ et comme tout modèle commute aux produits finis, on voit que :
- naturellement en tout modèle $F : [T] \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ et en tout objet T^m de [T], le cône projectif :

$$P(F)(T^m) = (F(\pi^\sigma{}_m(j)) : F(D^\sigma(H(T^m))) \dashrightarrow F(T^m))_{1 \leq j \leq r}$$

présente l'ensemble :

$$F(D^\sigma(H(T^m))) = F . D^\sigma . H(T^m) = \mathrm{Mod}([H]) . \mathrm{Mod}([D^\sigma])(F)(T^m)$$

comme produit, dans **Ens**, de r copies de $F(T^m)$.
Les produits se calculant point par point dans $\mathrm{Mod}([T])$, on en déduit que :
- naturellement en tout objet F de $\mathrm{Mod}([T])$, le cône projectif $P(F)$ présente l'objet $\mathrm{Mod}([H]) . \mathrm{Mod}([D^\sigma])(F)$ comme produit, dans $\mathrm{Mod}([T])$, de r copies de F,

donc le foncteur $\mathrm{Mod}([H]) . \mathrm{Mod}([D^\sigma]) : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$ est r-déployé.
La réalisation $[D^\sigma]$ étant adjointe à droite de [H], il est facile de vérifier que le foncteur $\mathrm{Mod}([D^\sigma])$ est adjoint à gauche de $\mathrm{Mod}([H])$. Il est donc naturellement équivalent à $L_{[H]}$ et l'adjonction $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est donc bien de puissance r.

Réciproquement, supposons que l'adjonction $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est de puissance r ou, ce qui est équivalent, que $L' : \mathrm{Mod}([T']) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$ est un adjoint à gauche de $L_{[H]}$, de sorte que $L' . L_{[H]}$ est r-co-déployé.
Alors, pour tout entier m et naturellement en tout objet F de $\mathrm{Mod}([T])$, on a :

$$\mathrm{Hom}(L'(Y_{[T']}(T'^m)), F) \simeq \mathrm{Hom}(Y_{[T']}(T'^m), L_{[H]}(F))$$
$$= \mathrm{Hom}(L_{[H]}(Y_{[T]}(T^m)), L_{[H]}(F))$$
(puisque $Y_{[T']} . H = L_{[H]}^{op} . Y_{[T]}$ - voir Annexe, § 4, prop. 9)
$$\simeq \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^m), \mathrm{Mod}([H])\ (L_{[H]}(F)))$$
$$\simeq \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^m), F^r)$$
(par hypothèse)
$$= \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^m), F)^r = \mathrm{Hom}(r . Y_{[T]}(T^m), F) = \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^{rm}), F).$$

On a donc un isomorphisme $\delta_m : L'(Y_{[T']}(T'^m)) \dashrightarrow Y_{[T]}(T^{rm})$ dans $\mathrm{Mod}([T])$.
Pour tout entier m, posons $D(T'^m) = T^{rm}$.
Pour toute flèche $t' : T'^m \dashrightarrow T'^n$ de T', le diagramme ci-dessous est évidemment commutatif :

$$\begin{tikzcd}
L'(Y_{[T']}(T'^n)) \arrow[rr, "L'(Y_{[T']}(t'))"] \arrow[d, "\delta_n"'] & & L'(Y_{[T']}(T'^m)) \arrow[d, "\delta_m"] \\
Y_{[T]}(T^{rn}) \arrow[rr, "\delta_m . L'(Y_{[T']}(t')) . \delta_n^{-1}"'] & & Y_{[T]}(T^{rm})
\end{tikzcd}$$

Le foncteur $Y_{[T]}$ étant plein et fidèle (voir Annexe, § 4, prop. 8), il existe donc une unique flèche $t : T^{rm} \dashrightarrow T^{rn}$, de $[T]$, telle que $Y_{[T]}(t) = \delta_m . L' . Y_{[T']}(t') . \delta_n^{-1}$. Alors, on pose $D(t') = t$.
Il est facile de vérifier qu'on définit ainsi un foncteur $D : T' \dashrightarrow T$ qui est une restriction pleine de L'^{op} (par construction), i.e. tel que $L'^{op} . Y_{[T']} = Y_{[T]} . D$.
Comme L' est adjoint à gauche de $L_{[H]}$, le foncteur L'^{op} est adjoint à droite du foncteur $L_{[H]}^{op}$. En conséquence sa restriction D est adjointe à droite de H et, notamment, commute aux produits finis. Donc $[D] : [T'] \dashrightarrow [T]$ est une réalisation d'exposant r par construction (de plus, on a $L_{[H]} \simeq \mathrm{Mod}(D)$).
Ainsi $[H]$ est une extension gauche de degré r. ***Fin de la preuve***.

Par exemple, soit $h : A \dashrightarrow A'$ un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, où A' est un A-module libre de dimension r.

Si $[T]$ (resp. $[T']$) est la théorie des A-modules (resp. des A'-modules) et si l'on désigne par $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ l'homomorphisme induit par h , on sait que (voir Chap. 1 , § 5) $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est une contraction droite d'indice r . On déduit donc de la prop. 1 précédente que $[H]$ est une extension gauche de degré r (en particulier que H admet un adjoint à droite D). On peut dire aussi que, si A' est une extension (classique) de degré r de A , alors $[T']$ est une extension gauche de degré r de $[T]$.

2. Extensions droites et contractions gauches

Montrons que :

Proposition 2. *Si r est un entier, si $[T]$ et $[T']$ sont deux théories de Lawvere et si $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ est un homomorphisme (voir Annexe , § 4), alors $[H]$ est une extension droite de degré r si, et seulement si, l'une des deux conditions suivantes, équivalentes d'après la prop. 6 , Chap. 1 , §5 , est vérifiée:*
- l'adjonction canonique $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ esr une contraction gauche d'indice r ,
- l'adjonction canonique $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est de co-puissance r .

Preuve. Supposons que $[H]$ est une extension droite de degré r et choisissons une r-renotation σ .
Nous pouvons appliquer la prop. 4 , Chap. 2 , § 4 , dont nous reprenons les notations.
Alors, il est facile de voir que $\mathrm{Mod}([G^\sigma])$ est un adjoint à droite de $\mathrm{Mod}([H])$. Nous disposons donc de la sur-adjonction $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]), \mathrm{Mod}([G^\sigma]))$.
De plus, comme π^σ est un r-déploiement de $G^\sigma . H : T \dashrightarrow T$ et comme tout modèle commute aux produits finis, on voit que :
- naturellement en tout modèle $F : [T] \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ et en tout objet T^m de $[T]$, le cône projectif :

$$P(F)(T^m) = (F(\pi^\sigma{}_m(j)) : F(G^\sigma(H(T^m))) \dashrightarrow F(T^m))_{1 \le j \le r}$$

présente l'ensemble :

$$F(G^\sigma(H(T^m))) = F . D^\sigma . H(T^m) = \mathrm{Mod}([H]) . \mathrm{Mod}([G^\sigma])(F)(T^m)$$

comme produit, dans **Ens**, de r copies de $F(T^m)$.
Les produits se calculant point par point dans $\mathrm{Mod}([T])$, on en déduit que :
- naturellement en tout objet F de $\mathrm{Mod}([T])$, le cône projectif $P(F)$ présente l'objet $\mathrm{Mod}([H]) . \mathrm{Mod}([G^\sigma])(F)$ comme produit, dans $\mathrm{Mod}([T])$, de r copies de F .

Autrement dit, le foncteur $\mathrm{Mod}([H]) . \mathrm{Mod}([G^{\sigma}]) : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])$ est r-déployé, i.e. l'adjonction canonique $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est une contraction gauche d'indice r.

Réciproquement, supposons que l'adjonction $(L_{[H]}, \mathrm{Mod}([H]))$ est de co-puissance r ou, ce qui est équivalent, qu'il existe un foncteur $R' : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T'])$, adjoint à droite du foncteur $\mathrm{Mod}([H])$, de sorte que $\mathrm{Mod}([H]) . R'$ est r-déployé.
Pour tout entier m et naturellement en tout objet F de $\mathrm{Mod}([T])$, on a :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(\mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(T'^{m})), F) &\simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Mod}([H])(L_{[H]}(Y_{[T]}(T^{m}))), F) \\
&\simeq \mathrm{Hom}(r . Y_{[T]}(T^{m}), F) \\
&\qquad \text{(par hypothèse)} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(T^{rm}), F) .
\end{aligned}
$$

On a donc un isomorphisme $\gamma_m : \mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(T'^{m})) \dashrightarrow Y_{[T]}(T^{rm})$ dans $\mathrm{Mod}([T])$.
Pour tout entier m, posons $G(T'^{m}) = T^{rm}$.
Pour toute flèche $t' : T'^{m} \dashrightarrow T'^{n}$ de T', le diagramme ci-dessous est évidemment commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(T'^{m})) \arrow[d, "\gamma_m"'] & & \mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(T'^{n})) \arrow[ll, "\mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(t'))"'] \arrow[d, "\gamma_n"] \\
Y_{[T]}(T^{rm}) & & Y_{[T]}(T^{rn}) \arrow[ll, dashed, "\gamma_m . \mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(t')) . \gamma_n^{-1}"]
\end{tikzcd}
$$

Le foncteur $Y_{[T]}$ étant plein et fidèle (voir Annexe, § 4, prop. 8), il existe donc une unique flèche $t : T^{rm} \dashrightarrow T^{rn}$, de $[T]$, telle que :

$$
Y_{[T]}(t) = \gamma_m . \mathrm{Mod}([H])(Y_{[T']}(t')) . \gamma_n^{-1} .
$$

Alors, on pose $G(t') = t$.
Il est facile de vérifier qu'on définit ainsi un foncteur $G : T' \dashrightarrow T$ qui est une restriction pleine de $\mathrm{Mod}([H])^{op}$ (par construction), i.e. tel que $\mathrm{Mod}([H])^{op} . Y_{[T']} = Y_{[T]} . G$.
Comme $L_{[H]}^{op}$ est adjoint à droite de $\mathrm{Mod}([H])^{op}$, G est adjoint à gauche de H (ce dernier étant restriction pleine de $L_{[H]}^{op}$ d'après la prop. 9, Annexe, § 4).

Par hypothèse, Mod ([H]) a un adjoint à droite R'. Donc G, comme Mod ([H])^{op}, commute aux produits finis. Ainsi [G] : [T'] ----> [T] est une réalisation d'exposant r par construction (de plus, R' $\simeq$ Mod ([G])).
On conclut donc que [H] est une extension droite de degré r. ***Fin de la preuve***.

Par exemple, supposons de nouveau que h : A ----> A' est un homomorphisme d'anneaux commutatifs unitaires, où A' est un A-module libre de dimension r.
Notons encore [T] (resp. [T']) la théorie des A-modules (resp. des A'-modules) et [H] : [T] ----> [T'] l'homomorphisme induit par h.

On sait aussi que (voir Chap. 1, § 5) ($L^!_{[H]}$, Mod ([H])) est une contraction gauche d'indice r. On déduit donc de la prop. 2 précédente que [H] est une extension droite de degré r (en particulier que H admet un adjoint à gauche G).

On peut donc dire, compte tenu du § 1, que si A' est une extension (classique) de degré r de A, alors [T'] est une extension gauche *et* droite de degré r de [T] (ce qui redonne, par traduction de la sémantique vers la syntaxe, le résultat signalé en fin de § 3, Chap. 2).

CHAPITRE 4

Extensions et extenseurs

Sommaire

0. Introduction

Au Chap. 3, nous avons établi que les adjonctions *canoniques* (L, U) (i.e. celles où U est un foncteur *théorisable*) pour lesquelles existe un déploiement (resp. un co-déploiement) $U . L = (-)^r$ (resp. $U . L = r . (-)$) sont induites exactement par les homomorphismes $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ entre théories de Lawvere qui sont des extensions gauches (resp. droites) de degré r.
On obtient de la sorte une procédure complète de traduction entre le point de vue sémantique du Chap. 1 et le point de vue syntaxique du Chap. 2.

On peut estimer cependant que la notion (sémantique) de déploiement (resp. de co-déploiement) est suffisamment pratique, alors que sa traduction syntaxique en terme *d'existence de réalisations adjointes* ne l'est guère.
C'est l'objectif du présent Chap. 4 (mais aussi des suivants) d'élaborer des procédés purement syntaxiques de construction pratique d'extensions.

Ainsi, nous établissons au § 3 que toute extension $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ est entièrement déterminée par ce qui se passe uniquement sur $[T]$. Précisément, une telle extension quelconque $[T']$ de $[T]$ est nécessairement (isomorphe à) une extension particulière, dite de Kleisli, comme établi au § 2. Autrement dit, toute extension est (isomorphe à) une structure canonique de théorie de Lawvere sur la catégorie de Kleisli d'une certaine monade (resp. co-monade) sur $[T]$, i.e. d'un extenseur au sens du § 1.

1. Extenseurs

Soit r un entier, σ une r-renotation (voir Chap. 2, § 2) et $[T]$ une théorie de Lawvere (voir Annexe, § 4).

On dit que $[M] = ([M], \omega, \mu)$ est un *σ-extenseur gauche de degré r* sur $[T]$ si, et seulement si :
- $[M] : [T] \dashrightarrow [T]$ est une réalisation d'exposant r, σ-cohérente (voir Chap. 2, § 2),
- $M : T \dashrightarrow T$ est un foncteur r-déployé admettant π^σ pour r-déploiement (voir Chap. 2, § 4),
- $\mathbf{M} = (M, \omega, \mu)$ est une monade sur T (voir Annexe, § 2).

De même, on dit que $[M'] = ([M'], \omega', \mu')$ est un *σ-extenseur droit de degré r* sur $[T]$ si, et seulement si :
- $[M'] : [T] \dashrightarrow [T]$ est une réalisation d'exposant r, σ-cohérente,
- $M' : T \dashrightarrow T$ est un foncteur r-déployé admettant π^σ pour r-déploiement,
- $\mathbf{M'} = (M', \omega', \mu')$ est une co-monade sur T (voir Annexe, § 2).

Par exemple, supposons encore que $h : A \dashrightarrow A'$ est un homomorphisme d'anneaux commutatifs, unitaires, désignons toujours par $[T]$ (resp. $[T']$) la théorie des A-modules (resp. A'-modules) et par $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ l'homorphisme induit par h.

On sait (voir Chap. 3, §§ 1 et 2) que, si A' est une extension de degré r de A, alors $[H]$ est une extension, tant droite que gauche, de degré r. D'après les prop. 3 et 4, Chap. 2, § 4, (dont nous reprenons les notations), $[H]$ est totalement cohérente. Aussi, on voit que $[D^\sigma . H] : [T] \dashrightarrow [T]$ (resp. $[G^\sigma . H] : [T] \dashrightarrow [T]$) est (sous-jacent à) un extenseur gauche (resp. droit) de degré r sur $[T]$.
(Ce procédé de construction d'un extenseur à partir d'une extension est évidemment général comme nous le verrons en au § 3.)

2. Extension de Kleisli des extenseurs

On sait qu'à toute monade (resp. co-monade) sur une catégorie est associée une catégorie de Kleisli et une adjonction canonique (voir Annexe, § 2). Il est remarquable d'établir que cette propriété se transfère au cas beaucoup plus structuré des extenseurs sur les théories de Lawvere et des extensions.

Précisément, montrons que :

***Proposition* 1.** *Si r est un entier, si σ est une r-renotation, si $[T]$ est une théorie de Lawvere et si $[M]$ est un σ-extenseur gauche de degré r sur $[T]$, alors la* *catégorie de Kleisli de la monade (sous-jacente)* $\mathbf{M}$ *est canoniquement munie d'une structure de théorie de Lawvere qui est une extension gauche de degré* r *de* $[T]$.

Preuve. A la monade $\mathbf{M} = (M, \omega, \mu)$ est associée sa catégorie de Kleisli $T(\mathbf{M})$ et une adjonction canonique (voir la preuve de la prop.1, Annexe, § 2) :

$$(H(\mathbf{M}) : T \dashrightarrow T(\mathbf{M}),\ D(\mathbf{M}) : T(\mathbf{M}) \dashrightarrow T).$$

Ainsi, les objets de $T(\mathbf{M})$ sont les mêmes que ceux de T, mais pour plus de commodité on notera :
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, $T(\mathbf{M})^m$ au lieu de T^m, lorsque T^m est vu comme objet de $T(\mathbf{M})$.

Alors, les flèches $t : T^m \dashrightarrow M(T^n)$ de T sont exactement les flèches de $T(\mathbf{M})$ notées $t : T(\mathbf{M})^m \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M})^n$.

Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ et tout entier $1 \leq i \leq m$, on dispose de la flèche de T :

$$\pi(\mathbf{M})_m(i) : T^m \xrightarrow[\pi_m(i)]{} T \xrightarrow[\omega(T)]{} M(T),$$

donc de la flèche de $T(\mathbf{M})$:

$$\pi(\mathbf{M})_m(i) : T(\mathbf{M})^m \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M}).$$

En particulier, on voit que, dans la catégorie T, on a :

$$\pi(\mathbf{M})_1(1) = \omega(T).\pi_1(1)$$
(par définition)
$$= \omega(T).\mathrm{id}(T)$$
(puisque $[T]$ est une théorie de Lawvere)
$$= \omega(T),$$

ce qui signifie par définition, que dans la catégorie $T(\mathbf{M})$, on a :

(α) $\pi(\mathbf{M})_1(1) = \mathrm{id}(T(\mathbf{M}))$.

Soit m et n deux entiers et $(t_i : T(\mathbf{M})^n \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M}))_{1 \leq i \leq m}$ une famille de flèches de $T(\mathbf{M})$. Ceci signifie, par définition, que $(t_i : T^n \dashrightarrow M(T))_{1 \leq i \leq m}$ est une famille de flèches de T. Comme, par hypothèse, $M : T \dashrightarrow T$ commute aux produits finis, on voit qu'il existe une unique flèche $h : T^n \dashrightarrow M(T^m)$ de T telle que, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

(β) $M(\pi_m(i)).h = t_i$.

Ainsi, $h : T(\mathbf{M})^n \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M})^m$ est une flèche de $T(\mathbf{M})$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$\pi(\mathbf{M})_m(i) \cdot_{KL} h = \mu(T) \cdot M(\pi(\mathbf{M})_m(i)) \cdot h$$

(par définition de la composition " $\cdot_{KL}$ " dans la catégorie de Kleisli $T(\mathbf{M})$)

$$= \mu(T) \cdot M(\omega(T) \cdot \pi_m(i)) \cdot h$$

(par définition)

$$= \mu(T) \cdot M(\omega(T)) \cdot M(\pi_m(i)) \cdot h$$

(M étant un foncteur)

$$= id(M(T)) \cdot M(\pi_m(i)) \cdot h$$

($\mathbf{M}$ étant une monade)

$$= M(\pi_m(i)) \cdot h$$

$$= t_i$$

(d'après (β)).

Supposons maintenant que $h' : T(\mathbf{M})^n \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M})^m$ est une autre flèche de $T(\mathbf{M})$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

(γ) $\pi(\mathbf{M})_m(i) \cdot_{KL} h' = t_i$.

Ceci signifie que $h' : T^n \dashrightarrow M(T^m)$ est une flèche de T telle que, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$t_i = \mu(T) \cdot M(\pi(\mathbf{M})_m(i)) \cdot h'$$

(d'après (γ) et par définition de " $\cdot_{KL}$ ")

$$= \mu(T) \cdot M(\omega(T) \cdot \pi_m(i)) \cdot h'$$

(par dédinition)

$$= \mu(T) \cdot M(\omega(T)) \cdot M(\pi_m(i)) \cdot h'$$

(M étant un foncteur)

$$= id(M(T)) \cdot M(\pi_m(i)) \cdot h'$$

($\mathbf{M}$ étant une monade)

$$= M(\pi_m(i)) \cdot h'$$

$$= M(\pi_m(i)) \cdot h$$

(d'après (β) et (γ)).

Mais cela impose, puisque M commute aux produits, $h = h'$.
On en conclut que :

(δ) pour tout $m \in \mathbf{N}$, la famille $\pi(\mathbf{M})_m = (\pi(\mathbf{M})_m(i) : T(\mathbf{M})^m \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M}))_{1 \leq i \leq m}$ est un cône projectif produit, présentant $T(\mathbf{M})^m$ comme produit de m copies de $T(\mathbf{M})$ dans $T(\mathbf{M})$.

De (α) et (δ) résulte que $[T(\mathbf{M})] = (T(\mathbf{M}), (\pi(\mathbf{M})_m)_{m \in \mathbf{N}^*})$ est bien une théorie de Lawvere.

Ensuite, on voit que (en utilisant la preuve de la prop. 1, Annexe, § 2) :
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, on a par définition $H(\mathbf{M})(T^m) = T^m = T(\mathbf{M})^m$,
- pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $1 \leq i \leq m$, on a $H(\mathbf{M})(\pi_m(i)) = \omega(T) . \pi_m(i) = \pi(\mathbf{M})_m(i)$ par définition.
Autrement dit, $[H(\mathbf{M})] : [T] \dashrightarrow [T(\mathbf{M})]$ est bien un homomorphisme de théories de Lawvere.

De même, on voit que :
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, on a :

$$D(\mathbf{M})(T(\mathbf{M})^m) = D(\mathbf{M})(T^m)$$
(par définition)
$$= M(T^m)$$
(par définition)
$$= T^{rm}$$
($[M]$ étant d'exposant r),

- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ et pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$(\varepsilon) \qquad D(\mathbf{M})(\pi(\mathbf{M})_m(i)) = \mu(T) . M(\pi(\mathbf{M})_m(i))$$
(par définition)
$$= \mu(T) . M(\omega(T) . \pi_m(i))$$
(par définition)
$$= \mu(T) . M(\omega(T)) . M(\pi_m(i))$$
(M étant un foncteur)
$$= id(T) . M(\pi_m(i))$$
($\mathbf{M}$ étant une monade)
$$= M(\pi_m(i)) .$$

Autrement dit, M commutant aux produits finis, $[D(\mathbf{M})] : [T(\mathbf{M})] \dashrightarrow [T]$ est une réalisation d'exposant r.

De plus, il est clair que :
- $D(\mathbf{M})$ est, par construction, adjoint à droite de $H(\mathbf{M})$,
- $D(\mathbf{M}) . H(\mathbf{M}) = M$ est, par hypothèse, r-déployé.
Et donc, $[H(\mathbf{M})] : [T] \dashrightarrow [T(\mathbf{M})]$ est une extension gauche de degré r, i.e. $[T(\mathbf{M})]$ est une extension gauche de degré r de $[T]$.

Pour conclure, constatons que :
- $D(\mathbf{M}) . H(\mathbf{M}) = M$ est, par hypothèse, un foncteur r-déployé, ayant π^σ comme r-déploiement,
- $[D(\mathbf{M})]$ est une réalisation σ-cohérente puisque, pour tout $1 \leq j \leq r$, pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ et tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$\pi_r(\sigma_1(j,1)).D(M)(\pi(M)_m(i)) = \pi_r(\sigma_1(j,1)).M(\pi_m(i))$$
(d'après (ε))
$$= \pi_{rm}(\sigma_m(j,i))$$
($[M]$ étant σ-cohérente).

Fin de la preuve.

Conservant les hypothèses et notations de la prop. 1 précédente et de sa preuve, nous dirons que $[T(M)]$ (ou, plus précisément, $[H(M)]:[T] \dashrightarrow [T(M)]$) est l'*extension de Kleisli* (*gauche*) du σ-extenseur gauche (de degré r) $[M]$.

De même et dualement (en un sens largement justifié par la terminologie que nous avons adoptée), prouvons que :

***Proposition* 2.** *si r est un entier, si σ est une r-renotation, si $[T]$ est une théorie de Lawvere et si $[M']$ est un σ-extenseur droit de degré r sur $[T]$, alors la catégorie de Kleisli de la co-monade (sous-jacente) M' est canoniquement munie d'une structure de théorie de Lawvere qui est une extension droite de degré r de $[T]$.*

Preuve. A la co-monade $M' = (M', \omega', \mu')$ est associée sa catégorie de Kleisli $T(M')$ et une adjonction canonique (voir la preuve de la prop. 2, Annexe, § 2) :

$$(G(M'):T(M') \dashrightarrow T,\ H(M'):T \dashrightarrow T(M')).$$

Ainsi, les objets de $T(M')$ sont les mêmes que ceux de T, mais pour plus de commodité on notera :
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, $T(M')^m$ au lieu de T^m, lorsque T^m est vu comme objet de $T(M')$

Alors les flèches $t:M'(T^m) \dashrightarrow T^n$ de T sont exactement les flèches de $T(M')$ notées $t:T(M')^m \dashrightarrow_{KL} T(M')^n$.

Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ et tout entier $1 \leq i \leq m$, on dispose de la flèche de T :

$$\pi(M')_m(i):M'(T^m) \xrightarrow[\omega'(T^m)]{\qquad} T^m \xrightarrow[\pi_m(i)]{\qquad} T,$$

donc de la flèche de $T(M')$:

$$\pi(M')_m(i):T(M')^m \dashrightarrow_{KL} T(M').$$

En particulier, on voit que, dans la catégorie T, on a :

$$\pi(M')_1(1) = \pi_1(1).\omega'(T)$$
(par définition)

$= id(T) . \omega'(T)$

(puisque $[T]$ est une théorie de Lawvere)

$= \omega'(T)$.

Ceci signifie, par définition, que dans la catégorie $T(\mathbf{M'})$, on a :

(α) $\pi(\mathbf{M'})_1(1) = id(T(\mathbf{M'}))$.

Soit m et n deux entiers et $(t_i : T(\mathbf{M'})^n \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M'}))_{1 \leq i \leq m}$ une famille de flèches de $T(\mathbf{M'})$. Ceci signifie, par définition, que $(t_i : M'(T^n) \dashrightarrow T)_{1 \leq i \leq m}$ est une famille de flèches de T . Il existe donc une unique flèche $h : M'(T^n) \dashrightarrow T^m$ de T telle que, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

(β) $\pi_m(i) . h = t_i$.

Ainsi , $h : T(\mathbf{M'})^n \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M'})^m$ est une flèche de $T(\mathbf{M'})$ telle que, pour tout entier $1 \leq i \leq m$, on a :

$\pi(\mathbf{M'})_m(i) ._{KL} h = \pi(\mathbf{M'})_m . M'(h) . \mu'(T^n)$

(par définition de " $._{KL}$ ")

$= \pi_m(i) . \omega'(T^m) . M'(h) . \mu'(T^n)$

(par définition)

$= \pi_m(i) . h . \omega'(M'(T^n)) . \mu'(T^n)$

(par naturalité , $\mathbf{M'}$ étant une co-monade)

$= \pi_m(i) . h . id(M'(T^n))$

($\mathbf{M'}$ étant une co-monade)

$= \pi_m(i) . h$

$= t_i$

(d'après (β)) .

Supposons maintenant que $h' : T(\mathbf{M'})^n \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M'})^m$ est une autre flèche de $T(\mathbf{M'})$ telle que, pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

(γ) $\pi(\mathbf{M'})_m(i) ._{KL} h' = t_i$.

Ceci signifie que $h' : M'(T^n) \dashrightarrow T^m$ est une flèche de T telle que, pour tout entier $1 \leq i \leq m$, on a :

$t_i = \pi(\mathbf{M'})_m(i) . M'(h') . \mu'(T^n)$

(d'après (γ) et par définition)

$= \pi_m(i) . \omega'(T^m) . M'(h') . \mu'(T^n)$

(par définition)

$$= \pi_m(i) . h' . \omega'(M'(T^n)) . \mu'(T^n)$$
(par naturalité, **M'** étant une co-monade)
$$= \pi_m(i) . h' . id(M'(T^n))$$
(**M'** étant une co-monade)
$$= \pi_m(i) . h'$$
$$= \pi_m(i) . h$$
(d'après (β)).

Mais cela impose $h = h'$, puisque $(\pi_m(i) : T^m \dashrightarrow T)_{1 \leq i \leq m}$ est un cône projectif produit, présentant T^m comme produit, dans T, de m copies de T.
On en conclut, *sans utiliser l'hypothèse que* M' *commute aux produits finis*, que :

(δ) pour tout $m \in \mathbf{N}$, la famille $\pi(\mathbf{M'})_m = (\pi(\mathbf{M'})_m(i) : T(\mathbf{M'})^m \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M'}))_{1 \leq i \leq m}$ est un cône projectif produit, présentant $T(\mathbf{M'})^m$ comme produit de m copies de $T(\mathbf{M'})$ dans $T(\mathbf{M'})$.

De (α) et (β) résulte que $[T(\mathbf{M'})] = (T(\mathbf{M'}), (\pi(\mathbf{M'})_m)_{m \in \mathbf{N}^*})$ est bien une théorie de Lawvere.

Ensuite, on voit que (en utilisant la preuve de la prop. 2, Annexe, § 2) :
- pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a par définition $H(\mathbf{M'})(T^m) = T^m = T(\mathbf{M'})^m$,
- pour tout $m \in \mathbf{N}$ et tout $1 \leq i \leq m$, on a par définition :

$$H(\mathbf{M'})(\pi_m(i)) = \pi_m(i) . \omega'(T^m) = \pi(\mathbf{M'})_m(i).$$

Autrement dit, $[H(\mathbf{M'})] : [T] \dashrightarrow [T(\mathbf{M'})]$ est bien un homomorphisme de théories de Lawvere.

De même, on voit que :
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, on a :

$$G(\mathbf{M'})(T(\mathbf{M'})^m) = G(\mathbf{M'})(T^m)$$
(par définition)
$$= M'(T^m)$$
(par définition)
$$= T^{rm}$$
($[M']$ étant d'exposant r),

- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ et pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$(\varepsilon) \qquad G(\mathbf{M'})(\pi(\mathbf{M'})_m(i)) = M'(\pi(\mathbf{M'})_m(i)) . \mu'(T^m)$$
(par définition)
$$= M'(\pi_m(i) . \omega'(T^m)) . \mu'(T^m)$$
(par définition)

$= M'(\pi_m(i)) \,.\, M'(\omega'(T^m)) \,.\, \mu'(T^m)$

(M' étant un foncteur)

$= M'(\pi_m(i)) \,.\, id\,(T^m)$

(**M'** étant une co- monade)

$= M'(\pi_m(i))$.

Autrement dit , M' commutant aux produits finis, $[\,G\,(\mathbf{M'})\,] : [\,T\,(\mathbf{M'})\,] \dashrightarrow [\,T\,]$ est une réalisation d'exposant r .

De plus, il est clair que :

- $G\,(\mathbf{M'})$ est, par construction, adjoint à gauche de $H\,(\mathbf{M'})$,
- $G\,(\mathbf{M'})\,.\,H\,(\mathbf{M'}) = M'$ est, par hypothèse, r-déployé.

Et donc, $[\,H\,(\mathbf{M'})\,] : [\,T\,] \dashrightarrow [\,T\,(\mathbf{M'})\,]$ est une extension droite de degré r , i.e. $[\,T\,(\mathbf{M'})\,]$ est une extension droite de degré r de $[\,T\,]$.

Pour conclure, constatons que :

- $G\,(\mathbf{M'})\,.\,H\,(\mathbf{M'}) = M'$ est, par hypothèse, un foncteur r-déployé admettant π^{σ} pour r-déploiement,
- $[\,G\,(\mathbf{M'})\,]$ est σ-cohérente puisque, pour tout $1 \leq j \leq r$, pour tout entier $m \in \mathbf{N}$ et tout entier $1 \leq i \leq m$, on a :

$$\pi_r(\sigma_1(j,1)) \,.\, G\,(\mathbf{M'})\,(\pi\,(\mathbf{M'})_m(i)) = \pi_r(\sigma_1(j,1)) \,.\, M'(\pi_m(i))$$

(d'après (ε))

$$= \pi_{rm}(\sigma_m(j,i))$$

([M'] étant σ-cohérente).

Fin de la preuve.

Conservant les hypothèses et notations de la prop. 2 précédente et de sa preuve, nous dirons que $[\,T\,(\mathbf{M'})\,]$ (ou, plus précisément, $[\,H\,(\mathbf{M'})\,] : [\,T\,] \dashrightarrow [\,T\,(\mathbf{M'})\,]$) est l'*extension de Kleisli* (*droite*) du σ-extenseur droit (de degré r) $[\,\mathbf{M'}\,]$.

3. Extensions de Kleisli et extensions

Au même titre qu'à toute adjonction est associée une monade ou une co-monade (voir Annexe , § 2) , toute extension définit évidemment un extenseur (c'est ce qui a été utilisé dans l'exemple du § 1) . Cependant, dans ce cas, plus structuré, un phénomène de rigidité tout à fait essentiel se produit : toute extension est "canonique" , i.e. isomorphe à l'extension de Kleisli de l'extenseur qu'elle définit.

En effet, prouvons que :

***Proposition* 3**. *Si r est un entier, si σ est une r-renotation et si $[T]$ est une théorie de Lawvere, alors toute extension gauche de degré r de $[T]$ est isomorphe à une extension de Kleisli d'un σ-extenseur gauche de degré r sur $[T]$.*
Autrement dit encore, les extensions gauches de degré r sur $[T]$ sont entièrement déterminées, à isomorphisme près, par les σ-extenseurs gauches de degré r sur $[T]$ et réciproquement.

Preuve. Supposons que $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ est une extension gauche de degré r.

La prop. 3, Chap. 2, § 4 (dont nous reprenons les notations) s'applique et l'on voit que :
- à l'adjonction (H, D^{σ}) est associée une monade $\mathbf{M} = (M, \omega, \mu)$ sur T,
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, on a, par construction :

$$
\begin{aligned}
M(T^{m}) &= D^{\sigma} . H(T^{m}) \\
&= D^{\sigma}(T'^{m}) \\
&\text{(puisque } [H] \text{ est un homomorphisme)} \\
&= T^{rm} \\
&\text{(puisque } [D^{\sigma}] \text{ est d'exposant } r\text{)},
\end{aligned}
$$

- $M = D^{\sigma} . H$ commute aux produits finis, puisque D^{σ} et H y commutent, par hypothèse,
- $M = D^{\sigma} . H$ est, par hypothèse, r-déployé et π^{σ} en est un r-déploiement,
- pour tout $1 \leq j \leq r$, pour tout entier m et pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$
\begin{aligned}
\pi_r(\sigma_1(j,1)) . M(\pi_m(i)) &= \pi_r(\sigma_1(j,1)) . D^{\sigma}(H(\pi_m(i))) \\
&\text{(par définition)} \\
&= \pi_r(\sigma_1(j,1)) . D^{\sigma}(\pi'_m(i)) \\
&\text{(puisque } [H] \text{ est un homomorphisme)} \\
&= \pi_{rm}(\sigma_m(j,i)) \\
&\text{(puisque } [D^{\sigma}] \text{ est } \sigma\text{-cohérente)}.
\end{aligned}
$$

Autrement dit, $[\mathbf{M}]$ est un σ-extenseur gauche de degré r sur $[T]$.

Si $T(\mathbf{M})$ désigne (comme dans la preuve de la prop. 1, § 2 précédente, dont nous reprenons toutes les notations) la catégorie de Kleisli de la monade $\mathbf{M}$ sur T, on dispose du foncteur de comparaison (voir Annexe, § 2) $K : T(\mathbf{M}) \dashrightarrow T'$, rendant commutatif le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
T(\mathbf{M}) \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, shift left, "D(\mathbf{M})"] & & T' \arrow[dl, shift left, "D^{\sigma}"] \\
& T \arrow[ul, shift left, "H(\mathbf{M})"] \arrow[ur, shift left, "H"] &
\end{tikzcd}
$$

Alors, pour tout entier m , on a :

$$K(T(\mathbf{M})^{m}) = K(T^{m})$$
(par définition)
$$= H(T^{m})$$
(par définition)
$$= T'^{m}$$
($[H]$ étant un homomorphisme) .

Autrement dit, le foncteur K est bijectif sur les objets et on en déduit, par adjonction, qu'il est inversible.

D'après la prop. 1 , § 2 qui précède, la catégorie de Kleisli $T(\mathbf{M})$ est canoniquement munie d'une structure de théorie de Lawvere $[T(\mathbf{M})]$ qui est une extension gauche de degré r de $[T]$.
On voit qu'alors :
- pour tout entier m et pour tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$D^{\sigma}(K(\pi(\mathbf{M})_m(i))) = D(\mathbf{M})(\pi(\mathbf{M})_m(i))$$
(par construction)
$$= M(\pi_m(i))$$
(par construction)
$$= D^{\sigma}(H(\pi_m(i))) .$$

Il en résulte, par adjonction, que :
- pour tout entier m et tout $1 \leq i \leq m$, on a :

$$K(\pi(\mathbf{M})_m(i)) = H(\pi_m(i)) = \pi'_m(i)$$
(puisque $[H]$ est un homomorphisme) .

Ainsi, $[K] : [T(\mathbf{M})] \dashrightarrow [T']$ est un homomorphisme et donc, puisqu'il est inversible, un isomorphisme de théories de Lawvere rendant commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
{[T(\mathbf{M})]} \arrow[rr, "{[K]}"] \arrow[dr, shift left, "{[D(\mathbf{M})]}"] & & {[T']} \arrow[dl, shift left, "{[D^{\sigma}]}"] \\
& {[T]} \arrow[ul, dashed, shift left, "{[H(\mathbf{M})]}"] \arrow[ur, shift left, "{[H]}"] &
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, $[K]$ est un "isomorphisme d'extensions gauches" . ***Fin de la preuve.***

En changeant "gauche" en "droite" et "monade" en "co-monade" dans la preuve précédente, on établit de même que :

Proposition 4. *Si r est un entier, si σ est une r-renotation et si $[T]$ est une théorie de Lawvere, alors toute extension droite de degré r de $[T]$ est isomorphe à une extension de Kleisli d'un σ-extenseur droit de degré r sur $[T]$.*
Autrement dit encore, les extensions droites de degré r sur $[T]$ sont entièrement déterminées, à isomorphisme près, par les σ-extenseurs droits de degré r sur $[T]$ et réciproquement.

Ainsi, si on reprend l'exemple des extensions d'anneaux (et notamment les notations du § 1), on voit que la théorie de Lawvere des A'-modules est aussi bien extension de Kleisli d'un certain extenseur gauche qu'extension de Kleisli d'un certain extenseur droit sur la théorie de Lawvere des A-modules (lorsque A' est un A-module de dimension finie).

CHAPITRE 5

Présentations d'extenseurs

Sommaire

0. Introduction

Au Chap. 4, nous avons prouvé que les extensions $[H]:[T] \dashrightarrow [T']$ de théories de Lawvere sont entièrement déterminées (à isomorphisme près) par ce qui se passe uniquement sur $[T]$, précisément par les seuls extenseurs sur $[T]$.

Dans ce Chap. 5 nous franchissons un pas supplémentaire vers la description pratique de telles extensions, en fournissant un premier procédé de génération de ces extenseurs.

On montre au § 4 qu'il suffit, en effet, de s'en donner des *générateurs* et des *relations*, sous forme de présentations (au sens de l'Annexe, § 3) construites explicitement aux §§ 2 et 3.

Techniquement, ceci nécessite a priori une étude assez fine, complétant celle concernant la cohérence du Chap. 2, §§ 2 et 4 : elle figure au § 1.

1. Détermination des extenseurs

Soit r un entier, σ une r-renotation (voir Chap. 2, § 2) et $[T]$ une théorie de Lawvere (voir Annexe, § 4).

Rappelons (voir Chap. 2, § 4) que, pour tout entier m et pour tout entier $1 \leq j \leq r$, on désigne par $\pi^{\sigma}{}_{m}(j)$ l'unique flèche telle que, pour tout entier $1 \leq i \leq m$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} T^{rm} \arrow[d, "\pi^{\sigma}{}_{m}(j)"'] \arrow[dr, "\pi_{rm}(\sigma_m(j,i))"] & \\ T^{m} \arrow[r, "\pi_m(i)"'] & T \end{tikzcd}$$

autrement dit, on a :

$$\pi^{\sigma}{}_{m}(j) = [\pi_{rm}(\sigma_m(j,i))]_{1 \leq i \leq m}$$

(voir Annexe, § 4).

Ainsi, pour tout entier m, la famille $(\pi^{\sigma}{}_{m}(j) : T^{mr} \dashrightarrow T^{m})_{1 \leq j \leq r}$ est une présentation de T^{mr} comme produit de r copies de T^{m}. Donc, si $(t_j : T^{n} \dashrightarrow T^{m})_{1 \leq j \leq r}$ est une famille de r flèches de T, il existe une unique flèche $[t_j]^{\sigma}{}_{1 \leq j \leq r}$ rendant commutatif, pour tout $1 \leq j \leq r$, le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} T^{mr} \arrow[d, "\pi^{\sigma}{}_{m}(j)"'] & T^{n} \arrow[l, "{[t_j]^{\sigma}{}_{1 \leq j \leq r}}"'] \arrow[dl, dash, "t_j"] \\ T^{m} & \end{tikzcd}$$

De façon analogue, pour tout entier m, pour tout entier $1 \leq i \leq m$ et pour tout entier k, on définit $\varphi^{k,\sigma}{}_{m}(i)$ *par récurrence* comme suit :

- on pose $\varphi^{0,\sigma}{}_{m}(i) = \pi_{m}(i)$,
- on note $\varphi^{k,\sigma}{}_{m}(i)$ l'unique flèche rendant commutatif, pour tout entier $1 \leq j \leq r$, le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
T^{mr^k} \arrow[r, "\varphi^{k,\sigma}_m(i)"] \arrow[d, "\pi^{\sigma}_{mr^{k-1}}(j)"'] & T^{r^k} \arrow[d, "\pi^{\sigma}_{r^{k-1}}(j)"] \\
T^{mr^{k-1}} \arrow[r, "\varphi^{k-1,\sigma}_m(i)"'] & T^{r^{k-1}}
\end{tikzcd}
$$

ce qui signifie aussi (avec les notations précédentes) que :

$$\varphi^{k,\sigma}_m(i) = [\varphi^{k-1,\sigma}_m(i) \, . \, \pi^{\sigma}_{mr^{k-1}}(j)]^{\sigma}_{1 \le j \le r} \, .$$

Dans ces conditions, il est facile de constater que, pour tout entier m et tout entier k, la famille $(\varphi^{k,\sigma}_m(i) : T^{mr^k} \dashrightarrow T^{r^k})_{1 \le i \le m}$ est une présentation de T^{mr^k} comme produit de m copies de T^{r^k}.
Par conséquent, si $(t_i : T^n \dashrightarrow T^{r^k})_{1 \le i \le m}$ est une famille de m flèches de T, il existe une unique flèche $[t_i]^{\varphi}_{1 \le i \le m}$ rendant commutatif, pour tout $1 \le i \le m$, le diagramme ci-dessous :

$$
\begin{tikzcd}
T^n \arrow[d, "{[t_i]^{\varphi}_{1 \le i \le m}}"'] \arrow[dr, "t_i"] & \\
T^{mr^k} \arrow[r, "\varphi^{k,\sigma}_m(i)"'] & T^{r^k}
\end{tikzcd}
$$

Ces constructions et notations (utiles dans toute la suite) précisées, il est facile d'établir que :

***Proposition* 1** . *Si r est un entier, si σ est une r-renotation, si $[T]$ est une théorie de Lawvere et si $M : T \dashrightarrow T$ est un foncteur r-déployé par π^{σ}, alors, pour tous entiers m et $k \ge 1$ et pour tout entier $1 \le i \le m$, on a :*

$$\varphi^{k,\sigma}_m(i) = M(\varphi^{k-1,\sigma}_m(i))$$

Preuve . En effet, pour toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T^n$ et pour tout entier $1 \le j \le r$, on a par hypothèse :

$$t \, . \, \pi^{\sigma}_m(j) = \pi^{\sigma}_n(j) \, . \, M(t) \, .$$

En particulier, on a donc :

$$\varphi^{k-1,\sigma}{}_m(i) . \pi^{\sigma}{}_{mr^{k-1}}(j) = \pi^{\sigma}{}_{r^{k-1}}(j) . M(\varphi^{k-1,\sigma}{}_m(i))$$

D'où la conclusion, par construction des flèches $\varphi^{k,\sigma}{}_m$. ***Fin de la preuve*** .

Nous sommes désormais en mesure d'établir qu'un extenseur (voir Chap. 4 , § 1) sur une théorie de Lawvere $[T]$ est complètement déterminé par sa *trace* en le seul objet T .

Précisément, on a :

Proposition 2 . *Soit* r *un entier ,* σ *une* r*-renotation ,* $[T]$ *une théorie de Lawvere et* $[M] = ([M], \omega, \mu)$ *un* σ*-extenseur gauche de degré* r *sur* $[T]$. *Alors* ω *(resp.* μ *) est complètement déterminée par* $\omega(T)$ *(resp.* $\mu(T)$ *).*

Preuve . En effet , M étant (par hypothèse) un foncteur r-déployé par π^{σ} et d'après la prop. 1 qui précède, on a, pour tout entier m et tout entier $1 \leq i \leq m$:

$$M(\varphi^{0,\sigma}{}_m(i)) = \varphi^{1,\sigma}{}_m(i) \quad \text{et} \quad M(\varphi^{1,\sigma}{}_m(i)) = \varphi^{2,\sigma}{}_m(i) .$$

Alors, comme ω et μ sont naturelles, les deux diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
T^{mr} \arrow[rr, "\varphi^{1,\sigma}{}_m(i)"] & & T^{r} \\
T^{m} \arrow[u, "\omega(T^m)"] \arrow[rr, dashed, "\varphi^{0,\sigma}{}_m(i)"'] & & T \arrow[u, "\omega(T)"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T^{mr^2} \arrow[rr, "\varphi^{2,\sigma}{}_m(i)"] \arrow[d, "\mu(T^m)"'] & & T^{r^2} \arrow[d, "\mu(T)"] \\
T^{mr} \arrow[rr, "\varphi^{1,\sigma}{}_m(i)"'] & & T^{r}
\end{tikzcd}$$

On en déduit que :

$$(*) \quad \omega(T^m) = [\omega(T) . \varphi^{0,\sigma}{}_m(i)]^{\varphi}{}_{1 \leq i \leq m}$$

et

$(**)\quad \mu(T^m) = [\mu(T).\varphi^{2,\sigma}{}_m(i)]^{\varphi}{}_{1\leq i\leq m}$. ***Fin de la preuve.***

(Remarquons qu'inversement, si $M : T \dashrightarrow T$ est un foncteur r-déployé par π^{σ}, si de plus $\omega(T) : T \dashrightarrow M(T)$ et $\mu(T) : M^2(T) \dashrightarrow M(T)$ sont deux flèches quelconques de $[T]$ et si, pour tout entier m, on définit $\omega(T^m)$ et $\mu(T^m)$ grâce à $(*)$ et $(**)$, alors $\omega : Id \Longrightarrow M$ et $\mu : M^2 \Longrightarrow M$ ne sont pas *naturelles* en général ; a fortiori, le triplet (M, ω, μ) n'a pas de raison d'être une monade.)

On démontre de la même façon que :

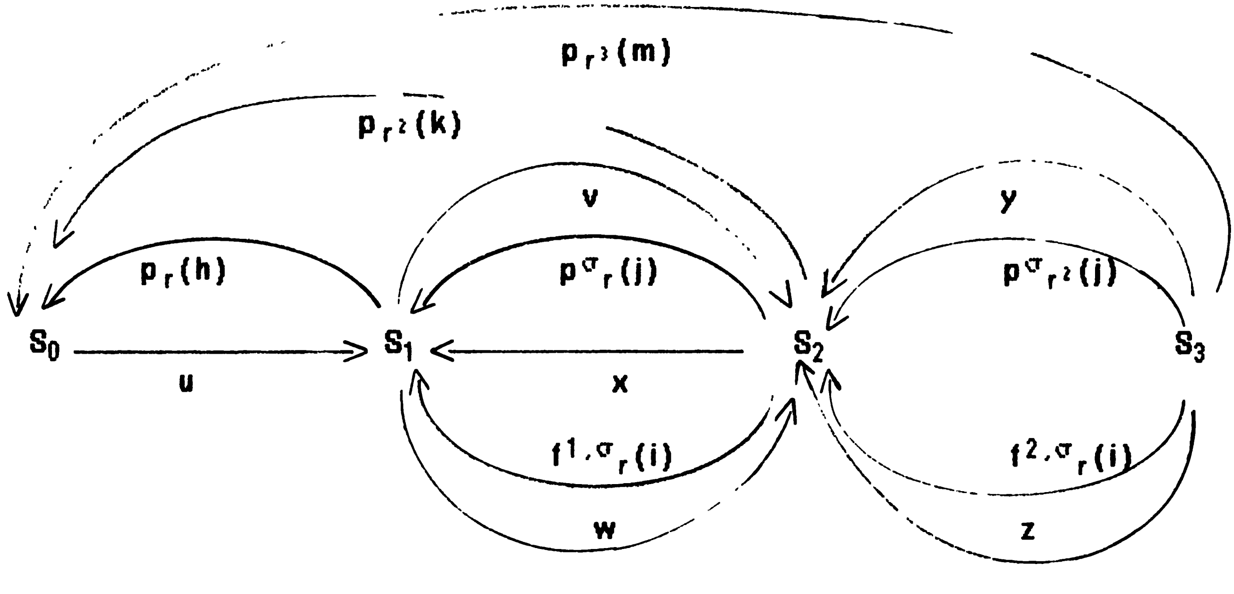
***Proposition* 3** . *Soit* r *un entier*, σ *une* r*-renotation*, $[T]$ *une théorie de Lawvere et* $[M'] = ([M'], \omega', \mu')$ *un* σ*-extenseur droit de degré* r *sur* $[T]$. *Alors* ω' *(resp.* μ'*) est complètement déterminée par* $\omega'(T)$ *(resp.* $\mu'(T)$ *)* .

2. <u>Construction de présentations</u>

Soit r un entier et σ une r-renotation.

On note $< S_{\sigma}, G >$ la plus petite présentation (voir Annexe, § 3) telle que :

- son graphe orienté sous-jacent contient le graphe orienté représenté ci-dessous (où ne figurent pas les flèches identités et où $1 \leq h, i, j \leq r$, $1 \leq k \leq r^2$, $1 \leq m \leq r^3$) :



(on posera aussi :

$$p^{\sigma}{}_1(j) = p_r(\sigma_1(j,1)) \quad \text{et} \quad f^{0,\sigma}{}_r(i) = p_r(i)),$$

- $\exp(S_1) = r$, $\exp(S_2) = r^2$, $\exp(S_3) = r^3$ et S_0 est l'objet distingué,
- pour tous entiers $1 \leq h, i, j \leq r$, $1 \leq k \leq r^2$, les diagrammes suivants sont commutatifs :

$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[d, "p^{\sigma}{}_r(j)"'] \arrow[dr, "p_{r^2}(\sigma_r(j,h))"] & \\
S_1 \arrow[r, "p_r(h)"'] & S_0
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
S_3 \arrow[d, "p^{\sigma}{}_{r^2}(j)"'] \arrow[dr, "p_{r^3}(\sigma_{r^2}(j,k))"] & \\
S_2 \arrow[r, "p_{r^2}(k)"'] & S_0
\end{tikzcd}$$

(Diagrammes I)

$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[r, "f^{1,\sigma}{}_r(i)"] \arrow[d, "p^{\sigma}{}_r(j)"'] & S_1 \arrow[d, "p^{\sigma}{}_1(j) = p_r(\sigma_1(j,1))"] \\
S_1 \arrow[r, "p_r(i) = f^{0,\sigma}{}_r(i)"'] & S_0
\end{tikzcd}$$

(Diagramme II)

$$
\begin{tikzcd}
S_3 \arrow[r, dashed, "f^{2,\sigma_r}(i)"] \arrow[d, "p^{\sigma_{r^2}}(j)"'] & S_2 \arrow[d, "p^{\sigma_r}(j)"] \\
S_2 \arrow[r, dashed, "f^{1,\sigma_r}(i)"'] & S_1
\end{tikzcd}
$$

(Diagramme III)

$$
\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r, dashed, "v"] \arrow[d, dash, "p^{\sigma_1}(j)"'] & S_2 \arrow[d, "p^{\sigma_r}(j)"] \\
S_0 \arrow[r, "u"'] & S_1
\end{tikzcd}
$$

(Diagramme IV)

$$
\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[r, dashed, "f^{1,\sigma_r}(i)"] & S_1 \\
S_1 \arrow[u, "w"] \arrow[r, dashed, dash, "p_r(i)=f^{0,\sigma_r}(i)"'] & S_0 \arrow[u, "u"']
\end{tikzcd}
$$

(Diagramme V)

$$
\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[d, "p^{\sigma_r}(j)"'] & S_3 \arrow[l, "y"'] \arrow[d, "p^{\sigma_{r^2}}(j)"] \\
S_1 & S_2 \arrow[l, "x"]
\end{tikzcd}
$$

(Diagramme VI)

$$\begin{tikzcd} S_3 \arrow[r, "f^{2,\sigma}{}_r(i)"] \arrow[d, "z"'] & S_2 \arrow[d, "x"] \\ S_2 \arrow[r, "f^{1,\sigma}{}_r(i)"'] & S_1 \end{tikzcd}$$

(Diagramme VII)

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "w"'] \arrow[dr, "id(S_1)"] & S_2 \arrow[d, "x"] \\ S_2 \arrow[r, "x"'] & S_1 \end{tikzcd}$$

(Diagramme VIII)

$$\begin{tikzcd} S_3 \arrow[r, "z"] \arrow[d, "y"'] & S_2 \arrow[d, "x"] \\ S_2 \arrow[r, "x"'] & S_1 \end{tikzcd}$$

(Diagramme IX)

- ses cônes projectifs distingués sont (outre le trivial de sommet S_0) :

$$p_r = (p_r(h) : S_1 \dashrightarrow S_0)_{1 \leq h \leq r}$$
$$p_{r^2} = (p_{r^2}(k) : S_2 \dashrightarrow S_0)_{1 \leq k \leq r^2}$$
$$p_{r^3} = (p_{r^3}(m) : S_3 \dashrightarrow S_0)_{1 \leq m \leq r^3} \ .$$

En inversant le sens des (seules) flèches u, v, w, x, y et z, on obtient une autre présentation que nous notons $< S_{\sigma,D} >$.

3. Produit tensoriel de présentations

Supposons que :
- $<P> = (P, P, \exp, (\pi_Q)_{Q \in Ob(P)})$ et $<P'> = (P', P', \exp, (\pi'_{Q'})_{Q' \in Ob(P')})$ sont deux présentations (alors, on pose :

$$\Omega = \{ (\exp(Q), \exp(Q')) \ / \ Q \in Ob(P) \text{ et } Q' \in Ob(P') \} \ ),$$

- $\gamma = (\gamma_{n,m} : \{1,...,n\} \times \{1,...,m\} \dashrightarrow \{1,...,nm\})_{(n,m) \in \Omega}$ est une famille de bijections, dite *adaptée* à $<P>$ et $<P'>$.

On désigne par $<P> \otimes_{\gamma} <P'>$ la plus petite présentation définie de la façon suivante :
- son graphe compositif sous-jacent est (le graphe compositif produit) $P \times P'$,
- pour tout $(Q, Q') \in Ob(P \times P')$, on a $\exp(Q, Q') = \exp(Q) . \exp(Q')$ (en particulier, on a bien $\exp(P, P') = 1$),
- pour tout $(Q, Q') \in Ob(P \times P')$, si $\exp(Q) = n$, si $\exp(Q') = m$ et si, pour tous entiers $1 \leq j \leq n$ et $1 \leq i < m$, on pose :

$$\pi_{(Q,Q')}(\gamma_{n,m}(j,i)) = (\pi_Q(j), \pi_{Q'}(i)) : (Q, Q') \dashrightarrow (P, P'),$$

alors $\pi_{(Q,Q')} = (\pi_{(Q,Q')}(k))_{1 \leq k \leq mn}$ est un cône projectif distingué (où l'on voit que $k = \gamma_{n,m}(j,i)$ parcourt effectivement tout l'ensemble $\{1, ..., nm\}$, quand (j, i) parcourt tout $\{1, ..., n\} \times \{1, ..., m\}$).

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que :

Proposition 4. *Si* $<P>$ *et* $<P'>$ *sont deux présentations et si* γ *est une famille de bijections adaptée à* $<P>$ *et* $<P'>$, *alors les catégories* $Mod(<P> \otimes_{\gamma} <P'>)$, $Mod(<P>, Mod(<P'>))$ *et* $Mod(<P'>, Mod(<P>))$ *sont (canoniquement) équivalentes.*

Preuve. Il suffit de voir que les limites projectives (en particulier les produits) commutent dans **Ens** et donc que $Mod(<P>)$ et $Mod(<P'>)$ sont complètes et que les limites projectives (en particulier les produits) s'y calculent point par point. ***Fin de la preuve***.

Soit $\gamma = (\gamma_{n,m} : \{1,...,n\} \times \{1,...,m\} \dashrightarrow \{1,...,nm\})_{(n,m) \in X}$ une famille (quelconque) de bijections (où $X \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N}$).

Disons que γ est *bi-harmonique* si, et seulement si, pour tout $(n, m) \in X$, on a :
- pour tout entier $i \in \{1,......,m\}$, $\gamma_{1,m}(i) = i$,
- pour tout entier $j \in \{1,......,n\}$, $\gamma_{n,1}(j) = j$.

Alors, il est trivial de constater que :

Proposition 5 . *Si* $<P>$ *et* $<P'>$ *sont deux présentations et si* γ *est une famille de bijections, adaptée à* $<P>$ *et* $<P'>$ *et bi-harmonique, alors on dispose des deux homomorphismes canoniques :*

$$\alpha_{<P>} : <P> \dashrightarrow <P> \otimes_{\gamma} <P'>$$

et

$$\beta_{<P'>} : <P'> \dashrightarrow <P> \otimes_{\gamma} <P'>$$

tels que :
- *pour toute flèche* $q : Q_1 \dashrightarrow Q_2$ *de* $<P>$, *on a* $\alpha_{<P>}(q) = (q, id(P'))$,
- *pour toute flèche* $q' : Q'_1 \dashrightarrow Q'_2$ *de* $<P'>$, *on a* $\beta_{<P'>}(q') = (id(P), q')$.

4 . Présentation concrète des extenseurs

Soit r un entier et σ une r-renotation.

On dira que σ est *harmonique* si et seulement si :
- pour tout entier $1 \leq j \leq r$, on a $\sigma_1(j, 1) = j$.

Dans ce cas, on associe à σ la famille de bijections (dont il est facile de voir qu'elle est) bi-harmonique :

$$\Sigma = (\Sigma_{n,m})_{(n,m) \in \{1, r, r^2, r^3\} \times \mathbf{N}}$$

telles que, pour tout $1 \leq i \leq m$:
- $\Sigma_{1,m}(1, i) = i$,
- $\Sigma_{r,m}(j, i) = \sigma_m(j, i)$,
- $\Sigma_{r^2,m}(j, i) = \sigma_{mr}(l, \sigma_m(k, i))$, où $1 \leq k, l \leq r$ sont tels que $j = \sigma_r(l, k)$,
- $\Sigma_{r^3,m}(j, i) = \sigma_{r^2m}(h, \sigma_{rm}(l, \sigma_m(k, i)))$, où $1 \leq h, l, k \leq r$ sont des entiers tels que $j = \sigma_{r^2}(h, \sigma_r(l, k))$

Dans ces conditions, établissons que les présentations *abstraites* du § 3 servent à présenter *concrètement*, lorsqu'on les réalise dans une théorie de Lawvere, les extenseurs sur cette théorie.

Précisément, on a :

Proposition 6 . *Soit* $[T]$ *une théorie de Lawvere* , $<T>$ *la présentation qui lui est canoniquement associée (voir* Annexe , § 5 *)* , r *un entier* , σ *une* r*-renotation harmonique et* $\beta_{<T>} : <T> \dashrightarrow <S_{\sigma}, G> \otimes_{\Sigma} <T>$ *l'homomorphisme canonique de présentations défini à la prop.* 4 , § 3 *précédente . Alors, à tout* σ*-extenseur gauche de degré* r *sur* $[T]$

est associé un homomorphisme de présentations $\Gamma : < S_{\sigma, G} > \otimes_{\Sigma} < T > \dashrightarrow < T >$ *tel que* $\Gamma . \beta_{<T>} = id(<T>)$, *et réciproquement.*

Preuve. Supposons que $\Gamma : < S_{\sigma, G} > \otimes_{\Sigma} < T > \dashrightarrow < T >$ est un homomorphisme tel que $\Gamma . \beta_{<T>} = id(<T>)$.
Alors, pour toute flèche t de T, on a $\Gamma((id(S_0), t)) = t$.
Comme Γ est un homomorphisme, on voit que,
- on a tout d'abord, pour tout entier m :

$$\Gamma((S_0, T^m)) = T^m ,$$
$$\Gamma((S_1, T^m)) = T^{mr},$$
$$\Gamma((S_2, T^m)) = T^{mr^2} ,$$
$$\Gamma((S_3, T^m)) = T^{mr^3} ,$$

- on a ensuite :

$$\Gamma((p_r, id(T))) = \pi_r ,$$

d'où, pour tous $1 \leq j, i \leq r$:

$$\Gamma((p^{\sigma}_r(j), id(T))) = \pi^{\sigma}_r(j)$$
(d'après la commutativité du Diag. I) ,
$$\Gamma((f^{1,\sigma}_r(i), id(T))) = \varphi^{1,\sigma}_r(i)$$
(d'après la commutativité du Diag. II) ,

- on a de même :

$$\Gamma((p_{r^2}, id(T))) = \pi_{r^2} ,$$

d'où, pour tous $1 \leq j, i \leq r$:

$$\Gamma((p^{\sigma}_{r^2}(j), id(T))) = \pi^{\sigma}_{r^2}(j)$$
(d'après la commutativité du Diag. I) ,
$$\Gamma((f^{2,\sigma}_r(i), id(T))) = \varphi^{2,\sigma}_r(i)$$
(d'après la commutativité du Diag. III) ,

- on a aussi :

$$\Gamma((p_{r^3}, id(T))) = \pi_{r^3} ,$$

- on a nécessairement, pour tout entier m , tout $1 \leq j \leq r$ et tout $1 \leq i \leq m$:

$$\Gamma((p_r(j), \pi_m(i))) = \pi_{mr}(\sigma_m(j, i))$$
(d'après la définition de $\otimes_{\Sigma}$ et $\Sigma_{r,m}$) ,

d'où, successivement :

$$\Gamma((p_r(j), id(T^m))) = \pi^{\sigma}_m(j) ,$$
$$\Gamma(p^{\sigma}_r(j), id(T^m)) = \pi^{\sigma}_{mr}(j)$$
(d'après la définition de $\otimes_{\Sigma}$ et $\Sigma_{r^2, m}$) ,
$$\Gamma(id(S_1), \pi_m(i)) = \varphi^{1,\sigma}_m(i) ,$$

- on a enfin, pour tout entier m , tout $1 \leq j \leq r^2$ et tout $1 \leq i \leq m$:

$$\Gamma(p_{r^2}(j), id(T^m)) = \pi^{\sigma}_m(k) . \pi^{\sigma}_{mr}(l)$$
(où on a posé $\sigma_r(l, k) = j$) ,

d'où :

$$\Gamma(id(S_2), \pi_m(i)) = \varphi^{2,\sigma}_m(i) .$$

Pour tout entier m , posons $M(T^m) = T^{mr}$.
Soit $t : T^n \dashrightarrow T^m$ une flèche de T. Dans $< S_{\sigma, G} > \otimes_{\Sigma} < T >$, on a (par construction) :

$$(id(S_0), t).(p_r(k), id(T^n)) = (p_r(k), id(T^m)).(id(S_1), t).$$

Donc , Γ étant un homomorphisme, dans T on a :

$$t.\pi^{\sigma}{}_n(k) = \pi^{\sigma}{}_m(k).\Gamma((id(S_1), t)) .$$

Alors on pose :

$$M(t) = \Gamma((id(S_1), t)) ,$$

ce qui impose, en particulier, que :

$$M^2(t) = \Gamma((id(S_2), t)).$$

Il est clair qu'on définit ainsi un foncteur $M : T \dashrightarrow T$ qui est *r-déployé par* π^{σ} et que $[M] : [T] \dashrightarrow [T]$ est une réalisation de degré r .

Posons $\omega(T) = \Gamma((u, id(T)))$. Dans $< S_{\sigma, G} > \otimes_{\Sigma} < T >$, pour tout entier m et tout $1 \leq i \leq m$, le diagramme suivant est commutatif par construction :

$$\begin{tikzcd}
(S_1, T) & & (S_1, T^m) \arrow[ll, "{(id(S_1), \pi_m(i))}"'] \\
(S_0, T) \arrow[u, "{(u, id(T))}"] & & (S_0, T^m) \arrow[ll, "{(id(S_0), \pi_m(i))}"] \arrow[u, "{(u, id(T^m))}"']
\end{tikzcd}$$

par conséquent (Γ étant un homomorphisme) dans T , on a :

$$\omega(T).\pi_m(i) = \varphi^{1,\sigma}{}_m(i).\Gamma((u, id(T^m))).$$

Alors, pour tout entier m , on pose :

$$\omega(T^m) = \Gamma((u, id(T^m))).$$

Il est clair qu'on définit ainsi une transformation naturelle $\omega : Id \dashrightarrow M$ puisque, pour toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T^n$ de T , on a successivement :

- dans $<S_{\sigma,G}> \otimes_{\Sigma} <T>$, par construction :

$$(id(S_1),t).(u,id(T^m)) = (u,id(T^n)).(id(S_0),t) ,$$

- dans T , puisque Γ est un homomorphisme :

$$M(t).\omega(T^m) = \omega(T^n).t .$$

De même, posons $\mu(T) = \Gamma((x,id(T)))$. Dans $<S_{\sigma,G}> \otimes_{\Sigma} <T>$, pour tout entier m et pour tout $1 \leq i \leq m$, le diagramme suivant est commutatif par construction :

$$\begin{array}{ccc} (S_2,T) & \xleftarrow{(id(S_2),\pi_m(i))} & (S_2,T^m) \\ {\scriptstyle (x,id(T))}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (x,id(T^m))} \\ (S_1,T) & \xleftarrow[(id(S_1),\pi_m(i))]{} & (S_1,T^m) \end{array}$$

par conséquent (Γ étant un homomorphisme) , dans T , on a :

$$\mu(T).\varphi^{2,\sigma}{}_m(i) = \varphi^{1,\sigma}{}_m(i).\Gamma((x,id(T^m))) .$$

Alors, pour tout entier m , on pose :

$$\mu(T^m) = \Gamma((x,id(T^m))) .$$

Il est clair qu'on définit ainsi une transformation naturelle $\mu : M^2 \dashrightarrow M$ puisque, pour toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T^n$ de T et tout $1 \leq j \leq r$, on a successivement :
- dans $<S_{\sigma,G}> \otimes_{\Sigma} <T>$, par construction :

$$(x,id(T^n)).(id(S_2),t) = (id(S_1),t).(x,id(T^m)) ,$$

- dans T , puisque Γ est un homomorphisme :

$$\mu(T^n).M^2(t) = M(t).\mu(T^m)$$

De plus, d'après la commutativité des Diag. IV et V , puisque Γ est un homorphisme, par définition de M et de ω , on voit que nécessairement, pour tout entier m , on a :

$$\Gamma((v,id(T^m))) = \Gamma((id(S_1),\omega(T^m))) = M(\omega(T^m)) .$$
$$\Gamma((w,id(T^m))) = \Gamma((u,id(T^{mr}))) = \omega(T^{mr}) = \omega(M(T^m)) ,$$

De même, d'après la commutativité des Diag. VI et VII, puisque Γ est un homomorphisme et par définition de M et μ on voit que, pour tout entier m, on a :

$$\Gamma((y, id(T^m))) = \Gamma((id(S_1), \mu(T^m))) = M(\mu(T^m)) .$$
$$\Gamma((z, id(T^m))) = \Gamma((x, id(T^{mr}))) = \mu(T^{mr}) = \mu(M(T^m)) ,$$

Alors la commutativité des Diag. VIII et IX suffit à établir que (M, ω, μ) est bien une monade sur T, i.e. que $[M] = ([M], \omega, \mu)$, ainsi associé à Γ, est bien un σ-extenseur gauche de degré r sur $[T]$.

Réciproquement, supposons que $[M] = ([M], \omega, \mu)$ est un σ-extenseur gauche de degré r sur $[T]$.
On vérifie facilement qu'il existe bien exactement un homomorphisme de présentations Γ tel qu'annoncé dans la prop. 6 de sorte que :

$\Gamma((u, id(T))) = \omega(T)$, $\Gamma((v, id(T))) = M(\omega(T))$, $\Gamma((w, id(T))) = \omega(M(T))$,
et
$\Gamma((x, id(T))) = \mu(T)$, $\Gamma((y, id(T))) = M(\mu(T))$, $\Gamma((z, id(T))) = \mu(M(T))$.

***Fin de la preuve*.**

De façon analogue, on établit :

***Proposition* 7** . *Soit* $[T]$ *une théorie de Lawvere* , $<T>$ *la présentation qui lui est canoniquement associée (voir* Annexe , § 5 *)* , r *un entier* , σ *une* r*-renotation harmonique et* $\beta_{<T>} : <T> \dashrightarrow <S_{\sigma, D}> \otimes_{\Sigma} <T>$ *l'homomorphisme canonique de présentations défini à la prop.* 4 , § 3 *précédente* . *Alors, à tout* σ*-extenseur droit de degré* r *sur* $[T]$ *est associé un homomorphisme de présentations* $\Gamma' : <S_{\sigma, D}> \otimes_{\Sigma} <T> \dashrightarrow <T>$ *tel que* $\Gamma' . \beta_{<T>} = id(<T>)$, *et réciproquement*.

La prop. 6 (resp. 7) qui précède montre qu'il est tout à fait légitime d'appeler $<S_{\sigma, G}>$ (resp. $<S_{\sigma, D}>$) *la présentation* (abstraite) *des* σ*-extenseurs gauches* (resp. *droits*) *de degré* r et un quelconque Γ (resp. Γ') *une présentation concrète* d'*un* tel extenseur.

Notons également que faire (comme dans les prop. 6 et 7) l'hypothèse que σ est harmonique ne nuit en rien à l'intérêt du résultat vu la correspondance exacte entre extenseurs et extensions (voir Chap. 4 , § 3 , prop. 3 et 4) et la totale cohérence des extensions (voir Chap. 2 , § 4 , prop. 3 et 4).

Par exemple, si $[T]$ est une théorie de Lawvere *quelconque* (et si r est un entier et si σ est une r-renotation harmonique) on voit qu'on dispose toujours d'un homomorphisme canonique de présentations :

$$\Gamma_{[T]} : \langle S_\sigma, {}_G \rangle \otimes_\sigma (\langle S_\sigma, {}_G \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle) \dashrightarrow \langle S_\sigma, {}_G \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle$$

$$(\text{resp. } \Gamma'_{[T]} : \langle S_\sigma, {}_D \rangle \otimes_\sigma (\langle S_\sigma, {}_D \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle) \dashrightarrow \langle S_\sigma, {}_D \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle\ )\ ,$$

dont les restrictions à $\langle S_\sigma, {}_G \rangle$ (resp. $\langle S_\sigma, {}_D \rangle$) et à $\langle S_\sigma, {}_G \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle$ (resp. $\langle S_\sigma, {}_D \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle$) , sont les injections canoniques.

Ainsi la théorie de Lawvere $th(\langle S_\sigma, {}_G \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle)$ (resp. $th(\langle S_\sigma, {}_D \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle)$) , engendrée par $\langle S_\sigma, {}_G \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle$ (resp. $\langle S_\sigma, {}_D \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle$) , est canoniquement munie d'un σ-extenseur gauche (resp. droit) de degré r.
C'est l'algèbre libre, engendrée par $[T]$, pour une certaine monade sur la catégorie **ThéoL** des théories de Lawvere.

Plus généralement, on voit (moyennant quelques digressions formelles élémentaires que nous laissons au lecteur) que la prop. 6 (resp. 7) permet d'interpréter la donnée d'une théorie de Lawvere, munie d'un σ-extenseur gauche (resp. droit) de degré r , comme étant une *algèbre* d'une certaine *monade* :

$$\textbf{ThéoL} \dashrightarrow \textbf{ThéoL}$$
$$[T] \dashrightarrow th(\langle S_\sigma, {}_G \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle)$$
$$(\text{resp. } [T] \dashrightarrow th(\langle S_\sigma, {}_D \rangle \otimes_\sigma \langle T \rangle)\ )\ .$$

CHAPITRE 6

Descriptions des extensions

Sommaire

0. Introduction

Au Chap. 4, nous avons établi que les extensions gauches (resp. droites) d'une théorie de Lawvere [T] sont des (structures de théories de Lawvere sur les) catégories de Kleisli de certaines monades (resp. co-monades) sur [T] . Ainsi, pour déterminer toutes les extensions gauches (resp. droites) de [T] , il suffit de décrire ces monades (resp. co-monades) : au Chap. 5 nous avons justement donné un moyen de les présenter. Néanmoins, la procédure qui y est explicitée, si elle fournit un moyen pratique de description, par générateurs et relations, de ces monades (resp. co-monades), ne donne pas d'interprétation concrète de leurs catégories de Kleisli, donc des extensions de [T] : c'est ce à quoi nous nous attachons, par conséquent, dans ce Chap. 6 .

Au § 1 nous établissons, très simplement, que les extensions gauches de degré r de [T] ne sont autres que les structures de théories de Lawvere dont on peut munir le graphe des r-uplets de flèches de [T] ayant toutes même domaine et même co-domaine. Il est remarquable de constater qu'il s'agit là d'une "procédure d'extension" bien connue dans le cas très particulier des corps (vus comme systèmes de générateurs et de relations pour les théories de Lawvere d'espaces vectoriels).

Au § 2 nous établissons que les extensions droites de [T] sont obtenues en adjoignant à [T] des flèches T ----> T auxquelles on impose de vérifier certaines équations : autrement dit, ces extensions droites sont des *théories de rupture* . Il est surprenant de constater qu'il s'agit là de l'autre "procédure d'extension" bien connue dans le cas très particulier des corps (évidemment équivalente à la première dans ce dernier cas).

Nous concluons chacun de ces §§ 1 et 2 par le calcul explicite des extensions de [T_{Ens}] dont on montre qu'il est "assez" générique.

1. Extensions gauches de degré r comme théories de r-uplets

Soit r un entier et $\mathbf{C}$ une catégorie.

On note $\mathbf{Gph}_r(\mathbf{C})$ le *graphe* (voir Annexe, § 3) *des r-uplets de* $\mathbf{C}$, défini de la façon suivante :
- ses objets sont les objets de $\mathbf{C}$,
- ses flèches (d'un objet A vers un objet B) sont les r-uplets $(f_j : A \dashrightarrow B)_{1 \leq j \leq r}$ de flèches de $\mathbf{C}$ et l'on note :

$$(f_j)_{1 \leq j \leq r} : A \dashrightarrow_r B$$

(on notera même, pour simplifier et s'il n'y a aucun risque d'ambiguïté, $(f_j)_{1 \leq j \leq r} = (f_j)_j$).

Dans la suite, pour tous objets A, B, C de $\mathbf{C}$, pour toute flèche $(f_j)_j : A \dashrightarrow_r B$ de $\mathbf{Gph}_r(\mathbf{C})$ et toute flèche $f : B \dashrightarrow C$ (resp. $f : C \dashrightarrow A$) de $\mathbf{C}$, nous noterons :

$$f.(f_j)_j = (f.f_j)_j : A \dashrightarrow_r C$$
$$(\text{resp. } (f_j)_j.f = (f_j.f)_j : C \dashrightarrow_r B \quad).$$

De plus, si $\mathbf{C}_r$ est une structure de catégorie (dont nous notons $*$ la loi de composition et $id_r(C) : C \dashrightarrow_r C$ la flèche identité en tout objet C) ayant pour graphe sous-jacent $\mathbf{Gph}_r(\mathbf{C})$ et si $H : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{C}_r$ est un foncteur, alors nous dirons que $\mathbf{C}$ *opère sur* $\mathbf{C}_r$ *par* H (ou, plus simplement et si aucune confusion n'est possible, que $\mathbf{C}$ *opère sur* $\mathbf{C}_r$) si, et seulement si :
- pour tous objets A, B, C de $\mathbf{C}$, pour toute flèche $(f_j)_j : A \dashrightarrow_r B$ de $\mathbf{C}_r$ et pour toute flèche $f : B \dashrightarrow C$ (resp. $f : C \dashrightarrow A$) de $\mathbf{C}$ on a :

$$f.(f_j)_j = H(f) * (f_j)_j$$
$$(\text{resp. } (f_j)_j.f = (f_j)_j * H(f) \quad).$$

Soit r un entier, σ une r-renotation et $[T]$ une théorie de Lawvere.

A toute flèche $t : T^n \dashrightarrow T^{mr}$ de $[T]$ est associée une flèche de $\mathbf{Gph}_r(T)$, à savoir :

$$t^{\#} = (\pi^{\sigma}{}_m(j).t)_{1 \leq j \leq r} : T^n \dashrightarrow_r T^m .$$

De même, à toute flèche $s = (s_j)_{1 \leq j \leq r} : T^n \dashrightarrow_r T^m$ de $\mathbf{Gph}_r(T)$ est associée une flèche de $[T]$, à savoir (voir Chap. 5, § 1) $[s_j]^{\sigma}{}_{1 \leq j \leq r} : T^n \dashrightarrow T^{mr}$, que nous noterons, indifféremment, s'il n'y a aucun risque d'ambiguïté :

$$[s] = [s_j]_j = [s_j]^{\sigma}{}_{1 \leq j \leq r} : T^n \dashrightarrow T^{mr} .$$

Evidemment, ces deux "associations" (qui bien sûr ne définissent même pas des homomorphismes de graphes) sont inverses l'une de l'autre.

Enfin, on voit que, si $M : T \dashrightarrow T$ est un foncteur r-déployé par π^{σ} (voir Chap. 1, § 1 et Chap. 2, § 4), si $\mathbf{T}_r$ est une structure de catégorie sur $\mathbf{Gph}_r(T)$ et si $H : \mathbf{T} \dashrightarrow \mathbf{T}_r$ est un foncteur, alors $\mathbf{T}$ opère sur $\mathbf{T}_r$ par H si, et seulement si :

- pour tous objets T^n, T^m, T^p de $\mathbf{T}$, pour toute flèche $(s_j)_j : T^n \dashrightarrow_r T^m$ de $\mathbf{T}_r$ et pour toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T^p$ (resp. $t : T^p \dashrightarrow T^n$) de $\mathbf{T}$ on a :

$$M(t) . [s_j]_j = [t . s_j]_j = [H(t) * (s_j)_j]$$
$$(\text{resp. } [s_j]_j . t = [s_j . t]_j = [(s_j)_j * H(t)]) .$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir que :

***Proposition* 1**. *Si* r *est un entier, si* σ *est une r-renotation et si* $[\mathbf{T}]$ *est une théorie de Lawvere, alors à tout* σ*-extenseur gauche* $[\mathbf{M}]$ *de degré* r *sur* $[\mathbf{T}]$ *sont associés :*
- *une structure de théorie* $[\mathbf{T}_r]$ *de graphe sous-jacent* $\mathbf{Gph}_r(\mathbf{T})$,
- *un homomorphisme* $[H] : [\mathbf{T}] \dashrightarrow [\mathbf{T}_r]$,
- *un isomorphisme* $[\Delta] : [\mathbf{T}(\mathbf{M})] \dashrightarrow [\mathbf{T}_r]$,

de sorte que :
- $\mathbf{T}$ *opère sur* $\mathbf{T}_r$ *par* H ,
- *le diagramme suivant commute (voir* Chap. 4, § 2) *:*

$$\begin{tikzcd} {[\mathbf{T}(\mathbf{M})]} \arrow[rr, "{[\Delta]}"] & & {[\mathbf{T}_r]} \\ & {[\mathbf{T}]} \arrow[ul, "{[H(\mathbf{M})]}"] \arrow[ur, "{[H]}"'] & \end{tikzcd}$$

et réciproquement.

Preuve. Supposons que $[\mathbf{M}]$ est un σ-extenseur gauche de degré r sur $[\mathbf{T}]$.
D'après la prop. 1, Chap. 4, § 2, on sait qu'à $[\mathbf{M}]$ est alors associée son extension de Kleisli $[H(\mathbf{M})] : [\mathbf{T}] \dashrightarrow [\mathbf{T}(\mathbf{M})]$.
Les objets de $[\mathbf{T}(\mathbf{M})]$ sont, par construction, ceux de $\mathbf{T}$, donc ceux de $\mathbf{Gph}_r(\mathbf{T})$.
De même, à toute flèche $t : T^n \dashrightarrow_{KL} T^m$ de $[\mathbf{T}(\mathbf{M})]$ correspond, par construction, la flèche $t : T^n \dashrightarrow T^{mr}$ de $\mathbf{T}$, et donc la flèche $t^{\#} = (\pi^{\sigma}{}_m(j) . t)_j : T^n \dashrightarrow_r T^m$ de $\mathbf{Gph}_r(\mathbf{T})$. Inversement, à toute flèche $s = (s_j)_j : T^n \dashrightarrow_r T^m$ correspond la flèche

$[s] = [s_j]_j : T^n \dashrightarrow T^{mr}$ de $\mathbf{T}$ et donc, par construction, la flèche $[s] : T^n \dashrightarrow_{KL} T^m$ de $[T(\mathbf{M})]$.
Ainsi, le graphe sous-jacent à $[T(\mathbf{M})]$ est isomorphe à $\mathbf{Gph}_r(T)$. Par transport de structure, on dispose donc d'une structure de théorie de Lawvere $[T_r]$ sur $\mathbf{Gph}_r(T)$, d'un isomorphisme $[\Delta] : [T(\mathbf{M})] \dashrightarrow [T_r]$ et donc de l'homomorphisme :

$$[H] = [\Delta] . [H(\mathbf{M})] : [T] \dashrightarrow [T_r]$$

rendant évidemment commutatif le diagramme requis.

De plus $\mathbf{T}$ opère sur $\mathbf{T}_r$. En effet, soit $(s_j)_j : T^n \dashrightarrow_r T^m$ une flèche de $\mathbf{T}_r$, alors :

- si $f : T^m \dashrightarrow T^p$ est une flèche de $\mathbf{T}$, on a :

$$\begin{aligned} H(f) * (s_j)_j &= \Delta(H(\mathbf{M})(f)) * \Delta([s_j]_j) \\ &\text{(par définition de } H\text{)} \\ &= \Delta((\omega(T^p).f)._{KL}[s_j]_j) \\ &\text{(par définition de } H(\mathbf{M}) \text{ et parce que } \Delta \text{ est un foncteur)} \\ &= \Delta(\mu(T^p).M(\omega(T^p)).M(f).[s_j]_j) \\ &\text{(par définition de } ._{KL} \text{ dans } T(\mathbf{M})\text{)} \\ &= \Delta(M(f)\ [s_j]_j) \\ &\text{(parce que } \mathbf{M} \text{ est une monade)}, \end{aligned}$$

d'où $[H(f) * (s_j)_j] = M(f).[s_j]_j$ dans $\mathbf{T}$,

- de même, si $f : T^p \dashrightarrow T^n$ est une flèche de $\mathbf{T}$, on a :

$$\begin{aligned} (s_j)_j * H(f) &= \Delta([s_j]_j ._{KL} H(\mathbf{M}(f))) \\ &= \Delta([s_j]_j ._{KL} (\omega(T^n).f)) \\ &= \Delta(\mu(T^m).M([s_j]_j).\omega(T^n).f) \\ &= \Delta(\mu(T^m).\omega(T^{mr}).[s_j]_j.f) \\ &\text{(parce que } \omega \text{ est naturelle)} \\ &= \Delta([s_j]_j.f), \end{aligned}$$

d'où $[(s_j)_j * H(f)] = [s_j]_j.f$ dans $\mathbf{T}$.

Réciproquement, supposons que $[T_r]$ est une structure de théorie de Lawvere sur $\mathrm{Gph}_r(T)$, que $[H] : [T] \dashrightarrow [T_r]$ est un homomorphisme et que $\mathbf{T}$ opère sur $\mathbf{T}_r$ par H.
Pour tout entier n, posons $M(T^n) = T^{nr}$.
Pour toute flèche $t : T^n \dashrightarrow T^m$ de $\mathbf{T}$, définissons $M(t) : T^{nr} \dashrightarrow T^{mr}$ comme l'unique flèche de $\mathbf{T}$ telle que, pour tout entier $1 \leq j \leq r$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} T^{nr} & \xrightarrow{M(t)} & T^{mr} \\ \downarrow{\scriptstyle \pi^{\sigma}{}_{n}(j)} & & \downarrow{\scriptstyle \pi^{\sigma}{}_{m}(j)} \\ T^{n} & \xrightarrow[t]{} & T^{m} \end{array}$$

Clairement on définit ainsi une réalisation $[M]$ $[T]$ ----> $[T]$, d'exposant r et σ-cohérente, où $M: T$ ----> T est un foncteur r-déployé par π^{σ}.
Pour tout entier n, comme T_r est une catégorie, on dispose de sa flèche identité en son objet T^n, à savoir $Id_r(T^n): T^n$ ---->$_r$ T^n. Donc aussi de la flèche de T:

$$\omega(T^n) = [id_r(T^n)] : T^n \text{---->} T^{nr}.$$

En utilisant le fait que M est r-déployé par π^{σ} et que T opère sur T_r, il est facile de vérifier qu'on définit bien ainsi une transformation naturelle :

$$\omega : Id(T) \text{====>} M : T \text{---->} T.$$

Pour tout entier n, les deux flèches consécutives :

$$(id(T^{nr^2}))^{\#} = (\pi^{\sigma}{}_{nr}(j))_{1 \leq j \leq r} : T^{nr^2} \text{---->}_r T^{nr}$$

et

$$(id(T^{nr}))^{\#} = (\pi^{\sigma}{}_{n}(k))_{1 \leq k \leq r} : T^{nr} \text{---->}_r T^{n}$$

ont une composée :

$$(id(T^{nr}))^{\#} * (id(T^{nr^2}))^{\#} : T^{nr^2} \text{---->}_r T^{n}$$

dans la catégorie T_r. On dispose donc de la flèche de T :

$$\mu(T^n) = [(id(T^{nr}))^{\#} * (id(T^{nr^2}))^{\#}] : T^{nr^2} \text{---->} T^{nr}$$

Comme pour ω, il est facile de vérifier qu'on définit bien ainsi une transformation naturelle :

$$\mu : M^2 \text{====>} M : T \text{---->} T.$$

Il reste à prouver que $\mathbf{M} = (M, \omega, \mu)$ est bien une monade sur T.
Or, pour tout entier n, on a :

$$\begin{aligned} \mu(T^n).\omega(T^{nr}) &= [(\pi^{\sigma}{}_{n}(j))_j * (\pi^{\sigma}{}_{nr}(k))_k].\omega(T^{nr}) \\ &= [((\pi^{\sigma}{}_{n}(j))_j * (\pi^{\sigma}{}_{nr}(k))_k) * H(\omega(T^{nr}))] \end{aligned}$$

(puisque T opère sur T_r)

$$= [(\pi^{\sigma}{}_n(j))_j * ((\pi^{\sigma}{}_{nr}(k))_k * H(\omega(T^{nr})))]$$

(par associativité, puisque T_r est une catégorie)

$$= [(\pi^{\sigma}{}_n(j))_j * ((\pi^{\sigma}{}_{nr}(k) . \omega(T^{nr}))_k]$$

(puisque T opère sur T_r)

$$= [(\pi^{\sigma}{}_n(j))_j * ((\pi^{\sigma}{}_{nr}(k) . [id_r(T^{nr})])_k]$$

(par définition de $\omega(T^{nr})$)

$$= [(\pi^{\sigma}{}_n(j))_j * id_r(T^{nr})]$$

$$= [(\pi^{\sigma}{}_n(j))_j]$$

$$= id(T^{nr}) .$$

Des calculs analogues montrent que, pour tout entier n :

$$\mu(T^n) . M(\omega(T^n)) = id(T^{nr}) ,$$

$$\mu(T^n) . M(\mu(T^n)) = \mu(T^n) . \mu(T^{nr}) .$$

Ce qui permet de conclure. ***Fin de la preuve.***

Disons qu'une structure de théorie de Lawvere $[T_r]$, sur le graphe des r-uplets $\mathbf{Gph}_r(T)$ d'une théorie de Lawvere $[T]$ qui opère sur $[T_r]$ (comme utilisée dans la preuve de la prop. 1 précédente) , est une *théorie de r-uplets* de $[T]$.

Des prop. 1 et 3 du Chap. 4 , §§ 2 et 3 , et de la prop. 1 précédente, on déduit immédiatement que :

Proposition 2 . *Si r est un entier et si $[T]$ est une théorie de Lawvere, alors les extensions gauches de degré r de $[T]$ sont exactement (à isomorphismes près) les théories de r-uplets de $[T]$.*

Supposons par exemple que $[T_{Ens}]$ est la théorie de Lawvere des ensembles et soit $r \geq 2$ un entier.

Désignons par $T_{Ens, r}$ la structure de catégorie *canonique* sur $\mathbf{Gph}_r(T_{Ens})$ obtenue en composant les r-uplets de flèches "composante par composante" , i.e. en posant pour toutes flèches $(t_j)_j : T^p \text{---->}_r T^n$ et $(t'_j)_j : T^n \text{---->}_r T^m$ de $\mathbf{Gph}_r(T_{Ens})$:

$$(t'_j)_j * (t_j)_j = (t'_j . t_j)_j ,$$

et notons $H : T_{Ens} \text{---->} T_{Ens, r}$ le foncteur *diagonal* , i.e. le foncteur obtenu en posant pour toute flèche $t : T^n \text{---->} T^m$ de T :

$$H(t) = (t_j)_j$$
où $t_j = t$, pour tout $1 \leq j \leq r$.

Il est facile de vérifier qu'alors $T_{Ens,r}$ est (canoniquement) munie d'une structure de théorie de Lawvere $[T_{Ens,r}]$ de sorte que :
- $[H] : [T_{Ens}] \dashrightarrow [T_{Ens,r}]$ est bien un homomorphisme,
- T_{Ens} opère sur $T_{Ens,r}$ par H.

Choisissons maintenant, pour σ, la r-renotation telle que, pour tout entier m et tous entiers $1 \leq k \leq m$ et $1 \leq j \leq r$, on a :

$$\sigma_m(j, k) = (j-1)m + k.$$

En vertu des prop. 1 et 2 précédentes, $[H]$ est une extension gauche de degré r de $[T_{Ens}]$ et il lui correspond un σ-extenseur gauche $[\mathbf{M}]$ de degré r sur $[T_{Ens}]$, de sorte que :
- $[T_{Ens,r}]$ est isomorphe à l'extension de Kleisli $[T_{Ens}(\mathbf{M})]$ de $[\mathbf{M}]$.

On en déduit successivement que :
- la catégorie $\mathrm{Mod}([T_{Ens,r}])$ est isomorphe à la catégorie $\mathrm{Mod}([T_{Ens}(\mathbf{M})])$,
- le σ-extenseur gauche $[\mathbf{M}]$ induit une monade $\mathrm{Mod}([\mathbf{M}])$ sur Ens (de foncteur sous-jacent $\mathrm{Mod}([M]) : \mathrm{Ens} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$),
- $\mathrm{Mod}([\mathbf{M}]) = (-)^r$ est la monade canonique "puissance $r^{\text{ième}}$" sur Ens,
- la catégorie $\mathrm{Mod}([T_{Ens}(\mathbf{M})])$ est isomorphe à la catégorie $\mathrm{Alg}((-)^r)$ des algèbres de la monade $(-)^r$ (autrement dit, sommairement parlant, pour les extenseurs gauches on a la "formule de commutation" $\mathrm{Mod}(\mathrm{Kleisli}(-)) = \mathrm{Alg}(\mathrm{Mod}(-))$).

Ainsi, $\mathrm{Mod}([T_{Ens,r}])$ et $\mathrm{Alg}((-)^r)$ sont isomorphes.

Grâce à Coppey [1977], on sait qu'alors $\mathrm{Alg}((-)^r)$ est la catégorie des *systèmes associatifs de* $r-1$ *semi-groupes*, i.e. des $(E, *_1, \ldots, *_{r-1})$ où :

(1) E est un ensemble,

(2) pour tout $1 \leq j \leq r-1$, l'application $*_j : E \times E \dashrightarrow E$ est une loi de semi-groupe telle que :

+ pour tout $x \in E$, on a $x *_j x = x$,
+ pour tous $x, y, z \in E$, on a $x *_j y *_j z = x *_j z$,

(3) pour tous $1 \leq j \leq k \leq r-1$ et tous $x, y, z \in E$, on a $x *_j (y *_k z) = (x *_j y) *_k z$.

Il en résulte que $[T_{Ens,r}]$ est exactement la théorie de Lawvere de ces systèmes associatifs de $r-1$ semi-groupes, i.e. la théorie de Lawvere engendrée par la présentation (au sens de l'Annexe, § 3) que nous noterons $< \mathbf{P}_{r,sg} >$ et qui se construit trivialement à partir de (1), (2), (3).

Comme un calcul automatique (mais fastidieux) permet d'établir que $[\mathbf{M}]$ est l'unique σ-extenseur gauche de degré r sur $[T_{Ens}]$, on décrit ainsi *toutes* les extensions gauches de $[T_{Ens}]$: ce sont exactement les théories de Lawvere des systèmes associatifs de semi-groupes.

Plus généralement, supposons que $[T]$ est une quelconque théorie de Lawvere et que $r \geq 2$ est un entier.

On construit comme précédemment une catégorie *canonique* T_r en composant les r-uplets "composante par composante" , puis une structure *canonique* de théorie de Lawvere $[T_r]$ et un homomorphisme *diagonal* $[H] : [T] \dashrightarrow [T_r]$.

On vérifie de la même manière que la catégorie $Mod([T_r])$ est isomorphe à la catégorie $Alg((-)^r)$ des algèbres de la monade canonique "puissance r " sur $Mod([T])$ (que l'on continue à noter $(-)^r$) .

Dans ces conditions, grâce encore à Coppey [1977] , on sait que $Alg((-)^r)$ est la catégorie des systèmes associatifs de $r-1$ semi-groupes *internes* à $Mod([T])$, i.e. la catégorie des $(F, *_1, \dots, *_{r-1})$ où :

(1) $F : [T] \dashrightarrow Ens$ est un modèle,

(2) pour tout $1 \leq j \leq r-1$, l'application $*_j : F(T) \times F(T) \dashrightarrow F(T)$ est une loi de semi-groupe telle que :

+ pour tout $x \in F(T)$, on a $x *_j x = x$,

+ pour tous $x, y, z \in F(T)$, on a $x *_j y *_j z = x *_j z$,

(3) pour tous $1 \leq j \leq k \leq r-1$ et tous $x, y, z \in F(T)$, on a $x *_j (y *_k z) = (x *_j y) *_k z$,

(4) pour tout $1 \leq j \leq r-1$, pour tout entier n , pour toute flèche $t : T^n \dashrightarrow T$ et pour tous $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in F(T)$, on a :

$$F(t)(x_1, \dots, x_n) *_j F(t)(y_1, \dots, y_n) = F(t)(x_1 *_j y_1, \dots, x_n *_j y_n).$$

Ainsi , $[T_r]$ est exactement la théorie de Lawvere de ces systèmes associatifs de $r-1$ semi-groupes internes à $Mod([T])$. C'est donc la théorie de Lawvere engendrée par la présentation trivialement construite à partir de (1) , (2) , (3) , (4) . Compte tenu de (4) , ceci signifie également que $[T_r]$ est la théorie de Lawvere engendrée par la présentation $\langle T \rangle \otimes_{\delta} \langle \mathbf{P}_{r,sg} \rangle$ (au sens du Chap. 5 , § 3 , où δ est une famille de bijections, adaptée à $\langle T \rangle$ et $\langle \mathbf{P}_{r,sg} \rangle$, choisie arbitrairement).

Remarquons, cependant, qu'au contraire de ce qui se passe pour $[T_{Ens}]$, on ne décrit pas ainsi toutes les extensions gauches de $[T]$, car il peut exister plusieurs σ-extenseurs gauches de degré r sur $[T]$ (ayant toutes le même endofoncteur "puissance r " sous-jacent). Si l'on préfère, il peut exister d'autres structures de théorie sur le graphe $\mathbf{Gph}_r(T)$ que la canonique.

Par exemple, si le corps K' est une extension de degré r du corps K , alors K' est isomorphe à une structure de corps sur K^r , mais qui n'est pas "produit direct" de r copies de K. Alors, si $[T]$ est la théorie de Lawvere des K-espaces vectoriels, la théorie $[T']$ des K'-espaces vectoriels est isomorphe (d'après l'exemple et la prop. 1 du Chap. 3 ,

§ 1, et la prop. 2 précédente) à une structure de théorie de Lawvere sur **Gph** $_r(T)$ qui *n'est pas* la canonique.

2. Extensions droites de degré r comme théories de rupture

Soit r un entier, σ une r-renotation, $[H']:[T] \dashrightarrow [T']$ un homomorphisme de théories de Lawvere, $M':T \dashrightarrow T$ un foncteur r-déployé par π^{σ} et $\alpha = (\alpha_j : T' \dashrightarrow T')_{1\leq j\leq r}$ une famille, dite *fermée*, de r flèches de $[T']$ (toutes fermées en T').

Pour tout entier n, nous notons $([\alpha_j]_{1\leq j\leq r})^n{}_{\varphi'} = ([\alpha])^n{}_{\varphi'} : T'^n \dashrightarrow T'^{nr}$ l'unique flèche de $[T']$ telle que, pour tout entier $1 \leq i \leq n$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} T'^{nr} \arrow[r, "\varphi'^{1,\sigma}{}_n(i)"] & T'^r \\ T'^n \arrow[u, "([\alpha])^n{}_{\varphi'}"] \arrow[r, dashed, "\pi'_n(i)"'] & T' \arrow[u, "{[\alpha_j]_{1\leq j\leq r} = ([\alpha])^1{}_{\varphi'}}"'] \end{tikzcd}$$

autrement dit on a :

$$([\alpha])^n{}_{\varphi'} = [[\alpha_j]_{1\leq j\leq r} \cdot \pi'_n(i)]^{\varphi'}{}_{1\leq i\leq n}.$$

(voir :
- de nouveau l'Annexe, § 4, pour les notations du type $[-]_{1\leq k\leq m}$,
- le Chap. 5, § 1, où l'on remplace T par T' et φ par φ', pour les symboles du genre $\varphi'^{k,\sigma}{}_n(-)$ et $[-]^{\varphi'}{}_{1\leq i\leq n}$).

S'il n'y a aucun risque d'ambiguïté, nous noterons plus simplement :

$$([\alpha])^n = ([\alpha])^n{}_{\varphi'} : T'^n \dashrightarrow T'^{nr}.$$

Nous dirons que $(\alpha_j)_{1\leq j\leq r}$ *co-opère sur* $[T]$ *par* $[H']$ ou, plus simplement, que la famille α *co-opère sur* $[T]$ si, et seulement si :
- pour toute flèche $t : T^n \dashrightarrow T$ de $[T]$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} T'^{nr} \arrow[r, dashed, "H'(M'(t))"] & T'^{r} \\ T'^{n} \arrow[u, "([\alpha])^{n}"] \arrow[r, dashed, "H'(t)"'] & T' \arrow[u, "([\alpha])^{1}"'] \end{tikzcd}$$

Clairement, on voit qu'alors :
- pour toute flèche $t : T^{m} \dashrightarrow T^{n}$ de $[T]$, on a aussi :

$$([\alpha])^{n} . H'(t) = H'(M'(t)) . ([\alpha])^{m} .$$

Dans ces conditions, montrons que :

***Proposition* 3** . *Soit* r *un entier*, σ *une* r*-renotation* , $[T]$ *une théorie de Lawvere* , $[\mathbf{M'}] = ([M'], \omega', \mu')$ *un* σ*-extenseur droit de degré* r *sur* $[T]$ *(voir* Chap. 4, § 1 *) et* $[H(\mathbf{M'})] : [T] \dashrightarrow [T(\mathbf{M'})]$ *l'extension de Kleisli associée à* $\mathbf{M'}$ *(voir* Chap. 4, § 2 *)*. *Alors, la famille* $\alpha = (\pi_{r}(j) : T(M') \dashrightarrow_{KL} T(M'))_{1 \leq j \leq r}$, *fermée dans* $[T(\mathbf{M'})]$, *co-opère sur* $[T]$ *par* $[H(\mathbf{M'})]$.
De plus , $[T(\mathbf{M'})]$ *est la plus petite sous-théorie de Lawvere de* $[T(\mathbf{M'})]$, *engendrée par* $H(\mathbf{M'})([T])$ *et (les flèches de) la famille* α . *Autrement dit (et plus précisément), toute flèche* $t : T(\mathbf{M'})^{m} \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M'})^{n}$ *de* $[T(\mathbf{M'})]$ *admet une décomposition de la forme :*

$$t = H(\mathbf{M'})(\underline{t}) ._{KL} ([\alpha])^{m} ,$$

(où $\underline{t} : T^{mr} \dashrightarrow T^{n}$ *est une flèche de* $[T]$, *canoniquement associée à* t *)*.

Preuve. Par définition (voir la preuve de la prop. 2, Chap. 4, § 2) on sait que dans $[T]$ on a, pour tout $1 \leq j \leq r$:

$$\pi(\mathbf{M'})_{r}(j) = \pi_{r}(j) . \omega'(T^{r}) .$$

D'où l'on déduit que dans $[T(\mathbf{M'})]$ on a, pour tout $1 \leq j \leq r$:

$$\pi(\mathbf{M'})_{r}(j) ._{KL} \mathrm{id}(T^{r}) = \pi_{r}(j) ,$$

et donc, par construction, que :

$$(1) \qquad \mathrm{id}(T^{r}) = [\alpha_{j}]_{1 \leq j \leq r} = [\alpha] .$$

Pour tout entier m et pour tout $1 \leq i \leq m$, on a d'une part :

$$\mathrm{id}(T^r)\,._{KL}\,\pi(\mathbf{M'})_m(i) = \mathrm{id}(T^r)\,.\,M'(\pi_m(i)\,.\,\omega'(T^m))\,.\,\mu'(T^m)$$

(par définition de la composition $._{KL}$ et de $\pi(\mathbf{M'})$)

$$= M'(\pi_m(i))\,.\,M'(\omega'(T^m))\,.\,\mu'(T^m)$$
$$= M'(\pi_m(i))$$

(parce que $\mathbf{M'}$ est une co-monade)

$$= \varphi^{1,\sigma}{}_m(i)$$

(par définition puisque M' est *r*-déployé par π^σ) ,

et d'autre part :

$$H(\mathbf{M'})(\varphi^{1,\sigma}{}_m(i))\,._{KL}\,\mathrm{id}(T^{mr}) = \varphi^{1,\sigma}{}_m(i)\,.\,\omega'(T^{mr})\,.\,M'(\mathrm{id}(T^{mr}))\,.\,\mu'(T^m)$$

(par définition de $H(\mathbf{M'})$ et de $._{KL}$)

$$= \varphi^{1,\sigma}{}_m(i)\ ,$$

d'où l'on déduit que, dans $[T(\mathbf{M'})]$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbf{M'})^{mr} \arrow[r, "H(\mathbf{M'})(\varphi^{1,\sigma}{}_m(i))"] & T(\mathbf{M'})^{r} \\
T(\mathbf{M'})^{m} \arrow[u, "\mathrm{id}(T^{mr})"] \arrow[r, "\pi(\mathbf{M'})_m(i)"'] & T(\mathbf{M'}) \arrow[u, "\mathrm{id}(T^r)"']
\end{tikzcd}$$

On déduit de (1) et de la commutation de ces diagrammes que, pour tout entier m on a:

$$(2)\qquad \mathrm{id}(T^{mr}) = (\mathrm{id}(T^r))^m = ([\alpha])^m\ ,$$

puisque $[H(\mathbf{M'})]$ est un homomorphisme de théories de Lawvere (ce qui impose, avec des notations évidentes, que $H(\mathbf{M'})(\varphi^{1,\sigma}{}_m(i)) = \varphi(\mathbf{M'})^{1,\sigma}{}_m(i)$).

Maintenant, il est facile de vérifier en utilisant (2) que, pour toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T$ de $[T]$, le diagramme de $[T(\mathbf{M'})]$ ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbf{M'})^{mr} \arrow[r, "H(\mathbf{M'})(M'(t))"] & T(\mathbf{M'})^{r} \\
T(\mathbf{M'})^{m} \arrow[u, "(\mathrm{id}(T^r))^m"] \arrow[r, "H(\mathbf{M'})(t)"'] & T(\mathbf{M'}) \arrow[u, "\mathrm{id}(T^r)"']
\end{tikzcd}$$

ce qui prouve, grâce à (1) et (2), que α co-opère effectivement sur $[T]$.

Enfin, supposons que $t : T(\mathbf{M}')^m \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M}')^n$ est une flèche de $T(\mathbf{M}')$. Il lui correspond donc canoniquement la flèche $\underline{t} = t : T^{mr} \dashrightarrow T^n$ de $[T]$.
Alors on voit que :

$$\begin{aligned} H(\mathbf{M}')(\underline{t}) \cdot_{KL} id(T^{mr}) &= \underline{t} \cdot \omega'(T^{mr}) \cdot M'(id(T^{mr})) \cdot \mu'(T^m) \\ &= \underline{t} \\ &= t \ . \end{aligned}$$

Autrement dit, grâce à (2) on a dans $[T(\mathbf{M}')]$ la décomposition annoncée, à savoir :

$$t = H(\mathbf{M}')(\underline{t}) \cdot_{KL} ([\alpha])^m \ .$$

On conclut alors facilement. ***Fin de la preuve.***

On peut encore améliorer la prop. 3 qui précède en énonçant :

Proposition 4. *Soit* r *un entier*, σ *une* r*-renotation*, $[T]$ *une théorie de Lawvere*, $[\mathbf{M}'] = ([M'], \omega', \mu')$ *un* σ*-extenseur droit de degré* r *sur* $[T]$ *(voir* Chap. 4, § 1*) et* $[H(\mathbf{M}')] : [T] \dashrightarrow [T(\mathbf{M}')]$ *l'extension de Kleisli associée à* $\mathbf{M}'$ *(voir* Chap. 4, § 2 *)*.
Alors, $[T(\mathbf{M}')]$ *est la plus petite sur-théorie de Lawvere de* $[T]$ *librement engendrée par :*
- *la famille fermée* $\alpha = (\pi_r(j) : T(M') \dashrightarrow_{KL} T(M'))_{1 \leq j \leq r}$ *de générateurs (supplémentaires), co-opérant sur* $[T]$,
- *les équations (supplémentaires) suivantes :*

$$\begin{aligned} &(e_1) \qquad H(\mathbf{M}')(\mu'(T)) \cdot_{KL} [\alpha] = ([\alpha])^r \cdot_{KL} [\alpha] \ , \\ &(e_2) \qquad H(\mathbf{M}')(\omega'(T)) \cdot_{KL} [\alpha] = id(T(\mathbf{M}')) = H(\mathbf{M}')(id(T)) \ . \end{aligned}$$

Preuve. La prop. 3 qui précède assure que α co-opère effectivement sur $[T]$. De plus, une vérification automatique, dont nous laissons le soin au lecteur, montre que les équations (e_1) et (e_2) sont également vérifiées.

Il reste à établir que si :
- $[H'] : [T] \dashrightarrow [T']$ est un homomorphisme de théories de Lawvere,
- α' est une famille de flèches fermées de $[T']$ qui co-opère sur $[T]$ par H',
- les équations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} &(e'_1) \qquad H'(\mu'(T)) \cdot [\alpha'] = ([\alpha'])^r \cdot [\alpha'] \ , \\ &(e'_2) \qquad H'(\omega'(T)) \cdot [\alpha'] = id(T') = H'(id(T)) \ , \end{aligned}$$

alors il existe un unique homomorphisme $[K] : [T(\mathbf{M}')] \dashrightarrow [T']$ tel que :
- $[K] \cdot [H(\mathbf{M}')] = [H']$,
- $K(\alpha) = \alpha'$.

Constatons tout d'abord que de (e_1) et (e_2) (resp. (e'_1) et (e'_2)) on déduit évidemment que, pour tout entier m :

(e_1^m) $\quad H(\mathbf{M'})(\mu'(T^m)) \cdot_{KL} ([\alpha])^m = ([\alpha])^{mr} \cdot_{KL} ([\alpha])^m$,

(e_2^m) $\quad H(\mathbf{M'})(\omega'(T^m)) \cdot_{KL} ([\alpha])^m = id(T(\mathbf{M'})^m) = H(\mathbf{M'})(id(T^m))$,

(resp. $(e'_1{}^m)$ $\quad H'(\mu'(T^m)) \cdot ([\alpha'])^m = ([\alpha'])^{mr} \cdot ([\alpha'])^m$,

$(e'_2{}^m)$ $\quad H'(\omega'(T^m)) \cdot ([\alpha'])^m = id(T'^m) = H'(id(T^m))$) ,

Pour tout entier m , posons $K(T(\mathbf{M'})^m) = T'^m$.

Soit $t : T(\mathbf{M'})^m \dashrightarrow T(\mathbf{M'})^n$ une flèche de $T(\mathbf{M'})$. Nécessairement on doit avoir (et donc on pose) :

$$K(t) = K(H(\underline{t}) \cdot_{KL} ([\alpha])^m)$$
(d'après la proposition 3)
$$= H'(\underline{t}) \cdot ([\alpha'])^m$$
$$= H'(t) \cdot ([\alpha'])^m$$
(car $t = \underline{t}$ d'après la preuve de la prop. 3) .

Soit $f : T(\mathbf{M'})^m \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M'})^n$ et $g : T(\mathbf{M'})^n \dashrightarrow_{KL} T(\mathbf{M'})^p$ deux flèches de $T(\mathbf{M'})$. On a alors :

$$K(g \cdot_{KL} f) = H'(g \cdot M'(f) \cdot \mu'(T^m)) \cdot ([\alpha'])^m$$
(par définition de K et de $\cdot_{KL}$)
$$= H'(g) \cdot H'(M'(f)) \cdot H'(\mu'(T^m)) \cdot ([\alpha'])^m$$
(puisque H' est un foncteur)
$$= H'(g) \cdot H'(M'(f)) \cdot ([\alpha'])^{mr} \cdot ([\alpha'])^m$$
(puisque α' vérifie $(e'_1{}^m)$)
$$= H'(g) \cdot ([\alpha'])^n \cdot H'(f) \cdot ([\alpha'])^m$$
(puisque α' co-opère sur $[T]$)
$$= K(g) \cdot K(f)$$
(par définition de K) .

Pour tout entier m on a :

$$K(id(T(\mathbf{M'})^m)) = K(\omega'(T^m))$$
(par construction de $T(\mathbf{M'})$)
$$= H'(\omega'(T^m)) \cdot ([\alpha'])^m$$
(par définition de K)
$$= id(T'^m)$$
(puisque $(e'_2{}^m)$ est vérifiée) .

On conclut alors facilement. ***Fin de la preuve*** .

Il est légitime de dire que la théorie de Lawvere $[T(M')]$ (avec les hypothèses et notations de la prop. 4 précédente) est *la théorie de rupture de degré* r du système d'équations (e_1, e_2) à coefficients dans $[T]$, et même de noter $[T(M')] = [T](\alpha)$.

Alors, il est clair que :

***Proposition* 5** . *Si* r *est un entier et si* $[T]$ *est une théorie de Lawvere alors, toute extension droite de degré* r *de* $[T]$ *est (isomorphe à) une théorie de rupture de degré* r *d'un système d'équations à coefficients dans* $[T]$.

Supposons par exemple que :
- $r = 2$,
- $\sigma = (\sigma_m : \{1, 2\} \times \{1, \ldots, m\} \dashrightarrow \{1, \ldots, 2m\})_{m \in \mathbf{N}}$ est la 2-renotation telle que, pour tout entier m et tout $1 \leq k \leq m$, on a $\sigma_m(1, k) = k$ et $\sigma_m(2, k) = m + k$,
- $[T] = [T_{Ens}]$ est la théorie de Lawvere des ensembles ,

et déterminons toutes les théories de rupture de degré 2 sur $[T_{Ens}]$.

On sait que $[T_{Ens}]$ est la duale de la sous-catégorie pleine de Ens dont les objets sont les ensembles $\{1, \ldots, m\}$, où m parcourt $\mathbf{N}$. Ainsi une flèche $t : T^m \dashrightarrow T^n$ de $[T_{Ens}]$ est une application $t : \{1, \ldots, n\} \dashrightarrow \{1, \ldots, m\}$. Mais si $F : [T_{Ens}] \dashrightarrow Ens$ est un modèle , $F(t) : F(T)^m \dashrightarrow F(T)^n$ est ausi une application. Souvent nous préférons, dans ce qui suit, "décrire" t par l'effet de $F(t)$ sur les m-uplets d'éléments de $F(T)$, quand F est un modèle "général" .
Nous avons donc notamment, pour tout entier m :
- $\pi^{\sigma}_m(1)(x_1, \ldots, x_{2m}) = (x_1, \ldots, x_m)$,
- $\pi^{\sigma}_m(2)(x_1, \ldots, x_{2m}) = (x_{m+1}, \ldots, x_{2m})$.

On vérifie facilement que l'unique réalisation $[M'] : [T_{Ens}] \dashrightarrow [T_{Ens}]$ d'exposant 2 et σ-cohérente est telle que , pour tout entier m et toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T$ de $[T_{Ens}]$, on a :
- $M'(T^m) = T^{2m}$,
- $M'(t)(x_1, \ldots, x_{2m}) = (t(x_1, \ldots, x_m), t(x_{m+1}, \ldots, x_{2m}))$.

Si $[\mathbf{M}'] = ([M'], \omega', \mu')$ est un σ-extenseur droit de degré 2 sur $[T_{Ens}]$, alors $\omega'(T) : T^2 \dashrightarrow T$ est en fait une application de $\{1\}$ vers $\{1, 2\}$. Autrement dit , $\omega'(T)$ ne peut qu'être l'une des deux projections canoniques .

Choisissons par exemple :

$$(*) \qquad \omega'(T) = \pi_2(1) .$$

Alors on voit (par naturalité et M' étant 2-déployé par π^{σ}) qu'on a nécessairement :

$$M'(\omega'(T))(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_3)\ ,$$
$$\omega'(T^2)(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2)\ .$$

D'où l'on déduit, (en utilisant les équations de co-monade) qu'on a nécessairement :

$$(**_X) \qquad \mu'(T)(x_1,x_2) = (x_1,x_2,x_2,X(x_1,x_2))\ ,$$

où $X : T_2 \dashrightarrow T$ est une flèche choisie dans $[T_{Ens}]$ donc, d'après ce qui précède, une des deux projections canoniques.

Dans ces conditions, en utilisant la prop. 7, Chap. 5, § 4, on établit que pour n'importe quel tel $X = \pi_2(i)$ (i.e. pour n'importe quel $i \in \{1, 2\}$) il existe bien un seul σ-extenseur droit $[\mathbf{M'}_i] = ([M'], \omega'_i, \mu'_i)$ de degré 2 sur $[T_{Ens}]$ vérifiant $(*)$ et $(**_X)$. (Nous laissons au lecteur le soin d'établir un résultat analogue si l'on choisit :

$$\omega'(T) = \pi_2(2) \qquad)$$

D'après la prop. 4 précédente, on sait qu'alors $[T_{Ens}(\mathbf{M'}_i)]$ est librement engendrée en adjoignant à $[T_{Ens}]$ une famille fermée $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, co-opérant sur $[T_{Ens}]$ et vérifiant les deux équations (e_1) et (e_2).
Vu les choix pratiqués pour définir $\omega'_i(T)$ et $\mu'_i(T)$ on voit qu'il faut et suffit en réalité que les équations suivantes soient vérifiées :

$$\alpha_1 = id(T(\mathbf{M'}_i))\ ,$$

et

$$\alpha_2 . \alpha_2 = id(T(\mathbf{M'}_i))\ ,\ \text{si}\ \ i = 1\ ,$$
$$\alpha_2 . \alpha_2 = \alpha_2\ ,\ \text{si}\ \ i = 2\ .$$

Ainsi, $[T(\mathbf{M'}_i)]$ est la théorie de Lawvere des M_i-ensembles, si l'on désigne par M_i le monoïde à deux éléments α_1 et α_2 tel que :

$$\alpha_1 . \alpha_j = \alpha_j . \alpha_1 = \alpha_j\ ,\ \text{pour tout}\ \ 1 \leq j \leq 2\ ,$$
$$\alpha_2 . \alpha_2 = \alpha_1\ ,\ \text{si}\ \ i = 1\ ,$$
$$\alpha_2 . \alpha_2 = \alpha_2\ ,\ \text{si}\ \ i = 2\ ,$$

et l'on décrit donc de la sorte *toutes* les théories de rupture de degré 2 sur $[T_{Ens}]$).

Supposons que K est un corps commutatif (pour simplifier), notons $[T]$ la théorie de Lawvere des K-espaces vectoriels, continuons à prendre $r = 2$ et à désigner par σ la 2-renotation définie ci-dessus. On peut déterminer toutes les théories de rupture de degré 2 sur $[T]$ d'une manière tout à fait analogue à celle qui précède.

On sait que $[T]$ est cette fois-ci la duale de la sous-catégorie pleine de K-Vect dont les objets sont les K^m , où m parcourt $\mathbf{N}$. Ainsi, une flèche $t : T^m \dashrightarrow T^n$ de $[T]$ est une application K-linéaire $t : K^n \dashrightarrow K^m$. Mais, si $F : [T] \dashrightarrow Ens$ est un modèle (i.e. si $F(T)$ "est" un K-espace vectoriel) , $F(t) : F(T)^m \dashrightarrow F(T)^n$ est aussi une application K-linéaire. De nouveau, nous préférons souvent dans ce qui suit, "décrire" t par l'effet de $F(t)$ sur les m-uplets d'éléments de $F(T)$, quand F est un modèle "général".
Nous avons donc encore, pour tout entier m :
- $\pi^{\sigma}{}_m(1)(x_1, \ldots\ldots, x_{2m}) = (x_1, \ldots\ldots, x_m)$,
- $\pi^{\sigma}{}_m(2)(x_1, \ldots\ldots, x_{2m}) = (x_{m+1}, \ldots\ldots, x_{2m})$.

De même, on vérifie que l'unique réalisation $[M'] : [T] \dashrightarrow [T]$ d'exposant 2 et σ-cohérente est aussi telle que, pour tout entier m et toute flèche $t : T^m \dashrightarrow T$ de $[T]$, on a :
- $M'(T^m) = T^{2m}$,
- $M'(t)(x_1, \ldots\ldots, x_{2m}) = (t(x_1, \ldots\ldots, x_m), t(x_{m+1}, \ldots\ldots, x_{2m}))$.

Maintenant, si $[\mathbf{M'}] = ([M'], \omega', \mu')$ est un σ-extenseur droit de degré 2 sur $[T]$, alors on dispose de $\omega'(T) : T^2 \dashrightarrow T$. Posons (avec les conventions de "description" précédentes) :

$$(*_{a,b}) \qquad \omega'(T)(x_1, x_2) = a x_1 + b x_2$$

où a , b sont deux éléments de K .

Alors on voit (par naturalité et M' étant 2-déployé par π^{σ}) qu'on a nécessairement :

$$M'(\omega'(T))(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\omega'(T)(x_1, x_2), \omega'(T)(x_3, x_4)) ,$$
$$\omega'(T^2)(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\omega'(T)(x_1, x_3), \omega'(T)(x_2, x_4)) .$$

D'où l'on déduit (en utilisant les équations de co-monade) que a et b ne sont pas simultanément nuls et que :

$$(**_{a,b,c,d}) \qquad \mu'(T)(x_1, x_2)$$
$$=$$
$$(L(x_1, x_2), b^{-1}(x_1 - a L(x_1, x_2)), b^{-1}(x_1 - a L(x_1, x_2)), b^{-2}(b x_2 - a x_1 + a^2 L(x_1, x_2)))$$

si l'on choisit par exemple $b \neq 0$ et où $L : T^2 \dashrightarrow T$ est la flèche de $[T]$ décrite en posant :

$$L(x_1, x_2) = c x_1 + d x_2$$

lorsque c et d sont choisis dans K .

En utilisant la prop. 7 , Chap. 5 , § 4 , on établit que, pour tout *quadruplet* $q = (a, b, c, d)$

appartenant à K^4 et pour lequel $b \neq 0$, il existe bien un et un seul σ-extenseur droit $[\mathbf{M'}_q] = ([M'], \omega'_q, \mu'_q)$ de degré 2 sur $[\mathbf{T}]$ vérifiant $(*_{a,b})$ et $(**_{a,b,c,d})$.
(Nous laissons le soin au lecteur d'effectuer des calculs analogues et d'établir un résultat du même genre si l'on choisit $b = 0$ et $a \neq 0$.)

D'après la prop. 4 précédente, on sait de nouveau que $[\mathbf{T}(\mathbf{M'}_q)]$ est librement engendrée en adjoignant à $[\mathbf{T}]$ une famille fermée $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, co-opérant sur $[\mathbf{T}]$ et vérifiant les deux équations (e_1) et (e_2).

Si l'on choisit (pour simplifier) $a = 0$ et $b = 1$ et vu les descriptions de $\omega'_q(T)$ et de $\mu'_q(T)$, on voit qu'il faut et suffit en réalité que :

$$\alpha_2 = id(T(\mathbf{M'}_q))$$

et que l'équation suivante soit vérifiée :

$$\alpha_1 . \alpha_1 = c\alpha_1 + d$$

(i.e. que, compte tenu des conventions précédentes : $\alpha_1(\alpha_1(x)) = c\alpha_1(x) + dx$).
Autrement dit $[T(\mathbf{M'}_q)]$ est la théorie de Lawvere des A'-modules où A' est l'anneau de rupture du polynome, de degré 2 à coefficients dans K, $X^2 - cX - d$.

Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter de la même manière $[\mathbf{T}(\mathbf{M'}_q)]$ lorsque q est un quadruplet quelconque.

ANNEXE

Sommaire

1. Adjonctions

Soit **B** et **C** deux catégories localement petites, $R : \mathbf{B} \dashrightarrow \mathbf{C}$ et $L : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{B}$ deux foncteurs et

$$v : \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(-), -) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, R(-)) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{B} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$$
$$v' : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, R(-)) \Longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(L(-), -) : \mathbf{C}^{op} \times \mathbf{B} \dashrightarrow \mathrm{Ens}$$

deux transformations naturelles.

On dit que (L, v, v', R) est une *adjonction* si et seulement si les transformations naturelles v et v' sont inverses l'une de l'autre. Dans ce cas, on dit aussi que L est un *adjoint à gauche* de R, *présenté* par v, ou encore que R est un *adjoint à droite* de L, *présenté* par v' (voir Mac Lane [1971], par exemple).

Le plus souvent, s'il n'y a pas de risque d'ambiguïté, on dit simplement que c'est (L, R) qui est une adjonction, ou que L est un adjoint à gauche de R, ou encore que R est un adjoint à droite de L.

Soit **B** et **C** deux catégories localement petites.

Si $U : \mathbf{B} \dashrightarrow \mathbf{C}$ et $L : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{B}$ sont deux foncteurs et si (L, v, v', U) est une adjonction, nous dirons aussi que c'est une *adjonction gauche sur* **C** (pour exprimer que l'adjoint à gauche dans cette adjonction a pour source **C**).

Si $U : \mathbf{B} \dashrightarrow \mathbf{C}$ et $R : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{B}$ sont deux foncteurs et si (U, v, v', R) est une adjonction, nous dirons également que c'est *une adjonction droite sur* $\mathbf{C}$ (pour exprimer que l'adjoint à droite de cette adjonction a pour source $\mathbf{C}$).

Soit :
- $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ et $\mathbf{C}$ trois catégories localement petites,
- $F : \mathbf{B}_1 \dashrightarrow \mathbf{B}_2$, $U_1 : \mathbf{B}_1 \dashrightarrow \mathbf{C}$, $L_1 : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{B}_1$, $U_2 : \mathbf{B}_2 \dashrightarrow \mathbf{C}$ et $L_2 : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{B}_2$ des foncteurs.

Si $a_1 = (L_1, v_1, v'_1, U_1)$ et $a_2 = (L_2, v_2, v'_2, U_2)$ sont deux adjonctions gauches sur $\mathbf{C}$, on dit que $(a_1, F, a_2) : a_1 \dashrightarrow a_2$ est *un morphisme d'adjonctions gauches sur* $\mathbf{C}$ si et seulement si :
- $U_2 . F = U_1$,
- $F . L_1 = L_2$,
- pour tout objet B_1 de $\mathbf{B}_1$ et tout objet C de $\mathbf{C}$, le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(L_1(C), B_1) \arrow[r, "v_1(C, B_1)"] \arrow[d, "F_{|\mathrm{Hom}(L_1(C), B_1)}"'] & \mathrm{Hom}(C, U_1(B_1)) \arrow[d, "\mathrm{id}(\mathrm{Hom}(C, U_1(B_1)))"] \\
\mathrm{Hom}(L_2(C), F(B_1)) \arrow[r, "v_2(C, F(B_1))"'] & \mathrm{Hom}(C, U_2(F(B_1)))
\end{tikzcd}$$

On définit de façon analogue les *morphismes d'adjonctions droites*.

2. Monades et co-monades

Soit une catégorie $\mathbf{C}$, un foncteur $M : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{C}$ et deux transformations naturelles $\omega : \mathrm{id}(\mathbf{C}) \Longrightarrow M$ et $\mu : M^2 \Longrightarrow M$.

On dit que $\mathbf{M} = (M, \omega, \mu)$ est une *monade* sur $\mathbf{C}$ si et seulement si, pour tout objet C de $\mathbf{C}$, les trois diagrammes suivants commutent (voir Mac Lane [1971], par exemple) :

$$\begin{tikzcd}
M(C) \arrow[rr, "\omega(M(C))"] \arrow[dr, "\mathrm{id}(M(C))"'] & & M^2(C) \arrow[dl, "\mu(C)"] \\
& M(C) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M(C) \arrow[rr, "M(\omega(C))"] \arrow[dr, "\mathrm{id}(M(C))"'] & & M^2(C) \arrow[dl, "\mu(C)"] \\
& M(C) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
M^3(C) \arrow[r, "M(\mu(C))"] \arrow[d, "\mu(M(C))"'] & M^2(C) \arrow[d, "\mu(C)"] \\
M^2(C) \arrow[r, "\mu(C)"'] & M(C)
\end{tikzcd}$$

Soit une catégorie **C** , un foncteur M' : **C** ----> **C** et deux transformations naturelles ω' : M' ==> id (**C**) et μ' : M' ==> M'^{2}.

On dit que **M'** = (M' , ω' , μ') est une *co-monade* sur **C** si et seulement si (M'^{op} , ω', μ') est une monade sur **C**^{op}.

Classiquement (voir Mac Lane [1971] , par exemple) , les notions d'adjonction gauche sur **C** et de monade sur **C** , sont liées (notamment) comme suit :

***Proposition* 1** . *Si* **C** *est une catégorie localement petite, alors :*
- *à toute adjonction gauche* a = (L , U) *sur* **C** *est associée une monade* **M** (a) = (M , ω , μ) *sur* **C**,
- *à toute monade* **M** = (M , ω , μ) *sur* **C** *est associée une adjonction gauche* a (**M**) = (H (**M**) , D (**M**)) *sur* **C** ,

de sorte que :
- *pour toute adjonction gauche* a *sur* **C** , *il existe un unique morphisme (dit "de comparaison")* k (a) : a (**M** (a)) ----> a ,
- *pour toute monade* **M** *sur* **C** , *on a* **M** (a (**M**)) = **M** .

Rappelons en effet que, pour construire l'adjonction gauche sur **C** associée à une monade **M** = (M , ω , μ) , on procède comme suit :
- on considère la *catégorie de Kleisli* de **M** notée (ici, essentiellement pour les besoins du Chap. 4) **C** (**M**) :
  + ses objets sont exactement les objets de **C** ,
  + ses flèches c : C ---->$_{KL}$ C' sont les flèches c : C ----> M (C') de **C** ,
  + si c : C ---->$_{KL}$ C' et c' : C' ---->$_{KL}$ C" sont deux flèches de **C** (**M**) , leur composée est c' .$_{KL}$ c = μ (C") . M (c') . c , selon le schéma suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & M^2(C'') \arrow[d, "\mu(C'')"] \\
 & M(C') \arrow[ur, "M(c')"] & M(C'') \\
C \arrow[ur, "c"] \arrow[urr, dashed, "c'._{KL}c"] \arrow[r, "c"'] \arrow[rr, bend right, "c'._{KL}c"'] & {}_{KL}C' \arrow[ur, "c'"] \arrow[r, "c'"'] & {}_{KL}C''
\end{tikzcd}$$

On dispose dans ces conditions de deux foncteurs :

$$\begin{array}{c} H(\mathbf{M}) : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{M}) \\ C \dashrightarrow C \\ (c : C \dashrightarrow C') \dashrightarrow (\omega(C') . c : C \dashrightarrow_{KL} C') \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{c} D(\mathbf{M}) : \mathbf{C}(\mathbf{M}) \dashrightarrow \mathbf{C} \\ C \dashrightarrow M(C) \\ (c : C \dashrightarrow_{KL} C') \dashrightarrow (\mu(C') . M(c) : M(C) \dashrightarrow M(C')) \end{array}$$

Alors, $H(\mathbf{M})$ est bien adjoint à gauche de $D(\mathbf{M})$ et l'on a $(H(\mathbf{M}), D(\mathbf{M})) = a(\mathbf{M})$.

De même, les notions d'adjonction droite sur $\mathbf{C}$ et de co-monade sur $\mathbf{C}$ sont liées (notamment) comme suit (voir Mac Lane [1971]) :

***Proposition* 2**. *Si* $\mathbf{C}$ *est une catégorie localement petite, alors :*
- *à toute adjonction droite* $a' = (U, R)$ *sur* $\mathbf{C}$ *est associée une co-monade* $\mathbf{M}'(a') = (M', \omega', \mu')$ *sur* $\mathbf{C}$,
- *à toute co-monade* $\mathbf{M}' = (M', \omega', \mu')$ *sur* $\mathbf{C}$ *est associée une adjonction droite* $a'(\mathbf{M}') = (G(\mathbf{M}'), H(\mathbf{M}'))$ *sur* $\mathbf{C}$,

de sorte que :
- *pour toute adjonction droite* a' *sur* $\mathbf{C}$, *il existe un unique morphisme (dit "de comparaison")* $k'(a') : a'(\mathbf{M}'(a')) \dashrightarrow a'$,
- *pour toute co-monade* $\mathbf{M}'$ *sur* $\mathbf{C}$, *on a* $\mathbf{M}'(a'(\mathbf{M}')) = \mathbf{M}'$.

Pour construire l' adjonction droite associée à une co-monade $\mathbf{M}' = (M', \omega', \mu')$ sur $\mathbf{C}$, on procède comme suit :
- on considère la *catégorie de Kleisli* de $\mathbf{M}'$, notée (ici, de nouveau pour les besoins du Chap. 4) $\mathbf{C}(\mathbf{M}')$:
  + ses objets sont exactement les objets de $\mathbf{C}$,
  + ses flèches $c : C \dashrightarrow_{KL} C'$ sont les flèches $c : M'(C) \dashrightarrow C'$ de $\mathbf{C}$,
  + si $c : C \dashrightarrow_{KL} C'$ et $c' : C' \dashrightarrow C''$ sont deux flèches de $\mathbf{C}(\mathbf{M}')$, leur composée est $c' ._{KL} c = c' . M'(c) . \mu'(C)$ selon le schéma ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
M'^2(C) \arrow[dr, "M'(c)"] & & \\
M'(C) \arrow[u, "\mu'(C)"] \arrow[dr, dashed, "c"'] \arrow[drr, "c'._{KL}c"] & M'(C') \arrow[dr, "c'"] & \\
C \arrow[r, "c"'] \arrow[rr, bend right, "c'._{KL}c"', "KL"] & {}_{KL}C' \arrow[r, "c'"'] & {}_{KL}C''
\end{tikzcd}$$

On dispose ainsi de deux foncteurs :

$$\begin{array}{c} H(\mathbf{M'}) : \mathbf{C} \dashrightarrow \mathbf{C}(\mathbf{M'}) \\ C \dashrightarrow C \\ (c : C \dashrightarrow C') \dashrightarrow (c \,.\, \omega'(C) : C \dashrightarrow_{KL} C') \end{array}$$

et :

$$\begin{array}{c} G(\mathbf{M'}) : \mathbf{C}(\mathbf{M'}) \dashrightarrow \mathbf{C} \\ C \dashrightarrow M'(C) \\ (c : C \dashrightarrow_{KL} C') \dashrightarrow (M'(c) \,.\, \mu'(C) : M'(C) \dashrightarrow M'(C')) \end{array}$$

Alors, $H(\mathbf{M'})$ est bien adjoint à droite de $G(\mathbf{M'})$ et l'on a $(G(\mathbf{M'}), H(\mathbf{M'})) = a'(\mathbf{M'})$

3. Présentations

On dit que $\mathbf{G} = (Ob(\mathbf{G}), Fl(\mathbf{G}), dom, codom)$ est un *graphe* (sans identités) si et seulement si :
- $Ob(\mathbf{G})$ est un ensemble, dit ensemble des *objets* de $\mathbf{G}$,
- $Fl(\mathbf{G})$ est un ensemble, dit ensemble des *flèches* de $\mathbf{G}$,
- $dom : Fl(\mathbf{G}) \dashrightarrow Ob(\mathbf{G})$ est une application, dite de *sélection des domaines* (ou sources) des flèches,
- $codom : Fl(\mathbf{G}) \dashrightarrow Ob(\mathbf{G})$ est une application, dite de *sélection des codomaines* (ou buts) des flèches.

On dit que $\mathbf{G} = (\mathbf{Gph}(\mathbf{G}), id)$ est un *graphe orienté* (ou encore un graphe avec identités) si et seulement si :
- $\mathbf{Gph}(\mathbf{G})$ est un graphe, dit *sous-jacent* à $\mathbf{G}$,
- $id : Ob(\mathbf{G}) \dashrightarrow Fl(\mathbf{G})$ est une application, dite *sélection des identités*,
- pour tout objet G de $\mathbf{G}$, on a :

$$dom(id(G)) = G = codom(id(G)).$$

On dit que $\mathbf{G} = (\mathbf{Gpho}(\mathbf{G}), Comp(\mathbf{G}), k)$ est *un graphe compositif* si et seulement si :
- $\mathbf{Gpho}(\mathbf{G})$ est un graphe orienté, dit *sous-jacent* à $\mathbf{G}$,
- $Comp(\mathbf{G})$ est une classe de couples (g', g) de flèches consécutives (i.e. telles que $dom(g') = codom(g)$) de $\mathbf{G}$, que l'on dit être *composables*,
- $k : Comp(\mathbf{G}) \dashrightarrow Fl(\mathbf{G})$ est une application, dite *composition* des flèches,
- pour tout (g', g) appartenant à $Comp(\mathbf{G})$, on a :

$$dom(g' . g) = dom(g) \quad \text{et} \quad codom(g' . g) = codom(g')$$

(si on pose pour simplifier $k(g', g) = g'.g$),
- pour toute flèche $g : G \dashrightarrow G'$ de $\mathbf{G}$, les couples $(g, id(G))$ et $(id(G'), g)$, dits *triviaux*, sont composables et l'on a :

$$g . id(G) = g = id(G') . g \quad .$$

Par exemple, un graphe orienté s'identifie à un graphe compositif où la composabilité des flèches est "minimum" .
De même, une catégorie s'identifie à un graphe compositif particulier où la composabilité des flèches est "maximum" et où la loi de composition est associative.

Enfin, on peut dire qu'un graphe compositif $\mathbf{G}$ est un "système de générateurs (ses flèches) et de relations (données par la composition des flèches)" pour une catégorie $Cat(\mathbf{G})$ qu'il engendre .

On définit facilement, par analogie avec les foncteurs entre catégories, ce qu'est *un foncteur* $F : \mathbf{G} \dashrightarrow \mathbf{G'}$ d'un graphe compositif $\mathbf{G}$ vers un autre $\mathbf{G'}$.
De même, on définit ce qu'est *une transformation naturelle* $f : F \Longrightarrow F'$ entre deux foncteurs $F, F' : \mathbf{G} \dashrightarrow \mathbf{C}$ d'un graphe compositif $\mathbf{G}$ vers une *catégorie* $\mathbf{C}$.
Alors, on note $Fonct(\mathbf{G}, \mathbf{C})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathbf{G}$ vers $\mathbf{C}$ et les flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

On dit que $<\mathbf{P}> = (\mathbf{P}, P, exp, (\pi_Q)_{Q \in Ob(\mathbf{P})})$ est une *présentation* si et seulement si :
- $\mathbf{P}$ est un graphe compositif,
- P est un objet de $\mathbf{P}$, dit *distingué*,
- $exp : Ob(\mathbf{P}) \dashrightarrow \mathbf{N}$ est une application, dite *sélection des exposants* des objets,
- $exp(P) = 1$,
- pour tout objet Q de $\mathbf{P}$ tel que $exp(Q) > 0$, $\pi_Q = (\pi_Q(k) : Q \dashrightarrow P)_{1 \leq k \leq exp(Q)}$ est un cône projectif dans $\mathbf{P}$ d'indexation discrète,
- $\pi_P(1) = id(P)$,
- pour tout objet Q de $\mathbf{P}$ tel que $exp(Q) = 0$, π_Q est un cône projectif dans $\mathbf{P}$, de sommet Q et d'indexation $\emptyset$ (i.e. π_Q est la famille vide de flèches),
(pour tout objet Q de $\mathbf{P}$, on dira aussi que π_Q est un cône projectif *distingué*).

Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et $<\mathbf{P}>$ une présentation.

On dit que $F : <\mathbf{P}> \dashrightarrow \mathbf{C}$ est un *modèle* de $<\mathbf{P}>$ dans $\mathbf{C}$ si et seulement si :
- $F : \mathbf{P} \dashrightarrow \mathbf{C}$ est un foncteur,
- pour tout objet Q de $\mathbf{P}$, $F(\pi_Q)$ est un cône produit dans $\mathbf{C}$.

Si $F, F' : <\mathbf{P}> \dashrightarrow \mathbf{C}$ sont deux modèles de $<\mathbf{P}>$ dans $\mathbf{C}$, on dit que $h : F \Longrightarrow F'$ est un *homomorphisme* de F vers F' si et seulement si h est une transformation naturelle .

Dans ces conditions, on désigne par $Mod(<\mathbf{P}>, \mathbf{C})$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $Fonct(\mathbf{P}, \mathbf{C})$ dont les objets sont les modèles de $<\mathbf{P}>$ dans $\mathbf{C}$.

Alors on note $i_{<P>,C} : \mathrm{Mod}(<P>, C) \dashrightarrow \mathrm{Fonct}(P, C)$ le foncteur injection canonique et, pour tout objet Q de $<P>$, on dispose du foncteur *évaluation en* Q :

$$\begin{array}{l} ev_{Q,C} : \mathrm{Mod}(<P>, C) \dashrightarrow C \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F \dashrightarrow F(Q) \end{array}$$

En particulier, si $C = \mathrm{Ens}$, il sera parfois (selon le contexte) plus commode de noter :
- $\mathrm{Fonct}(P)$ au lieu de $\mathrm{Fonct}(P, \mathrm{Ens})$,
- $\mathrm{Mod}(<P>)$ au lieu de $\mathrm{Mod}(<P>, \mathrm{Ens})$,
- $i_{<P>}$ au lieu de $i_{<P>, \mathrm{Ens}}$,
- pour tout objet Q de $<P>$, ev_Q au lieu de $ev_{Q, \mathrm{Ens}}$,
- $U_{<P>}$ au lieu de ev_P.

Soit $<P>$ et $<P'>$ deux présentations.

On dit que $<H> : <P> \dashrightarrow <P'>$ est *un homomorphisme* de $<P>$ vers $<P'>$ si et seulement si :
- $H : P \dashrightarrow P'$ est un foncteur,
- $H(P) = P'$,
- pour tout objet Q de $<P>$, on a $\exp(H(Q)) = \exp(Q)$,
- pour tout objet Q de $<P>$, on a $H(\pi_Q) = \pi'_{H(Q)}$.

Dans ces conditions, si C est une catégorie, on dispose du foncteur "composition par H" :

$$\begin{array}{l} \mathrm{Fonct}(H, C) : \mathrm{Fonct}(P', C) \dashrightarrow \mathrm{Fonct}(P, C) \\ \qquad\qquad (F' : P' \dashrightarrow C) \dashrightarrow (F'.H : P \dashrightarrow C), \end{array}$$

et l'on dispose aussi du foncteur (restriction du précédent) "modèle de $<P>$ sous-jacent" :

$$\begin{array}{l} \mathrm{Mod}(<H>, C) : \mathrm{Mod}(<P'>, C) \dashrightarrow \mathrm{Mod}(<P>, C) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad F' \dashrightarrow F'.H\,. \end{array}$$

Ainsi le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}(<P'>, C) \arrow[r, "\mathrm{Mod}(<H>, C)"] \arrow[d, "i_{<P'>,C}"'] & \mathrm{Mod}(<P>, C) \arrow[d, "i_{<P>,C}"] \\ \mathrm{Fonct}(P', C) \arrow[r, dashed, "\mathrm{Fonct}(H, C)"'] & \mathrm{Fonct}(P, C) \end{tikzcd}$$

En particulier, si $C = \mathrm{Ens}$, on note :
- $\mathrm{Fonct}(H)$ au lieu de $\mathrm{Fonct}(H, \mathrm{Ens})$,
- $\mathrm{Mod}(<H>)$ au lieu de $\mathrm{Mod}(<H>, \mathrm{Ens})$,

et donc le diagramme ci-dessous commute :

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}\,(< P' >) \arrow[rr, "\mathrm{Mod}\,(< H >)"] \arrow[dr, "U_{< P' >}"'] & & \mathrm{Mod}\,(< P >) \arrow[dl, "U_{< P >}"] \\
& \mathrm{Ens} &
\end{tikzcd}
$$

Alors, on sait d'après "le théorème du faisceau associé" (voir Ehresmann [1967] , par exemple) que :

***Proposition* 3** . *Si* $< P >$ *est une présentation, alors le foncteur injection canonique :*

$$i_{< P >} : \mathrm{Mod}\,(< P >) \dashrightarrow \mathrm{Fonct}\,(P)$$

admet un adjoint à gauche :

$$g_{< P >} : \mathrm{Fonct}\,(P) \dashrightarrow \mathrm{Mod}\,(< P >) \; .$$

Mais Fonct (P) étant complète et co-complète, on en déduit que (les limites et co-limites se calculant "point par point" dans Fonct (P) et les limites commutant aux produits dans Ens) :

***Proposition* 4** . *Si* $< P >$ *est une présentation, alors la catégorie* Mod ($< P >$) *est complète et co-complète et les limites (mais pas les co-limites) s'y calculent point par point.*

Il résulte aussi clairement de la prop. 3 qui précède que :

***Proposition* 5** . *Si* $< H > : < P > \dashrightarrow < P' >$ *est un homomorphisme de présentations, le foncteur "modèle de* $< P >$ *sous-jacent"* $\mathrm{Mod}\,(< H >) : \mathrm{Mod}\,(< P' >) \dashrightarrow \mathrm{Mod}\,(< P >)$ *admet un adjoint à gauche* $L_{< H >} : \mathrm{Mod}\,(< P >) \dashrightarrow \mathrm{Mod}\,(< P' >)$.

En particulier on en déduit que :

***Proposition* 6** . *Si* $< P >$ *est une présentation, le foncteur ensemble sous-jacent :*

$$U_{< P >} : \mathrm{Mod}\,(< P >) \dashrightarrow \mathrm{Ens}$$

admet un adjoint à gauche :

$$L_{< P >} : \mathrm{Ens} \dashrightarrow \mathrm{Mod}\,(< P >) \; .$$

Soit $< P >$ une présentation.

On dispose du plongement de Yoneda relatif à la catégorie Cat (P) engendrée par le graphe compositif P , que l'on note $Y_{\mathrm{Cat}\,(P)} : \mathrm{Cat}\,(P) \dashrightarrow \mathrm{Fonct}\,(\mathrm{Cat}\,(P))^{\mathrm{op}}$.

Si $c\,(P) : P \dashrightarrow \mathrm{Cat}\,(P)$ désigne le foncteur (en général ni plein, ni fidèle) présentant Cat (P) comme catégorie librement engendrée par P , alors on dispose d'un autre foncteur canonique :

$$Y_P : P \xrightarrow[c(P)]{} \mathrm{Cat}(P) \xrightarrow[Y_{\mathrm{Cat}(P)}]{} \mathrm{Fonct}(\mathrm{Cat}(P))^{op} \underset{\mathrm{Fonct}(c(P))^{op}}{\simeq} \mathrm{Fonct}(P)^{op}$$

et donc d'un troisième foncteur canonique :

$$Y_{<P>} : P \xrightarrow[Y_P]{} \mathrm{Fonct}(P)^{op} \xrightarrow[g_{<P>}^{op}]{} \mathrm{Mod}(<P>)^{op}$$

associant à tout objet Q de $<P>$, un modèle $Y_{<P>}(Q)$ de $<P>$, dit *canonique et relatif à* Q.

On sait que (voir Gabriel-Ulmer [1971] et Lair [1971], par exemple) :

Proposition 7 . *Si* $<P>$ *est une présentation, alors le foncteur canonique qui lui est associé* $Y_{<P>} : P \dashrightarrow \mathrm{Mod}(<P>)^{op}$ *vérifie les propriétés suivantes :*

- $Y_{<P>}{}^{op}$ *est dense,*
- *pour tout objet* Q *de* $<P>$, *le modèle canonique* $Y_{<P>}(Q)$ *est un objet libre de* $\mathrm{Mod}(<P>)$, *relativement au foncteur* $ev_Q : \mathrm{Mod}(<P>) \dashrightarrow \mathrm{Ens}$, *engendré par un générateur,*
- *naturellement en tout modèle* $F : <P> \dashrightarrow \mathrm{Ens}$, *on dispose d'une équivalence naturelle :*

$$\vartheta_F : \mathrm{Hom}(Y_{<P>}(-), F) \simeq F : <P> \dashrightarrow \mathrm{Ens},$$

- *pour tout objet* Q *de* $<P>$, *le modèle canonique* $Y_{<P>}(Q)$ *est un objet libre de* $\mathrm{Mod}(<P>)$, *relativement au foncteur* $U_{<P>} : \mathrm{Mod}(<P>) \dashrightarrow \mathrm{Ens}$, *engendré par* $\exp(Q)$ *générateurs (autrement dit on a* $Y_{<P>}(Q) \simeq L_{<P>}(\{i, 1 \leq i \leq \exp(Q)\}))$,
- *le foncteur* $Y_{<P>}$ *définit un modèle* $Y_{<P>} : <P> \dashrightarrow \mathrm{Mod}(<P>)^{op}$ *de* $<P>$ *dans* $\mathrm{Mod}(<P>)^{op}$.

Soit C une catégorie.

On dira que C est *présentable* si et seulement s'il existe une présentation $<P>$ telle que C et $\mathrm{Mod}(<P>)$ sont équivalentes.

De même, on dit qu'un foncteur $U : C' \dashrightarrow C$ est *présentable* si et seulement s'il existe un homomorphisme $<H> : <P> \dashrightarrow <P'>$ entre présentations tel que U et $\mathrm{Mod}(<H>)$ sont "équivalents".

4 . Théories de Lawvere

On dit que $[T] = (T, (\pi_m(i))_{1 \leq i \leq m})_{m \in \mathbf{N}^*})$ est une *théorie de Lawvere* (voir Lawvere [1968]) si et seulement si :
- T est une catégorie petite, dite *sous-jacente* à $[T]$,
- $Ob(T) = \{T^n \, / \, n \in \mathbf{N}\}$,
- pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $(\pi_m(i) : T^m \text{----}> T^1)_{1 \leq i \leq m}$ est un cône produit dans T ,
- $\pi_1(1) = id(T^1)$,
- T^0 est un objet final dans T .

Soit $[T]$ une théorie de Lawvere.

Dans la suite, on notera plus simplement :
- $1_{[T]}$ ou même 1 au lieu de T^0 ,
- T au lieu de T^1 ,
- π_0 la famille vide de flèches de source $T^0 = 1_{[T]} = 1$.

De même si $m \in \mathbf{N}$, si $n \in \mathbf{N}^*$ et si $(t_j : T^m \text{----}> T)_{1 \leq j \leq n}$ est une famille de flèches de $[T]$, elle détermine une unique flèche que nous noterons $[t_j]_{1 \leq j \leq n} : T^m \text{----}> T^n$ et telle que, pour tout $1 \leq i \leq n$, on a $\pi_n(i) \,.\, [t_j]_{1 \leq j \leq n} = t_i$.

Enfin , $1_{[T]}$ étant un objet final de T , on dispose, pour tout $m \in \mathbf{N}$, d'une et une seule flèche $c_m : T^m \text{----}> 1_{[T]}$ de $[T]$ (en particulier, on a donc $c_0 = id(1)$) .

Soit C une catégorie et $[T]$ une théorie de Lawvere .

On dit que $F : [T] \text{----}> C$ est un *modèle* (ou une *algèbre* - voir Lawvere [1968]) de $[T]$ dans C si et seulement si :
- $F : T \text{----}> C$ est un foncteur ,
- pour tout $m \in \mathbf{N}^*$, $(F(\pi_m(i)) : F(T^m) \text{----}> F(T))_{1 \leq i \leq m}$ est un cône produit dans la catégorie C ,
- $F(1_{[T]})$ est un objet final de C .

Si $F, F' : [T] \text{----}> C$ sont deux modèles de $[T]$ dans C , on dit que $h : F ==> F'$ est un *homomorphisme* de F vers F' si et seulement si h est une transformation naturelle du foncteur F vers le foncteur F' . S'il en est ainsi, on pose $h(T^m) = h(m)$ pour tout $m \in \mathbf{N}$.

Dans ces conditions, on désigne par $Mod([T], C)$ la sous-catégorie pleine de la catégorie $Fonct(T, C)$ dont les objets sont les modèles de $[T]$ dans C .

Alors on note $i_{[T],C} : \mathrm{Mod}([T], C) \dashrightarrow \mathrm{Fonct}(T, C)$ le foncteur injection canonique et pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, on dispose du foncteur *évaluation* en T^m :

$$\begin{aligned} ev_{m,C} : \mathrm{Mod}([T]) &\dashrightarrow C \\ F &\dashrightarrow F(T^m) \end{aligned}$$

En particulier, si $C = \mathrm{Ens}$, on notera plus simplement :
- $\mathrm{Fonct}(T)$ au lieu de $\mathrm{Fonct}(T, \mathrm{Ens})$,
- $\mathrm{Mod}([T])$ au lieu de $\mathrm{Mod}([T], \mathrm{Ens})$,
- $i_{[T]}$ au lieu de $i_{[T],\mathrm{Ens}}$,
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, ev_m au lieu de $ev_{m,\mathrm{Ens}}$,
- $U_{[T]}$ au lieu de ev_1.

Soit $[T]$ et $[T']$ deux théories de Lawvere.

On dit que $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ est un *homomorphisme* (voir Lawvere [1968]) de $[T]$ vers $[T']$ si et seulement si :
- $H : T \dashrightarrow T'$ est un foncteur,
- pour tout $m \in \mathbf{N}$, on a $H(T^m) = T'^m$,
- pour tout $m \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $1 \leq i \leq m$, on a $H(\pi_m(i)) = \pi'_m(i)$.

Dans ces conditions, si C est une catégorie, on dispose du foncteur "modèle de $[T]$ sous-jacent" :

$$\mathrm{Mod}([H], C) : \mathrm{Mod}([T'], C) \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T], C),$$

restriction du foncteur composition par H :

$$\mathrm{Fonct}(H, C) : \mathrm{Fonct}(T', C) \dashrightarrow \mathrm{Fonct}(T, C).$$

Ainsi le diagramme ci-dessous est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}([T'], C) \arrow[r, "\mathrm{Mod}([H], C)"] \arrow[d, "i_{[T],C}"'] & \mathrm{Mod}([T], C) \arrow[d, "i_{[T],C}"] \\ \mathrm{Fonct}(T', C) \arrow[r, "\mathrm{Fonct}(H, C)"'] & \mathrm{Fonct}(T, C) \end{tikzcd}$$

En particulier, si $C = \mathrm{Ens}$, on note :
- $\mathrm{Fonct}(H)$ au lieu de $\mathrm{Fonct}(H, \mathrm{Ens})$,
- $\mathrm{Mod}([H])$ au lieu de $\mathrm{Mod}([H], \mathrm{Ens})$,

et donc le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}([T']) \arrow[rr, "\mathrm{Mod}([H])"] \arrow[dr, "U_{[T']}"'] & & \mathrm{Mod}([T]) \arrow[dl, "U_{[T]}"] \\
& \mathrm{Ens} &
\end{tikzcd}$$

Soit $[T]$ une théorie de Lawvere.

On dispose donc du plongement de Yoneda relatif à la catégorie T :

$$Y_T : T \dashrightarrow \mathrm{Fonct}(T)^{op}$$
$$T^m \dashrightarrow \mathrm{Hom}(T^m, -)$$

Pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, le foncteur $\mathrm{Hom}(T^m, -) : T \dashrightarrow \mathrm{Ens}$ commute nécessairement aux limites projectives, en particulier aux produits finis. Il définit donc un modèle de $[T]$, dit *canonique et relatif à* T^m (ou à m). Ainsi, le foncteur Y_T est à valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathrm{Mod}([T])^{op}$ de $\mathrm{Fonct}(T)^{op}$, il admet donc une restriction :

$$Y_{[T]} : T \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])^{op}$$

et le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[dl, "Y_{[T]}"'] \arrow[dr, "Y_T"] & \\
\mathrm{Mod}([T])^{op} \arrow[rr, "i_{[T]}"'] & & \mathrm{Fonct}(T)^{op}
\end{tikzcd}$$

Classiquement, on sait que (voir Lawvere [1968], par exemple) :

Proposition 8. *Si* $[T]$ *est une théorie de Lawvere, alors le foncteur canonique* :

$$Y_{[T]} : T \dashrightarrow \mathrm{Mod}([T])^{op}$$

vérifie les propriétés suivantes :

- $Y_{[T]}^{op}$ *est dense*,
- *pour tout entier* $m \in \mathbf{N}$, *le modèle canonique* $Y_{[T]}(T^m)$ *est un objet libre de* $\mathrm{Mod}([T])$ *relativement au foncteur* $ev_m : \mathrm{Mod}([T]) \dashrightarrow \mathrm{Ens}$, *engendré par un générateur*,
- *naturellement en tout modèle* $F : [T] \dashrightarrow \mathrm{Ens}$, *on dispose d'une équivalence naturelle* :

$$\gamma_F : \mathrm{Hom}(Y_{[T]}(-), F) \simeq F .$$

- *pour tout entier* $m \in \mathbf{N}$, *le modèle canonique* $Y_{[T]}(T^m)$ *est un objet libre de* $Mod([T])$ *relativement au foncteur* $U_{[T]} : Mod([T]) \dashrightarrow Ens$, *engendré par* m *générateurs* ,
- *le foncteur* $Y_{[T]}$ *définit un modèle de* $[T]$ *dans* $Mod([T])^{op}$ *appelé "co-modèle" canonique de* $[T]$ *dans* $Mod([T])$,
- $Y_{[T]}$ *est plein* ,
- $Y_{[T]}$ *est fidèle* .

De même, on peut établir (par "extensions de Kan") que (voir Lawvere [1968]) :

Proposition 9 . *Si* $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ *est un homomorphisme de théories de Lawvere, alors le foncteur* $Mod([H]) : Mod([T']) \dashrightarrow Mod([T])$ *admet un adjoint à gauche* $L_{[H]} : Mod([T]) \dashrightarrow Mod([T'])$ *rendant le diagramme ci-dessous commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} T' & \xrightarrow{\quad Y_{[T']} \quad} & Mod([T'])^{op} \\ {\scriptstyle H}\uparrow & & \uparrow {\scriptstyle L_{[H]}^{op}} \\ T & \xrightarrow[\quad Y_{[T]} \quad]{} & Mod([T])^{op} \end{array}$$

En particulier on en déduit donc que :

Proposition 10 . *Si* $[T]$ *est une théorie de Lawvere* , *alors* $U_{[T]} : Mod([T]) \dashrightarrow Ens$ *admet un adjoint à gauche* $L_{[T]} : Ens \dashrightarrow Mod([T])$ *et pour tout entier* $m \in \mathbf{N}$, *on a* :

$$L_{[T]}(\{i \ / \ 1 \leq i \leq m\}) = Y_{[T]}(T^m) .$$

On établit également que (voir Lawvere [1968]) :

Proposition 11 . *Si* $[T]$ *est une théorie de Lawvere, alors le foncteur injection canonique* $i_{[T]} : Mod([T]) \dashrightarrow Fonct(T)$,
admet un adjoint à gauche $g_{[T]} : Fonct(T) \dashrightarrow Mod([T])$.

Mais $Fonct(T)$ étant complète et co-complète, on en déduit que (les limites et co-limites se calculant point par point dans $Fonct(T)$ et les limites commutant aux produits dans Ens) :

Proposition 12 . *Si* $[T]$ *est une théorie de Lawvere, la catégorie* $Mod([T])$ *de ses modèles est complète et co-complète et les limites (mais pas les co-limites) s'y calculent point par point*.

Soit C une catégorie.

On dit que C est *théorisable* si et seulement s'il existe une théorie de Lawvere $[T]$ telle que C et $\mathrm{Mod}([T])$ sont équivalentes.

De même, on dira qu'un foncteur $U : C' \dashrightarrow C$ est *théorisable* si et seulement s'il existe un homomorphisme $[H] : [T] \dashrightarrow [T']$ entre théories de Lawvere tel que U et $\mathrm{Mod}(H)$ sont "équivalents".

5 . Présentations et théories de Lawvere

Si $\langle P \rangle$ est une présentation, on note $T\langle P \rangle$ la duale de la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Mod}\langle P \rangle$ dont les objets sont les $L_{\langle P \rangle}(n)$, où $n \in \mathbf{N}$. Alors, d'après les prop. 4 et 6, § 3 qui précèdent, $T\langle P \rangle$ est canoniquement munie d'une structure de théorie de Lawvere $[T\langle P \rangle]$, et l'on vérifie que :

***Proposition* 13** . *Si* $\langle P \rangle$ *est une présentation, alors les catégories* $\mathrm{Mod}(\langle P \rangle)$ *et* $\mathrm{Mod}([T(\langle P \rangle)])$ *sont équivalentes.*

Ainsi, les présentations peuvent être considérées comme des systèmes de générateurs et relations pour les théories de Lawvere.

Si $[T]$ est une théorie de Lawvere, on lui associe la présentation $\langle P([T]) \rangle$ définie comme suit :
- $P([T]) = T$,
- $P = T$,
- pour tout entier $m \in \mathbf{N}$, $\exp(T^m) = m$,
- pour tout entier $m > 0$ et pour tout entier $1 \leq i \leq m$, $\pi_{T^m}(i) = \pi_m(i)$,

(ainsi, on identifie une telle théorie de Lawvere à une présentation, et on peut légitimement noter $\langle P([T]) \rangle = \langle T \rangle$). Il est alors trivial de vérifier que :

***Proposition* 14** . *Si* $[T]$ *est une théorie de Lawvere, alors les catégories* $\mathrm{Mod}([T])$ *et* $\mathrm{Mod}(\langle T \rangle)$ *sont égales.*

Des propositions 13 et 14 découle ce qui suit, qui n'est évidemment pas fait pour surprendre :

***Proposition* 15** . *Les catégories présentables sont exactement les catégories théorisables.*

BIBLIOGRAPHIE

L. Coppey — Décomposition dans les catégories,
Multigraphié, Paris [1977] .

Décomposition de structures en produits,
Esquisses Mathématiques 14, Paris [1971] .

Y. Diers — Type de densité d'une sous-catégorie pleine,
Ann. Soc. Sci. Bruxelles 90 [1976] .

Ch. Ehresmann — Sur les structures algébriques,
C.R.A.S. , t. 264, pp. 840-843, Paris [1967] .

P. Freyd — Algebra-valued functors in general and tensor products in particular,
Colloq. Math. 14, [1966] .

C. Lair — Foncteurs d'omission de structures algébriques,
Cah. de Top. et Géom. Diff. , XII, 2, Paris [1971] .

Dualité pour les structures algébriques esquissées,
Cah. de Top.et Géom. Diff. , XV, 4, Paris [1974] .

Conditions syntaxiques d'existence de co-adjoints aux foncteurs algébriques,
Diagrammes, Volume 1, Paris [1979] .

F. W. Lawvere — Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories,
Lecture Notes in Math. 61, Springer [1968] .

F. Linton — Autonomous equational categories,
Journal of Math. and Mechanics 15, [1966] .

S. Mac Lane Categories for the working mathematician, G.T.M. in Math. n° 5, Springer [1971].

F. Ulmer Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lecture Notes in Math. 195, Springer [1971].

TABLE DES MATIERES

CHAPITRE 1

Point de vue sémantique : foncteurs théorisables et contractions

CHAPITRE 2

Point de vue syntaxique : théories de Lawvere et extensions

CHAPITRE 3

Traduction syntaxe vs. sémantique : extensions et contractions

CHAPITRE 4

Extensions et extenseurs

CHAPITRE 5

Présentations d'extenseurs

CHAPITRE 6

Descriptions des extensions

ANNEXE