F. CURY

Catégories lax-localement-cartésiennes et catégories localement cartésiennes : un exemple de suffisante complétude connexe de sémantiques initiales

Diagrammes, tome 25 (1991), p. 1-155

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1991__25__1_0>

CATEGORIES LAX-LOCALEMENT-CARTESIENNES ET CATEGORIES LOCALEMENT CARTESIENNES : UN EXEMPLE DE SUFFISANTE COMPLETUDE CONNEXE DE SEMANTIQUES INITIALES.

F. CURY

Introduction

Depuis quelque temps la logique catégorique est venue renforcer la place (considérable) occupée par la logique classique en informatique fondamentale.
Cette logique catégorique permet, en effet, une modélisation satisfaisante de nombreuses questions concernant aussi bien les types abstraits de données que les langages fonctionnels de programmation, ou encore le calcul formel ou la démonstration automatique...
Dans le présent travail, nous nous intéressons particulièrement à ces modélisations qui mettent en œuvre des *catégories munies de constructeurs* (comme, par exemple,

A. M. S. SUB. CLASS. : 18 A 10 , 68 C 20 , 08 A 50 .

les catégories cartésiennes fermées. en liaison avec le λ-calcul,...). Plus précisément encore, nous nous intéressons à la description "mécanique" des sémantiques initiales de ces structures.

Les constructeurs, dont une catégorie peut être munie. produisent des résultats de deux sortes :
- soit ils construisent des objets,
- soit ils construisent des flèches.

Dans le premier cas, interprétant les objets de la catégorie comme autant de types, on dira que ces constructeurs sont des *lois typantes*.
Dans le second cas, interprétant les flèches comme des fonctions (i.e. des "actions élémentaires" à accomplir). on dira que ces constructeurs sont des *lois codantes* (i.e. produisant du code).

Bien entendu, ces constructeurs ne sont que rarement indépendants : ils sont astreints généralement à vérifier un certain nombre d'*axiomes* (dont, bien entendu, des axiomes, dits *de configuration*, associés à chacune des lois codantes et fixant domaine et codomaine des flèches qu'elles construisent).
En toute généralité. on pourrait supposer que ces axiomes sont des formules (closes) du 1er ordre, mais nous nous limiterons à l'aspect "essentiellement algébrique" de la question en supposant que ce ne sont que des formules de Horn (universelles-équationnelles).

A ce point, il semble donc que l'étude de ces catégories munies de constructeurs ne soit qu'une parcelle du terrain (assez) bien connu des théories de Horn équationnelles. Autrement dit, pour décrire "mécaniquement" leurs sémantiques initiales, il semble qu'il faille utiliser des "systèmes de réécriture conditionnelle" assez classiques.

On doit cependant apporter à cette façon de voir les choses trois restrictions notables.
Tout d'abord, les constructeurs (qui apparaissent dans la pratique) ne sont pas "partout définis"; autrement dit, pour qu'ils puissent s'appliquer, ils doivent satisfaire à des *clauses de définition*.
En deuxième lieu, on s'interdit des clauses de définition qui obligeraient à tester des égalités de flèches : du point de vue des langages fonctionnels de programmation, ceci signifierait qu'il faudrait exécuter "diverses parties du programme" — a priori "non étrangères" — avant d'espérer même en obtenir une compilation complète.
Enfin, en troisième lieu, écrivant les axiomes (formules de Horn) sous la forme d'implications, on interdit pour les mêmes raisons que leurs "parties hypothèses" contiennent des tests d'égalités de flèches.

On se trouve donc devoir "assouplir" une présentation "essentiellement équationnelle" d'une catégorie munie de constructeurs en une "présentation essentiellement relationnelle", en se plaçant dans le cadre suivant :
- d'une part, on choisit (si c'est possible) une présentation essentiellement équationnelle vérifiant les conditions suivantes :
  (i) on accepte des tests d'égalité entre objets, dits *tests (géométriques) de configuration*, i.e. on accepte des clauses (de définition des lois ou "hypothèses" dans les formules de Horn) d'égalités entre objets,
  (ii) on refuse des tests d'égalité de flèches dans ces clauses,
- d'autre part, lors de l'assouplissement, on impose à la présentation essentiellement relationnelle de vérifier les conditions suivantes :
  (i) les clauses peuvent comporter des égalités d'objets,

mais pas d'égalités de flèches,

(ii) on accepte des clauses "de type relationnel" (entre objets ou entre flèches),

(iii) les "parties conclusions" de ceux des axiomes qui ne sont pas de configuration devront être "de type relationnel".

Ainsi, il faut commencer par "assouplir" les axiomes autres que ceux de configuration : ils n'imposeront plus des égalités mais seulement des réécritures entre flèches (qui ont des domaines égaux et des codomaines égaux). Ces réécritures seront matérialisées par des *2-flèches*.
Dans un premier temps, on assouplit donc la structure considérée en celle d'une 2-catégorie, munie des mêmes constructeurs (avec les mêmes clauses et les mêmes configurations), mais avec des axiomes affaiblis.

Dès lors, il se pose un problème dans le cas (fréquent) où des constructeurs d'objets ne sont pas à arité-objets. Dans ce cas, des objets différents peuvent avoir été produits par une même loi typante, cette loi ayant pris successivement en arité deux n-uples de flèches se réécrivant les unes en les autres. Il convient donc, dans de telles situations, de considérer que des objets peuvent se réécrire en d'autres : *dans ce travail, nous suggérons de matérialiser les réécritures d'objets en des flèches, ces flèches constituant une sous-classe particulière* (contenant les flèches identités) *de la classe de toutes les flèches*. De telles flèches seront dites *de réécriture* (entre objets).

Le type de structure assouplissant (du point de vue de la réécriture) celui constitué par une catégorie munie de constructeurs est finalement de la forme :

- 2-catégorie,
- munie d'une classe de flèches particulières "de

réécriture entre objets",
- munie de constructeurs, dont les clauses de définition sont "essentiellement (car on accepte aussi des égalités d'objets) relationnelles (les relations étant celles de réécriture)",
- ces constructeurs vérifiant des formules de Horn universelles (essentiellement) relationnelles.

La manière d'assouplir étant ainsi dégagée, il ne faut pas croire qu'il suffit de partir de la présentation essentiellement équationnelle donnée et d'y remplacer, dans les "parties conclusions" des axiomes, les = (entre flèches) par des (2-flèches) $\Rightarrow$ et les = (entre objets) par des (1-)flèches de réécriture pour obtenir un assouplissement convenable, i.e. permettant une description (ou une construction, ou un calcul, ou une mécanisation) explicite de la sémantique initiale. Ce serait le cas pour des théories équationnelles, ou même pour la structure de catégorie cartésienne fermée, mais c'est en général bien insuffisant.

En effet, que recherche-t-on en assouplissant de la sorte (étant entendu que cet assouplissement a une sémantique initiale constituée de termes)?

Tout d'abord la *suffisante complétude*, i.e. que chaque élément de la sémantique initiale "rigide" ait au moins une écriture (un terme) qui le représente dans la sémantique initiale assouplie.

Ensuite, on souhaite que, si deux termes de la sémantique initiale assouplie représentent un même élément de la sémantique initiale rigide, alors cela puisse se reconnaître mécaniquement. Idéalement, c'est ce qui se passe lorsqu'on dispose de formes normales. A défaut, d'autres moyens moins contraignants, mais qu'on peut aussi envisager de mécaniser, permettent également de vérifier ce qui, en tout état de cause, est l'essentiel : à savoir que les termes en question sont *dans une même composante connexe* (où la connexion est matérialisée par des (1-)flèches de réécriture et des 2-flèches de réécriture). En général, pour qu'une telle condition de *suffisante complétude connexe* de la sémantique initiale assouplie sur la sémantique initiale rigide soit assurée, il faut non seulement "dédoubler", par réécriture, les objets et les flèches (i.e. les *éléments* de la sémantique initiale) mais aussi "dédoubler suffisamment" les lois et axiomes de la structure considérée, i.e. les *constituants* de la théorie. D'où de nouveaux constructeurs et de nouveaux axiomes, qui, bien entendu, deviennent totalement redondants si l'on rigidifie.

Nous fournissons explicitement dans ce texte, à titre d'exemple considéré comme "générique", un assouplissement de la structure de catégorie "localement cartésienne" pour lequel la propriété de suffisante complétude connexe est vérifiée.

Au §1, on détaille complètement cet assouplissement. Autrement dit, on présente ("à la Freyd[(1)]") ce que nous avons appelé les *catégories lax-localement-cartésiennes*.

Au §2, on explicite complètement (mais sans la démonstration) la propriété de suffisante complétude connexe de ces catégories lax-localement-cartésiennes sur les catégories localement cartésiennes : on peut donc y trouver une formalisation des considérations énoncées dans cette introduction.

(1) in Properties invariant within equivalence types of categories, in Eilenberg Festschrift, Ac. Press, 1973.

Aux §3, 4, 5 et 6, on démontre, par étapes successives, les résultats énoncés dans le §2, et notamment cette propriété de suffisante complétude connexe.

1. Catégories lax-localement-cartésiennes (LLCC)

Définition 1 : Nous dirons que $(\mathbb{C}, \mathcal{R}, \Longrightarrow)$ est une *catégorie lax-localement-cartésienne* (en abrégé une LLCC), ou encore que c'est une catégorie à objet final assoupli (ou lax-objet-final) choisi et à choix homogène de produits fibrés assouplis (ou lax-produits-fibrés), si et seulement si :

- $\mathbb{C}$ est une catégorie, dont les lois sont notées comme il est usuel :

dom pour *domaine*,

codom pour *codomaine*,

id pour *identité*

(et, plus simplement, on notera souvent $id(A) = id$).

comp pour *composition*

(et on posera souvent $comp(y,x) = y \cdot x$).

- $\mathcal{R}$ est une partie de $Fl(\mathbb{C})$ (alors, les flèches de $\mathcal{R}$ sont appelées des *(1-)flèches de réécriture* et représentées par des flèches "ondulées" du type $\rightsquigarrow$ et elles seront en général désignées par des lettres grecques).

- "$\Longrightarrow$" est une relation[1] sur $Fl(\mathbb{C})$ (on introduit ainsi des *2-flèches (de réécriture)* notées indifféremment :

$$e \Longrightarrow e' \quad \text{ou} \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "e"] \arrow[r, bend right, "e'"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd}$$

[1] Pour définir la structure de LLCC, nous avons choisi les sens de réécriture qui nous ont semblé opportuns, tant pour les 1-flèches que pour les 2-flèches, mais on pourrait modifier certains de ces sens sans conséquence pour le résultat recherché, i.e. pour le théorème du §2.

puisqu'on peut constater à la lecture des divers axiomes qui suivent que, si $e \Longrightarrow e'$, alors on a nécessairement $dom(e) = dom(e')$ et $codom(e) = codom(e')$).

– $\mathbb{C}$ est munie des *lois structurelles* (relatives au lax-objet-final) :

un et cte .

telles que :

+ la loi *un*

(*un* comme *lax-"1"* ou *lax-objet-final*)

est typante et sélectionne simplement un objet de $\mathbb{C}$, noté 1 (et appelé, bien entendu, *lax-objet-final*).

+ la loi cte

(cte comme *lax-ConstanTE*)

est codante et configurée par :

$$\forall \left\| \; A \bullet \right. \qquad \overset{\text{cte}}{\left\|\right.} \; A \bullet \xrightarrow{\text{cte}(A)} \bullet \; 1$$

– $\mathbb{C}$ est munie des *lois structurelles* (relatives aux lax-produits-fibrés) :

PF , f , s , b , d et p .

telles que :

+ la loi PF

(PF comme *lax-Produit-Fibré*)

est typante et configurée par :

$$\forall \left\| \begin{tikzcd}[row sep=small] \bullet \arrow[dr, "e_1"] & \\ & \bullet \\ \bullet \arrow[ur, "e_2"'] & \end{tikzcd} \right. \qquad \overset{PF}{\left\|\right.} \quad PF(e_1,e_2) \bullet \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small] \bullet \arrow[dr, dotted, "e_1"] & \\ & \bullet \\ \bullet \arrow[ur, dotted, "e_2"'] & \end{tikzcd}$$

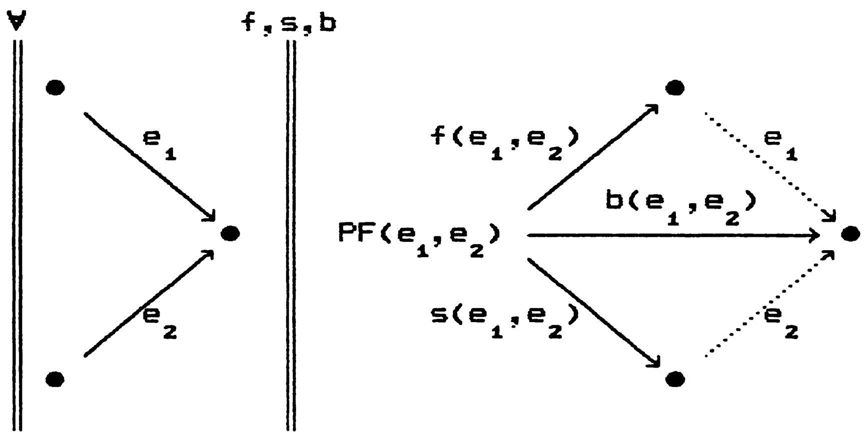
+ les lois f , s et b

(f comme *lax-First* ou *lax-première-projection*,

s comme *lax-Second* ou *lax-deuxième-projection*,

et b comme *lax-Bissectrice* ou *lax-troisième-projection*)

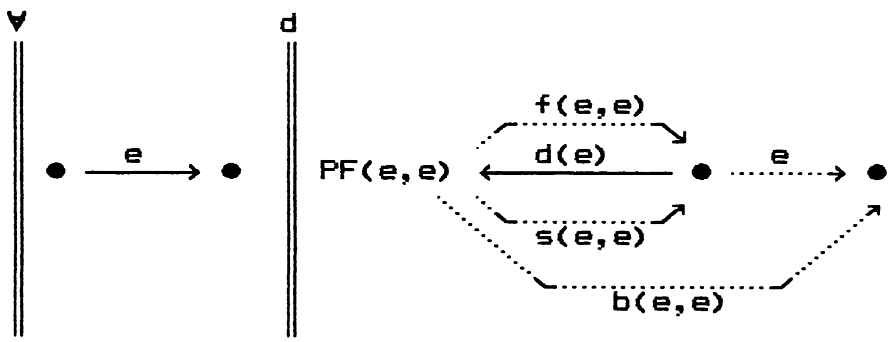
sont codantes et configurées par :



+ la loi d

(d comme *lax-Diagonale*)

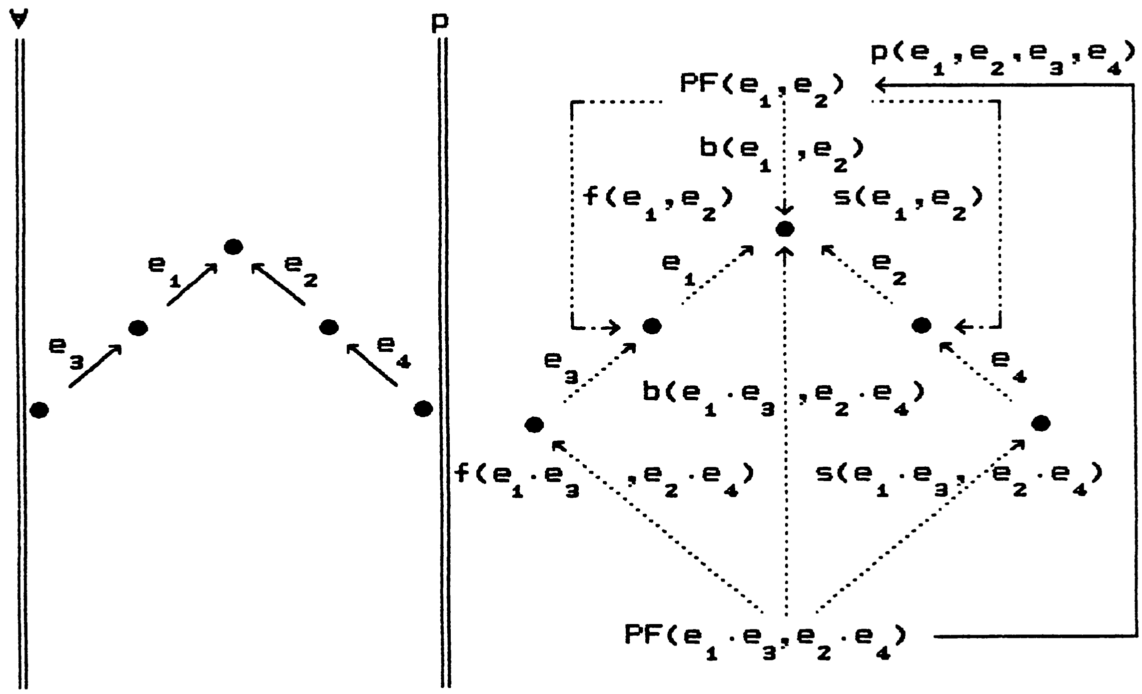
est codante et configurée par :



+ la loi p

(p comme *lax-Préfactorisation*)

est codante et configurée par :



- $\mathbb{C}$ est munie des lois *de cohérence* (toutes codartes) :

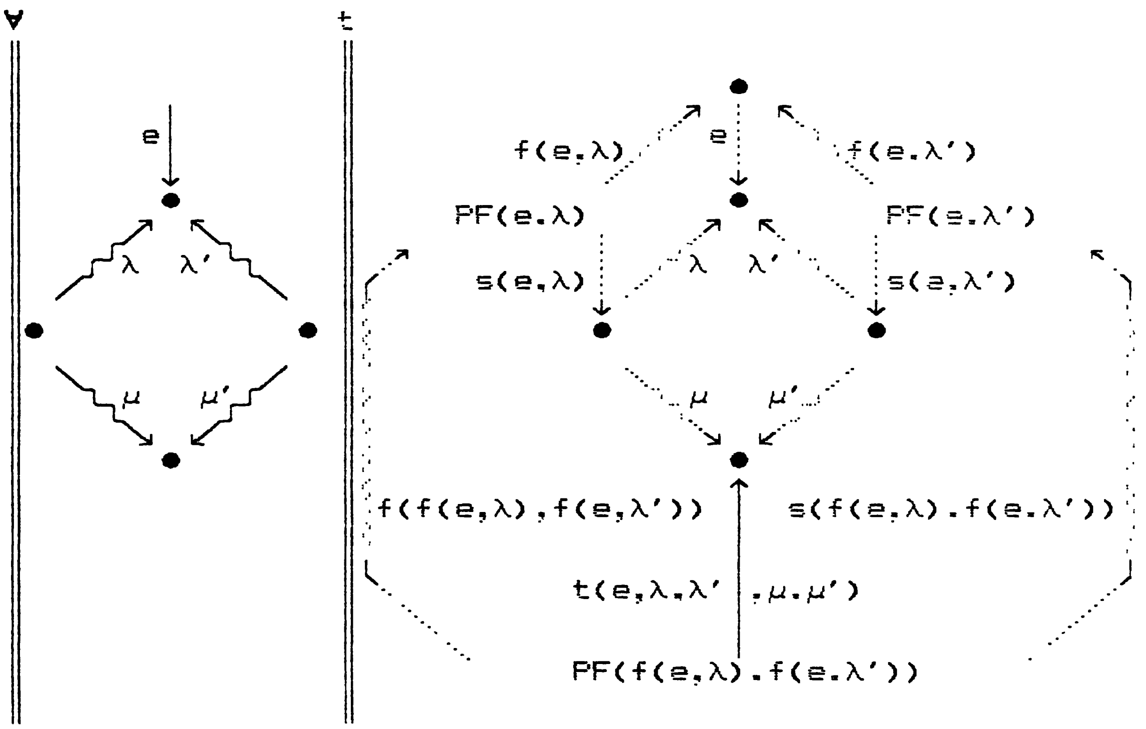
$$t\ ,\quad cf\ ,\quad \rho_{fl}\ ,\quad \rho_q \quad \text{et} \quad \rho_c\ .$$

telles que :

+ la loi t [2]

(t comme *Transport*)

est configurée par[3] :



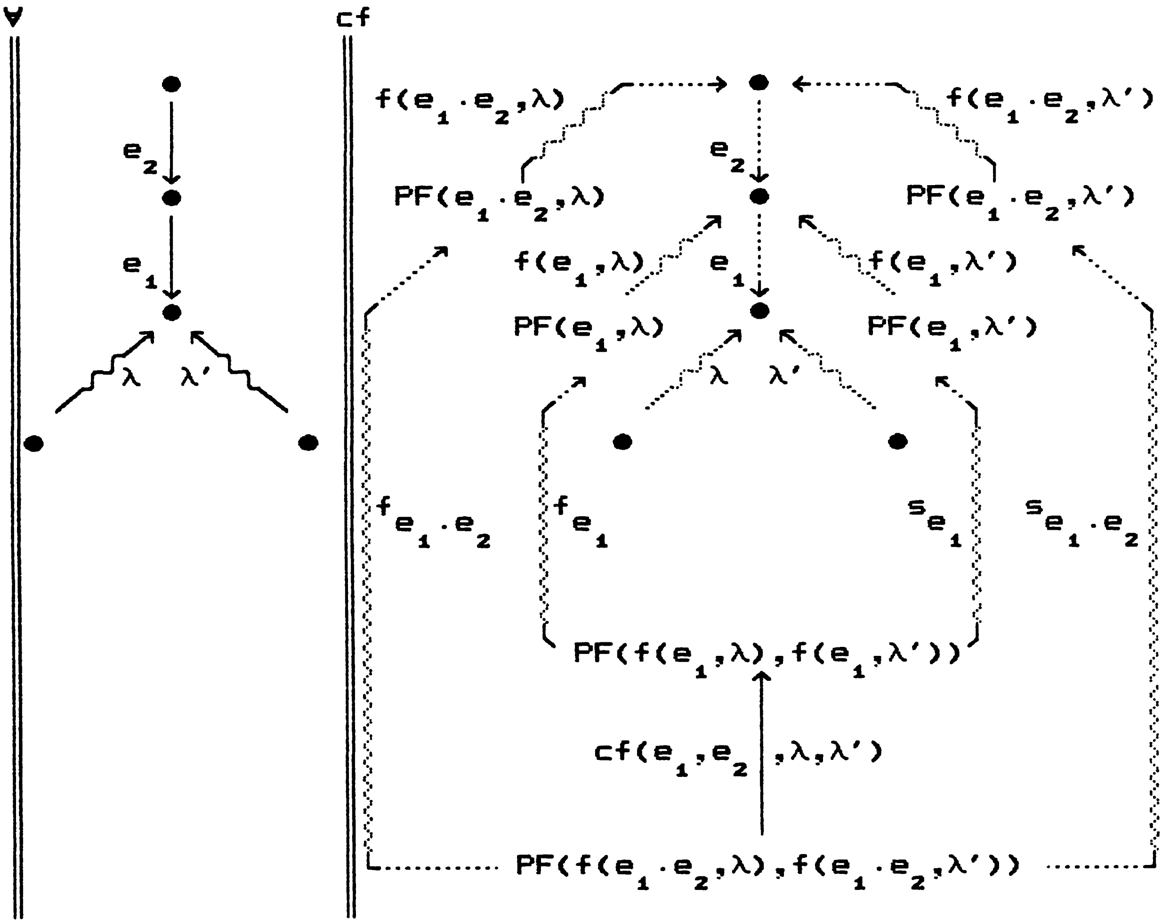
(2) Pour une présentation plus agréable, nous avons rejeté en fin de définition les axiomes ((h$_f$), (h$_s$) et (h$_b$)) dits d'homogénéité. Cependant, nous ne nous sommes pas privé de les utiliser; ainsi, ici, ce sont eux qui assurent que les lax-projections sont automatiquement éléments de $\mathcal{R}$.

(3) Nous aurions pu, pour "contourner les trous", choisir une loi t plus simple, mais alors plus rigide.

+ la loi cf

(c comme *Composition* et f comme *First*)

est configurée par :

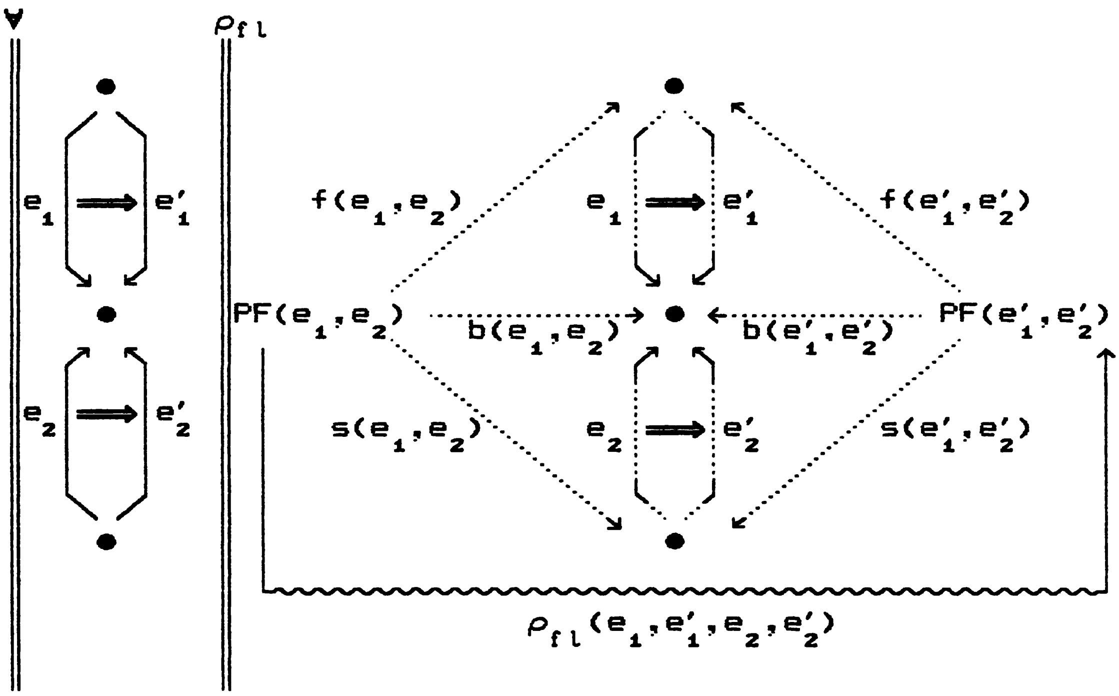


(où l'on a abrégé les $f(f(e,\lambda),f(e,\lambda'))$ en f_e et les $s(f(e,\lambda),f(e,\lambda'))$ en s_e).

+ la loi ρ_{fl}

(ρ comme *Réécriture et* fl comme *FLèches*)

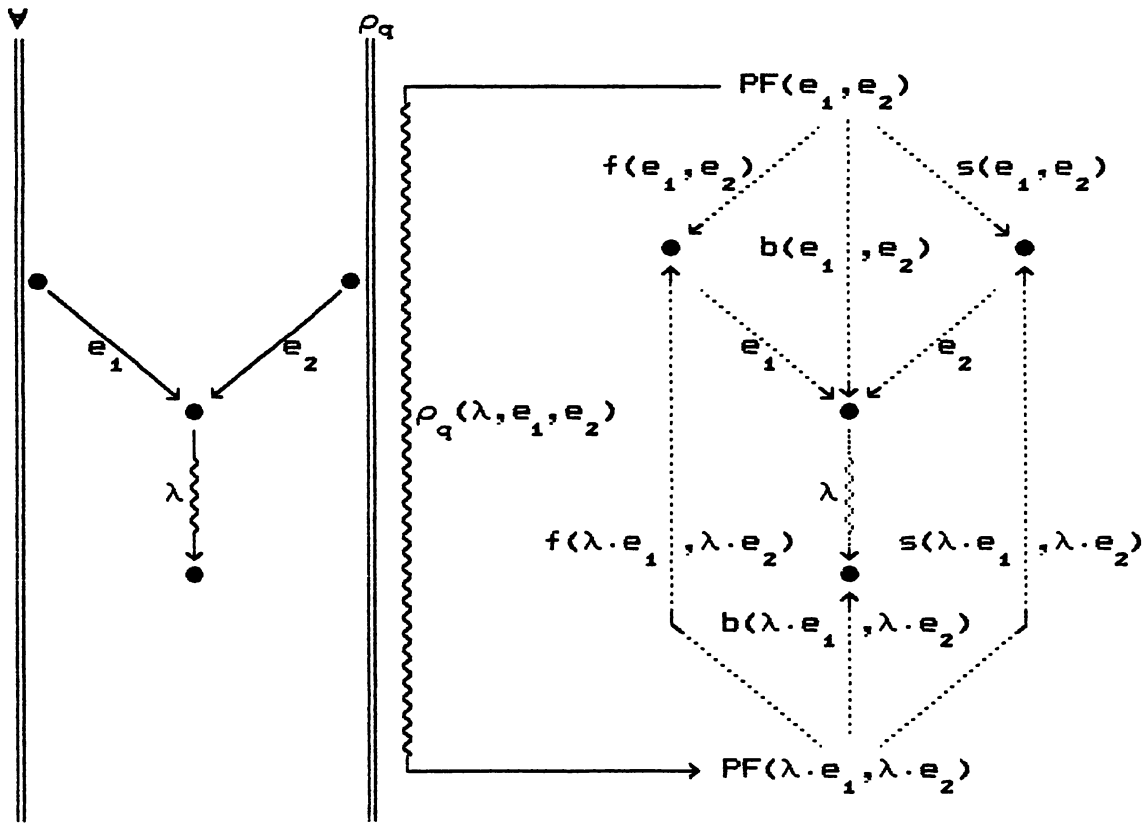
est configurée par :



+ la loi ρ_q

(ρ comme *Réécriture* et q comme "duale" de p)

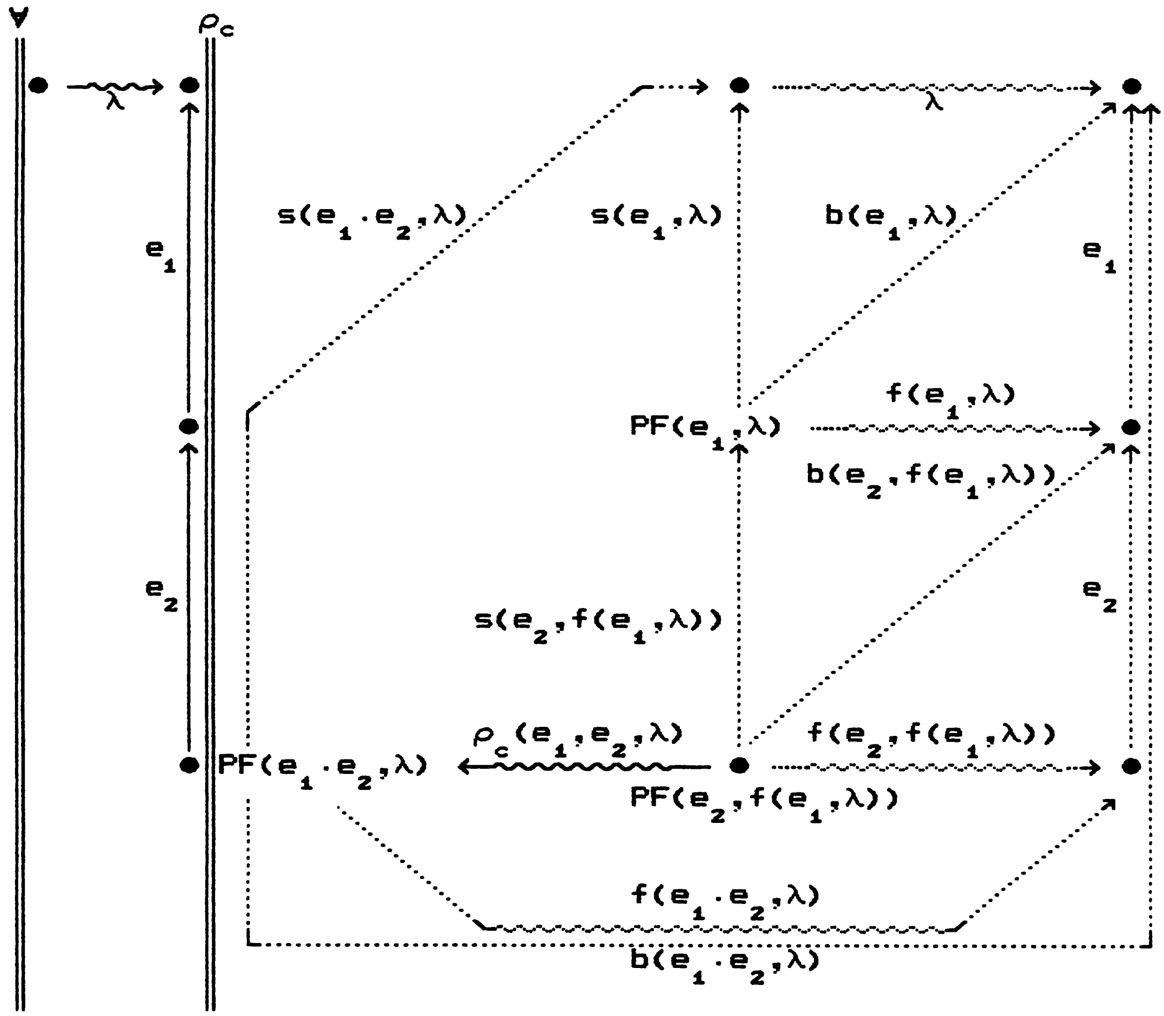
est configurée par :



+ la loi ρ_c

(ρ comme *Réécriture* et c comme *Composition*)

est configurée par :



- les axiomes, représentés par les schémas qui suivent, sont vérifiés :

  + axiome ($\mathcal{R}$, id) (relatif à la classe $\mathcal{R}$) :

$$\forall \; \Big\| \; \bullet\, A \qquad \text{on a} \; \Big\| \; A \xrightarrow[\mathrm{id}(A)]{\rightsquigarrow} A$$

  + axiome ($\mathcal{R}$, comp) (relatif à la classe $\mathcal{R}$) :

$$\forall \; \Big\| \; \bullet \xrightarrow[\lambda_1]{\rightsquigarrow} \bullet \xrightarrow[\lambda_2]{\rightsquigarrow} \bullet \qquad \text{on a} \; \Big\| \; \bullet \xrightarrow{\lambda_2 \cdot \lambda_1} \bullet$$

+ axiome $(\Rightarrow,=)$ (relatif à la relation $\Rightarrow$) :

$$\forall \ \Big\Vert \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "e"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \text{on a} \ \Big\Vert \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "e"] \arrow[r, bend right, "e"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (\Rightarrow,=)"] & \bullet \end{tikzcd}$$

+ axiome $(\Rightarrow,\Rightarrow)$ (relatif à la relation $\Rightarrow$) :

$$\forall \ \Big\Vert \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left=50, "e_1"] \arrow[r, "e_2" description] \arrow[r, bend right=50, "e_3"'] \arrow[r, phantom, shift left=2ex, "\Downarrow"] \arrow[r, phantom, shift right=2ex, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \text{on a} \ \Big\Vert \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "e_1"] \arrow[r, bend right, "e_3"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (\Rightarrow,\Rightarrow)"] & \bullet \end{tikzcd}$$

+ axiome $(\Rightarrow,\mathrm{comp})$ (relatif à la relation $\Rightarrow$) :

$$\forall \ \Big\Vert \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "e_1"] \arrow[r, bend right, "e_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \arrow[r, bend left, "e'_1"] \arrow[r, bend right, "e'_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow"] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \text{on a} \ \Big\Vert \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, bend left, "e'_1 \cdot e_1"] \arrow[r, bend right, "e'_2 \cdot e_2"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow (\Rightarrow,\mathrm{comp})"] & \bullet \end{tikzcd}$$

+ axiome (cte,1) (relatif au lax-objet-final, en abrégé l.o.f.) :

on a

$$\Big\| \; 1 \overset{cte(1)}{\rightsquigarrow} 1$$

+ axiome (cte_{Fl}) (relatif au l.o.f) :

$\forall$ $\Big\| \; \bullet \xrightarrow{e} \bullet$ on a

$$\Bigg\| \begin{tikzcd} & 1 & \\ \bullet \arrow[ur, "cte(dom(e))"] \arrow[rr, "e"'] & \arrow[u, phantom, "\Leftarrow (cte_{Fl})"] & \bullet \arrow[ul, "cte(codom(e))"'] \end{tikzcd}$$

+ axiomes (cône_1) et (cône_2) (relatifs aux lax-produits-fibrés, en abrégé l.p.f.) :

$$\forall \quad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[dr, "e_1"] & \\ & \bullet \\ \bullet \arrow[ur, "e_2"'] & \end{tikzcd} \quad \text{on a} \quad \begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr, "e_1"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow(\text{cône}_1)"] & \\ PF(e_1,e_2) \arrow[ur, "f(e_1,e_2)"] \arrow[rr, "b(e_1,e_2)"] \arrow[dr, "s(e_1,e_2)"'] & & \bullet \\ & \bullet \arrow[ur, "e_2"'] \arrow[u, phantom, "\Uparrow(\text{cône}_2)"] & \end{tikzcd}$$

+ axiomes (d_f), (d_s) et (d_b) (relatifs aux l.p.f.) :

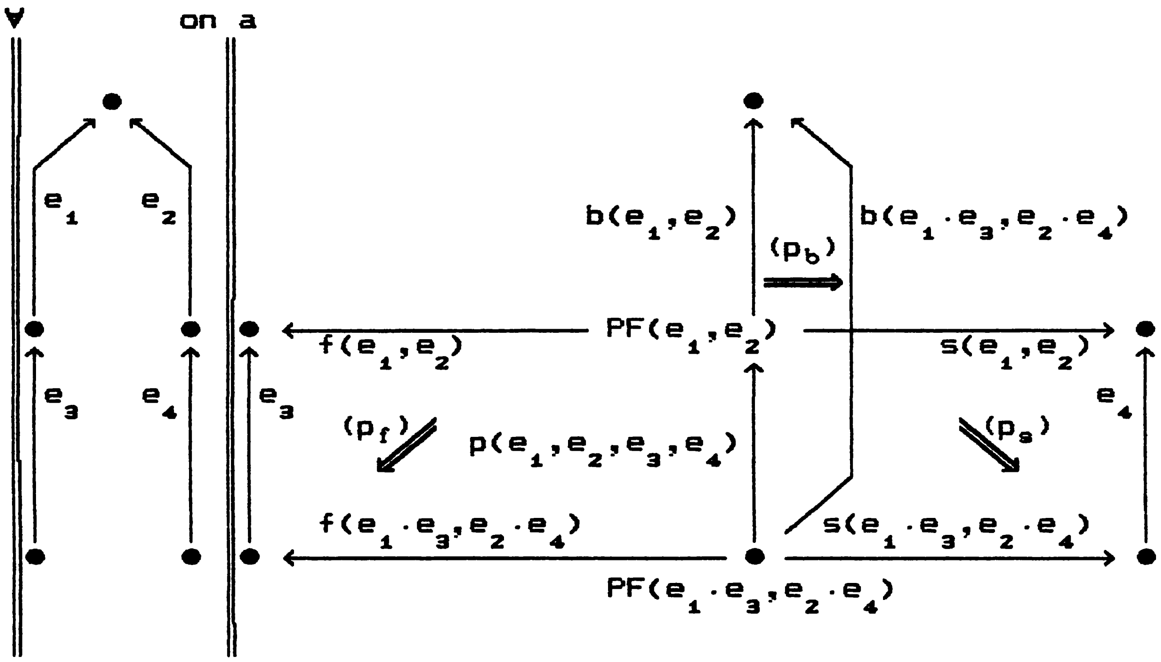
$\forall$

$$A \xrightarrow{e} \bullet$$

on a

$$\begin{tikzcd}
 & A & \\
PF(e,e) \arrow[ur, "f(e,e)"] \arrow[dr, "s(e,e)"'] \arrow[rr, bend right=70, "b(e,e)"'] & A \arrow[l, "d(e)"'] \arrow[u, squiggly, "id(A)"'] \arrow[d, squiggly, "id(A)"] \arrow[r, "e"] \arrow[ul, phantom, "\overset{(d_f)}{\Rightarrow}"] \arrow[dl, phantom, "\overset{(d_s)}{\Rightarrow}"] & \bullet \\
 & A \arrow[r, phantom, "\Uparrow (d_b)"] &
\end{tikzcd}$$

+ axiomes (p_f), (p_s) et (p_b) (relatifs aux l.p.f.) :



+ axiome (p_{comp}) (relatif aux l.p.f.) :

$$\forall\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "e_5"] & & \bullet \arrow[d, "e_6"'] \\
\bullet \arrow[d, "e_3"] & & \bullet \arrow[d, "e_4"'] \\
\bullet \arrow[dr, "e_1"'] & & \bullet \arrow[dl, "e_2"] \\
& \bullet &
\end{tikzcd}
\qquad \text{on a} \qquad
\begin{tikzcd}
PF(e_1\cdot e_3\cdot e_5, e_2\cdot e_4\cdot e_6) \arrow[d, "p(e_1\cdot e_3, e_2\cdot e_4, e_5, e_6)"] \arrow[ddd, bend left=80, "p(e_1, e_2, e_3\cdot e_5, e_4\cdot e_6)"] \\
PF(e_1\cdot e_3, e_2\cdot e_4) \arrow[d, "p(e_1, e_2, e_3, e_4)"] \arrow[r, phantom, "\overset{(p_{comp})}{\Longrightarrow}"] & {} \\
\\
PF(e_1, e_2)
\end{tikzcd}$$

+ axiome (d_{comp}) (relatif aux l.p.f.) :

$$\forall\quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e_3"] & \bullet \arrow[r, "e_1"] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad \text{on a} \qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e_3"] \arrow[d, "d(e_1\cdot e_3)"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{(d_{comp})}{\Nearrow}"] & \bullet \arrow[d, "d(e_1)"] \\
PF(e_1\cdot e_3, e_1\cdot e_3) \arrow[r, "p(e_1, e_1, e_3, e_3)"'] & PF(e_1, e_1)
\end{tikzcd}$$

+ axiome (p,f,s,b,d) (relatif aux l.p.f.) :

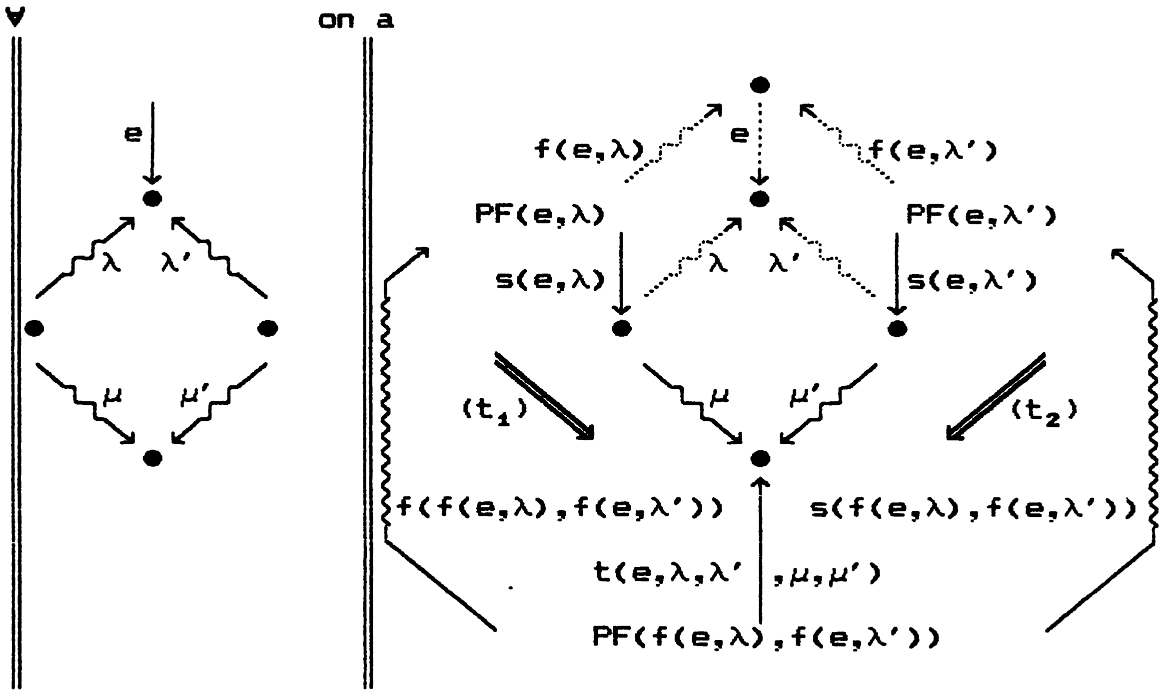
$$\forall \quad \begin{tikzcd} & \cdot \arrow[d, "e_2"] \\ \bullet \arrow[r, "e_1"'] & \bullet \end{tikzcd} \qquad \text{on a} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & PF(d(b(e_1,e_2)),\lambda) \arrow[dl, "{s(d(b(e_1,e_2)),\lambda)}"'] \arrow[dr, squiggly, "{f(d(b(e_1,e_2)),\lambda)}"] \arrow[d, phantom, "\overset{(p,f,s,b,d)}{\Longrightarrow}"] & \\ PF(e_1\cdot f(e_1,e_2),e_2\cdot s(e_1,e_2)) \arrow[rr, "{p(e_1,e_2,f(e_1,e_2),s(e_1,e_2))}"] \arrow[dr, squiggly, dotted, "\lambda"'] & {} & PF(e_1,e_2) \arrow[dl, dotted, "{d(b(e_1,e_2))}"] \\ & PF(b(e_1,e_2),b(e_1,e_2)) & \end{tikzcd}$$

(où la flèche de réécriture :

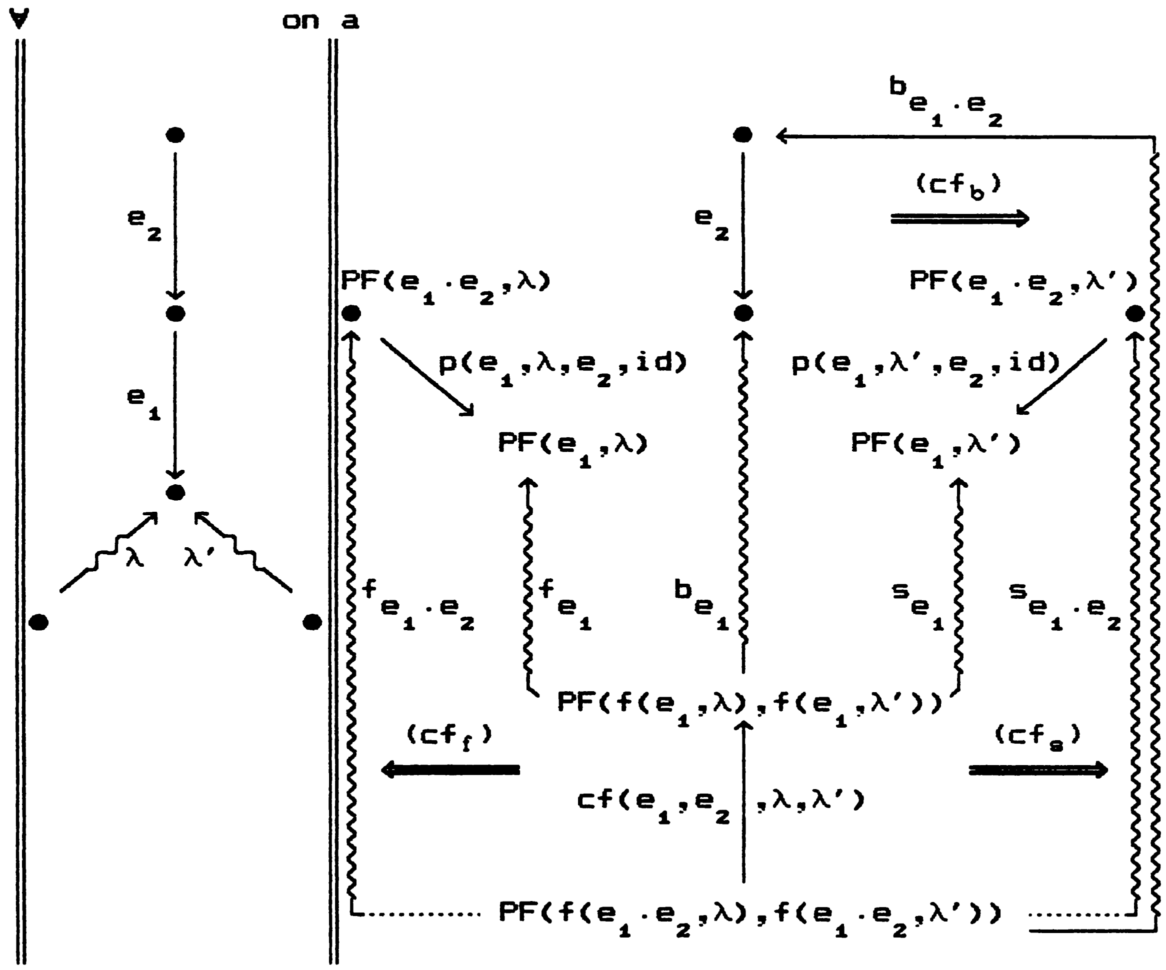
$$\lambda = \rho_{fl}(e_1\cdot f(e_1,e_2),b(e_1,e_2),e_2\cdot s(e_1,e_2),b(e_1,e_2))$$

existe en vertu des axiomes (cône$_1$) et (cône$_2$)),

+ axiomes (t_1) et (t_2) (relatifs aux l.p.f.) :



+ axiomes (cf_f), (cf_s) et (cf_b) (relatifs aux l.p.f.) :



(où l'on a abrégé les $f(f(e,\lambda),f(e,\lambda'))$ en f_e, les $s(f(e,\lambda),f(e,\lambda'))$ en s_e et les $b(f(e,\lambda),f(e,\lambda'))$ en b_e),

+ axiomes $((\rho_{fl})_f)$, $((\rho_{fl})_s)$ et $((\rho_{fl})_b)$ (relatifs aux l.p.f.) :

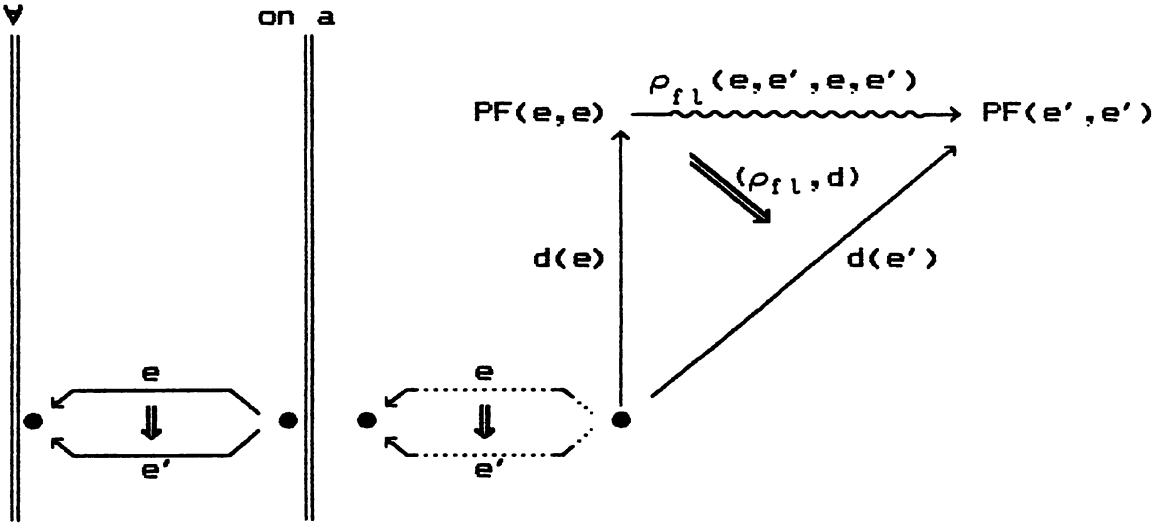
$\forall$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
& B & \\
A_1 \arrow[ur, bend left, "e_1"] \arrow[ur, bend right, "e'_1"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow"] & & A_2 \arrow[ul, bend right, "e_2"'] \arrow[ul, bend left, "e'_2"] \arrow[ul, phantom, "\Downarrow"]
\end{tikzcd}$$

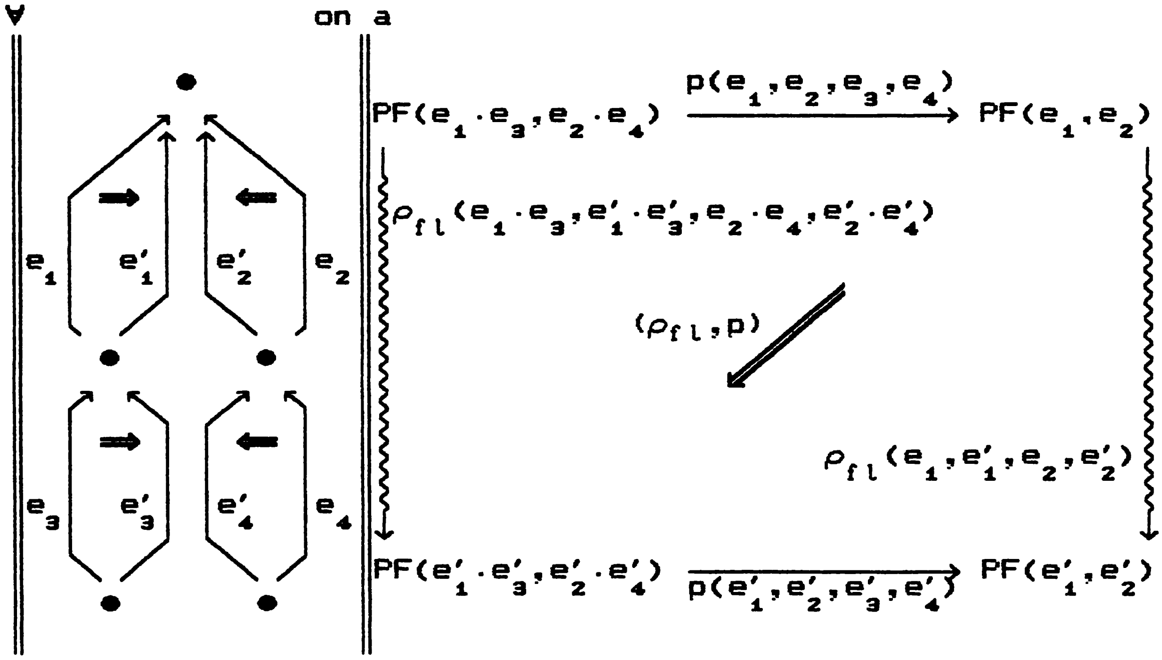
on a

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
& B & \\
A_1 & PF(e'_1,e'_2) \arrow[l, "f(e'_1,e'_2)"'] \arrow[r, "s(e'_1,e'_2)"] \arrow[u, "b(e'_1,e'_2)"] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow ((\rho_{fl})_b)"] & A_2 \\
& PF(e_1,e_2) \arrow[ul, "f(e_1,e_2)"] \arrow[ur, "s(e_1,e_2)"'] \arrow[u, squiggly, "\rho_{fl}(e_1,e'_1,e_2,e'_2)"] \arrow[uu, bend right=90, "b(e_1,e_2)"'] \arrow[ul, phantom, "\Rightarrow ((\rho_{fl})_f)" near end] \arrow[ur, phantom, "\Leftarrow ((\rho_{fl})_s)" near end] &
\end{tikzcd}$$

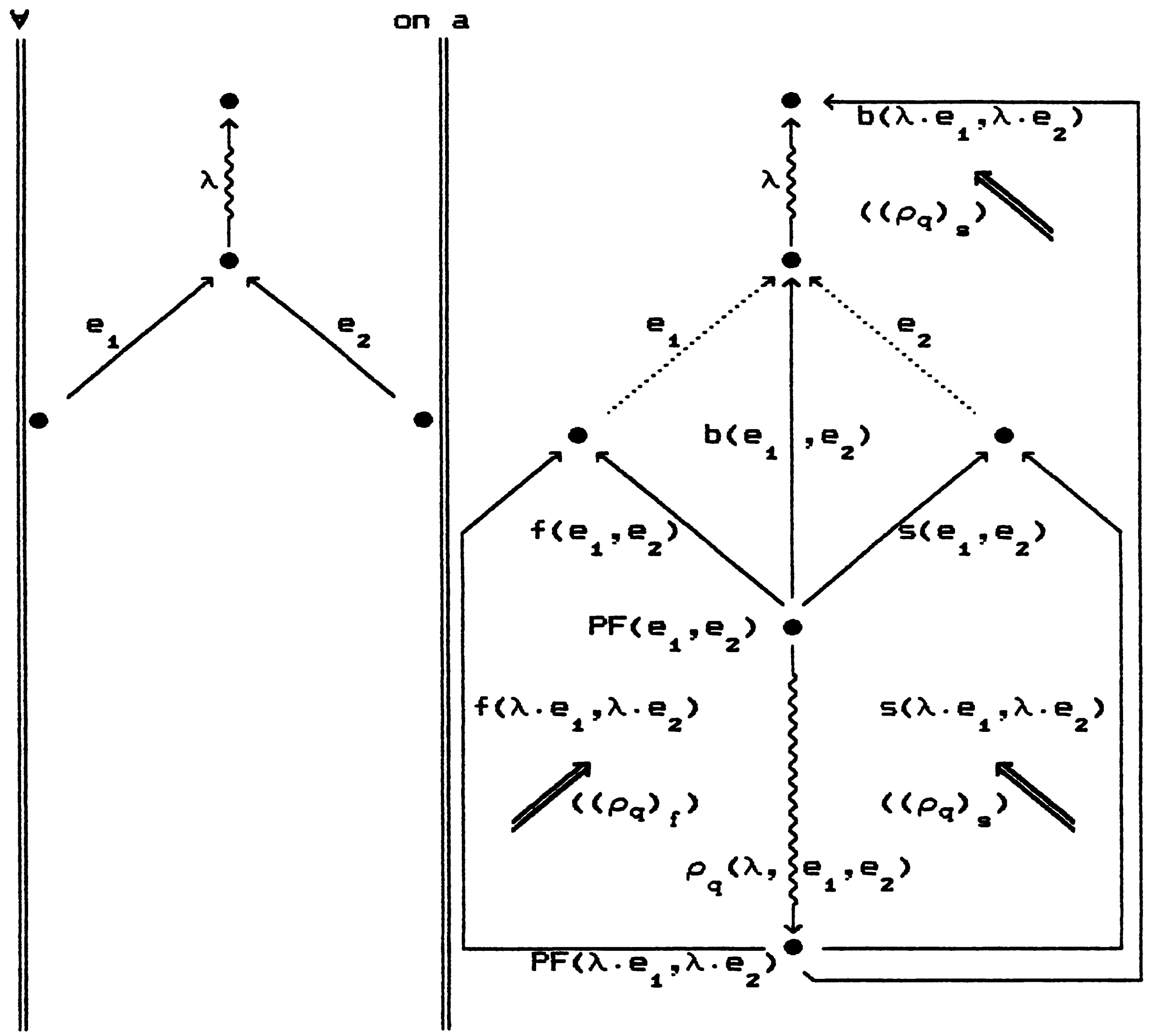
+ axiome (ρ_{fl}, d) (relatif aux l.p.f.) :



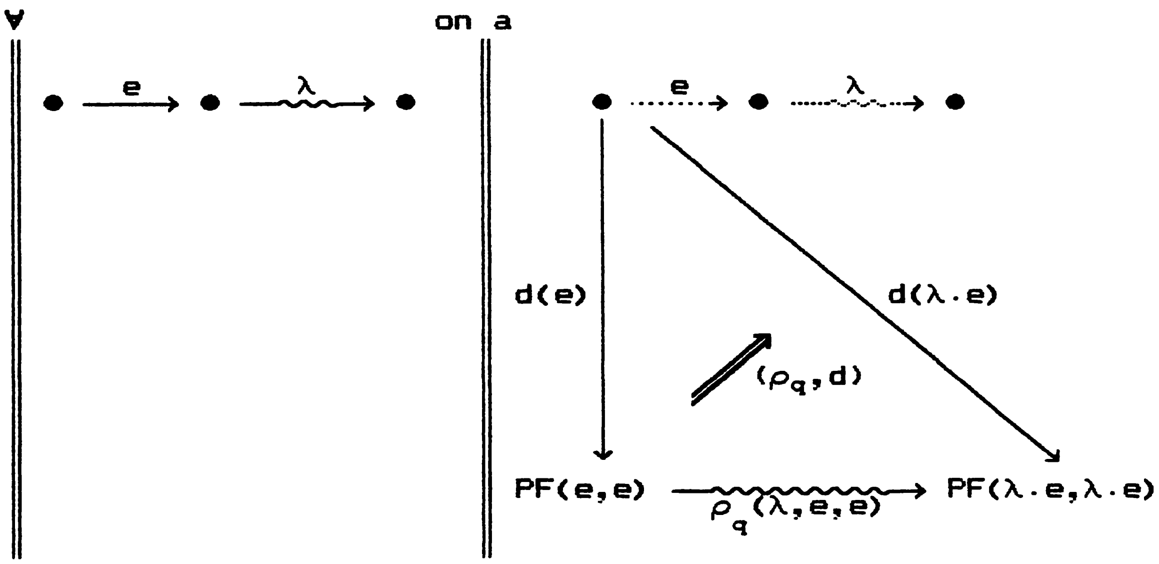
+ axiome (ρ_{fl}, p) (relatif aux l.p.f.) :



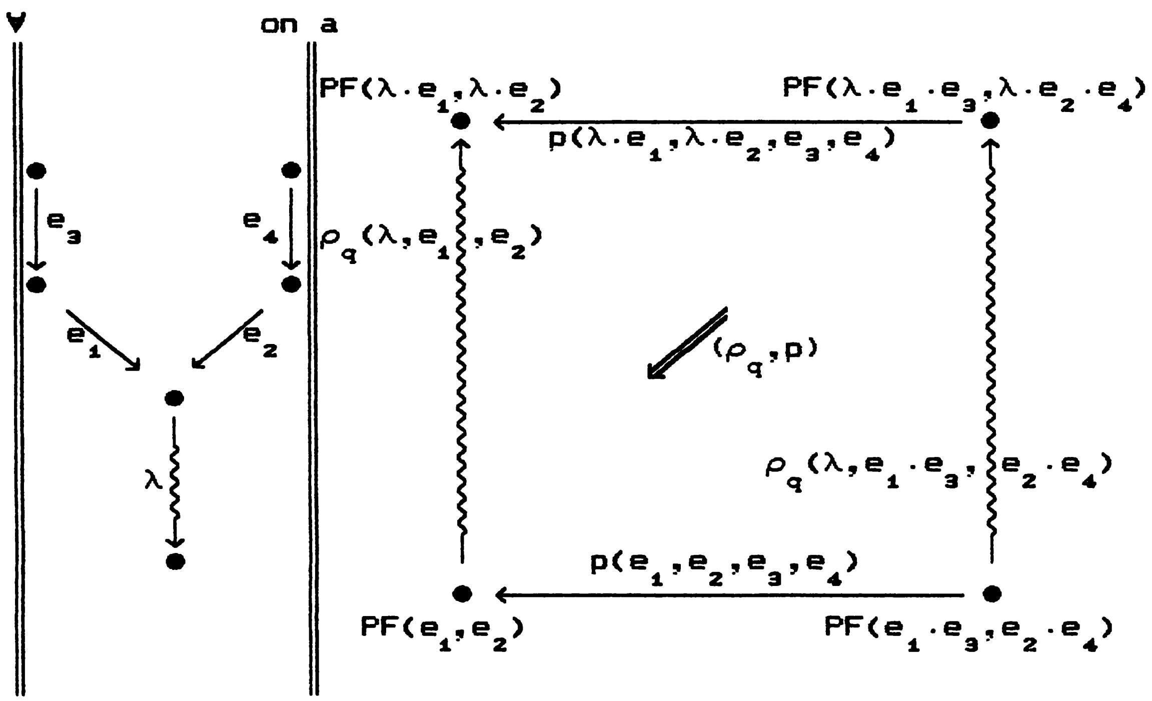
+ axiomes $((\rho_q)_f)$, $((\rho_q)_s)$ et $((\rho_q)_b)$ (relatifs aux l.p.f.) :



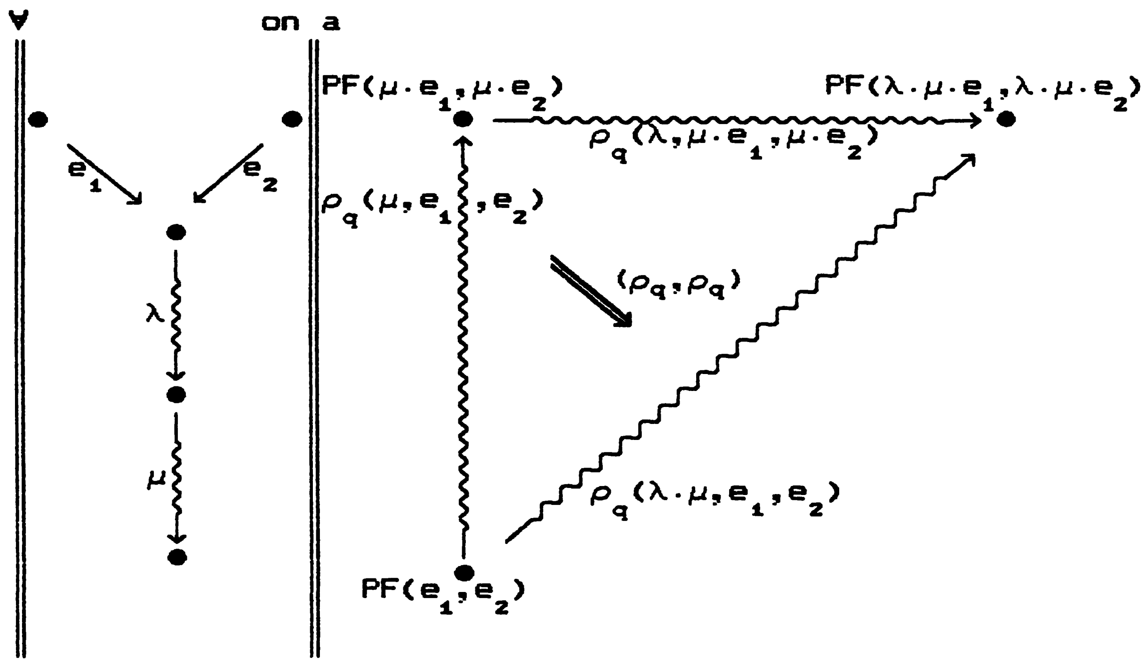
+ axiome (ρ_q, d) (relatif aux l.p.f.) :



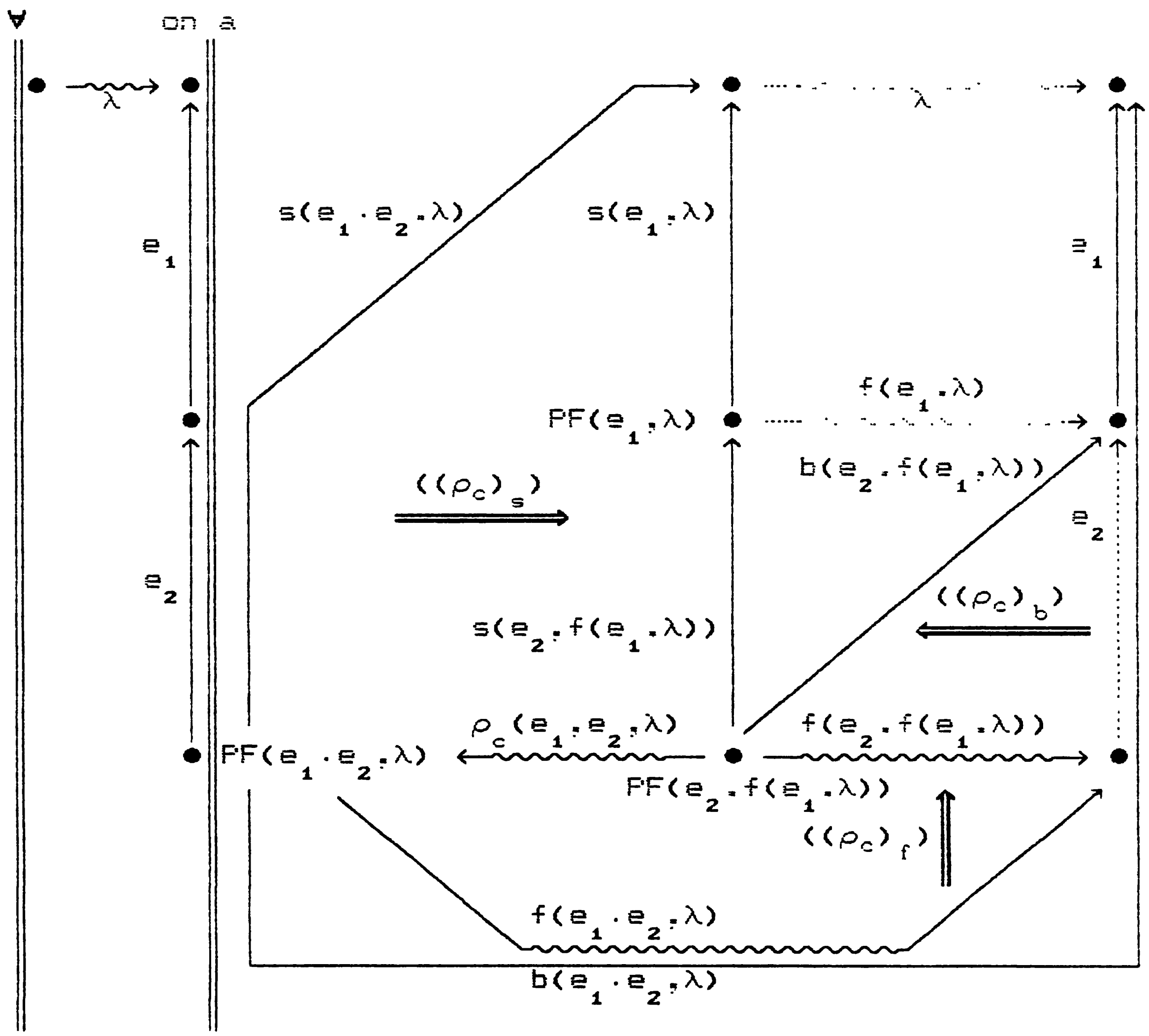
+ axiome (ρ_q, p) (relatif aux l.p.f.) :



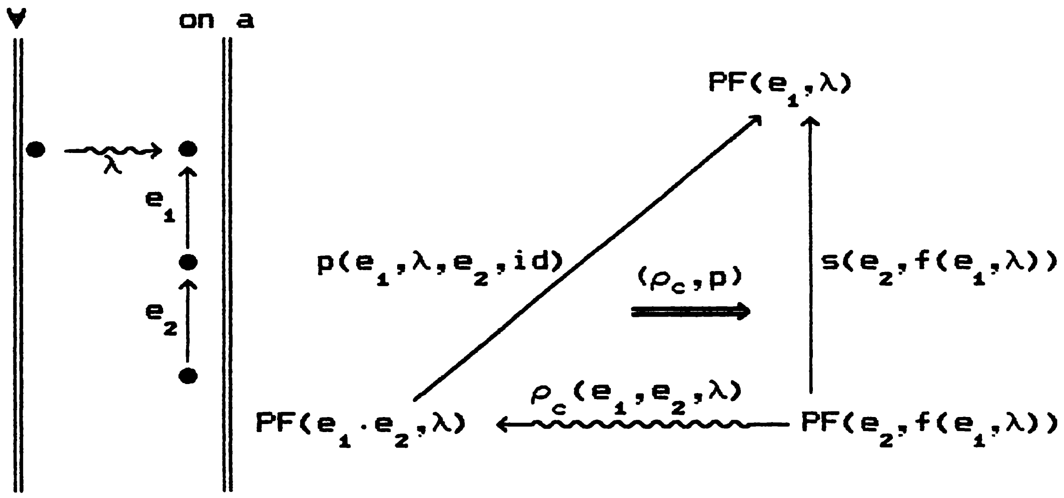
+ axiome (ρ_q, ρ_q) (relatif aux l.p.f.) :



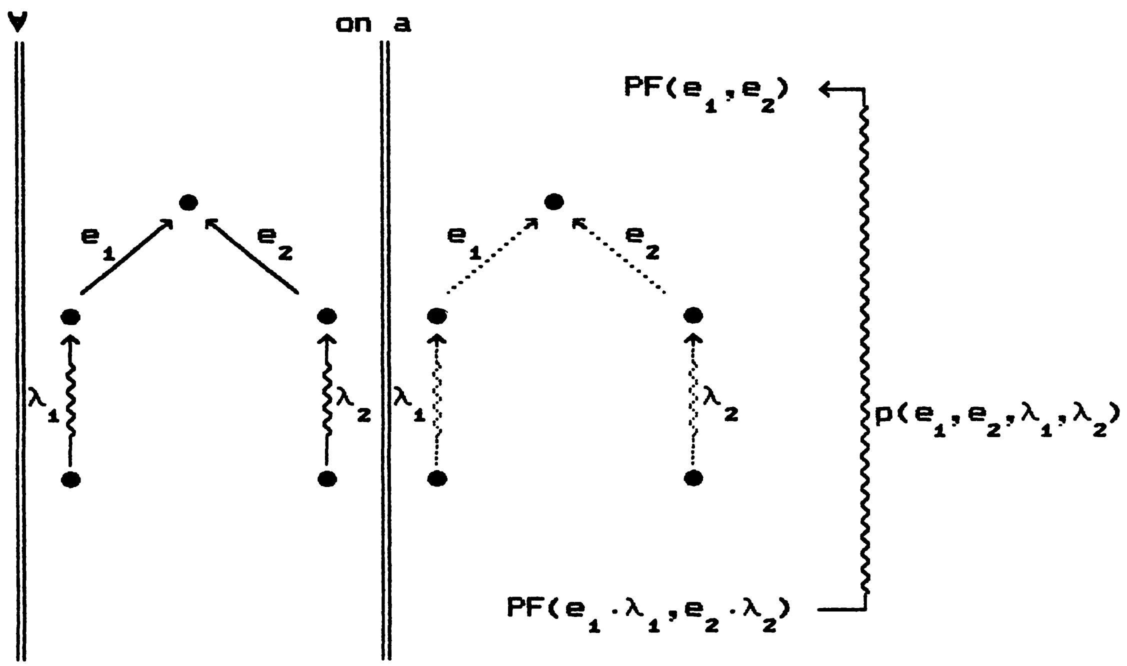
+ axiomes $((\rho_c)_f)$, $((\rho_c)_s)$ et $((\rho_c)_b)$ (relatifs aux l.p.f.) :



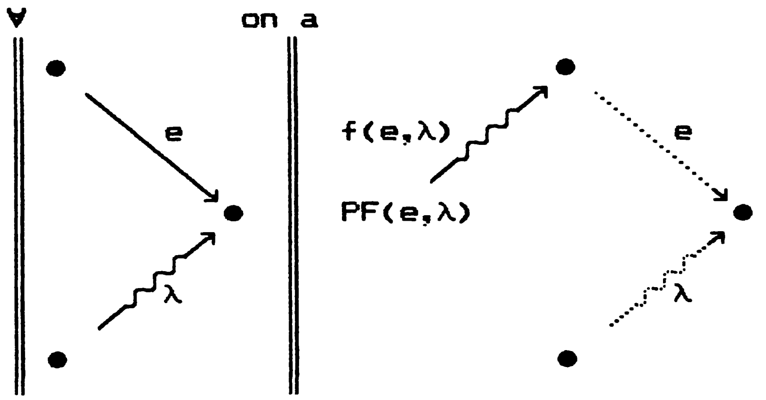
+ axiome (ρ_c, p) (relatif aux l.p.f.) :



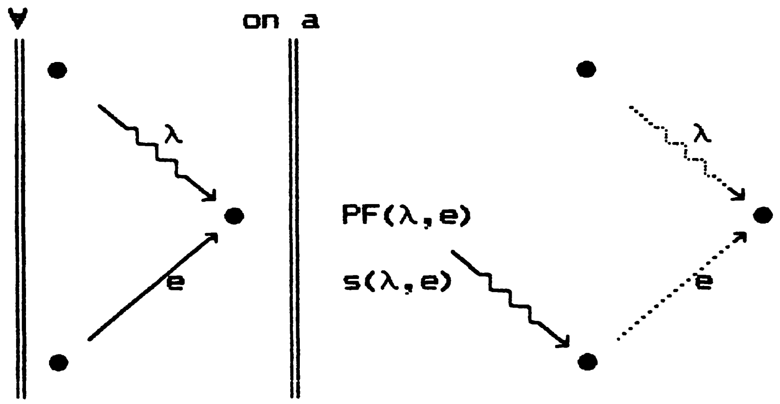
+ axiome $(p_{\mathcal{R}})$ (relatif aux l.p.f.) :



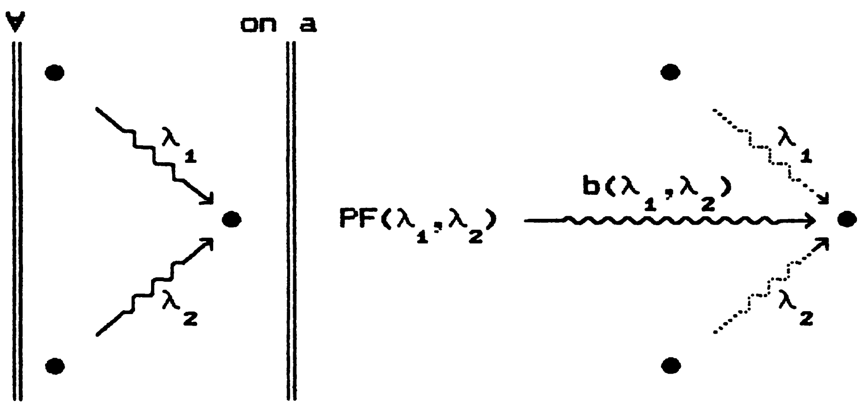
+ axiome (h_f) (relatif à l'homogénéité des l.p.f.) :



+ axiome (h_s) (relatif à l'homogénéité des l.p.f.) :



+ axiome (h_b) (relatif à l'homogénéité des l.p.f.) :



Nous définissons maintenant la *rigidification* de la structure de catégorie lax-localement-cartésienne.

Définition 2 : Nous dirons qu'une LLCC $(\mathbb{C}, \mathcal{R}, \Rrightarrow)$ est *rigide* si et seulement si :
- $\mathcal{R}$ est l'ensemble des flèches $id(C)$, où C décrit l'ensemble $Ob(\mathbb{C})$ des objets de $\mathbb{C}$,
- la relation $\Rrightarrow$ est l'égalité entre flèches de $\mathbb{C}$.

Un certain nombre de conditions (axiomes et même existence de lois) requises par la définition d'une LLCC se simplifient notablement et d'autres deviennent redondantes dans le cas d'une LLCC rigide. La proposition suivante caractérise, dans cet esprit, les LLCC rigides.

Proposition 1 : *Une catégorie* $\mathbb{C}$ *est munie d'une structure de LLCC rigide si et seulement si :*

- $\mathbb{C}$ *est munie des lois :*

un , cte , PF , f , s *(*, b *)*, d *et* p ,

de même configuration que dans le cas d'une LLCC quelconque,

- les axiomes suivants sont vérifiés :

+ *axiomes* (cte, 1), (cte_{Fl}), (d_f), (d_s), (p_f), (p_s), (p_{comp}) *et* (d_{comp}) *:*
ils restent analogues à ceux de la définition 1 (en y remplaçant, bien entendu, "$\Rrightarrow$" par "=" et les flèches de réécriture par des identités),

+ *axiome* (cône) *:*
pour toutes flèches e_1 *et* e_2 *de même codomaine, on a :*

$$e_1 \cdot f(e_1, e_2) = e_2 \cdot s(e_1, e_2) ,$$

(et on note $b(e_1, e_2)$ *la valeur commune de ces composés),*

+ *axiome* (p,f,s,b,d) :
pour toutes flèches e_1 *et* e_2 *de même codomaine, on a :*
$$p(e_1,e_2,f(e_1,e_2),s(e_1,e_2))\cdot d(b(e_1,e_2)) = id \ ,$$

+ *axiome* (ρ_c,p) :
pour toutes flèches e_1 *et* e_2 *consécutives, on a :*
$$p(e_1,id,e_2,id) = e_2 \ ,$$

+ *axiome* $(p_{\mathcal{R}})$:
pour toutes flèches e_1 *et* e_2 *de même codomaine, on a :*
$$p(e_1,e_2,id,id) = id \ ,$$

+ *axiome* (h_f) :
pour toute flèche e , *on a :*
$$f(e,id) = id \ ,$$

+ *axiome* (h_s) :
pour toute flèche e , *on a :*
$$s(id,e) = id \ .$$

<u>Preuve.</u>
Remarquons d'abord qu'en raison des axiomes (cône), (h_f) et (h_s), on a pour toute flèche e :
$$s(e,id) = e \quad \text{et} \quad f(id,e) = e$$
$$(\text{et} \quad PF(e,id) = dom(e) = PF(id,e) \ );$$
la première, notamment, de ces égalités simplifie l'écriture de nombreux axiomes (par exemple l'axiome (p,f,s,b,d)).
Examinons maintenant les lois et axiomes qui "disparaissent".
La loi b est entièrement déterminée par les lois f et s , en raison de l'axiome (cône) qui remplace les axiomes $(cône_1)$ et $(cône_2)$; et les axiomes (d_b) et (p_b) deviennent des conséquences des axiomes (d_f) et (p_f) par exemple.
La loi t est entièrement déterminée et les axiomes (t_1)

et (t_2) sont alors trivialement vérifiés; en effet t ne doit plus être définie que sur les :

$$(e,id,id,id,id) \quad (\text{où } id = id(codom(e)))$$

et les axiomes (t_1) et (t_2) deviennent tous deux :

$$t(e,id,id,id,id) = e .$$

Il en est de même de la loi cf et des axiomes (cf_f) et (cf_s) pour des raisons du même genre (et l'axiome (cf_b) est alors une conséquence de l'axiome (ρ_c,p)).

Quant aux lois ρ_{fl}, ρ_q et ρ_c, elles doivent être à valeurs dans l'ensemble des flèches de réécriture i.e. dans l'ensemble des identités et elles sont donc entièrement déterminées (notons, à propos de ρ_c, que, si e_1 et e_2 sont deux flèches consécutives, on a bien :

$$PF(e_2,id) = dom(e_2) = PF(e_1 \cdot e_2,id) \;).$$

Et, pour terminer, signalons que les autres axiomes qui "disparaissent" sont, en fait et bien entendu, trivialement vérifiés.

<u>Fin de la preuve.</u>

On remarquera que, par rigidification, on passe de la présentation essentiellement relationnelle précédente à une présentation essentiellement équationnelle. Nous allons montrer que cette dernière est équivalente à la présentation essentiellement équationnelle (plus standard) des catégories localement cartésiennes.

Précisons ce que nous entendons exactement par "catégorie localement cartésienne".

<u>Définition 3 :</u> Nous dirons que $\langle \mathbb{C} \rangle$ est une *catégorie localement cartésienne* (en abrégé : est une LCC) si et seulement si $\mathbb{C}$ est une catégorie à objet final choisi et à choix de produits fibrés qualifié d'*homogène*, c'est-à-dire vérifiant, pour toute flèche e :

$$f(e,id) = id \quad \text{et} \quad s(id,e) = id$$

(et donc :

$$s(e,id) = e\ ,\quad f(id,e) = e$$

$$\text{et}\quad PF(e,id) = dom(e) = PF(id,e)\ ),$$

où f , s et PF désignent respectivement les lois "première projection", "deuxième projection" et "produit fibré".

Les LCC peuvent aussi se caractériser de la façon suivante :

Proposition 2 : *Une catégorie $\mathbb{C}$ est munie d'une structure de LCC si et seulement si :*
- *$\mathbb{C}$ est munie des lois :*

un , cte , PF , f , s *(*, b *)*, d *et* p ,

de même configuration que dans le cas d'une LLCC,
- *les axiomes* (cte,1), (cte_{Fl}), (cône), (d_f), (d_s), (p_f), (p_s), (p_{comp}), (d_{comp}), (p,f,s,b,d), (h_f) *et* (h_s) *de la structure de LLCC rigide (cf la proposition 1) sont vérifiés.*

Preuve.
Prouvons d'abord que la donnée des lois *un* et cte accompagnée de celle des axiomes (cte,1) et (cte_{Fl}) est équivalente à la donnée d'un objet final.

Si 1 est final, il détermine une loi *un* et une loi cte (celle qui associe, à tout objet A , l'unique flèche de A vers 1). Par unicité, les axiomes (cte,1) et (cte_{Fl}) sont alors vérifiés.

Réciproquement, supposons que les lois *un* et cte sont données et que les axiomes (cte,1) et (cte_{Fl}) sont vérifiés et prouvons qu'alors l'objet 1 (déterminé par *un*) est final. Soit donc un objet A . La flèche cte(A) est bien une flèche de A vers 1 . Si c en est une autre, on a :

$$cte(1)\cdot c = cte(A)$$

(en vertu de l'axiome (cte_{Fl}))

et donc :

$$c = cte(A)$$

(en vertu de l'axiome $(cte,1)$);

ainsi 1 est bien final.

Prouvons maintenant que la donnée des autres lois et axiomes est équivalente à la donnée d'un choix homogène de produits fibrés. (Nous ne nous préoccuperons pas de l'homogénéité car elle est traduite par les mêmes axiomes (h_f) et (h_s) dans les deux cas.)

Si $\mathbb{C}$ est munie d'un choix de produits fibrés, $\mathbb{C}$ est déjà munie de lois PF , f et s et l'axiome (cône) est vérifié (d'où la loi b). D'autre part, pour toute flèche e , on définit

$$d(e)$$

comme étant le "crochet" (il existe bien) de

$$id(dom(e)) \quad \text{et} \quad id(dom(e)) \ ,$$

ce qui équivaut à la satisfaction des axiomes (d_f) et (d_s); et, pour tout quadruplet (e_1,e_2,e_3,e_4) de configuration convenable, on définit

$$p(e_1,e_2,e_3,e_4)$$

comme étant le "crochet" (il existe bien) de

$$e_3\cdot f(e_1\cdot e_3,e_2\cdot e_4) \quad \text{et} \quad e_4\cdot s(e_1\cdot e_3,e_2\cdot e_4) \ ,$$

ce qui équivaut à la satisfaction des axiomes (p_f) et (p_s). Quant aux axiomes (p_{comp}), (d_{comp}) et (p,f,s,b,d), on les obtient, par composition avec les projections voulues, comme des conséquences de l'unicité d'un crochet (et de l'homogénéité éventuellement).

Réciproquement, supposons que les lois PF , f , s , (b ,) d et p sont données et que les axiomes (cône),

(d_f), (d_s), (p_f), (p_s), (p_{comp}), (d_{comp}) et (p,f,s,b,d) sont vérifiés et prouvons qu'alors $\mathbb{C}$ est à produits fibrés (déterminés par les lois PF . f et s). Soient donc deux flèches e_1 et e_2 de même codomaine et soient x_1 et x_2 deux flèches, de même domaine noté A, vérifiant :

$$e_1 \cdot x_1 = e_2 \cdot x_2 .$$

On note y la valeur commune de ces deux composés. On montre alors (grâce aux axiomes (p_f), (d_f), (p_s) et (d_s)) que la flèche x définie comme la composée suivante :

$$A \xrightarrow[d(y)]{} PF(y,y) = PF(e_1 \cdot x_1, e_2 \cdot x_2) \xrightarrow[p(e_1,e_2,x_1,x_2)]{} PF(e_1,e_2)$$

est telle que :

$$f(e_1,e_2) \cdot x = x_1 \quad \text{et} \quad s(e_1,e_2) \cdot x = x_2$$
$$(\text{et} \quad b(e_1,e_2) \cdot x = y).$$

Maintenant, si x' est une autre flèche vérifiant des égalités analogues, on a :

$$\begin{aligned}
x' &= p(e_1,e_2,f(e_1,e_2),s(e_1,e_2)) \cdot d(b(e_1,e_2)) \cdot x' \\
&\qquad \text{(en vertu de l'axiome } (p,f,s,b,d)) \\
&= \rho \cdot d(b(e_1,e_2)) \cdot x' \\
&\qquad \text{(en posant } \rho = p(e_1,e_2,f(e_1,e_2),s(e_1,e_2)) \text{)} \\
&= \rho \cdot p(b(e_1,e_2),b(e_1,e_2),x',x') \cdot d(b(e_1,e_2) \cdot x') \\
&\qquad \text{(en vertu de l'axiome } (d_{comp})) \\
&= \rho \cdot p(e_1 \cdot f(e_1,e_2), e_2 \cdot s(e_1,e_2), x', x') \cdot d(y) \\
&= p(e_1,e_2,f(e_1,e_2) \cdot x', s(e_1,e_2) \cdot x') \cdot d(y) \\
&\qquad \text{(en vertu de l'axiome } (p_{comp})) \\
&= p(e_1,e_2,x_1,x_2) \cdot d(y) ,
\end{aligned}$$

et donc :

$$x' = x ;$$

ainsi $\mathbb{C}$ est bien à produits fibrés.

<u>Fin de la preuve.</u>

Alors on a :

Théorème : *Les LLCC rigides sont exactement les LCC.*

Preuve.
Au vu des propositions 1 et 2 (où, bien entendu, les lois et axiomes de même nom se correspondent), il reste seulement à montrer que, si $\mathbb{C}$ est une LCC, alors les axiomes (ρ_c, p) et $(p_{\mathcal{R}})$ sont automatiquement vérifiés. Or on déduit aisément l'axiome (ρ_c, p) des axiomes (p_f) et (h_f) et l'axiome $(p_{\mathcal{R}})$ des axiomes (p_f) et (p_a) et de l'unicité d'un crochet.
Fin de la preuve.

Il découle donc de ce théorème que les axiomes $(\rho_c.p)$ et $(p_{\mathcal{R}})$ étaient redondants dans la caractérisation d'une LLCC rigide donnée dans la proposition 1.

2. La suffisante complétude connexe des LLCC sur les LCC

Considérons maintenant les trois catégories suivantes :

- d'une part, la catégorie $\mathbb{GO}$ ayant pour objets les graphes orientés (petits) et ayant pour flèches les homomorphismes entre graphes orientés,
- d'autre part, la catégorie $\mathbb{LCC}$ ayant pour objets les LCC (petites), i.e. les catégories (petites) à objet final choisi et à choix homogène de produits fibrés, et ayant pour flèches les foncteurs commutant avec ces choix,
- enfin, la catégorie $\mathbb{LLCC}$ ayant pour objets les LLCC (petites), i.e. les catégories (petites) à objet final assoupli choisi et à choix homogène de produits fibrés assouplis, et ayant pour flèches les foncteurs qui commutent avec ces choix (i.e. avec toutes les lois introduites dans la définition 1 du §1), qui respectent les flèches de réécriture et qui sont compatibles avec les relations $\Rightarrow$.

On dispose évidemment d'un foncteur plein et fidèle :

$$\mathbb{LCC} \hookrightarrow \mathbb{LLCC} ,$$

puisque toute LCC s'identifie à une LLCC rigide.
Bien entendu, nous disposons aussi des foncteurs d'oubli "graphe orienté sous-jacent" :

$$\mathbb{O} : \mathbb{LCC} \longrightarrow \mathbb{GO}$$
$$\mathbb{LO} : \mathbb{LLCC} \longrightarrow \mathbb{GO} .$$

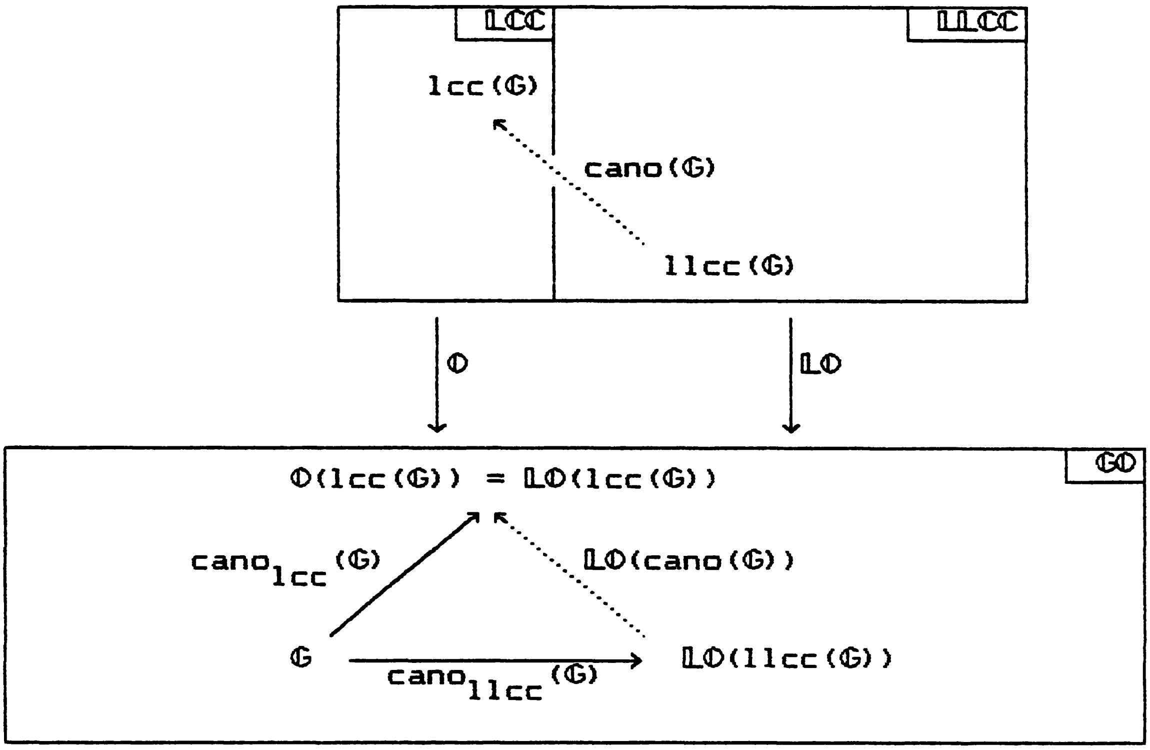
Il est facile de vérifier que ces trois foncteurs admettent des adjoints à gauche.

Soit $\mathbb{G}$ un graphe orienté. Nous pouvons donc lui associer :

- la catégorie localement cartésienne lcc($\mathbb{G}$) qu'il engendre librement,
- la catégorie lax-localement-cartésienne llcc($\mathbb{G}$) qu'il engendre librement.

Il en résulte, par "transitivité des structures libres", que lcc($\mathbb{G}$) est aussi la catégorie localement cartésienne librement engendrée par la catégorie lax-localement-cartésienne llcc($\mathbb{G}$) .

On dispose donc de flèches canoniques d'adjonction et d'un diagramme commutatif dans $\mathbb{GD}$ tels que représentés ci-dessous :



Si $\mathbb{G}$ est un graphe orienté, on peut lui associer deux relations d'équivalence :
- l'une, R_{ob} , sur l'ensemble Ob(llcc($\mathbb{G}$)) des objets de

la LLCC qu'il engendre,
- l'autre, R_{fl}, sur l'ensemble $Fl(llcc(\mathbb{G}))$ des flèches de $llcc(\mathbb{G})$.

La relation d'équivalence R_{ob} entre objets est aisée à expliciter :
- les objets A et B vérifient $A\ R_{ob}\ B$ si et seulement si A et B sont *connectés* par un zigzag constitué de flèches appartenant à $\mathcal{R}$ (nous dirons un *$\mathcal{R}$-zigzag*), ce que nous pouvons représenter comme suit :

$$A\ R_{ob}\ B$$
$$\Leftrightarrow$$
il existe

$$\begin{tikzcd}
A & & \bullet & \cdots & \bullet & & B \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly] \arrow[ur, squiggly] & & & & \bullet \arrow[ul, squiggly] \arrow[ur, squiggly] &
\end{tikzcd}$$

On montrera plus loin (cf §3) que :

<u>Proposition 1 :</u> *Tout $\mathcal{R}$-zigzag peut se modifier (par "co-confluence" locale) en un $\mathcal{R}$-zigzag simple (qui est constitué d'une seule "branche"). Autrement dit, on a :*

$$A\ R_{ob}\ B$$
$$\Leftrightarrow$$
il existe

$$\begin{tikzcd}
A & & B \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly] \arrow[ur, squiggly] &
\end{tikzcd}$$

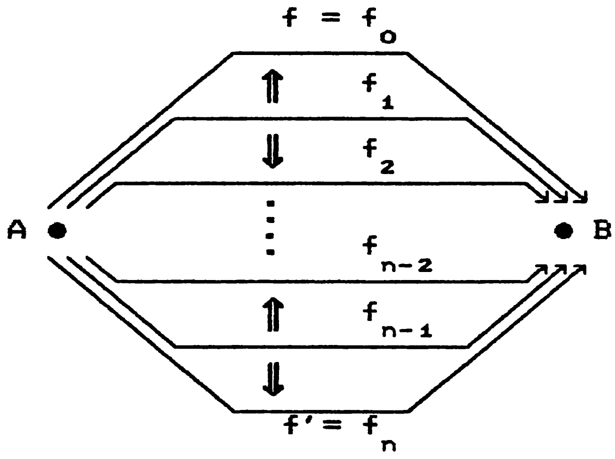
Maintenant nous allons construire la relation d'équivalence R_{fl}, tant en utilisant la relation $\Longrightarrow$ que la classe $\mathcal{R}$ (il faut en effet s'attendre à ce que des

flèches équivalentes n'aient pas nécessairement des domaines et codomaines égaux).
Procédons par étapes.

<u>Etape 1</u>. Dans un premier temps, on n'utilise que la relation d'équivalence R_{fl1} engendrée par la relation $\Longrightarrow$. Autrement dit, on a :

- pour que deux flèches $f, f' : A \longrightarrow B$ vérifient $f \; R_{fl1} \; f'$, il faut et il suffit qu'elles soient reliées par un 2-*zigzag*, i.e. un zigzag de 2-flèches, ce que l'on peut représenter comme suit :

$$f \; R_{fl1} \; f'$$
$$\Longleftrightarrow$$
il existe



<u>Etape 2</u>. On tient compte maintenant des "identifications" d'objets dues à la classe $\mathcal{R}$. Ainsi on définit une relation R_{fl2} entre flèches g et g' qui n'ont plus nécessairement mêmes domaines et mêmes codomaines mais qui sont côtés d'un carré (non nécessairement commutatif) tel que :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, squiggly, "\alpha"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "g"] \arrow[r, squiggly, "\alpha'"'] & \bullet \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd}$$

Et, dans ce cas, on a :

– $g\ R_{fl2}\ g'$ si et seulement si $\alpha\cdot g\ R_{fl1}\ g'\cdot\alpha'$;
alors le carré précédent "se remplit" d'un 2-zigzag reliant $\alpha\cdot g$ et $g'\cdot\alpha'$, ce que l'on représente par le *-carré* qui suit :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, squiggly, "\alpha"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "g"] \arrow[r, squiggly, "\alpha'"'] & \bullet \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd}$$

En résumé, on a donc :

$$g\ R_{fl2}\ g'$$

$$\Leftrightarrow$$

il existe

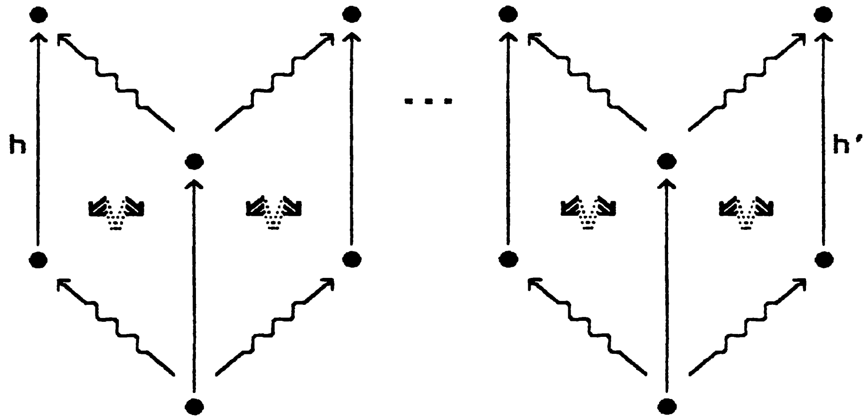
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, squiggly, "\alpha"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "g"] \arrow[r, squiggly, "\alpha'"'] & \bullet \arrow[u, "g'"'] \end{tikzcd}$$

<u>Etape 3</u>. Maintenant on définit $R_{fl3} = R_{fl}$ comme étant la relation d'équivalence engendrée par R_{fl2} . Autrement dit, on a :

– pour que deux flèches h et h' vérifient $h\ R_{fl}\ h'$, il faut et il suffit qu'elles soient connectées par un

$\nwarrow\searrow$-*zigzag* (i.e. un zigzag de $\nwarrow\searrow$-carrés), ce que l'on peut représenter comme suit :

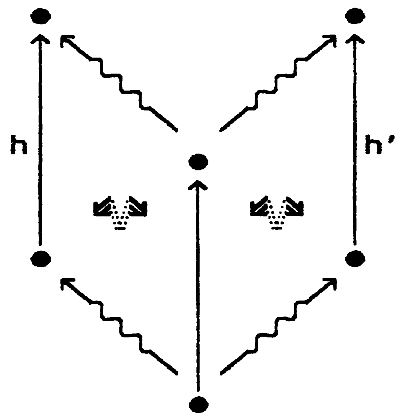
$$h \; R_{fl} \; h'$$
$$\Leftrightarrow$$
il existe



On montrera plus loin (cf §3) que :

<u>Proposition 2 :</u> *Tout $\nwarrow\searrow$-zigzag peut se modifier (par co-confluence locale notamment) en un $\nwarrow\searrow$-zigzag simple (qui est constitué d'une seule "branche"). Autrement dit, on a :*

$$h \; R_{fl} \; h'$$
$$\Leftrightarrow$$
il existe



2. La suffisante complétude connexe des LLCC sur les LCC

Comme annoncé dans l'introduction, le but de ce texte est d'établir le théorème ci-dessous :

Théorème (suffisante complétude connexe des LLCC sur les LCC) : *Si* $\mathbb{G}$ *est un graphe orienté, alors :*

(i) *les lois de la catégorie* $\underline{\mathrm{llcc}(\mathbb{G})}$ *, sous-jacente à la catégorie lax-localement-cartésienne* $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$ *librement engendrée par* $\mathbb{G}$ *, sont compatibles avec les relations d'équivalence* R_{ob} *(sur* $\mathrm{Ob}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *) et* R_{fl} *(sur* $\mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *) et on dispose par conséquent de la catégorie "quasi-quotient*[1] *de* $\underline{\mathrm{llcc}(\mathbb{G})}$ *par* $R = (R_{ob}, R_{fl})$ *" que l'on note donc* $\underline{\mathrm{llcc}(\mathbb{G})}/_R$ *,*

(ii) $\underline{\mathrm{llcc}(\mathbb{G})}/_R$ *est canoniquement munie d'une structure de catégorie localement cartésienne notée* $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})/_R$ *,*

(iii) $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})/_R = \mathrm{lcc}(\mathbb{G})$ *, i.e.* $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})/_R$ *est la catégorie cartésienne librement engendrée par* $\mathbb{G}$ *.*

La flèche canonique d'adjonction :

$$\mathrm{cano}(\mathbb{G}) : \mathrm{llcc}(\mathbb{G}) \longrightarrow \mathrm{lcc}(\mathbb{G})$$

vérifie les propriétés suivantes :

(iv) (complétude sur les objets)
pour tout $A' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{lcc}(\mathbb{G}))$ *, il existe* $A'' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *tel que :*

$$\mathrm{cano}(\mathbb{G})(A'') = A' ,$$

[1] Voir C. Ehresmann, in Catégories et Structures, Dunod, Paris, 1965.

(v) (complétude sur les flèches)

pour toute $x' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{lcc}(\mathbb{G}))$, *il existe* $x'' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *telle que :*

$$\mathrm{cano}(\mathbb{G})(x'') = x' ,$$

(vi) (connexité de la complétude sur les objets)

pour tous A'' , $B'' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$

$$\mathrm{cano}(\mathbb{G})(A'') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(B'')$$

$$\Longleftrightarrow$$

il existe

$$\begin{tikzcd}
A'' & & B'' \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly] \arrow[ur, squiggly] &
\end{tikzcd}$$

(vu la proposition 1) ,

(vii) (connexité de la complétude sur les flèches)

pour toutes x'' , $y'' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$

$$\mathrm{cano}(\mathbb{G})(x'') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(y'')$$

$$\Longleftrightarrow$$

il existe

$$\begin{tikzcd}
\bullet & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly] \arrow[ur, squiggly] & \\
\bullet \arrow[uu, "x''"] & & \bullet \arrow[uu, "y''"'] \\
& \bullet \arrow[uu] \arrow[ul, squiggly] \arrow[ur, squiggly] &
\end{tikzcd}$$

(vu la proposition 2) ,

(viii) (complétude pour les lois de la structure de catégorie)

pour toutes y' , $x' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{lcc}(\mathbb{G}))$ *consécutives i.e. telles que :*

$$\mathrm{dom}(y') = \mathrm{codom}(x') ,$$

il existe y'' , $x'' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *telles que :*

$$y'.x' = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(y''.x'') ,$$

et, bien entendu :

pour toute $x' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{lcc}(\mathbb{G}))$, *il existe* $x'' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *telle que :*

$$\mathrm{dom}(x') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(\mathrm{dom}(x''))$$

et

$$\mathrm{codom}(x') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(\mathrm{codom}(x'')) ,$$

pour tout $A' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{lcc}(\mathbb{G}))$, *il existe* $A'' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *tel que :*

$$\mathrm{id}(A') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(\mathrm{id}(A''))$$

(il résulte en particulier de ce point (viii) que $\underline{\mathrm{llcc}(\mathbb{G})}/_R$ *est une catégorie quotient, et même "quotient strict"*[2], *et que* $\mathrm{cano}(\mathbb{G})$ *est le foncteur "passage au quotient"),*

(ix) (complétude pour les lois de la structure localement cartésienne)

pour toutes x' , $y' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{lcc}(\mathbb{G}))$ *telles que :*

$$\mathrm{codom}(x') = \mathrm{codom}(y') ,$$

il existe x'' , $y'' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *telles que :*

(2) Voir C. Ehresmann, in Catégories et Structures, Dunod, Paris, 1965.

$$PF(x',y') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(PF(x'',y'')) ,$$

$$f(x',y') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(f(x'',y'')) ,$$

$$s(x',y') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(s(x'',y''))$$

et

$$b(x',y') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(b(x'',y'')) ,$$

pour toutes x' , y' , v' , $w' \in Fl(lcc(\mathbb{G}))$ *telles que :*

$$\mathrm{codom}(x') = \mathrm{codom}(v') ,$$

$$\mathrm{dom}(x') = \mathrm{codom}(v') \quad et \quad \mathrm{dom}(y') = \mathrm{codom}(w') ,$$

il existe x'' , y'' , v'' , $w'' \in Fl(llcc(\mathbb{G}))$ *telles que :*

$$p(x',y',v',w') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(p(x'',y'',v'',w'')) ,$$

et, bien entendu :

pour toute $x' \in Fl(lcc(\mathbb{G}))$, *il existe* $x'' \in Fl(llcc(\mathbb{G}))$ *telle que :*

$$d(x') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(d(x'')) ,$$

pour tout $A' \in Ob(lcc(\mathbb{G}))$, *il existe* $A'' \in Ob(llcc(\mathbb{G}))$ *tel que :*

$$cte(A') = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(cte(A'')) ,$$

et, enfin :

$$1_{lcc(\mathbb{G})} = \mathrm{cano}(\mathbb{G})(1_{llcc(\mathbb{G})}) .$$

Les paragraphes suivants sont consacrés à la démonstration de ce théorème (et des propositions 1 et 2 qui le précèdent).

3. Preuves de simplifiabilité des zigzags

Prouvons tout d'abord la proposition 1 (§2), i.e. que tout $\mathcal{R}$-zigzag oeut se modifier en un $\mathcal{R}$-zigzag simole.

Preuve de la prooosition 1 (§2).

Il est clair qu'il suffit de prouver le résultat pour les $\mathcal{R}$-zigzags constitués de deux branches. Soit donc un tel $\mathcal{R}$-zigzag :

$$\begin{tikzcd}
A & & \bullet & & D \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"'] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\gamma"] \arrow[ur, squiggly, "\delta"'] &
\end{tikzcd}$$

En vertu des axiomes (h_f) et (h_s), on a :

$$\begin{tikzcd}
A & & \bullet & & D \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"'] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\gamma"] \arrow[ur, squiggly, "\delta"'] & \\
& & \bullet \arrow[ul, squiggly, "{f(\beta,\gamma)}"] \arrow[ur, squiggly, "{s(\beta,\gamma)}"'] & &
\end{tikzcd}$$

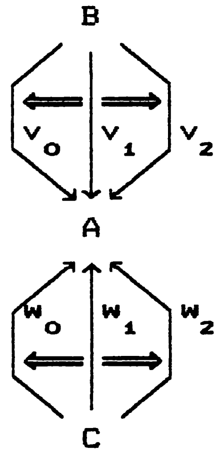
On a donc modifié le $\mathcal{R}$-zigzag donné en un $\mathcal{R}$-zigzag simple :

$$\begin{tikzcd}
A & & D \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly, "{\alpha\cdot f(\beta,\gamma)}"] \arrow[ur, squiggly, "{\delta\cdot s(\beta,\gamma)}"'] &
\end{tikzcd}$$

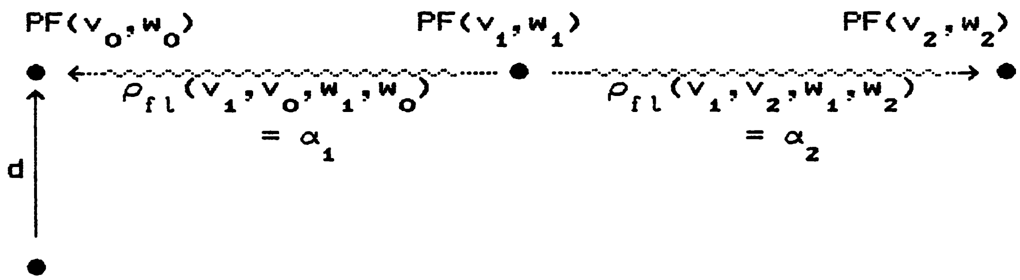
Fin de la preuve.

En vue d'établir la proposition 2 (§2), nous prouvons maintenant un groupe de trois lemmes (de *translation* d'une flèche le long d'un $\mathcal{R}$-zigzag).

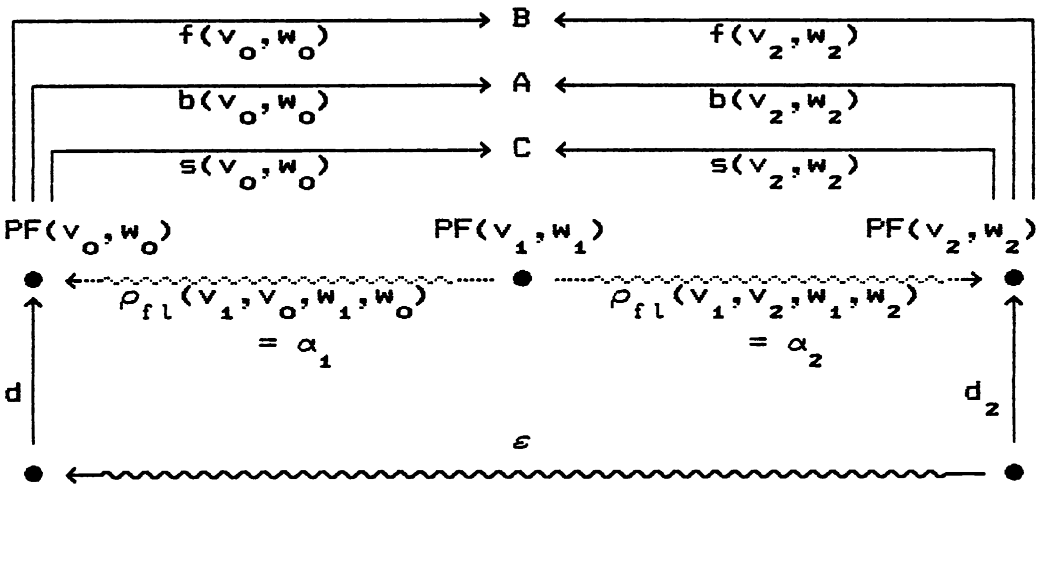
Lemme 1 : *Si l'on a :*



et



alors il existe une flèche ε *élément de* $\mathcal{R}$ *et une flèche* d_2 *telles que :*



et

$$
\begin{array}{rcl}
 & d \; R_{fl} \; d_2 \; , & \\
f(v_2,w_2)\cdot d_2 & \Leftrightarrow & f(v_0,w_0)\cdot d\cdot \varepsilon \; , \\
s(v_2,w_2)\cdot d_2 & \Leftrightarrow & s(v_0,w_0)\cdot d\cdot \varepsilon \; , \\
b(v_2,w_2)\cdot d_2 & \Leftrightarrow & b(v_0,w_0)\cdot d\cdot \varepsilon \; .
\end{array}
$$

<u>Preuve.</u>

La flèche $\varepsilon = f(d,\alpha_1)$ et la flèche $d_2 = \alpha_2\cdot s(d,\alpha_1)$ conviennent; en effet :

- on a $\varepsilon \in \mathcal{R}$ en vertu de l'axiome (h_f) et car $\alpha_1 \in \mathcal{R}$,
- on a $d \; R_{fl} \; d_2$, comme le montre le diagramme ci-dessous (obtenu grâce aux axiomes (cône_1) et (cône_2)) :

$$
\begin{tikzcd}
\bullet & & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha_1"'] \arrow[ur, squiggly, "\alpha_2"] & \\
\bullet \arrow[uu, "d"] \arrow[r, phantom, "\Leftrightarrow"] & \arrow[r, phantom, "="] & \bullet \arrow[uu, "d_2 = \alpha_2\cdot s(d,\alpha_1)"'] \\
 & PF(d,\alpha_1) \arrow[uu, "s(d{,}\alpha_1)"'] \arrow[ul, squiggly, "f(d{,}\alpha_1)"] \arrow[ur, squiggly, "id"'] &
\end{tikzcd}
$$

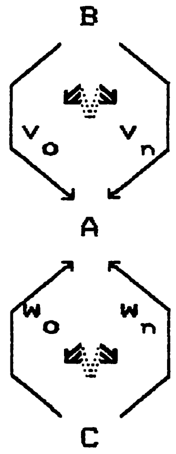
- on a le 2-zigzag suivant :

$$
\begin{array}{rl}
f(v_2,w_2)\cdot d_2 & = f(v_2,w_2)\cdot \rho_{fl}(v_1,v_2,w_1,w_2)\cdot s(d,\alpha_1) \\
 & \Longleftarrow f(v_1,w_1)\cdot s(d,\alpha_1) \\
 & \text{(en vertu de l'axiome } ((\rho_{fl})_f)) \\
 & \Longrightarrow f(v_0,w_0)\cdot \rho_{fl}(v_1,v_0,w_1,w_0)\cdot s(d,\alpha_1) \\
 & \text{(pour la même raison)} \\
 & = f(v_0,w_0)\cdot \alpha_1\cdot s(d,\alpha_1) \\
 & \Leftrightarrow f(v_0,w_0)\cdot d\cdot f(d,\alpha_1) \\
 & = f(v_0,w_0)\cdot d\cdot \varepsilon
\end{array}
$$

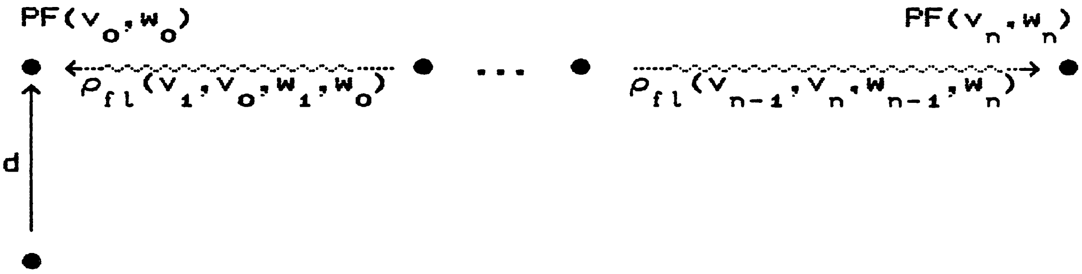
ainsi $f(v_2,w_2)\cdot d_2 \Leftrightarrow f(v_0,w_0)\cdot d\cdot \varepsilon$ et il en est de même pour les deux dernières propriétés.

<u>Fin de la preuve.</u>

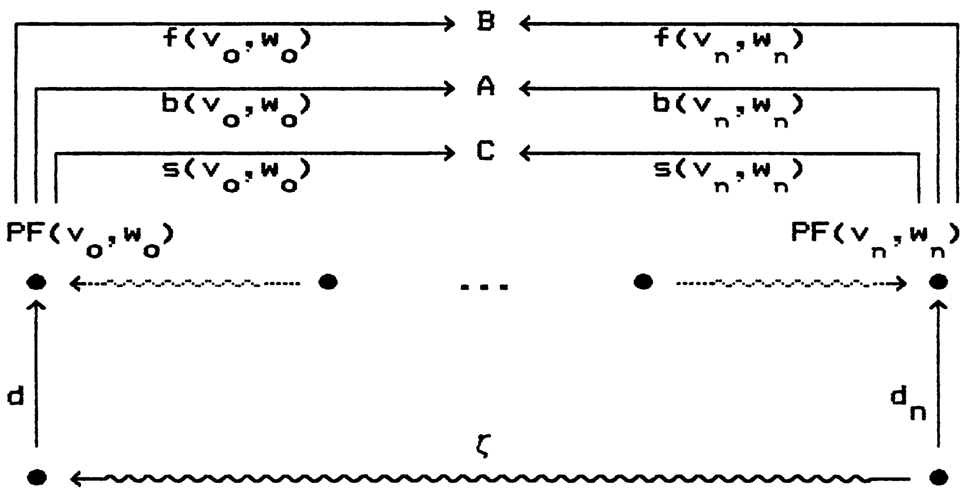
<u>Lemme 2 :</u> *Si l'on a :*



et



où n *est pair, alors il existe une flèche* ζ *élément de* $\mathcal{R}$ *et une flèche* d_n *telles que :*



et

$$\begin{aligned} &d \; R_{fl} \; d_n \;, \\ f(v_n,w_n)\cdot d_n \;&\nwarrow\!\Downarrow\!\searrow\; f(v_o,w_o)\cdot d\cdot\zeta \;, \\ s(v_n,w_n)\cdot d_n \;&\nwarrow\!\Downarrow\!\searrow\; s(v_o,w_o)\cdot d\cdot\zeta \;, \\ b(v_n,w_n)\cdot d_n \;&\nwarrow\!\Downarrow\!\searrow\; b(v_o,w_o)\cdot d\cdot\zeta \;. \end{aligned}$$

Preuve.

Pour établir ce lemme, il suffit bien entendu d'appliquer plusieurs fois le lemme 1 en "déroulant" au fur et à mesure le $\mathcal{R}$-zigzag. On construit ainsi :

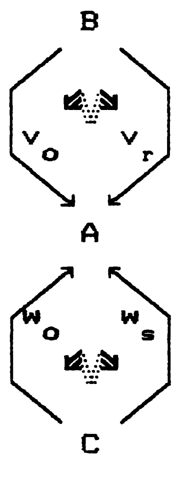
- des flèches éléments de $\mathcal{R}$ notées ε_2 , ... ε_n ,
- des flèches d_2 , ... d_n .

On prouve alors facilement que la composée $\zeta = \varepsilon_2\cdot\ldots\cdot\varepsilon_n$ et la flèche d_n conviennent.

Fin de la preuve.

Comme l'on peut toujours, en vertu de l'axiome $(\Longrightarrow,=)$, ramener deux 2-zigzags de longueurs différentes à deux 2-zigzags de longueurs égales et paires, on déduit, de façon évidente, le lemme ci-dessous du lemme 2.

Lemme 3 : *Si l'on a :*



et

$$
\begin{tikzcd}
\underset{}{\overset{PF(v_0,w_0)}{\bullet}} & \bullet \arrow[l, squiggly, "\rho_{fl}(v_1,v_0,w_1,w_0)"] & \cdots & \bullet \arrow[r, squiggly] & \overset{PF(v_r,w_s)}{\bullet} \\
\bullet \arrow[u, "d"]
\end{tikzcd}
$$

alors il existe une flèche ζ *élément de* $\mathcal{R}$ *et une flèche* $\check{d}$ *telles que :*

$$
\begin{tikzcd}
 & & B & & \\
 & & A & & \\
 & & C & & \\
\overset{PF(v_0,w_0)}{\bullet} \arrow[uuurr, "f(v_0,w_0)"] \arrow[uurr, "b(v_0,w_0)"] \arrow[urr, "s(v_0,w_0)"] & \bullet \arrow[l, squiggly] & \cdots & \bullet \arrow[r, squiggly] & \overset{PF(v_r,w_s)}{\bullet} \arrow[uuull, "f(v_r,w_s)"'] \arrow[uull, "b(v_r,w_s)"'] \arrow[ull, "s(v_r,w_s)"'] \\
\bullet \arrow[u, "d"] & & & & \bullet \arrow[u, "\check{d}"'] \arrow[llll, squiggly, "\zeta"']
\end{tikzcd}
$$

et

$$d \; R_{fl} \; \check{d} \; ,$$

$$f(v_r,w_s)\cdot\check{d} \;\Leftrightarrow\; f(v_o,w_o)\cdot d\cdot\zeta \; ,$$

$$s(v_r,w_s)\cdot\check{d} \;\Leftrightarrow\; s(v_o,w_o)\cdot d\cdot\zeta \; ,$$

$$b(v_r,w_s)\cdot\check{d} \;\Leftrightarrow\; b(v_o,w_o)\cdot d\cdot\zeta \; .$$

Toujours en vue de prouver la proposition 2 (§2), nous sommes désormais en mesure d'établir un lemme qui permet de construire une sorte d'extension de la loi PF à certaines flèches (convenables).

Lemme 4 : *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[rd, phantom, "\Leftrightarrow"] & \bullet \arrow[rd, phantom, "\Leftrightarrow"] & \bullet \arrow[l, "h"'] \\
\bullet \arrow[u, "l_1"] \arrow[r, "i"'] & \bullet \arrow[u, "l_2"] & \bullet \arrow[u, "l_3"'] \arrow[l, "j"]
\end{tikzcd}$$

alors il existe une flèche ζ *élément de* $\mathcal{R}$ *et une flèche* l *telles que :*

$$\begin{tikzcd}
 & PF(g,h) \arrow[dl, "f(g,h)"'] \arrow[d, "b(g,h)"] \arrow[dr, "s(g,h)"] & & \\
\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[rd, phantom, "\Leftrightarrow"] & \bullet \arrow[rd, phantom, "\Leftrightarrow"] & \bullet \arrow[l, "h"'] & \\
\bullet \arrow[u, "l_1"] \arrow[r, "i"'] & \bullet \arrow[u, "l_2"] & \bullet \arrow[u, "l_3"'] \arrow[l, "j"] & \\
 & PF(i,j) \arrow[ul, "f(i,j)"] \arrow[u, "b(i,j)"] \arrow[ur, "s(i,j)"'] & & \bullet \arrow[uuull, "l"'] \arrow[ll, squiggly, "\zeta"]
\end{tikzcd}$$

et

$$f(g,h) \cdot l \Leftrightarrow l_1 \cdot f(i,j) \cdot \zeta \ ,$$
$$s(g,h) \cdot l \Leftrightarrow l_3 \cdot s(i,j) \cdot \zeta \ ,$$
$$b(g,h) \cdot l \Leftrightarrow l_2 \cdot b(i,j) \cdot \zeta \ .$$

<u>Preuve.</u>

On a (en vertu des axiomes (cône$_1$) et (cône$_2$)):

$$l_2\cdot b(i,j) \Longleftarrow l_2\cdot i\cdot f(i,j) \leftrightsquigarrow g\cdot l_1\cdot f(i,j)$$

et

$$l_2\cdot b(i,j) \Longleftarrow l_2\cdot j\cdot s(i,j) \leftrightsquigarrow h\cdot l_3\cdot s(i,j) \ .$$

On peut appliquer le lemme 3 à ces deux 2-zigzags :

$$l_2\cdot b(i,j) \leftrightsquigarrow g\cdot l_1\cdot f(i,j) \quad \text{et} \quad l_2\cdot b(i,j) \leftrightsquigarrow h\cdot l_3\cdot s(i,j)$$

(car toutes ces flèches ont bien le même codomaine)

et à la flèche :

$$d = d(l_2\cdot b(i,j))$$

(dont le codomaine est bien $PF(l_2\cdot b(i,j), l_2\cdot b(i,j))$).

Il existe ainsi une flèche ζ élément de $\mathcal{R}$ et une flèche $\check{d}$ telles que :

$$\begin{tikzcd}
PF(l_2\cdot b(i,j), l_2\cdot b(i,j)) & & & & PF(g\cdot l_1\cdot f(i,j), h\cdot l_3\cdot s(i,j)) \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly] & \cdots & \bullet \arrow[ur, squiggly] & \\
\bullet \arrow[uu, "d"] & & & & \bullet \arrow[uu, "\check{d}"'] \arrow[llll, squiggly, "\zeta"']
\end{tikzcd}$$

et (notamment) :

$$f(g\cdot l_1\cdot f(i,j), h\cdot l_3\cdot s(i,j))\cdot\check{d} \leftrightsquigarrow f(l_2\cdot b(i,j), l_2\cdot b(i,j))\cdot d\cdot\zeta$$

$$s(g\cdot l_1\cdot f(i,j), h\cdot l_3\cdot s(i,j))\cdot\check{d} \leftrightsquigarrow s(l_2\cdot b(i,j), l_2\cdot b(i,j))\cdot d\cdot\zeta$$

$$b(g\cdot l_1\cdot f(i,j), h\cdot l_3\cdot s(i,j))\cdot\check{d} \leftrightsquigarrow b(l_2\cdot b(i,j), l_2\cdot b(i,j))\cdot d\cdot\zeta$$

Définissons aussi la flèche l comme la composée :

$$\bullet \xrightarrow{\quad\check{d}\quad} \bullet \xrightarrow{p(g,h,l_1\cdot f(i,j), l_3\cdot s(i,j))} \bullet\ PF(g,h)$$

Et prouvons que ζ et l conviennent.

On a le 2-zigzag suivant :

$$f(g,h)\cdot l = f(g,h)\cdot p(g,h,l_1\cdot f(i,j),l_3\cdot s(i,j))\cdot \check{d}$$

$$\Longrightarrow l_1\cdot f(i,j)\cdot f(g\cdot l_1\cdot f(i,j),h\cdot l_3\cdot s(i,j))\cdot \check{d}$$

(en vertu de l'axiome (p_f))

$$\nwarrow\!\searrow\ l_1\cdot f(i,j)\cdot f(l_2\cdot b(i,j),l_2\cdot b(i,j))\cdot d\cdot \zeta$$

$$\Longrightarrow l_1\cdot f(i,j)\cdot \zeta$$

(en vertu de l'axiome (d_f) et car $d = d(l_2\cdot b(i,j))$).

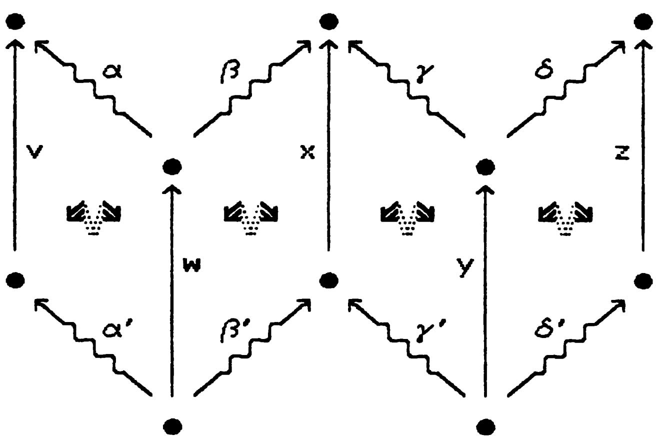
On prouve de même les deux autres propriétés.

Fin de la preuve.

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 2 (§2), i.e. que tout $\nwarrow\!\searrow$-zigzag peut se modifier en un $\nwarrow\!\searrow$-zigzag simple.

Preuve de la proposition 2 (§2).

Il est clair qu'il suffit de prouver le résultat pour les $\nwarrow\!\searrow$-zigzags constitués de deux branches. Soit donc un tel $\nwarrow\!\searrow$-zigzag :



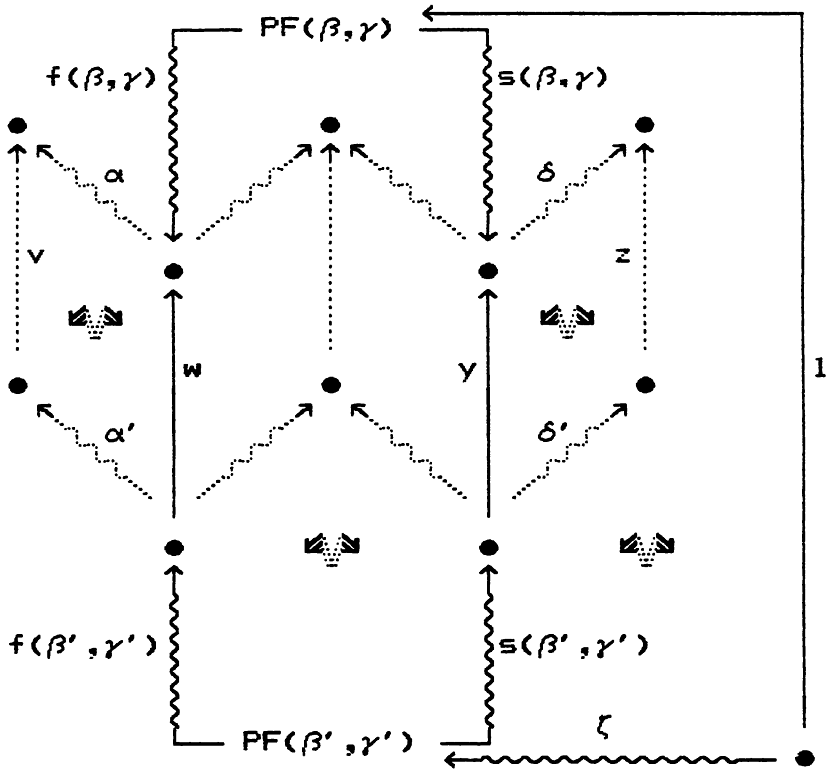
En appliquant le lemme 4 aux deux $\nwarrow\!\searrow$-carrés "internes", on obtient l'existence d'une flèche ζ élément de $\mathcal{R}$ et d'une flèche l telles que, notamment :

$$f(\beta,\gamma)\cdot l\ \nwarrow\!\searrow\ w\cdot f(\beta',\gamma')\cdot\zeta$$

et

$$s(\beta,\gamma)\cdot 1 \;\nwarrow\!\searrow\; y\cdot s(\beta',\gamma')\cdot\zeta \;,$$

comme représenté par le diagramme ci-dessous (obtenu grâce aux axiomes (h_f) et (h_s)) :



Définissons les flèches, éléments de $\mathcal{R}$, suivantes :

$$\varepsilon = \alpha\cdot f(\beta,\gamma) \quad \text{et} \quad \eta = \delta\cdot s(\beta,\gamma) \;,$$

$$\varepsilon' = \alpha'\cdot f(\beta',\gamma')\cdot\zeta \quad \text{et} \quad \eta' = \delta'\cdot s(\beta',\gamma')\cdot\zeta \;.$$

On a alors le 2-zigzag suivant :

$$\begin{aligned} \varepsilon\cdot 1 &= \alpha\cdot f(\beta,\gamma)\cdot 1 \\ &\nwarrow\!\searrow\; \alpha\cdot w\cdot f(\beta',\gamma')\cdot\zeta \\ &\nwarrow\!\searrow\; v\cdot\alpha'\cdot f(\beta',\gamma')\cdot\zeta \\ &= v\cdot\varepsilon' \;. \end{aligned}$$

Et on prouve de même que $\eta\cdot 1 \;\nwarrow\!\searrow\; z\cdot\eta'$.

On a donc modifié le $\nwarrow\!\searrow$-zigzag donné en un $\nwarrow\!\searrow$-zigzag simple :

$$\begin{tikzcd}
\bullet & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly, "\varepsilon"'] \arrow[ur, squiggly, "\eta"] & \\
\bullet \arrow[uu, "v"] & & \bullet \arrow[uu, "z"'] \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly, "\varepsilon'"'] \arrow[ur, squiggly, "\eta'"] \arrow[uu, "1"'] &
\end{tikzcd}$$

<u>Fin de la preuve.</u>

4. La catégorie des composantes connexes

Dans ce paragraphe 4, on montre que l'ensemble $\mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))/_{R_{fl}}$ des composantes connexes de flèches de $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$ est canoniquement muni d'une structure de catégorie $\underline{\mathrm{llcc}(\mathbb{G})}/_{R}$.

Cette structure *n'est pas* "convenablement" représentée par la composition (initiale) des flèches de $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$: si deux classes $\overline{y}$ et $\overline{x}$ sont composables, i.e. consécutives, alors les flèches y et x ne le sont généralement pas. En revanche, nous établissons - et c'est essentiel - que la catégorie $\underline{\mathrm{llcc}(\mathbb{G})}/_{R}$ *est complètement représentée par une nouvelle composition* $\widetilde{\mathrm{comp}}$ des flèches de $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$ qui élargit l'ancienne "à la connexité près" : si $\overline{y}$ et $\overline{x}$ sont composables, alors on sait que les domaine et codomaine de y et x sont connectés par un $\mathcal{R}$-zigzag (simple) :

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\alpha"'] \arrow[dr, squiggly, "\beta"] & & \\ \bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "y"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

et $\overline{y}\cdot\overline{x}$ sera la classe de $\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)$ (où la connexion (α,β) pourra être arbitrairement choisie).

Définissons tout d'abord cette loi $\widetilde{\mathrm{comp}}$.

<u>Définition 1 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\alpha"'] \arrow[dr, squiggly, "\beta"] & & \\ \bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "y"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

on pose :

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha) = y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha) \ ,$$

comme représenté ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r, "s(x{,}\alpha)"'] \arrow[drrr, "\widetilde{\mathrm{comp}}(y{,}x{,}\beta{,}\alpha)"] \arrow[dl, dotted, "f(x{,}\alpha)"'] & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\alpha"] \arrow[dr, squiggly, "\beta"] & & \\
\bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "y"'] \arrow[u, phantom, "="] & \bullet
\end{tikzcd}$$

(où "." désigne, bien entendu, la loi de composition initiale de llcc($\mathbb{G}$) *et où* $f(x,\alpha)$ *est élément de* $\mathcal{R}$ *en vertu de l'axiome* (h_f) *et car* α *est élément de* $\mathcal{R}$ *).*

Etablissons maintenant les premières propriétés relatives à la loi $\widetilde{\mathrm{comp}}$.

<u>Proposition 1 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\alpha"'] \arrow[dr, squiggly, "\beta"] & & \\
\bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "y"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

alors il existe des flèches $\check{y}$ *et* $\check{x}$ *telles que :*

$$\check{y}\ R_{fl}\ y \ , \quad \check{x}\ R_{fl}\ x$$

et

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha) = \check{y}\cdot\check{x} \ .$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$$\beta\cdot s(x,\alpha)\ R_{fl}\ s(x,\alpha)\ R_{fl}\ \alpha\cdot s(x,\alpha)\ R_{fl}\ x\cdot f(x,\alpha)\ R_{fl}\ x$$

(en vertu des axiomes (cône_1) et (cône_2)

et

car β , α et $f(x,\alpha)$ sont éléments de $\mathcal{R}$).
On obtient donc le résultat cherché en posant :

$$\check{y} = y \quad \text{et} \quad \check{x} = \beta \cdot s(x,\alpha) \ .$$

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Proposition 2 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet \arrow[r, "y"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

autrement dit, si l'on a :

$$\begin{tikzcd} & & & \bullet \arrow[dl, rightsquigarrow, "id"'] \arrow[dr, rightsquigarrow, "id"] & & & \\ \bullet \arrow[rr, "x"'] & & \bullet & & \bullet \arrow[rr, "y"'] & & \bullet \end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\widetilde{comp}(y,x,id,id) \ R_{fl} \ y \cdot x \ .$$

<u>Preuve.</u>
On a $s(x,id) \mathrel{\swarrow\!\searrow} x \cdot f(x,id)$ (en vertu des axiomes ($cône_1$) et ($cône_2$)), et donc :

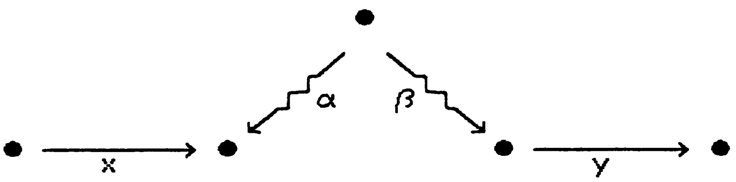
$$\begin{aligned} \widetilde{comp}(y,x,id,id) &= y \cdot s(x,id) \\ &\mathrel{\swarrow\!\searrow} y \cdot x \cdot f(x,id) \\ &R_{fl} \ y \cdot x \end{aligned}$$

(car $f(x,id) \in \mathcal{R}$).

<u>Fin de la preuve.</u>

Il est évident que :

<u>Proposition 3 :</u> *Si l'on a :*



alors on a :

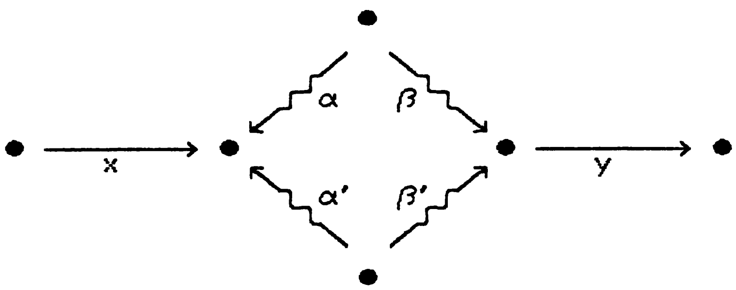
$$\mathrm{dom}(\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)) \; R_{ob} \; \mathrm{dom}(x)$$

et

$$\mathrm{codom}(\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)) = \mathrm{codom}(y) \; .$$

Montrons maintenant que la loi $\widetilde{\mathrm{comp}}$ est compatible avec les relations de connexion (entre objets et entre flèches). Pour ce faire, on commence par une succession de lemmes.

Lemme 1 : *Si l'on a :*

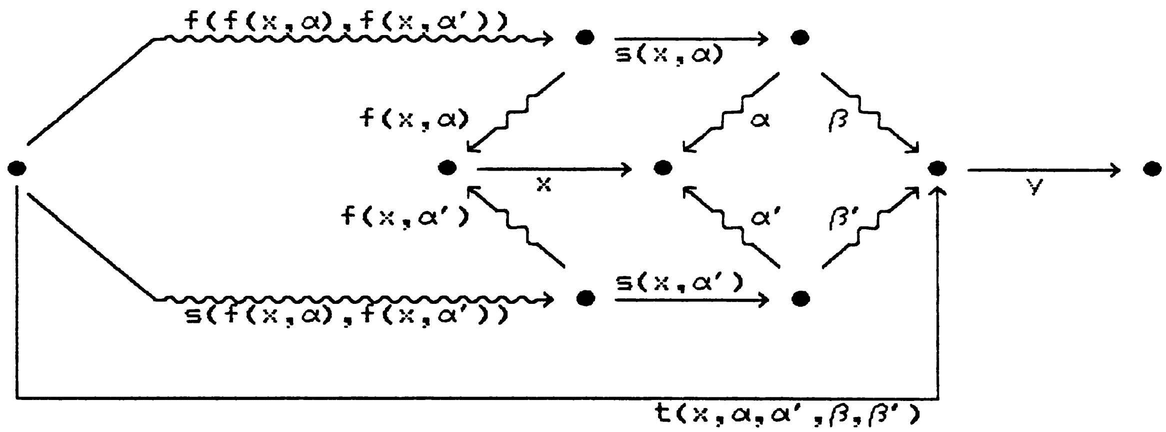


alors on a :

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha) \; R_{fl} \; \widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta',\alpha') \; .$$

Preuve.

En raison des axiomes (h_f) et (h_s), on a le diagramme ci-dessous :



On a alors :

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha) = y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha)$$

$$R_{fl}\ y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha)\cdot f(f(x,\alpha),f(x,\alpha'))$$

(car $f(f(x,\alpha),f(x,\alpha')) \in \mathcal{R}$)

$$\Longrightarrow y\cdot t(x,\alpha,\alpha',\beta,\beta')$$

(en vertu de l'axiome (t_1)).

On montre de même (grâce à l'axiome (t_2)) que :

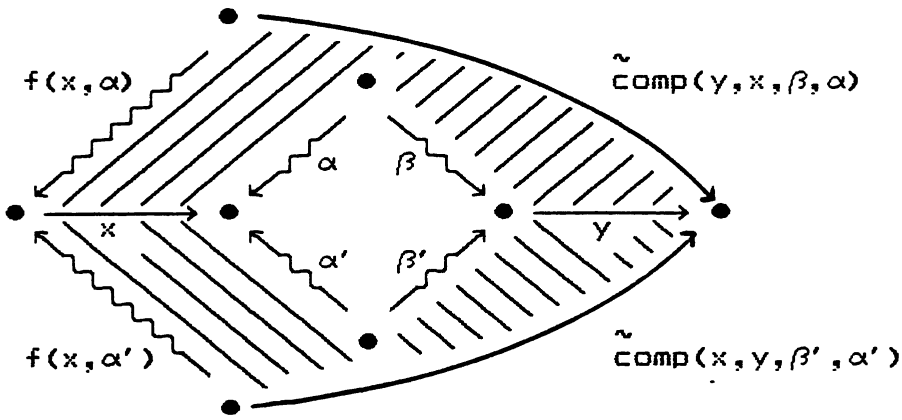
$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta',\alpha')\ R_{fl}\ y\cdot t(x,\alpha,\alpha',\beta,\beta') ,$$

ce qui achève la démonstration.

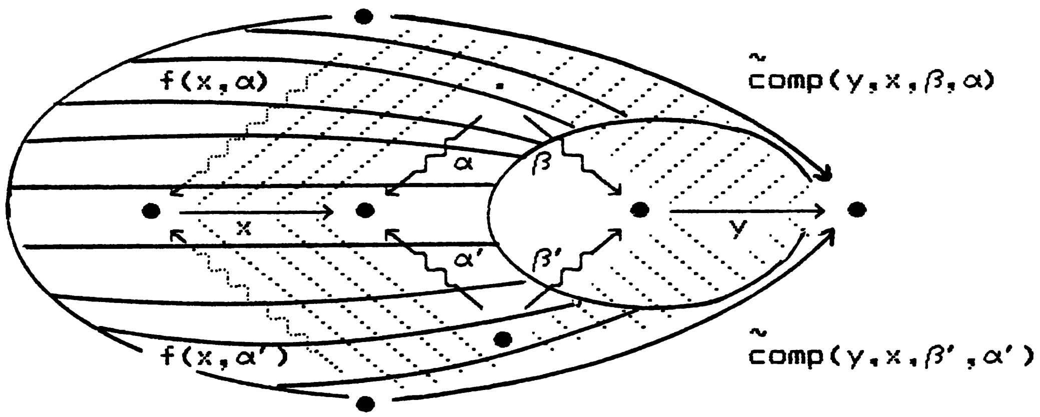
Fin de la preuve.

Ce lemme 1, qui est tout à fait essentiel, peut être qualifié de *lemme de contournement*.

Il exprime que, si, a priori, il n'est pas possible (en raison du "trou central") dans le dessin suivant :



de "glisser par connexité" directement de $\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)$ à $\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta',\alpha')$, en revanche on peut passer par un chemin détourné :



C'est l'existence même de la loi t (ainsi que les axiomes s'y rapportant) qui nous a permis de le faire.

<u>Lemme 2 :</u> *Si l'on a :*

$$\bullet \xrightarrow[w'']{} \bullet \underset{\gamma}{\rightsquigarrow} \bullet \xrightarrow[y]{} \bullet$$

autrement dit, si l'on a :

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, squiggly, "\gamma"] & & \\
\bullet \arrow[r, "w''"'] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "y"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,w'',\gamma,\mathrm{id})\ R_{fl}\ y\cdot\gamma\cdot w'' \ .$$

Preuve.

Elle est analogue à celle de la proposition 2.

Fin de la preuve.

Remarquons que la proposition 2, que nous avons jugé préférable de mettre en évidence plus haut, apparaît bien entendu comme un cas particulier du lemme 2 ci-dessus.

Lemme 3 : *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "w''"'] & \bullet \arrow[r, squiggly, bend left, "\gamma"] \arrow[r, squiggly, bend right, "\gamma'"'] & \bullet \arrow[r, "y"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$y\cdot\gamma\cdot w''\ R_{fl}\ y\cdot\gamma'\cdot w'' \ .$$

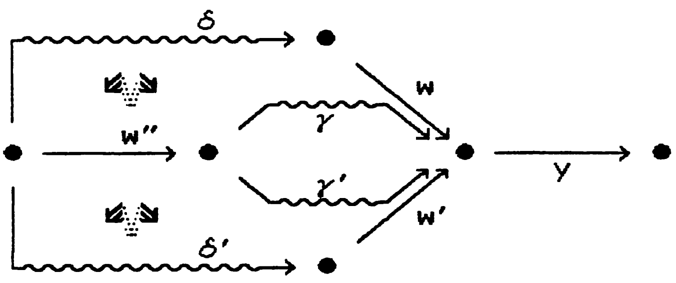
Preuve.

Le lemme 2 assure que $y\cdot\gamma\cdot w''\ R_{fl}\ \widetilde{\mathrm{comp}}(y,w'',\gamma,\mathrm{id})$ et, de même, que $y\cdot\gamma'\cdot w''\ R_{fl}\ \widetilde{\mathrm{comp}}(y,w'',\gamma',\mathrm{id})$.

Le lemme 1 permet alors de conclure.

Fin de la preuve.

Lemme 4 : *Si l'on a :*



et donc, si les flèches w *et* w' *ont même codomaine et vérifient* $w \; R_{fl} \; w'$ *, alors on a :*

$$y \cdot w \; R_{fl} \; y \cdot w' \; .$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$$y \cdot w \; R_{fl} \; y \cdot w \cdot \delta$$

$$(\text{car} \quad \delta \in \mathcal{R} \;)$$

$$\curlyvee \; y \cdot \gamma \cdot w''$$

$$(\text{car} \quad w \cdot \delta \; \curlyvee \; \gamma \cdot w'' \;)$$

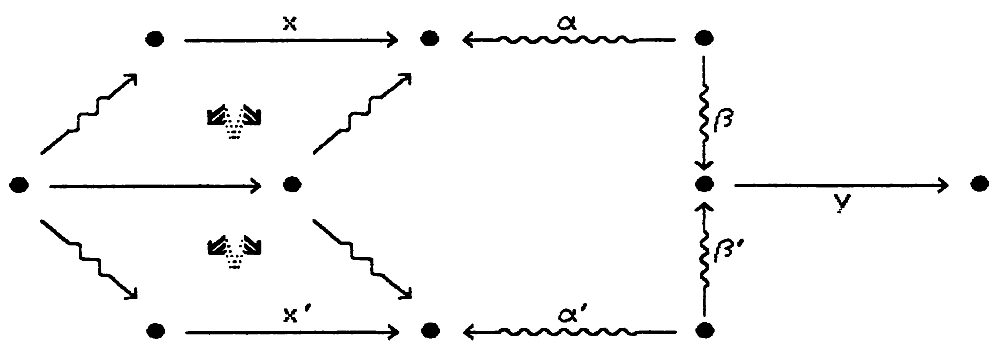
et de même :

$$y \cdot w' \; R_{fl} \; y \cdot \gamma' \cdot w'' \; .$$

Le lemme 3 permet alors de conclure.

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Lemme 5 :</u> *Si l'on a :*



et donc, en particulier, si l'on a $x \; R_{fl} \; x'$ *, alors on a :*

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)\ R_{fl}\ \widetilde{\mathrm{comp}}(y,x',\beta',\alpha')\ .$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$$\beta\cdot s(x,\alpha)\ R_{fl}\ s(x,\alpha)\ R_{fl}\ \alpha\cdot s(x,\alpha)\ R_{fl}\ x\cdot f(x,\alpha)\ R_{fl}\ x$$

(en vertu des axiomes (cône$_1$) et (cône$_2$)

et

car β , α et $f(x,\alpha)$ sont éléments de $\mathcal{R}$).

On a de même $\beta'\cdot s(x',\alpha')\ R_{fl}\ x'$.

Ainsi, les flèches $\beta\cdot s(x,\alpha)$ et $\beta'\cdot s(x',\alpha')$, qui ont même codomaine, vérifient $\beta\cdot s(x,\alpha)\ R_{fl}\ \beta'\cdot s(x',\alpha')$.

Le lemme 4, qui assure alors que :

$$y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha)\ R_{fl}\ y\cdot\beta'\cdot s(x',\alpha')\ ,$$

permet donc de conclure.

<u>Fin de la preuve.</u>

Nous avons travaillé "relativement à la composante "x" " (des flèches $\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)$). Travaillons maintenant "relativement à la composante "y" ". Il vient ainsi les lemmes 6 à 8 ci-dessous dont les énoncés et preuves pourront être comparés utilement à leurs analogues des lemmes 3 à 5.

<u>Lemme 6 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "w"'] & \bullet & \bullet \arrow[l, squiggly, bend right, "\delta"'] \arrow[l, squiggly, bend left, "\delta'"] \arrow[r, "z''"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

alors on a :

$$z''\cdot s(w,\delta)\ R_{fl}\ z''\cdot s(w,\delta')\ .$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$$z''\cdot s(w,\delta) = \widetilde{comp}(z'',w,id,\delta)$$

et de même :

$$z''\cdot s(w,\delta') = \widetilde{comp}(z'',w,id,\delta') \ .$$

Le lemme 1 permet alors de conclure.

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Lemme 7 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet & & \\
\bullet \arrow[r, "w"'] & \bullet \arrow[ur, "z"] \arrow[dr, "z'"'] & & \bullet \arrow[ll, squiggly, bend right, "\delta"'] \arrow[ll, squiggly, bend left, "\delta'"] \arrow[r, "z''"'] \arrow[ur, phantom, "\Leftrightarrow"] \arrow[dr, phantom, "\Leftrightarrow"] & \bullet \arrow[ull, squiggly, "\gamma"'] \arrow[dll, squiggly, "\gamma'"] \\
 & & \bullet & &
\end{tikzcd}$$

et donc, si les flèches z *et* z' *ont même domaine et vérifient* $z \ R_{fl} \ z'$ *, alors on a :*

$$z\cdot w \ R_{fl} \ z'\cdot w \ .$$

<u>Preuve.</u>

En vertu de la proposition 2 et du lemme 1, on a :

$$z\cdot w \ R_{fl} \ \widetilde{comp}(z,w,id,id) \quad R_{fl} \ \widetilde{comp}(z,w,\delta,\delta) \ .$$

Et donc :

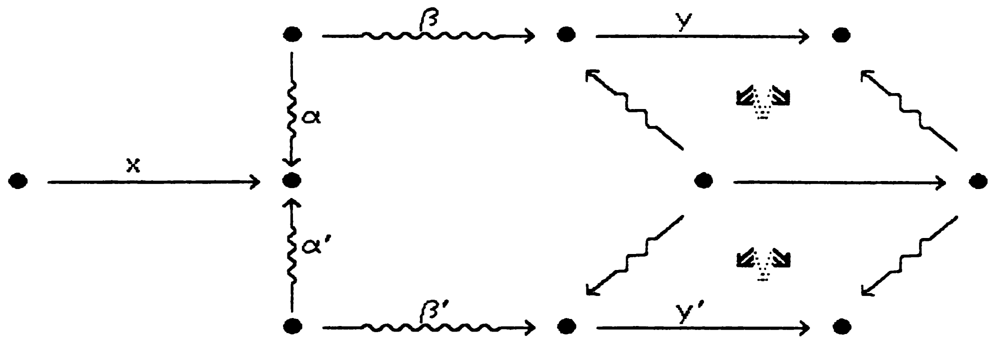
$$\begin{aligned} z\cdot w \ R_{fl} \ z\cdot\delta\cdot s(w,\delta) \quad &\Leftrightarrow \ \gamma\cdot z''\cdot s(w,\delta) \\ &R_{fl} \ z''\cdot s(w,\delta) \\ &(\text{car} \quad \gamma \in \mathcal{R} \ ). \end{aligned}$$

On a de même $z'\cdot w \ R_{fl} \ z''\cdot s(w,\delta')$.

Le lemme 6 permet alors de conclure.

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Lemme 8 :</u> *Si l'on a :*

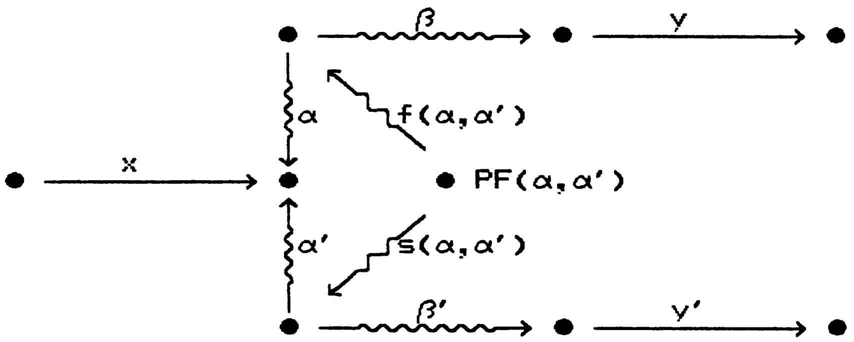


et donc, en particulier, si l'on a $y \ R_{fl} \ y'$, *alors on a :*

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha) \ R_{fl} \ \widetilde{\mathrm{comp}}(y',x,\beta',\alpha') \ .$$

<u>Preuve.</u>

En raison des axiomes (h_f) et (h_s), on a :



On a donc :

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha) \ R_{fl} \ \widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta\cdot f(\alpha,\alpha'),\alpha'\cdot s(\alpha,\alpha'))$$

(en vertu du lemme 1)

$$= (y\cdot\beta\cdot f(\alpha,\alpha'))\cdot s(x,\alpha'\cdot s(\alpha,\alpha')) \ .$$

De manière analogue, on a :

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y',x,\beta',\alpha') \ R_{fl} \ (y'\cdot\beta'\cdot s(\alpha,\alpha'))\cdot s(x,\alpha'\cdot s(\alpha,\alpha')) \ .$$

Le lemme 7 permet alors de conclure puisque les flèches $y\cdot\beta\cdot f(\alpha,\alpha')$ et $y'\cdot\beta'\cdot s(\alpha,\alpha')$ ont même domaine et vérifient :

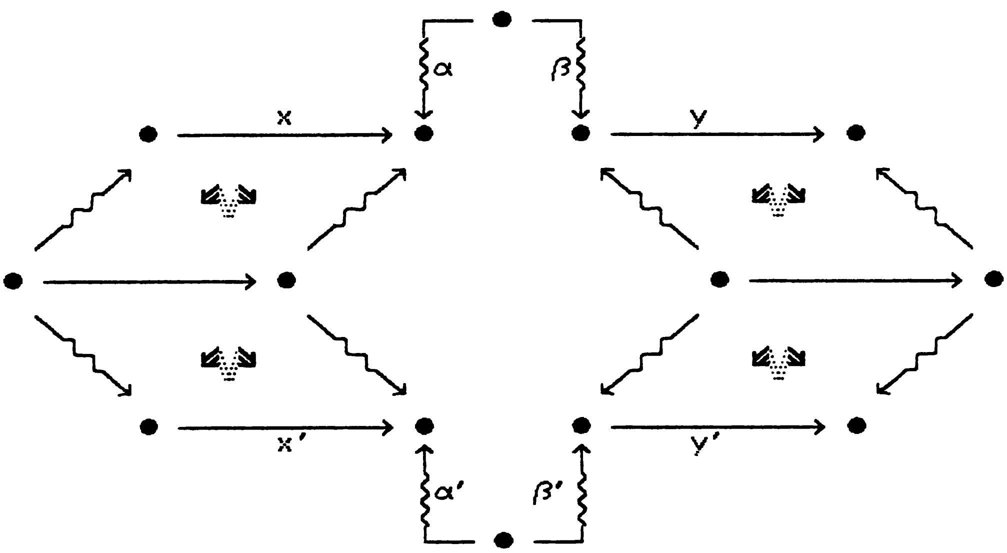
$$y\cdot\beta\cdot f(\alpha,\alpha') \ R_{fl} \ y \ R_{fl} \ y' \ R_{fl} \ y'\cdot\beta'\cdot s(\alpha,\alpha')$$

(en effet $\beta \cdot f(\alpha,\alpha')$, $\beta' \cdot s(\alpha,\alpha') \in \mathcal{R}$).

Fin de la preuve.

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la compatibilité de la loi $\widetilde{comp}$ avec les relations de connexion (entre objets et entre flèches).

Proposition 4 : *Si l'on a :*



autrement dit, si l'on a :

$$y \ R_{fl} \ y' \quad \textit{et} \quad x \ R_{fl} \ x' ,$$

$$dom(y) \ R_{ob} \ codom(x)$$

$$(\textit{et donc} \quad dom(y') \ R_{ob} \ codom(x')),$$

alors on a :

$$\widetilde{comp}(y,x,\beta,\alpha) \ R_{fl} \ \widetilde{comp}(y',x',\beta',\alpha') .$$

Preuve.

On a $dom(y) \ R_{ob} \ codom(x) \ R_{ob} \ codom(x')$.

Notons donc (γ,δ) une connexion quelconque entre $codom(x')$ et $dom(y)$.

On a alors :

$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)\ R_{fl}\ \widetilde{\mathrm{comp}}(y,x',\delta,\gamma)$$

(en vertu du lemme 5, puisque $x\ R_{fl}\ x'$)

$$R_{fl}\ \widetilde{\mathrm{comp}}(y',x',\beta',\alpha')$$

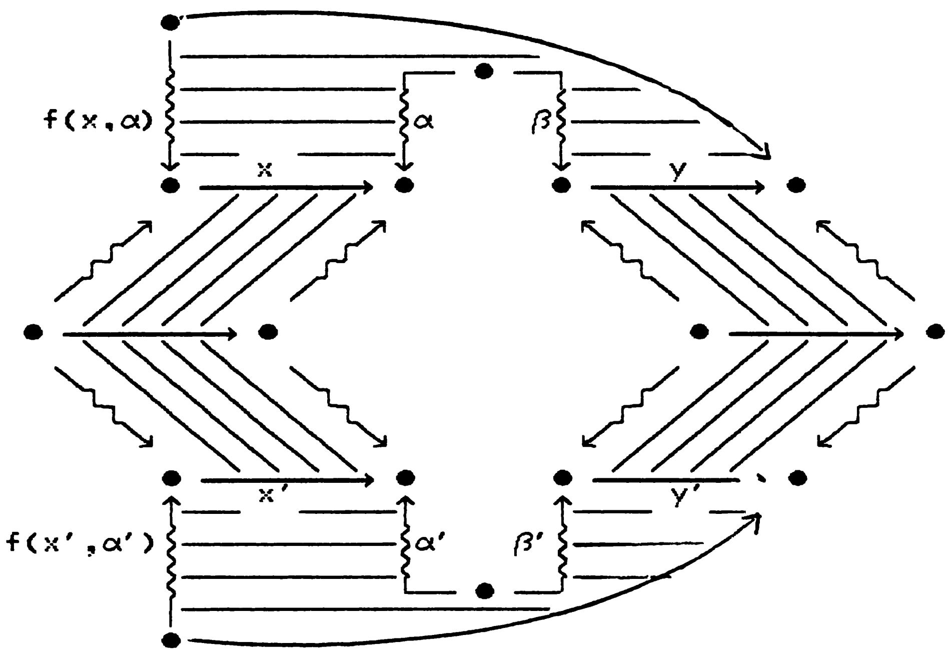
(en vertu du lemme 8, puisque $y\ R_{fl}\ y'$).

<u>Fin de la preuve.</u>

Cette proposition 4, qui est tout à fait essentielle, peut être qualifiée de *proposition de contournement* (tout comme le lemme 1, dont elle découle d'ailleurs en partie).

Elle exprime que, si, a priori, il n'est pas possible (notamment en raison du "trou central") dans le dessin suivant :

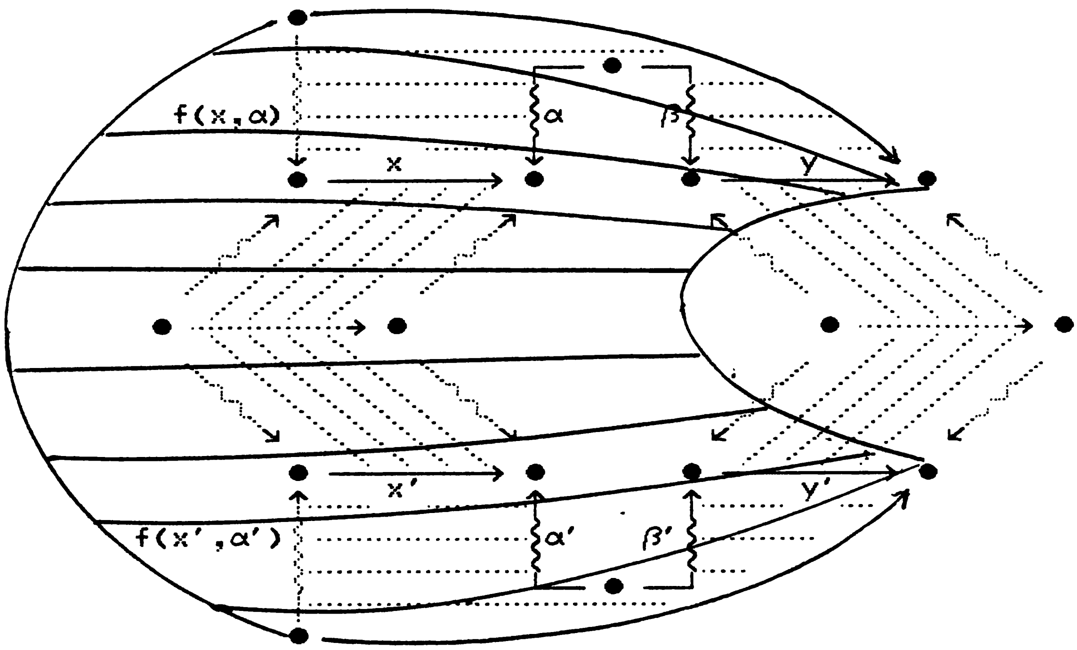
$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)$$



$$\widetilde{\mathrm{comp}}(y',x',\beta',\alpha')$$

de "glisser par connexité" directement de $\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x.\beta,\alpha)$ à $\widetilde{\mathrm{comp}}(y',x',\beta',\alpha')$, en revanche on peut passer par un chemin détourné :

$\widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\beta,\alpha)$



$\widetilde{\mathrm{comp}}(y',x',\beta',\alpha')$

C'est l'existence même de la loi t qui permettait de le faire dans le lemme 1, et donc ici.

<u>Proposition 5 :</u> *La loi "." de composition est compatible avec la relation* R_{fl} .

<u>Preuve.</u>

Soient y , x consécutives et y' , x' consécutives i.e. telles que :

$$\bullet \xrightarrow[x]{} \bullet \xrightarrow[y]{} \bullet \quad \text{et} \quad \bullet \xrightarrow[x']{} \bullet \xrightarrow[y']{} \bullet$$

et vérifiant en outre $x \; R_{fl} \; x'$ et $y \; R_{fl} \; y'$.

On a alors :

$$y \cdot x \; R_{fl} \; \widetilde{\mathrm{comp}}(y,x,\mathrm{id},\mathrm{id})$$

(en vertu de la proposition 2)

$$R_{fl} \; \widetilde{\mathrm{comp}}(y',x',\mathrm{id},\mathrm{id})$$

(en vertu de la proposition 4)

$$R_{fl} \; y' \cdot x'$$

(en vertu de la proposition 2).

Fin de la preuve.

Par souci d'homogénéiser les notations, nous posons maintenant :

- *si* $x \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *:*

$$\widetilde{\mathrm{dom}}(x) = \mathrm{dom}(x) \quad \textit{et} \quad \widetilde{\mathrm{codom}}(x) = \mathrm{codom}(x) \; ,$$

- *si* $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *:*

$$\widetilde{\mathrm{id}}(A) = \mathrm{id}(A) \; .$$

Il est clair qu'on a alors les propositions ci-dessous.

Proposition 6 : *Si* $x \; , \; x' \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *sont telles que* $x \; R_{fl} \; x'$, *alors on a :*

$$\widetilde{\mathrm{dom}}(x) \; R_{ob} \; \widetilde{\mathrm{dom}}(x') \quad \textit{et} \quad \widetilde{\mathrm{codom}}(x) \; R_{ob} \; \widetilde{\mathrm{codom}}(x') \; .$$

Autrement dit, les lois $\widetilde{\mathrm{dom}} = \mathrm{dom}$ *et* $\widetilde{\mathrm{codom}} = \mathrm{codom}$ *sont compatibles avec le couple de relations* $R = (R_{ob}, R_{fl})$.

Proposition 7 : *La loi* $\widetilde{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$ *est compatible avec le couple de relations* $R = (R_{ob}, R_{fl})$.

Proposition 8 : *Si* $A \in Ob(llcc(\mathbb{G}))$, *alors on a :*

$$\widetilde{dom}(\widetilde{id}(A)) = A \quad et \quad \widetilde{codom}(\widetilde{id}(A)) = A \; .$$

En raison des propositions 2, 4, 5, 6 et 7, nous savons maintenant que le point (i) du théorème (§2) est vrai : les lois comp , dom , codom et id (sur $llcc(\mathbb{G})$) sont compatibles avec le couple de relations $R = (R_{ob}, R_{fl})$, et passent donc au quotient; et nous savons qu'en outre les lois au quotient sont représentées (par les lois $\widetilde{comp}$, $\widetilde{dom}$, $\widetilde{codom}$ et $\widetilde{id}$ sur $llcc(\mathbb{G})$).

En posant :

$$\mathbb{C}_{ob} = Ob(llcc(\mathbb{G}))\big/_{R_{ob}}$$

et

$$\mathbb{C}_{fl} = Fl(llcc(\mathbb{G}))\big/_{R_{fl}} \; ,$$

nous pouvons donc légitimement poser la définition ci-dessous et affirmer alors la proposition qui la suit.

Définition 2 : *Si* $\bar{x} \in \mathbb{C}_{fl}$, *alors on pose (et cela a bien un sens) :*

$$\overline{dom}(\bar{x}) = \overline{\widetilde{dom}(x)} \quad et \quad \overline{codom}(\bar{x}) = \overline{\widetilde{codom}(x)} \; .$$

Si $\bar{A} \in \mathbb{C}_{ob}$, *alors on pose (et cela a bien un sens) :*

$$\overline{id}(\bar{A}) = \overline{\widetilde{id}(A)} \; .$$

Si $\bar{y}$, $\bar{x} \in \mathbb{C}_{fl}$ *sont consécutives i.e. telles que :*

$$\overline{dom}(\bar{y}) = \overline{codom}(\bar{x}) \; ,$$

alors on pose (et cela a bien un sens) :

$$\overline{comp}(\bar{y},\bar{x}) = \overline{\widetilde{comp}(y,x,\beta,\alpha)} \; ,$$

où (α,β) *est une connexion (arbitrairement choisie) entre les objets* codom(x) *et* dom(y) . *Dorénavant, par abus de langage, nous noterons aussi :*

$$\overline{\text{comp}}(\overline{y},\overline{x}) = \overline{y}\cdot\overline{x} .$$

<u>Proposition 9 :</u> *Si* $x \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$, *alors on a :*

$$\overline{\text{dom}}(\overline{x}) = \overline{\text{dom}(x)} \quad \textit{et} \quad \overline{\text{codom}}(\overline{x}) = \overline{\text{codom}(x)} .$$

Si $A \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$,*alors on a :*

$$\overline{\text{id}}(\overline{A}) = \overline{\text{id}(A)} .$$

Si y , $x \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *sont consécutives i.e. telles que :*

$$\text{dom}(y) = \text{codom}(x) ,$$

alors on a :

$$\overline{y}\cdot\overline{x} = \overline{y\cdot x} .$$

Les propositions 3 et 8 assurent alors que :

<u>Proposition 10 :</u> *Si* $\overline{A} \in \mathbb{C}_{ob}$, *alors on a :*

$$\overline{\text{dom}}(\overline{\text{id}}(\overline{A})) = \overline{A} \quad \textit{et} \quad \overline{\text{codom}}(\overline{\text{id}}(\overline{A})) = \overline{A} .$$

Si $\overline{y}$, $\overline{x} \in \mathbb{C}_{fl}$ *sont consécutives i.e. telles que :*

$$\overline{\text{dom}}(\overline{y}) = \overline{\text{codom}}(\overline{x}) ,$$

alors on a :

$$\overline{\text{dom}}(\overline{\text{comp}}(\overline{y},\overline{x})) = \overline{\text{dom}}(\overline{x}) \quad \textit{et} \quad \overline{\text{codom}}(\overline{\text{comp}}(\overline{y},\overline{x})) = \overline{\text{codom}}(\overline{y}) .$$

D'autre part, montrons que :

<u>Proposition 11 :</u> *Si* $\overline{x} \in \mathbb{C}_{fl}$, *si* $\overline{\text{codom}}(\overline{x}) = \overline{A}$ *et si* $\overline{\text{dom}}(\overline{x}) = \overline{B}$, *alors on a :*

$$\overline{\text{id}}(\overline{A})\cdot\overline{x} = \overline{x} \quad \textit{et} \quad \overline{x}\cdot\overline{\text{id}}(\overline{B}) = \overline{x} .$$

<u>Preuve.</u>

Par hypothèse, on a :

$$x : B' \longrightarrow A' \quad \text{avec} \quad \overline{B'} = \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A'} = \overline{A} .$$

On a donc :

$$\overline{\text{id}}(\overline{A})\cdot\overline{x} = \overline{\text{id}}(\overline{A'})\cdot\overline{x} = \overline{\text{id}(A')}\cdot\overline{x} = \overline{\text{id}(A')\cdot x} = \overline{x}$$

(en vertu de la proposition 9).
La seconde égalité se prouve de manière analogue.
<u>Fin de la preuve.</u>

Enfin, il reste à établir que :

<u>Proposition 12 :</u> *Si* $\overline{z}$, $\overline{y}$, $\overline{x} \in \mathbb{C}_{fl}$ *sont consécutives i.e. telles que :*

$$\overline{\mathrm{dom}}(\overline{z}) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{y}) \quad et \quad \overline{\mathrm{dom}}(\overline{y}) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{x}) ,$$

alors on a :

$$\overline{z}\cdot(\overline{y}\cdot\overline{x}) = (\overline{z}\cdot\overline{y})\cdot\overline{x} .$$

<u>Preuve.</u>
Soient α , β , γ et δ telles que :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "y"] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "z"] & \bullet \\
 & & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & & & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\gamma"] \arrow[ur, squiggly, "\delta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Par définition, on a :

$$\overline{z}\cdot(\overline{y}\cdot\overline{x}) = \overline{z}\cdot\overline{(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha))} = \overline{z\cdot\delta\cdot s(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha),\gamma)} ,$$

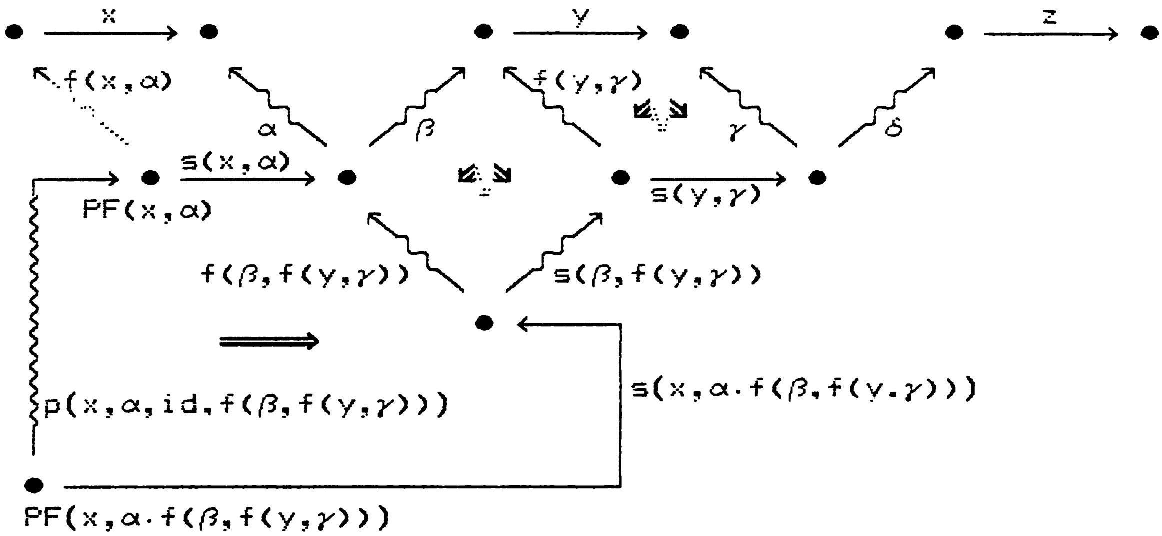
comme représenté dans le diagramme ci-dessous (obtenu grâce aux axiomes (h_f), (cône_1) et (cône_2)) :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "y"] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "z"] & \bullet \\
 & \bullet \arrow[ul, dotted, "f(x,\alpha)"] \arrow[r, "s(x,\alpha)"] & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & & & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\gamma"] \arrow[ur, squiggly, "\delta"'] & & \\
 & & \bullet \arrow[ul, squiggly, "f(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha),\gamma)"'] \arrow[urrr, "s(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha),\gamma)"'] & & & & &
\end{tikzcd}$$

Et, par définition aussi, on a :

$$(\overline{z}\cdot\overline{y})\cdot\overline{x} = \overline{z\cdot\delta\cdot s(y,\gamma)}\cdot\overline{x}$$
$$= \overline{z\cdot\delta\cdot s(y,\gamma)\cdot s(\beta,f(y,\gamma))\cdot s(x,\alpha\cdot f(\beta,f(y,\gamma)))}\ ,$$

comme représenté dans le diagramme ci-dessous (obtenu grâce aux axiomes (h_f), (h_s), (cône_1), (cône_2), (p_s) et $(p_{\mathcal{R}})$) :



En raison du lemme 4, il suffit de prouver que, en posant :

$$v = s(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha),\gamma)$$

et

$$w = s(y,\gamma)\cdot s(\beta,f(y,\gamma))\cdot s(x,\alpha\cdot f(\beta,f(y,\gamma)))\ ,$$

on a :

$$v\ R_{fl}\ w\ .$$

Dans ce qui suit, on utilise les propriétés mises en évidence dans les deux diagrammes ci-dessus.

On a d'une part :

$$v\ R_{fl}\ \gamma\cdot v$$
$$(\text{car}\quad \gamma\in\mathcal{R}\ )$$
$$= \gamma\cdot s(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha),\gamma)$$
$$\swarrow\searrow\ y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha)\cdot f(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha),\gamma)$$
$$R_{fl}\ y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha)$$
$$(\text{car}\quad f(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha),\gamma)\in\mathcal{R}\ ).$$

Et on a d'autre part :

$$
\begin{aligned}
& w \; R_{fl} \; \gamma \cdot w \\
& (\text{car} \quad \gamma \in \mathcal{R} \;) \\
& \quad = \gamma \cdot s(y,\gamma) \cdot s(\beta, f(y,\gamma)) \cdot s(x, \alpha \cdot f(\beta, f(y,\gamma))) \\
& \quad \Swarrow\!\Searrow \; y \cdot f(y,\gamma) \cdot s(\beta, f(y,\gamma)) \cdot s(x, \alpha \cdot f(\beta, f(y,\gamma))) \\
& \quad \Swarrow\!\Searrow \; y \cdot \beta \cdot f(\beta, f(y,\gamma)) \cdot s(x, \alpha \cdot f(\beta, f(y,\gamma))) \\
& \quad \Longleftarrow \; y \cdot \beta \cdot s(x,\alpha) \cdot p(x, \alpha, id, f(\beta, f(y,\gamma))) \\
& \quad R_{fl} \; y \cdot \beta \cdot s(x,\alpha) \\
& (\text{car} \quad p(x,\alpha,id,f(\beta,f(y,\gamma))) \in \mathcal{R} \;).
\end{aligned}
$$

On obtient ainsi le résultat recherché :

$$v \; R_{fl} \; w \;,$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Fin de la preuve.</u>

On conclut de la définition 2 et des propositions 10, 11 et 12 que les lois $\overline{comp}$, $\overline{dom}$, $\overline{codom}$ et $\overline{id}$ définissent bien une structure de catégorie $\mathbb{C}$ telle que :

$$Ob(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_{ob}$$

et

$$Fl(\mathbb{C}) = \mathbb{C}_{fl} \;.$$

Par construction et, notamment, en raison des propositions 1 et 9, il est clair que $\mathbb{C}$ est la catégorie quotient de la catégorie $\underline{llcc(\mathbb{G})}$ (sous jacente à $llcc(\mathbb{G})$) par le couple de relations $R = (R_{ob}, R_{fl})$ de connexité; aussi on écrira :

$$\mathbb{C} = \underline{llcc(\mathbb{G})} / R$$

et on qualifiera $\mathbb{C}$ de *catégorie des composantes connexes* de $llcc(\mathbb{G})$.

Enfin, le foncteur "composantes connexes" :

$$\underline{cano(\mathbb{G})} : \underline{llcc(\mathbb{G})} \longrightarrow \underline{llcc(\mathbb{G})} / R = \mathbb{C}$$

vérifie évidemment, par construction même de $\mathbb{C}$, les points (iv), (v), (vi) et (vii) du théorème (§2); de plus, la proposition 1 assure (justement parce que la loi $\overline{comp}$

est représentée par la loi $\widetilde{comp}$) qu'il vérifie aussi le point (viii) de ce théorème (et qu'en particulier $\underline{cano(\mathbb{G})}$ est bien le foncteur "passage au quotient").
Nous verrons, bien entendu, dans le paragraphe 6 que ce foncteur $\underline{cano(\mathbb{G})}$ est sous-jacent à la flèche canonique d'adjonction $cano(\mathbb{G})$ du théorème.

5. La catégorie des composantes connexes est une LCC

Dans ce paragraphe 5, on montre que la catégorie $\mathbb{C} = \underline{llcc(\mathbb{G})}/_R$ des composantes connexes de $llcc(\mathbb{G})$, définie dans le paragraphe 4 qui précède, est canoniquement munie d'une structure de LCC notée $llcc(\mathbb{G})/_R$ (pour cela, on prouvera que c'est une LLCC rigide i.e. qu'elle est munie des lois et axiomes de la proposition 2 (§ 1)).
Cette structure de LCC *n'est pas* convenablement représentée a priori par les lois structurelles, PF, f, s, b, p (, d, cte et *un*), de $llcc(\mathbb{G})$. Cependant, nous établissons – et c'est essentiel – qu'elle *est complètement représentée par de nouvelles lois* (sur $llcc(\mathbb{G})$), $\widetilde{PF}$, $\tilde{f}$, $\tilde{s}$, $\tilde{b}$, $\tilde{p}$ (, $\tilde{d}$, $\widetilde{cte}$ et $\widetilde{un}$), qui élargissent les anciennes "à la connexité près" (tout comme la loi $\widetilde{comp}$ élargissait "à la connexité près", au §4, la composition comp des flèches de $llcc(\mathbb{G})$).

5.1. Les lois $\widetilde{PF}$, $\tilde{f}$, $\tilde{s}$ et $\tilde{b}$

Définissons tout d'abord ces lois (ainsi que d'autres, aussi "naturelles", dont on verra l'utilité plus loin).

<u>Définition 1</u> : Si l'on a :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] \\
& & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

on pose successivement :

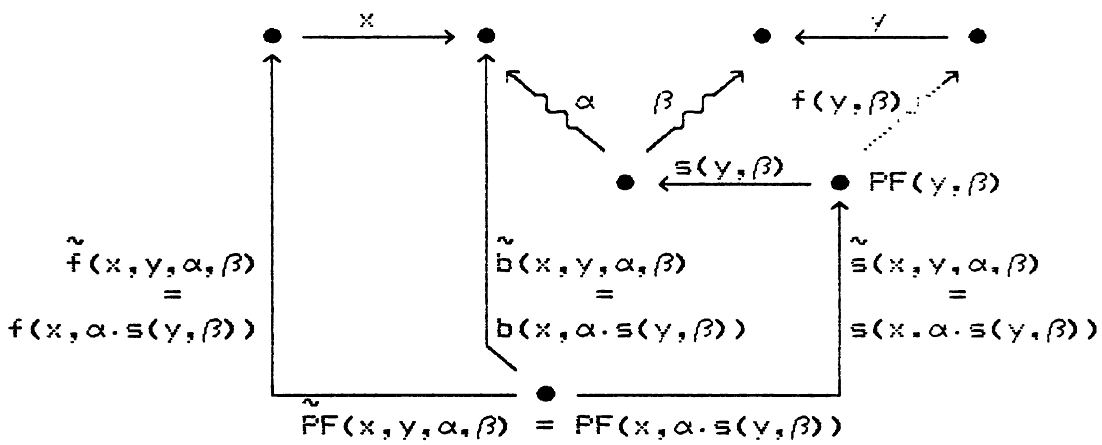
– $\widetilde{PF}(x,y,\alpha,\beta) = PF(x,\alpha\cdot s(y,\beta))$,

$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) = f(x,\alpha\cdot s(y.\beta)) \ .$$

$$\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta) = s(x,\alpha\cdot s(y,\beta)) \ ,$$

$$\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta) = b(x,\alpha\cdot s(y,\beta)) \ ,$$

comme représenté ci-dessous :



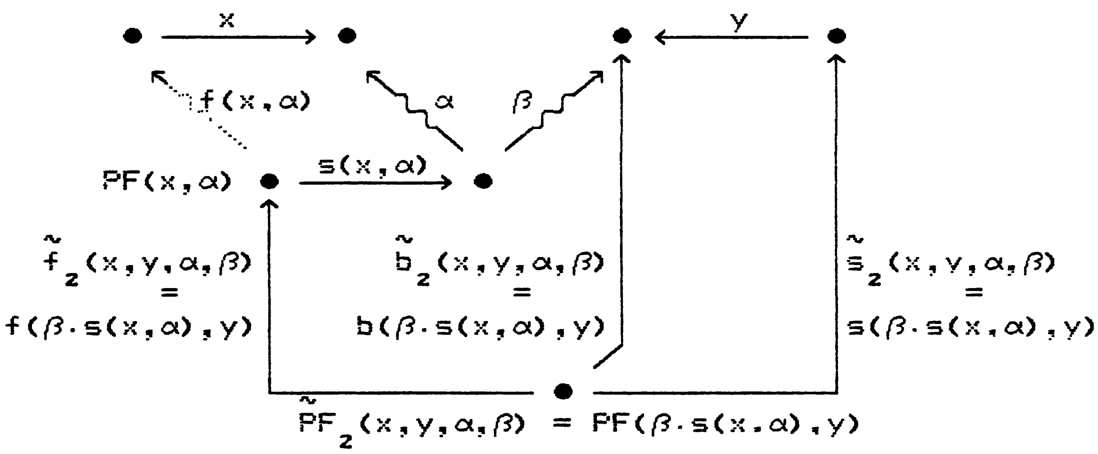
– $\tilde{PF}_2(x,y,\alpha,\beta) = PF(\beta\cdot s(x,\alpha),y)$,

$$\tilde{f}_2(x,y,\alpha,\beta) = f(\beta\cdot s(x,\alpha),y) \ ,$$

$$\tilde{s}_2(x,y,\alpha,\beta) = s(\beta\cdot s(x,\alpha),y) \ ,$$

$$\tilde{b}_2(x,y,\alpha,\beta) = b(\beta\cdot s(x,\alpha),y) \ ,$$

comme représenté ci-dessous :



– $\widetilde{PF}_3(x,y,\alpha,\beta) = PF(s(x,\alpha),s(y,\beta))$,

$\tilde{f}_3(x,y,\alpha,\beta) = f(s(x.\alpha),s(y,\beta))$,

$\tilde{s}_3(x,y,\alpha,\beta) = s(s(x,\alpha),s(y,\beta))$,

$\tilde{b}_3(x,y,\alpha,\beta) = b(s(x,\alpha),s(y,\beta))$,

comme représenté ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] \\
& PF(x,\alpha)\ \bullet \arrow[ul, dotted, "f(x,\alpha)"] \arrow[r, "s(x,\alpha)"] & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"'] \arrow[ur, squiggly, "\beta"] & \bullet\ PF(y,\beta) \arrow[l, "s(y,\beta)"'] \arrow[ur, dotted, "f(y,\beta)"'] & \\
& & \bullet \arrow[ul, "{\tilde{f}_3(x,y,\alpha,\beta) = f(s(x,\alpha),s(y,\beta))}"] \arrow[u, "{\tilde{b}_3(x,y,\alpha,\beta) = b(s(x,\alpha),s(y,\beta))}"] \arrow[ur, "{\tilde{s}_3(x,y,\alpha,\beta) = s(s(x,\alpha),s(y,\beta))}"'] & &
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{PF}_3(x,y,\alpha,\beta) = PF(s(x,\alpha).s(y,\beta))$

(Remarquons que $f(x,\alpha)$ et $f(y,\beta)$ appartiennent à $\mathcal{R}$ en vertu de l'axiome (h_f) et car α et β y appartiennent).

Par souci d'homogénéiser les notations, nous noterons aussi :

$$\widetilde{PF}(x,y,\alpha,\beta) = \widetilde{PF}_1(x,y,\alpha,\beta) ,$$
$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) = \tilde{f}_1(x,y,\alpha,\beta) ,$$
$$\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta) = \tilde{s}_1(x,y,\alpha,\beta) .$$
$$\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta) = \tilde{b}_1(x,y,\alpha,\beta) .$$

Etablissons tout d'abord deux lemmes utiles pour la suite.

<u>Lemme 1 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, squiggly, "\lambda_1"'] & \bullet \arrow[r, "e_1"'] & \bullet & \bullet \arrow[l, "e_2"] & \bullet \arrow[l, squiggly, "\lambda_2"] \end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\begin{aligned} PF(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \quad & R_{ob} \quad PF(e_1, e_2) \ , \\ f(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \quad & R_{fl} \quad f(e_1, e_2) \ , \\ s(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \quad & R_{fl} \quad s(e_1. e_2) \ , \\ b(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \quad & R_{fl} \quad b(e_1, e_2) \ . \end{aligned}$$

<u>Preuve.</u>

Posons $L = dom(\lambda_1)$ et $X = dom(e_1) = codom(\lambda_1)$.

On a alors le diagramme ci-dessous (obtenu grâce aux axiomes $(p_{\mathcal{R}})$ et (p_f)) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large] PF(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \ \bullet \arrow[r, "f(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2)"'] \arrow[d, squiggly, "p(e_1, e_2, \lambda_1, \lambda_2)"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \bullet \ L \arrow[d, squiggly, "\lambda_1"] \\ PF(e_1, e_2) \ \bullet \arrow[r, "f(e_1, e_2)"] & \bullet \ X \end{tikzcd}$$

On en déduit que :

$$PF(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \quad R_{ob} \quad PF(e_1, e_2)$$

et

$$f(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \quad R_{fl} \quad f(e_1, e_2) \ .$$

On prouve de manière analogue les deux autres propriétés.

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Lemme 2 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] \bullet \arrow[r, bend left, "e'_1"] \arrow[r, bend right, "e''_1"'] & \bullet & \bullet \arrow[l, bend right, "e'_2"'] \arrow[l, bend left, "e''_2"] \end{tikzcd}$$

alors on a :

$$
\begin{aligned}
PF(e'_1,e'_2) &\ R_{ob}\ PF(e''_1,e''_2) \ , \\
f(e'_1,e'_2) &\ R_{fl}\ f(e''_1,e''_2) \ , \\
s(e'_1,e'_2) &\ R_{fl}\ s(e''_1,e''_2) \ , \\
b(e'_1,e'_2) &\ R_{fl}\ b(e''_1,e''_2) \ .
\end{aligned}
$$

<u>Preuve.</u>

Il suffit d'établir les résultats dans le cas de 2-zigzags simples, i.e. dans la situation suivante :

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, bend left=60, "e'_1"] \arrow[r, "e_1"] \arrow[r, bend right=60, "e''_1"'] \arrow[r, phantom, shift left=4, "\Uparrow"] \arrow[r, phantom, shift right=4, "\Downarrow"] & C \arrow[r, "e_2"] & B \arrow[l, bend right=60, "e'_2"'] \arrow[l, bend left=60, "e''_2"] \arrow[l, phantom, shift right=4, "\Uparrow"] \arrow[l, phantom, shift left=4, "\Downarrow"]
\end{tikzcd}
$$

(en effet, l'axiome $(\Longrightarrow,=)$ assure qu'on peut toujours ramener deux $\Swarrow\Searrow$-zigzags de longueurs différentes à des $\Swarrow\Searrow$-zigzags de longueurs égales).

On a alors le diagramme ci-dessous (obtenu grâce à l'axiome $((\rho_{fl})_f)$:

$$
\begin{tikzcd}
PF(e'_1,e'_2) \arrow[r, "f(e'_1,e'_2)"'] & A \\
PF(e_1,e_2) \arrow[u, squiggly, "\rho_{fl}(e_1,e'_1,e_2,e'_2)"] \arrow[d, squiggly, "\rho_{fl}(e_1,e''_1,e_2,e''_2)"'] \arrow[r, "f(e_1,e_2)"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & A \arrow[u, squiggly, "id"'] \arrow[d, squiggly, "id"] \\
PF(e''_1,e''_2) \arrow[r, "f(e''_1,e''_2)"'] & A
\end{tikzcd}
$$

On en déduit que :

$$PF(e'_1,e'_2)\ R_{ob}\ PF(e''_1,e''_2)$$

et que :

$$f(e'_1,e'_2)\ R_{fl}\ f(e''_1,e''_2)\ .$$

On prouve de manière analogue les deux autres propriétés.

<u>Fin de la preuve.</u>

Etablissons maintenant les premières propriétés relatives aux lois introduites dans la définition 1 ci-dessus.

<u>Lemme 3 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] \\
& & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\begin{array}{ccccc}
\tilde{PF}(x,y,\alpha,\beta) & R_{ob} & \tilde{PF}_2(x,y,\alpha,\beta) & R_{ob} & \tilde{PF}_3(x,y,\alpha,\beta)\ , \\
\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) & R_{fl} & \tilde{f}_2(x,y,\alpha,\beta) & R_{fl} & \tilde{f}_3(x,y,\alpha,\beta)\ , \\
\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta) & R_{fl} & \tilde{s}_2(x,y,\alpha,\beta) & R_{fl} & \tilde{s}_3(x,y,\alpha,\beta)\ , \\
\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta) & R_{fl} & \tilde{b}_2(x,y,\alpha,\beta) & R_{fl} & \tilde{b}_3(x,y,\alpha,\beta)\ .
\end{array}$$

<u>Preuve.</u>

On a le diagramme ci-dessous (obtenu grâce à l'axiome $((\rho_q)_f)$) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
{\tilde{PF}_3(x,y,\alpha,\beta) = PF(s(x,\alpha),s(y,\beta))} \arrow[r, "{\tilde{f}_3(x,y,\alpha,\beta) = f(s(x,\alpha),s(y,\beta))}"] \arrow[d, squiggly, "{\rho_q(\alpha,s(x,\alpha),s(y,\beta))}"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & {PF(x,\alpha)} \arrow[d, squiggly, "id"] \\
{PF(\alpha\cdot s(x,\alpha),\alpha\cdot s(y,\beta))} \arrow[r, "{f(\alpha\cdot s(x,\alpha),\alpha\cdot s(y,\beta))}"'] & {PF(x,\alpha)}
\end{tikzcd}$$

On en tire que $\tilde{f}_3(x,y,\alpha,\beta)$ R_{fl} $f(\alpha\cdot s(x,\alpha),\alpha\cdot s(y,\beta))$.
Or on a :

$$f(\alpha\cdot s(x,\alpha),\alpha\cdot s(y,\beta))\ R_{fl}\ f(x\cdot f(x,\alpha),\alpha\cdot s(y,\beta))$$

(en vertu du lemme 2 et des axiomes (cône$_1$) et (cône$_2$))

$$R_{fl}\ f(x,\alpha\cdot s(y,\beta))$$

(en vertu du lemme 1 et car $f(x,\alpha) \in \mathcal{R}$) .

On obtient ainsi que :

$$\tilde{f}_3(x,y,\alpha,\beta)\ R_{fl}\ \tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) \ .$$

D'autre part, le raisonnement est "symétrique" pour établir que :

$$\tilde{f}_3(x,y,\alpha,\beta)\ R_{fl}\ \tilde{f}_2(x,y,\alpha,\beta) \ .$$

On a ainsi établi la deuxième propriété recherchée et on prouve de manière analogue les deux dernières. Quant à la première, elle découle alors de la proposition 6 du paragraphe 4.
<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Proposition 1 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] \\
& & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

alors il existe des flèches $\check{x}$ *et* $\check{y}$ *telles que :*

$$\check{x}\ R_{fl}\ x \quad , \quad \check{y}\ R_{fl}\ y$$

et

$$\tilde{PF}(x,y,\alpha,\beta) = PF(\check{x},\check{y}) \ ,$$
$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) = f(\check{x},\check{y}) \ ,$$
$$\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta) = s(\check{x},\check{y}) \ ,$$
$$\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta) = b(\check{x},\check{y}) \ .$$

<u>Preuve.</u>

Le résultat est évident puisque :

$$\alpha\cdot s(v,\beta)\ R_{fl}\ s(y,\beta)\ R_{fl}\ \beta\cdot s(y,\beta)\ R_{fl}\ v\cdot f(y.\beta)\ R_{fl}\ v$$

(en vertu des axiomes (cône$_1$) et (cône$_2$) et car α, β et $f(y,\beta)$ sont éléments de $\mathcal{R}$).

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Proposition 2 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] \end{tikzcd}$$

autrement dit, si l'on a :

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "v"'] \\ & & \bullet \arrow[ul, squiggly, "id"] \arrow[ur, squiggly, "id"'] & & \end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\tilde{PF}(x,y,id,id)\ R_{ob}\ PF(x.y)\ ,$$

$$\tilde{f}(x,y,id.id)\ R_{fl}\ f(x,y)\ ,$$

$$\tilde{s}(x,y,id,id)\ R_{fl}\ s(x,y)\ ,$$

$$\tilde{b}(x,y,id,id)\ R_{fl}\ b(x,v)\ .$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$$\tilde{f}(x,y,id,id) = f(x,s(y,id))$$

$$R_{fl}\ f(x,y\cdot f(y,id))$$

(en vertu du lemme 2 et des axiomes (cône$_1$) et (cône$_2$))

$$R_{fl}\ f(x,y)$$

(en vertu du lemme 1 et car $f(y,id) \in \mathcal{R}$).

On obtient ainsi que :

$$\tilde{f}(x,y,id,id)\ R_{fl}\ f(x,y)\ .$$

On prouve de manière analogue les deux dernières propriétés. Quant à la première. elle découle alors de la proposition 6 du paragraphe 4.

<u>Fin de la preuve.</u>

Il est évident que :

<u>Proposition 3 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] \\
& & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\mathrm{dom}(\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta)) = \mathrm{dom}(\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta)) = \mathrm{dom}(\tilde{b}(x,y,\alpha.\beta))$$
$$= \widetilde{PF}(x,y,\alpha,\beta)$$

et

$$\mathrm{codom}(\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta)) = \mathrm{dom}(x) \quad ,$$
$$\mathrm{codom}(\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta)) \ R_{ob} \ \mathrm{dom}(v) \quad ,$$
$$\mathrm{codom}(\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta)) = \mathrm{codom}(x) \ R_{ob} \ \mathrm{codom}(y) \quad .$$

Montrons maintenant que les lois $\widetilde{PF}$, $\tilde{f}$, $\tilde{s}$ et $\tilde{b}$ sont compatibles avec les relations de connexion (entre objets et entre flèches). Pour ce faire, on commence par une succession de lemmes.

<u>Lemme 4 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\alpha"'] \arrow[dr, squiggly, "\beta"] & & \\
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] \\
& & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha'"] \arrow[ur, squiggly, "\beta'"'] & &
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\widetilde{PF}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{ob} \; \widetilde{PF}(x,y,\alpha',\beta') \;,$$
$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{fl} \; \tilde{f}(x,y,\alpha',\beta') \;,$$
$$\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{fl} \; \tilde{s}(x,y,\alpha',\beta') \;,$$
$$\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{fl} \; \tilde{b}(x,y,\alpha',\beta') \;.$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) = f(x,\alpha\cdot s(y,\beta))$$
$$R_{fl} \; f(x,\alpha\cdot s(y,\beta)\cdot f(f(y,\beta),f(y,\beta')))$$

(en vertu du lemme 1 et car $f(f(y,\beta),f(y,\beta')) \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl} \; f(x,t(y,\beta,\beta',\alpha,\alpha'))$$

(en vertu du lemme 2 et de l'axiome (t_1)).

On montre de même (grâce à l'axiome (t_2)) que :

$$\tilde{f}(x,y,\alpha',\beta') \; R_{fl} \; f(x,t(y,\beta,\beta',\alpha,\alpha')) \;.$$

On obtient ainsi que :

$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{fl} \; \tilde{f}(x,y,\alpha',\beta') \;.$$

On prouve de manière analogue les deux dernières propriétés. Quant à la première, elle découle alors de la proposition 6 du paragraphe 4.

<u>Fin de la preuve.</u>

Ce lemme 4, qui est tout à fait essentiel, peut être qualifié de *lemme de contournement*, au même titre que nous avions qualifié aussi de lemme de contournement le lemme 1 du paragraphe 4 et de proposition de contournement la proposition 4 de ce même paragraphe 4. On remarquera que. ici aussi, c'est l'existence de la loi t qui nous a permis d'établir ce lemme de contournement.

<u>Lemme 5 :</u> *Si l'on a :*

$$\bullet \xrightarrow{x} \bullet \xleftarrow{\gamma} \bullet \xleftarrow{z''} \bullet$$

autrement dit, si l'on a :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "z''"'] \\
& & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\gamma"] \arrow[ur, squiggly, "id"'] & &
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\tilde{PF}(x,z'',\gamma,id) \;\; R_{ob} \;\; PF(x,\gamma\cdot z'') \;,$$
$$\tilde{f}(x,z'',\gamma,id) \;\; R_{fl} \;\; f(x,\gamma\cdot z'') \;,$$
$$\tilde{s}(x,z'',\gamma,id) \;\; R_{fl} \;\; s(x,\gamma\cdot z'') \;,$$
$$\tilde{b}(x,z'',\gamma,id) \;\; R_{fl} \;\; b(x,\gamma\cdot z'') \;.$$

<u>Preuve.</u>
Elle est analogue à celle de la proposition 2.
<u>Fin de la preuve.</u>

Remarquons que la proposition 2, que nous avons jugé préférable de mettre en évidence plus haut, apparaît bien entendu comme un cas particulier du lemme 5 ci-dessus.

<u>Lemme 6 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & \bullet \arrow[l, squiggly, bend right, "\gamma"'] \arrow[l, squiggly, bend left, "\gamma'"] & \bullet \arrow[l, "z''"'] \end{tikzcd}$$

alors on a :

$$PF(x,\gamma\cdot z'')\ R_{ob}\ PF(x,\gamma'\cdot z'')\ ,$$
$$f(x,\gamma\cdot z'')\ R_{fl}\ f(x,\gamma'\cdot z'')\ ,$$
$$s(x,\gamma\cdot z'')\ R_{fl}\ s(x,\gamma'\cdot z'')\ ,$$
$$b(x,\gamma\cdot z'')\ R_{fl}\ b(x,\gamma'\cdot z'')\ .$$

Preuve.

Le lemme 5 assure que $PF(x,\gamma\cdot z'')\ R_{ob}\ \widetilde{PF}(x,z'',\gamma,id)$ et, de même, que $PF(x,\gamma'\cdot z'')\ R_{ob}\ \widetilde{PF}(x,z'',\gamma',id)$.

Le lemme 4 permet alors de conclure que :

$$PF(x,\gamma\cdot z'')\ R_{ob}\ PF(x,\gamma'\cdot z'')\ .$$

On prouve de manière analogue les trois autres propriétés.

Fin de la preuve.

Lemme 7 : *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \arrow[dl, "z"'] & & \\ \bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet & & \bullet \arrow[ll, squiggly, bend right, "\gamma"'] \arrow[ll, squiggly, bend left, "\gamma'"] & \bullet \arrow[l, "z''"] \arrow[ull, squiggly, "\delta"'] \arrow[dll, squiggly, "\delta'"] \\ & & \bullet \arrow[ul, "z'"] & & \end{tikzcd}$$

et donc, si les flèches z *et* z' *ont même codomaine et vérifient* $z\ R_{fl}\ z'$ *, alors on a :*

$$PF(x,z)\ R_{ob}\ PF(x,z')\ ,$$
$$f(x,z)\ R_{fl}\ f(x,z')\ ,$$
$$s(x,z)\ R_{fl}\ s(x,z')\ ,$$
$$b(x,z)\ R_{fl}\ b(x,z')\ .$$

Preuve.

On a :

$$f(x,z)\ R_{fl}\ f(x,z\cdot\delta)$$

(en vertu du lemme 1 et car $\delta \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl}\ f(x,\gamma\cdot z'')$$

(en vertu du lemme 2 et car $z\cdot\delta \swarrow\searrow \gamma\cdot z''$).

On a de même $f(x,z')\ R_{fl}\ f(x,\gamma'\cdot z'')$.

Le lemme 6 permet alors de conclure que :

$$f(x,z)\ R_{fl}\ f(x,z') \ .$$

On prouve de manière analogue les deux dernières propriétés. Quant à la première, elle découle alors de la proposition 6 du paragraphe 4.

Fin de la preuve.

Lemme 8 : *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r, squiggly, "\beta"] \arrow[d, squiggly, "\alpha"] & \bullet \arrow[dr, phantom, "\swarrow\searrow"] & \bullet \arrow[l, "y"'] \\
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & \bullet \arrow[u, squiggly] \arrow[d, squiggly] \arrow[dr, phantom, "\swarrow\searrow"] & \bullet \arrow[l] \arrow[u, squiggly] \arrow[d, squiggly] \\
 & \bullet \arrow[r, squiggly, "\beta'"'] \arrow[u, squiggly, "\alpha'"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "y'"]
\end{tikzcd}$$

et donc, en particulier, si l'on a $y\ R_{fl}\ y'$, *alors on a :*

$$\tilde{PF}(x,y.\alpha,\beta)\ R_{ob}\ \tilde{PF}(x,y'.\alpha',\beta') \ ,$$

$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta)\ R_{fl}\ \tilde{f}(x,y',\alpha',\beta') \ ,$$

$$\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta)\ R_{fl}\ \tilde{s}(x,y',\alpha'.\beta') \ ,$$

$$\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta)\ R_{fl}\ \tilde{b}(x,y',\alpha'.\beta') \ .$$

Preuve.

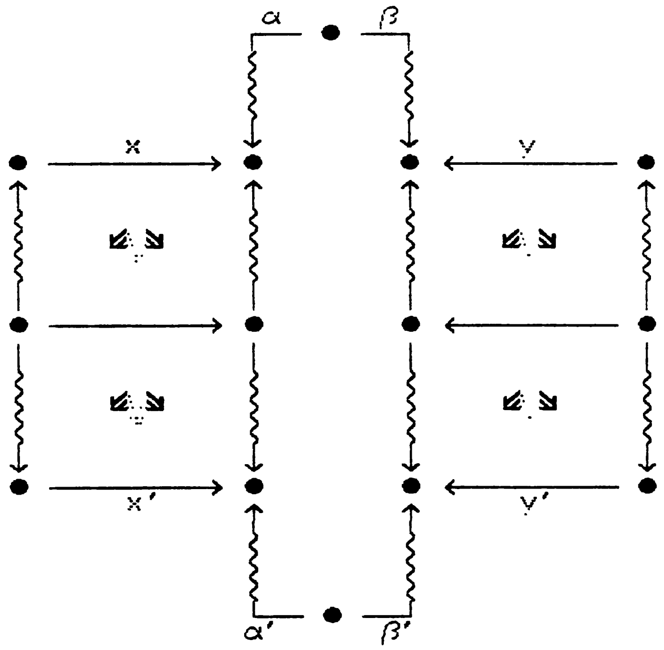
Posons $z = \alpha \cdot s(y,\beta)$ et $z' = \alpha' \cdot s(y',\beta')$.
Ces flèches, qui ont le même codomaine, vérifient en outre $z \; R_{fl} \; z'$ puisque (comme déjà vu plusieurs fois) :

$$\alpha \cdot s(y,\beta) \; R_{fl} \; y \quad \text{et} \quad \alpha' \cdot s(y',\beta') \; R_{fl} \; y' .$$

Le lemme 7 permet donc de conclure.
<u>Fin de la preuve.</u>

Nous avons travaillé "relativement à la composante "x" " (des objets $\tilde{PF}(x,y,\alpha,\beta)$ comme des flèches $\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta)$, $\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta)$ et $\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta)$) . Plutôt que de travailler maintenant "symétriquement", i.e. "relativement à la composante "y" " , nous remarquons que les lois $\tilde{PF}_2$, $\tilde{f}_2$, $\tilde{s}_2$ et $\tilde{b}_2$ (voir la définition 1) sont les "symétriques" des lois $\tilde{PF} = \tilde{PF}_1$, $\tilde{f} = \tilde{f}_1$, $\tilde{s} = \tilde{s}_1$ et $\tilde{b} = \tilde{b}_1$ respectivement (et que la donnée des lois et axiomes de la structure de LLCC présente "le même type de symétrie"). Le lemme 3 nous permet donc d'affirmer que les "symétriques" des lemmes 4 à 8 sont vrais, et notamment celui du lemme 8. En rassemblant ce résultat avec celui du lemme 8 lui-même, nous obtenons alors la proposition qui suit.

<u>Proposition 4 :</u> *Si l'on a :*



autrement dit, si l'on a :

$$x \; R_{fl} \; x' \quad \textit{et} \quad y \; R_{fl} \; y' \; ,$$

$$\mathrm{codom}(x) \; R_{ob} \; \mathrm{codom}(y)$$

$$\textit{(et donc} \quad \mathrm{codom}(x') \; R_{ob} \; \mathrm{codom}(y') \; \textit{)},$$

alors on a :

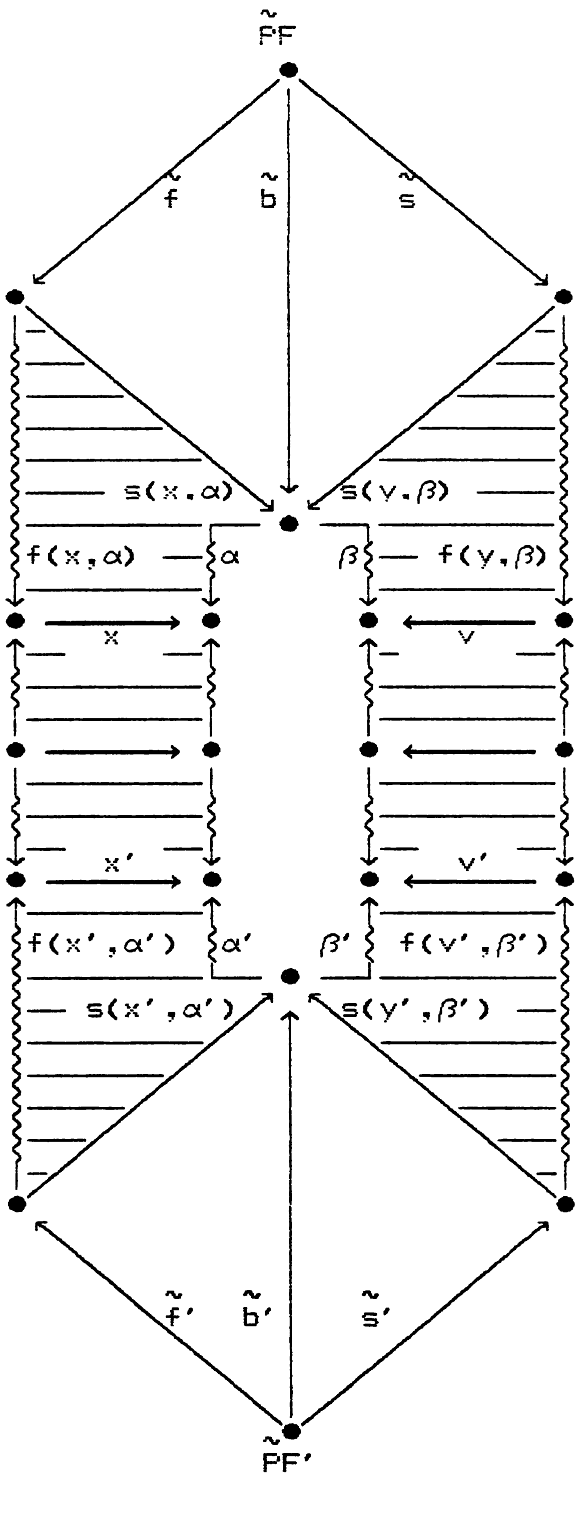
$$\widetilde{PF}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{ob} \; \widetilde{PF}(x',y',\alpha',\beta') \; ,$$

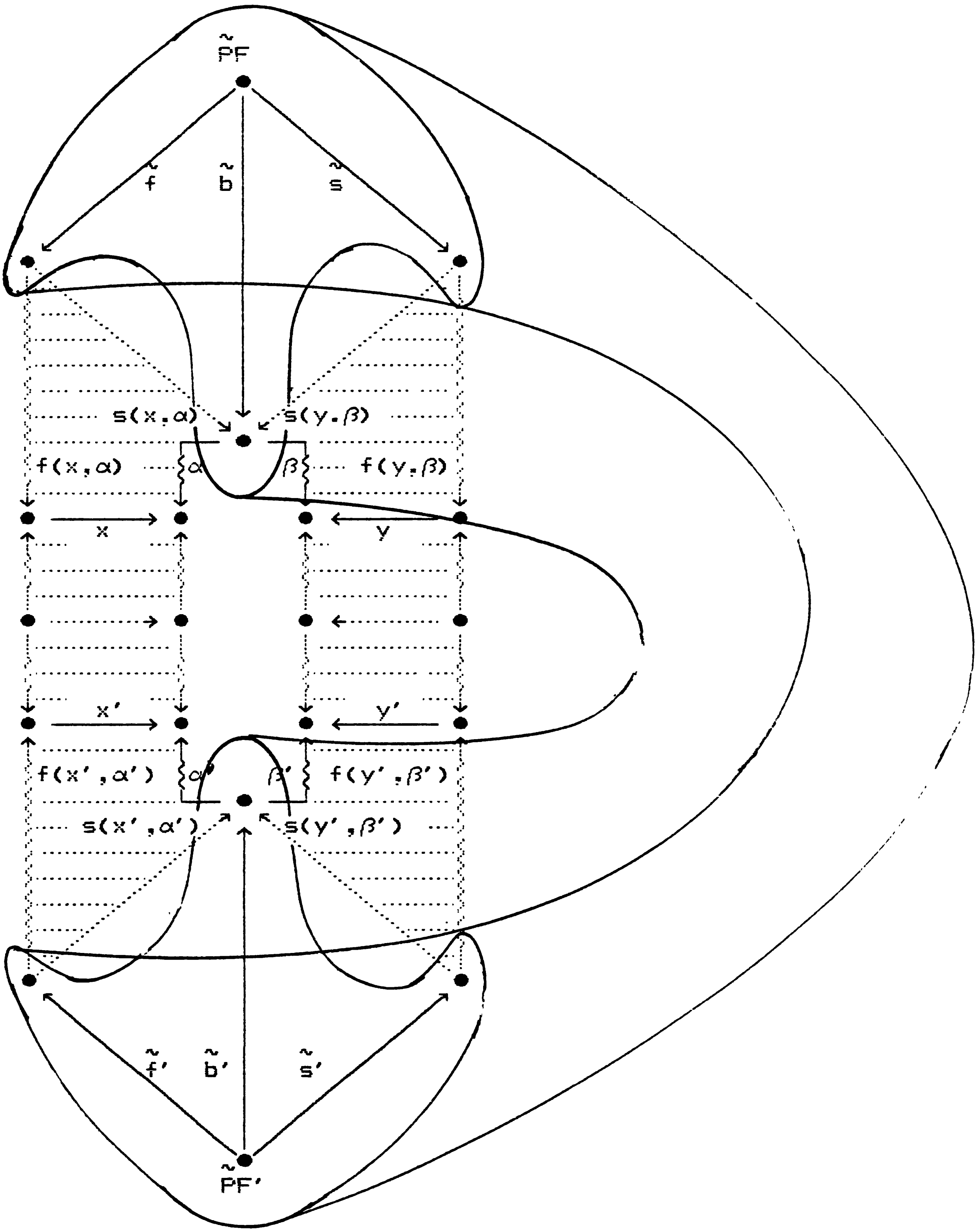
$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{fl} \; \tilde{f}(x',y',\alpha',\beta') \; ,$$

$$\tilde{s}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{fl} \; \tilde{s}(x',y',\alpha',\beta') \; ,$$

$$\tilde{b}(x,y,\alpha,\beta) \; R_{fl} \; \tilde{b}(x',y',\alpha',\beta') \; .$$

Cette proposition 4, qui est tout à fait essentielle, peut être qualifiée, comme précédemment, de *proposition de contournement*. Cette proposition exprime que, si, a priori, il n'est pas possible (notamment en raison du "trou central") de faire directement "glisser par connexité" le lax-produit fibré $\widetilde{PF}(x,y,\alpha,\beta)$ (et ses lax-projections) vers le lax-produit fibré $\tilde{F}F(\gamma', \gamma'.\alpha'.\beta')$ (et ses lax-projections) dans le premier dessin qui suit, il est cependant possible de le faire par un chemin détourné comme le suggère le deuxième dessin qui suit :


$\tilde{P}F$
$\tilde{f}$
$\tilde{b}$
$\tilde{s}$
s(x,α)
s(y,β)
f(x,α)
α
β
f(y,β)
x
y
x'
y'
f(x',α')
α'
β'
f(y',β')
s(x',α')
s(y',β')
$\tilde{f}'$
$\tilde{b}'$
$\tilde{s}'$
$\tilde{P}F'$



$\tilde{P}F$
$\tilde{f}$
$\tilde{b}$
$\tilde{s}$
s(x,α)
s(y,β)
f(x,α)
α
β
f(y,β)
x
y
x'
y'
f(x',α')
α'
β'
f(y',β')
s(x',α')
s(y',β')
$\tilde{f}'$
$\tilde{b}'$
$\tilde{s}'$
$\tilde{P}F'$

Nous terminons maintenant l'étude des lois $\tilde{PF}$, $\tilde{f}$, $\tilde{s}$ et $\tilde{b}$ par la proposition ci-dessous qui concerne leurs "restrictions" respectives, PF , f , s et b .

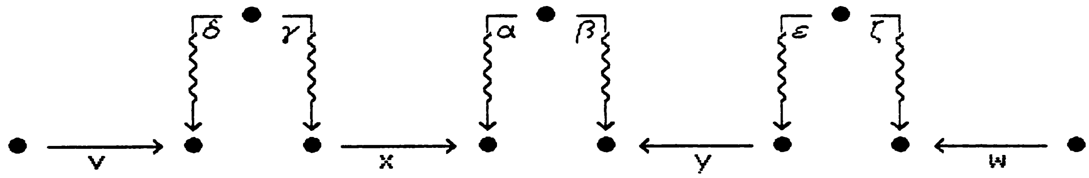
Proposition 5 : *La loi* PF *est compatible avec le couple de relations* $R = (R_{ob}, R_{fl})$. *Les lois* f , s *et* b *sont compatibles avec la relation* R_{fl} .

Preuve.
Cette proposition se déduit des propositions 2 et 4, exactement comme la proposition 5 du paragraphe 4 se déduisait des propositions 2 et 4 (§4).
Fin de la preuve.

5.2. La loi $\tilde{\circ}$

Définissons d'abord cette loi (ainsi que deux autres, aussi "naturelles", dont on verra l'utilité plus loin).

<u>Définition 2 :</u> Si l'on a :

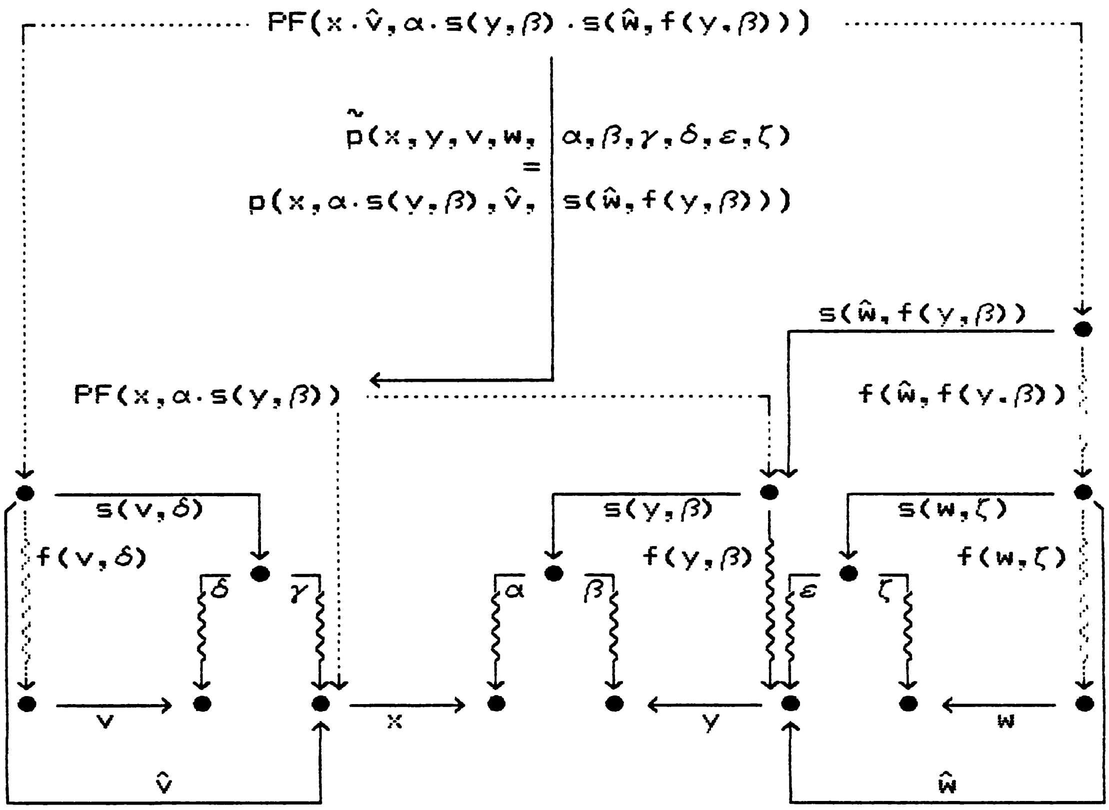


on pose successivement :

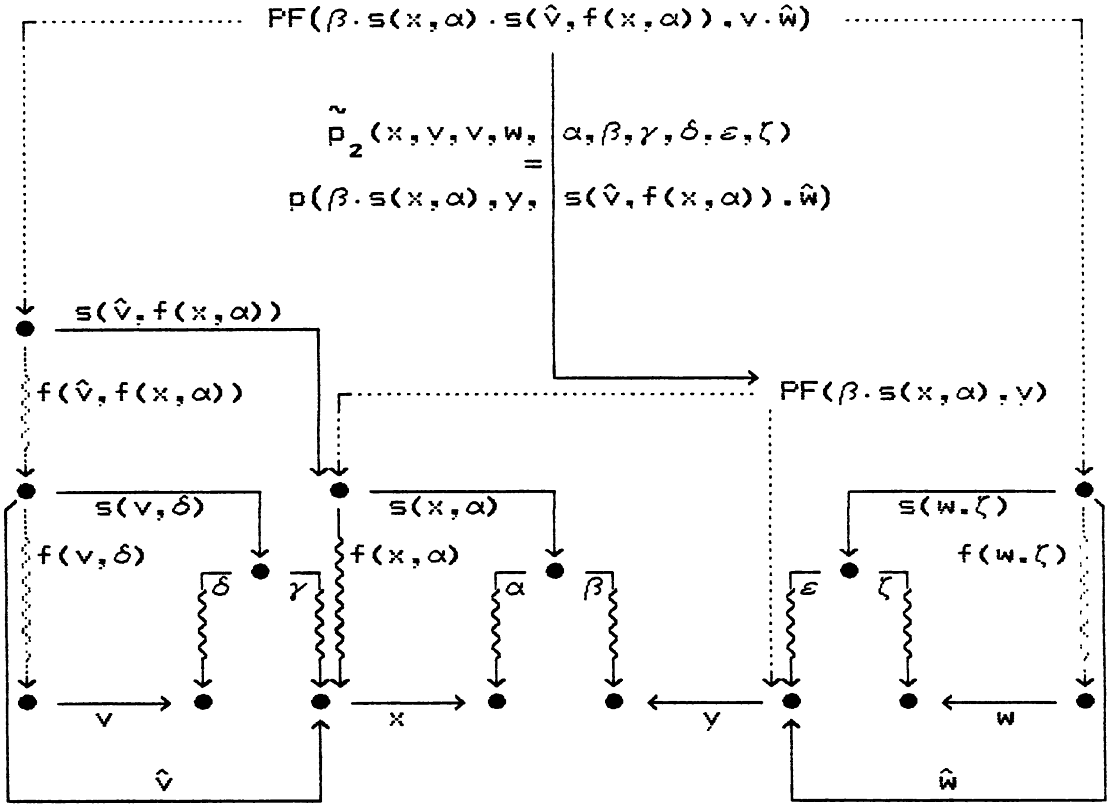
– $\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) = p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},s(\hat{w},f(y,\beta)))$

(où on a posé $\hat{v} = \gamma\cdot s(v,\delta)$ et $\hat{w} = \varepsilon\cdot s(w,\zeta)$),

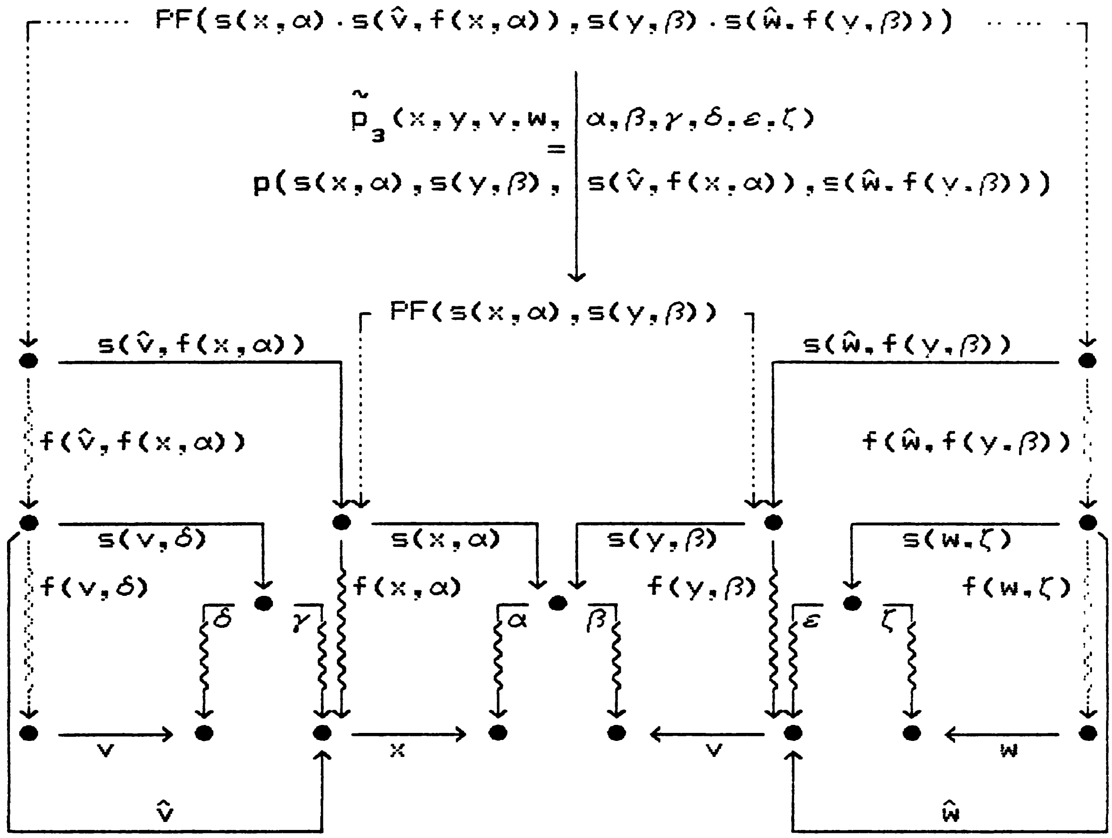
comme représenté ci-dessous :



– $\tilde{p}_2(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) = p(\beta\cdot s(x,\alpha), y, s(\hat{v}, f(x,\alpha)).\hat{w})$
(où on a posé ici aussi $\hat{v} = \gamma\cdot s(v,\delta)$ et $\hat{w} = \varepsilon\cdot s(w,\zeta)$),
comme représenté ci-dessous :



– $\tilde{p}_3(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$
$$= p(s(x,\alpha), s(y,\beta), s(\hat{v}, f(x,\alpha)), s(\hat{w}, f(y,\beta)))$$
(où on a posé ici aussi $\hat{v} = \gamma\cdot s(v.\delta)$ et $\hat{w} = \varepsilon\cdot s(w.\zeta)$),
comme représenté ci-dessous :



(Les flèches, dont il est indiqué dans cette définition qu'elles sont dans $\mathcal{R}$, y sont en vertu de l'axiome (h_f)).

Par souci d'homogénéiser les notations, nous noterons aussi :

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) = \tilde{p}_1(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) \ .$$

Etablissons tout d'abord deux lemmes utiles pour la suite.

<u>Lemme 9 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, squiggly, "\lambda_3"'] & \bullet \arrow[r, "e_3"'] & \bullet \arrow[r, squiggly, "\lambda_1"'] & \bullet \arrow[dr, "e_1"] & \\
& & & & \bullet \\
\bullet \arrow[r, squiggly, "\lambda_4"'] & \bullet \arrow[r, "e_4"'] & \bullet \arrow[r, squiggly, "\lambda_2"'] & \bullet \arrow[ur, "e_2"'] &
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$p(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2, e_3\cdot\lambda_3, e_4\cdot\lambda_4) \ R_{fl} \ p(e_1, e_2, \lambda_1\cdot e_3, \lambda_2\cdot e_4) \ .$$

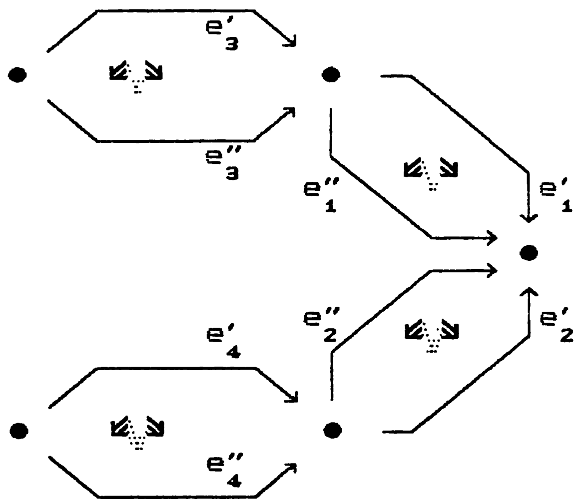
Preuve.

Le diagramme ci-dessous (obtenu grâce aux axiomes (p_{comp}) et ($p_{\mathcal{R}}$)) établit le résultat voulu :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
PF(e_1\cdot\lambda_1\cdot e_3\cdot\lambda_3, e_2\cdot\lambda_2\cdot e_4\cdot\lambda_4) \arrow[r, "p(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2, e_3\cdot\lambda_3, e_4\cdot\lambda_4)"'] \arrow[d, squiggly, "p(e_1\cdot\lambda_1\cdot e_3, e_2\cdot\lambda_2\cdot e_4, \lambda_3, \lambda_4)"] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & PF(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \arrow[d, squiggly, "id"'] \\
PF(e_1\cdot\lambda_1\cdot e_3, e_2\cdot\lambda_2\cdot e_4) \arrow[r, "p(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2, e_3, e_4)"'] \arrow[d, squiggly, "id"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & PF(e_1\cdot\lambda_1, e_2\cdot\lambda_2) \arrow[d, squiggly, "p(e_1, e_2, \lambda_1, \lambda_2)"'] \\
PF(e_1\cdot\lambda_1\cdot e_3, e_2\cdot\lambda_2\cdot e_4) \arrow[r, "p(e_1, e_2, \lambda_1\cdot e_3, \lambda_2\cdot e_4)"] & PF(e_1, e_2)
\end{tikzcd}$$

Fin de la preuve.

Lemme 10 : *Si l'on a :*

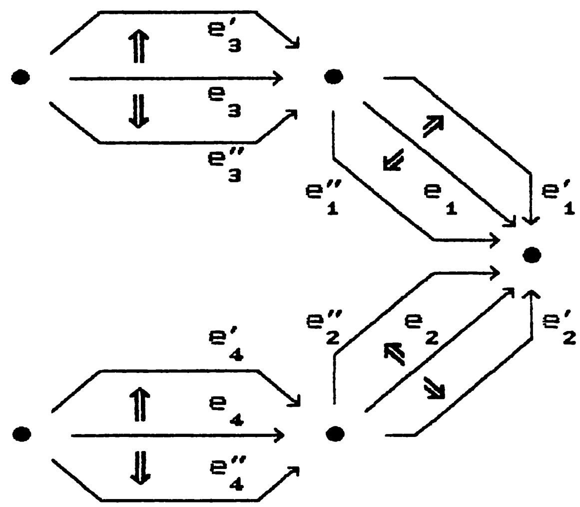


alors on a :

$$p(e'_1, e'_2, e'_3, e'_4) \; R_{fl} \; p(e''_1, e''_2, e''_3, e''_4) \; .$$

<u>Preuve.</u>

Il suffit (en raison de l'axiome $(\Longrightarrow, =)$) d'établir les résultats dans le cas de 2-zigzags simples, i.e. dans la situation suivante :



Le diagramme ci-dessous (obtenu grâce à l'axiome (ρ_{fl}, p)) établit alors le résultat voulu :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
PF(e'_1\cdot e'_3, e'_2\cdot e'_4) \arrow[r, "p(e'_1,e'_2,e'_3,e'_4)"] & PF(e'_1\cdot e'_2) \\
PF(e_1\cdot e_3, e_2\cdot e_4) \arrow[r, "p(e_1,e_2,e_3,e_4)"] \arrow[u, squiggly, "\rho_{fl}(e_1\cdot e_3, e'_1\cdot e'_3, e_2\cdot e_4, e'_2\cdot e'_4)"] \arrow[d, squiggly, "\rho_{fl}(e_1\cdot e_3, e''_1\cdot e''_3, e_2\cdot e_4, e''_2\cdot e''_4)"'] \arrow[ur, phantom, "\Nwarrow"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & PF(e_1\cdot e_2) \arrow[u, squiggly, "\rho_{fl}(e_1, e'_1, e_2, e'_2)"'] \arrow[d, squiggly, "\rho_{fl}(e_1, e''_1, e_2, e''_2)"] \\
PF(e''_1\cdot e''_3, e''_2\cdot e''_4) \arrow[r, "p(e''_1,e''_2,e''_3,e''_4)"] & PF(e''_1\cdot e''_2)
\end{tikzcd}$$

<u>Fin de la preuve.</u>

Etablissons maintenant les premières propriétés relatives à la loi $\tilde{p}$ (et aux lois $\tilde{p}_2$ et $\tilde{p}_3$).

<u>Lemme 11 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\delta"'] \arrow[dr, squiggly, "\gamma"] & & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\alpha"'] \arrow[dr, squiggly, "\beta"] & & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\varepsilon"'] \arrow[dr, squiggly, "\zeta"] & & \\
\bullet \arrow[r, "v"'] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"] & & \bullet & \bullet \arrow[l, "w"]
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) \ R_{fl} \ \tilde{p}_2(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$$
$$R_{fl} \ \tilde{p}_3(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) \ .$$

<u>Preuve.</u>
En utilisant les notations de la définition 2, on a le

diagramme ci-dessous (obtenu grâce à l'axiome $(\rho_q.\mathrm{p})$) :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
\bullet \arrow[r, "{\mathrm{p}(s(x,\alpha),s(y,\beta),s(\hat{v},f(x,\alpha)),s(\hat{w}.f(v.\beta)))}"] \arrow[d, squiggly, "{\rho_q(\alpha,s(x,\alpha)\cdot s(\hat{v},f(x,\alpha)),s(y,\beta)\cdot s(\hat{w},f(y,\beta)))}"'] \arrow[dr, phantom, "\Nearrow"] & \bullet \arrow[d, squiggly, "{\rho_q(\alpha,s(x,\alpha).s(v.\beta))}"] \\
\bullet \arrow[r, "{\mathrm{p}(\alpha\cdot s(x,\alpha),\alpha\cdot s(v,\beta),s(\hat{v},f(x,\alpha)),s(\hat{w}.f(v,\beta)))}"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

On a donc :

$\tilde{p}_3(x,y,v,w,\alpha.\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$

$$R_{fl}\ \mathrm{p}(\alpha\cdot s(x,\alpha),\alpha\cdot s(y,\beta),s(\hat{v},f(x,\alpha)),s(\hat{w},f(y,\beta)))$$

Et on a ainsi :

$\tilde{p}_3(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$

$$R_{fl}\ \mathrm{p}(x\cdot f(x,\alpha),\alpha\cdot s(y,\beta),s(\hat{v},f(x,\alpha)).s(\hat{w},f(y,\beta)))$$

(en raison du lemme 10 et des axiomes (cône_1) et (cône_2))

$$R_{fl}\ \mathrm{p}(x,\alpha\cdot s(y,\beta),f(x,\alpha)\cdot s(\hat{v},f(x,\alpha)),s(\hat{w},f(y,\beta)))$$

(en raison du lemme 9 et car $f(x,\alpha)\in\mathcal{R}$)

$$R_{fl}\ \mathrm{p}(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v}\cdot f(\hat{v},f(x,\alpha)),s(\hat{w},f(v,\beta)))$$

(en raison du lemme 10 et des axiomes (cône_1) et (cône_2))

$$R_{fl}\ \mathrm{p}(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},s(\hat{w},f(y,\beta)))$$

(en raison du lemme 9 et car $f(\hat{v},f(x,\alpha))\in\mathcal{R}$)

$$= \tilde{\mathrm{p}}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)\ .$$

Par conséquent, on a obtenu que :

$$\tilde{p}_3(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)\ R_{fl}\ \tilde{\mathrm{p}}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)\ .$$

Le raisonnement étant "symétrique" pour établir que :

$$\tilde{p}_3(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)\ R_{fl}\ \tilde{p}_2(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)\ ,$$

la démonstration est achevée.

Fin de la preuve.

<u>Proposition 6 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
 & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\delta"'] \arrow[dr, squiggly, "\gamma"] & & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\alpha"'] \arrow[dr, squiggly, "\beta"] & & & \bullet \arrow[dl, squiggly, "\varepsilon"'] \arrow[dr, squiggly, "\zeta"] & & \\
\bullet \arrow[r, "v"'] & \bullet & & \bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"] & & \bullet & \bullet \arrow[l, "w"]
\end{tikzcd}$$

alors il existe des flèches $\check{x}$, $\check{y}$, $\check{v}$ *et* $\check{w}$ *telles que :*

$$\check{x}\ R_{fl}\ x\ ,\quad \check{y}\ R_{fl}\ y\ ,\quad \check{v}\ R_{fl}\ v\ ,\quad \check{w}\ R_{fl}\ w$$

et

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) = p(\check{x},\check{y},\check{v},\check{w}) \ .$$

<u>Preuve.</u>

Comme déjà vu plusieurs fois (et car α , β , $f(v,\beta) \in \mathcal{R}$), on a :

$$\alpha\cdot s(y,\beta)\ R_{fl}\ s(y,\beta)\ \ R_{fl}\ \beta\cdot s(y,\beta)\ R_{fl}\ y\cdot f(v,\beta)\ R_{fl}\ y \ .$$

On a de même $\hat{v} = \gamma\cdot s(v,\delta)\ R_{fl}\ v$.

Et, pour des raisons analogues, on a aussi :

$$s(\hat{w},f(y,\beta))\ R_{fl}\ \hat{w} = \varepsilon\cdot s(w,\zeta)\ R_{fl}\ w \ .$$

On obtient donc le résultat recherché en posant :

$$\check{x} = x\ ,\quad \check{y} = \alpha\cdot s(y,\beta)$$

et

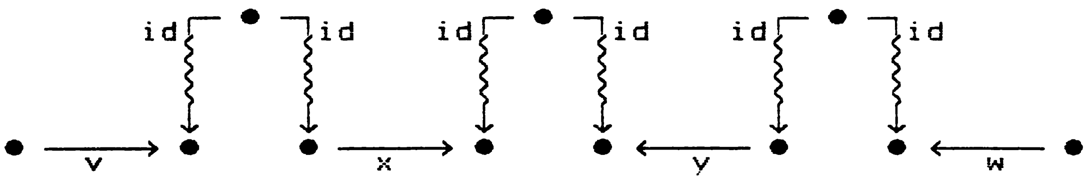
$$\check{v} = \hat{v}\ ,\quad \check{w} = s(\hat{w},f(y,\beta)) \ .$$

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Proposition 7 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "v"'] & \bullet \arrow[r, "x"'] & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"] & \bullet \arrow[l, "w"]
\end{tikzcd}$$

autrement dit, si l'on a :



alors on a :

$$\tilde{p}(x,y,v,w,id,id,id,id,id,id)\ R_{fl}\ p(x,y,v,w)\ .$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$\tilde{p}(x,y,v,w,id,id,id,id,id,id)$

$= p(x,s(y,id),s(v,id),s(s(w,id),f(y,id)))$

$R_{fl}\ p(x,y\cdot f(y,id),v\cdot f(v,id),s(s(w,id),f(y,id)))$

(en vertu du lemme 10 et des axiomes ($cône_1$) et ($cône_2$))

$R_{fl}\ p(x,y,v,f(y,id)\cdot s(s(w,id),f(y,id)))$

(en vertu du lemme 9 et car $f(y,id)$, $f(v,id) \in \mathcal{R}$)

$R_{fl}\ p(x,y,v,s(w,id)\cdot f(s(w,id),f(y,id)))$

(en vertu du lemme 10 et des axiomes ($cône_1$) et ($cône_2$))

$R_{fl}\ p(x,y,v,s(w,id))$

(en vertu du lemme 9 et car $f(s(w,id),f(y,id)) \in \mathcal{R}$)

$R_{fl}\ p(x,y,v,w\cdot f(w,id))$

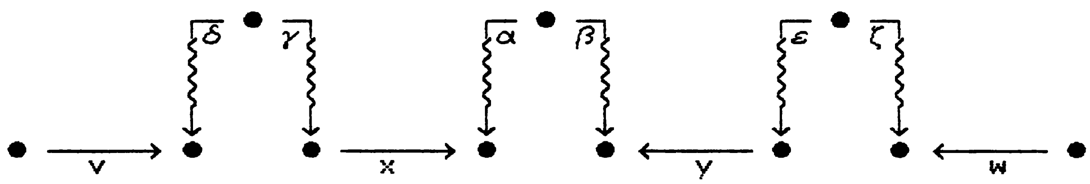
(en vertu du lemme 10 et des axiomes ($cône_1$) et ($cône_2$))

$R_{fl}\ p(x,y,v,w)$

(en vertu du lemme 9 et car $f(w,id) \in \mathcal{R}$).

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Proposition 8 :</u> *Si l'on a :*



alors on a :

$$\mathrm{dom}(\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta))$$
$$R_{ob}\ \tilde{PF}(\tilde{comp}(x,v,\gamma,\delta),\tilde{comp}(y,w,\varepsilon,\zeta),\alpha,\beta)$$

et

$$\mathrm{codom}(\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)) = \tilde{PF}(x,y,\alpha,\beta) .$$

<u>Preuve.</u>

On a (avec les notations de la définition 2) :

$$\tilde{PF}(\tilde{comp}(x,v,\gamma,\delta),\tilde{comp}(y,w,\varepsilon,\zeta),\alpha,\beta) = \tilde{PF}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\alpha,\beta)$$
$$= PF(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y\cdot\hat{w},\beta))$$

Or, par l'axiome $((\rho_c)_s)$, on a :

$$s(y\cdot\hat{w},\beta)\ R_{fl}\ s(y,\beta)\cdot s(\hat{w},f(v,\beta))$$

et donc (puisque $\alpha \in \mathcal{R}$) :

$$\alpha\cdot s(y\cdot\hat{w},\beta)\ R_{fl}\ \alpha\cdot s(y,\beta)\cdot s(\hat{w},f(y,\beta)) .$$

La proposition 5 assurant que la loi PF est compatible avec $R = (R_{ob},R_{fl})$, on a ainsi :

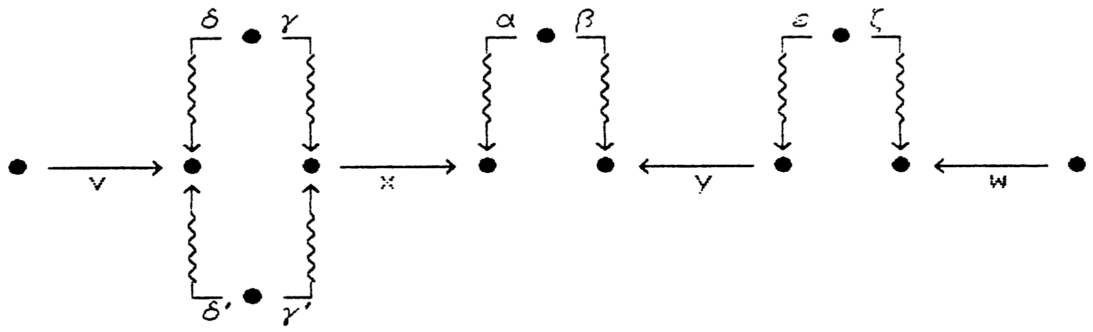
$$\tilde{PF}(\tilde{comp}(x,v,\gamma,\delta),\tilde{comp}(y,w,\varepsilon,\zeta),\alpha,\beta)$$
$$R_{ob}\ PF(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y,\beta)\cdot s(\hat{w},f(v,\beta)))$$
$$= \mathrm{dom}(\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)) .$$

Ceci achève la démonstration, puisque la seconde propriété est vraie par définition(s) même(s).

<u>Fin de la preuve.</u>

Montrons maintenant que la loi $\tilde{p}$ est compatible avec les relations de connexion (entre objets et entre flèches). Pour ce faire, on commence par une succession de lemmes. Les deux premiers d'entre eux (lemmes 12 et 13), tout à fait essentiels, sont, à nouveau (cf §4 et §5.1), des *lemmes de contournement* et on remarquera que c'est encore l'existence de la loi t, mais aussi celle de la loi cf pour le lemme 13, qui vont nous permettre de les établir.

Lemme 12 : *Si l'on a :*



alors on a :

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)\ R_{fl}\ \tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma',\delta',\varepsilon,\zeta)\ .$$

Preuve.

Posons $s(\varepsilon\cdot s(w,\zeta),f(y,\beta)) = \check{w}$.

On a alors :

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$$
$$= p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\gamma\cdot s(v,\delta),\check{w})$$
$$R_{fl}\ p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\gamma\cdot s(v,\delta)\cdot f(f(v,\delta),f(v,\delta')),\check{w})$$

(en vertu du lemme 9 et car $f(f(v,\delta),f(v,\delta')) \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl}\ p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),t(v,\delta,\delta',\gamma,\gamma'),\check{w})$$

(en vertu du lemme 10 et de l'axiome (t_1)).

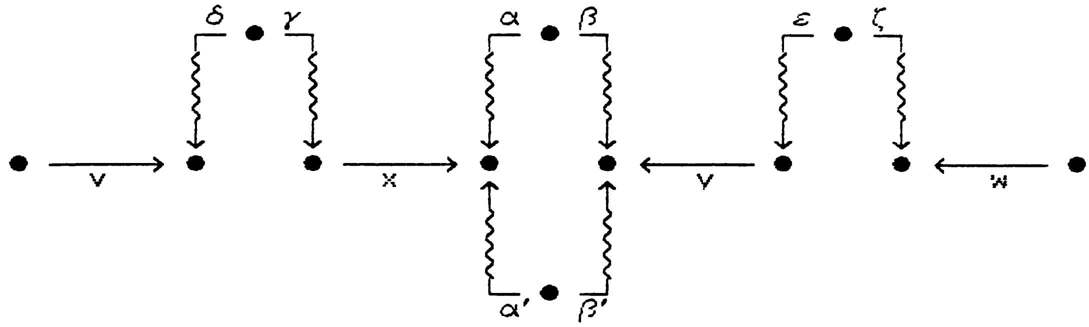
On montre de même (grâce à l'axiome (t_2)) que :

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma',\delta',\varepsilon,\zeta)\ R_{fl}\ p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),t(v,\delta,\delta',\gamma,\gamma'),\check{w})$$

et on obtient ainsi le résultat recherché.

Fin de la preuve.

Lemme 13 : *Si l'on a :*



alors on a :

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) \; R_{fl} \; \tilde{p}(x,y,v,w,\alpha',\beta',\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) \; .$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$

$= p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},s(\hat{w},f(y,\beta)))$

(avec les notations de la définition 2)

$R_{fl}\; p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},p(y,\beta,\hat{w},id)\cdot\rho_c(y,\hat{w},\beta))$

(en vertu du lemme 10 et de l'axiome (ρ_c,p))

$R_{fl}\; p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},p(y,\beta,\hat{w},id))$

(en vertu du lemme 9 et car $\rho_c(y,\hat{w},\beta) \in \mathcal{R}$)

$R_{fl}\; p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},p(y,\beta,\hat{w},id)\cdot f(f(y\cdot\hat{w},\beta),f(v\cdot\hat{w},\beta')))$

(en vertu du lemme 9 et car $f(f(y\cdot\hat{w},\beta),f(y\cdot\hat{w},\beta')) \in \mathcal{R}$)

$R_{fl}\; p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},f(f(y,\beta),f(y,\beta'))\cdot cf(v,\hat{w},\beta,\beta'))$

(en vertu du lemme 10 et de l'axiome (cf_f))

$R_{fl}\; p(x,\alpha\cdot s(y,\beta)\cdot f(f(y,\beta),f(y,\beta')),\hat{v},cf(y,\hat{w},\beta,\beta'))$

(en vertu du lemme 9 et car $f(f(y,\beta),f(y,\beta')) \in \mathcal{R}$)

$R_{fl}\; p(x,t(y,\beta,\beta',\alpha,\alpha'),\hat{v},cf(y,\hat{w},\beta,\beta'))$

(en vertu du lemme 10 et de l'axiome (t_1)).

On montre de même (grâce, notamment, aux axiomes (cf_s) et (t_2)) que :

$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha',\beta',\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$

$R_{fl}\; p(x,t(y,\beta,\beta',\alpha,\alpha'),\hat{v},cf(y,\hat{w},\beta,\beta'))$.

Et on obtient ainsi le résultat recherché.

Fin de la preuve.

Lemme 14 : *Si l'on a :*

$$\bullet \xrightarrow{m''} \bullet \overset{\eta}{\rightsquigarrow} \bullet \xrightarrow{x} \bullet \xleftarrow{\check{v}} \bullet \xleftarrow{\check{w}} \bullet$$

autrement dit, si l'on a :

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d, squiggly, "id"'] \arrow[dr, squiggly, "\eta"] & & & \bullet \arrow[d, squiggly, "id"'] \arrow[dr, squiggly, "id"] & & & \bullet \arrow[d, squiggly, "id"'] \arrow[dr, squiggly, "id"] & \\
\bullet \arrow[r, "m''"] & \bullet & \bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & \bullet & \bullet \arrow[l, "\check{v}"'] & \bullet & \bullet & \bullet \arrow[l, "\check{w}"']
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$\tilde{p}(x,\check{y},m''.\check{w},id,id,\eta,id,id,id)\ R_{fl}\ p(x,\check{y},\eta\cdot m'',\check{w}) .$$

Preuve.

Elle est analogue à celle de la proposition 7.

Fin de la preuve.

Remarquons que la proposition 7. que nous avons jugé préférable de mettre en évidence plus haut, apparaît bien entendu comme un cas particulier du lemme 14 ci-dessus.

Lemme 15 : *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "m''"] & \bullet \arrow[r, squiggly, bend left, "\eta"] \arrow[r, squiggly, bend right, "\eta'"'] & \bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "\check{y}"'] & \bullet \arrow[l, "\check{w}"']
\end{tikzcd}$$

alors on a :

$$p(x,\check{y},\eta\cdot m'',\check{w})\ R_{fl}\ p(x,\check{y},\eta'\cdot m'',\check{w}) .$$

Preuve.

Le lemme 14 assure que :

$$p(x, \check{y}, \eta \cdot m'', \check{w}) \; R_{fl} \; \tilde{p}(x, \check{y}, m'', \check{w}, id, id, \eta, id, id, id)$$

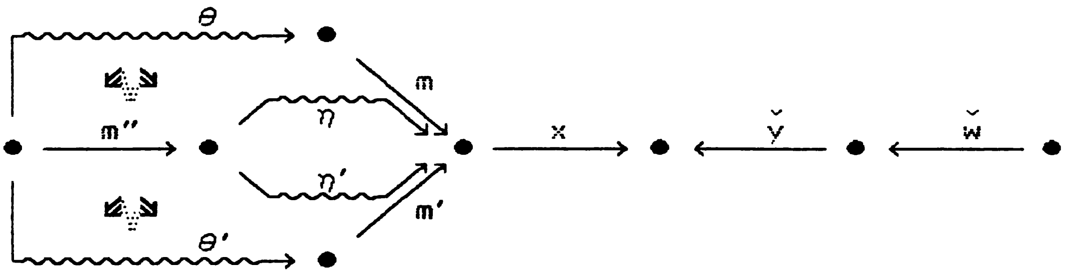
et, de même, que :

$$p(x, \check{y}, \eta' \cdot m'', \check{w}) \; R_{fl} \; \tilde{p}(x, \check{y}, m'', \check{w}, id, id, \eta', id, id, id) \; .$$

Le lemme 12 permet alors de conclure.

Fin de la preuve.

Lemme 16 : *Si l'on a :*



et donc, si les flèches m *et* m' *ont même codomaine et vérifient* $m \; R_{fl} \; m'$ *, alors on a :*

$$p(x, \check{y}, m, \check{w}) \; R_{fl} \; p(x, \check{y}, m', \check{w}) \; .$$

Preuve.

On a :

$$p(x, \check{y}, m, \check{w}) \; R_{fl} \; p(x, \check{y}, m \cdot \theta, \check{w})$$

(en vertu du lemme 9 et car $\theta \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl} \; p(x, \check{y}, \eta \cdot m'', \check{w})$$

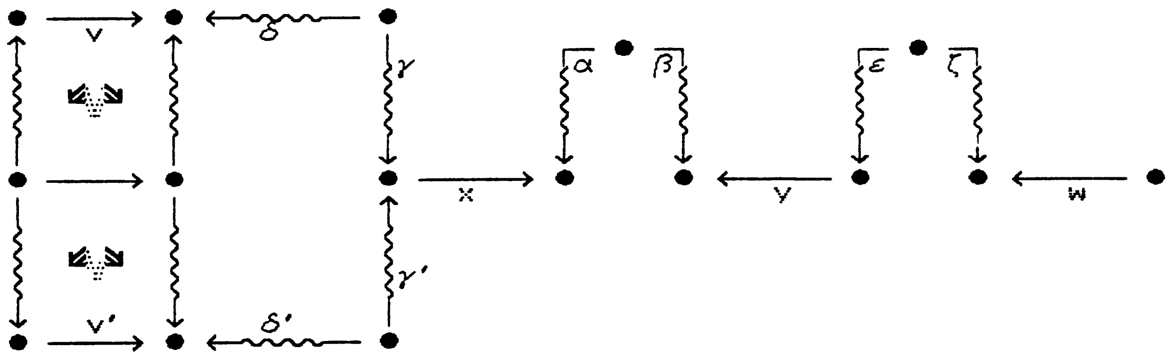
(en vertu du lemme 10 et car $m \cdot \theta \Leftrightarrow \eta \cdot m''$).

De même, on a $p(x, \check{y}, m', \check{w}) \; R_{fl} \; p(x, \check{y}, \eta' \cdot m'', \check{w})$.

Le lemme 15 permet alors de conclure.

Fin de la preuve.

Lemme 17 : *Si l'on a :*



et donc, en particulier, si l'on a $v \; R_{fl} \; v'$, *alors on a :*

$$\tilde{D}(x,v,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) \; R_{fl} \; \tilde{D}(x,y,v',w,\alpha,\beta,\gamma',\delta',\varepsilon,\zeta) \; .$$

<u>Preuve.</u>

Posons $m = \gamma \cdot s(v,\delta)$ et $m' = \gamma' \cdot s(v',\delta')$.

Ces flèches, qui ont le même codomaine, vérifient en outre $m \; R_{fl} \; m'$ puisque (comme déjà vu plusieurs fois et car γ , δ , γ' , $\delta' \in \mathcal{R}$) on a :

$$\gamma \cdot s(v,\delta) \; R_{fl} \; v \quad \text{et} \quad \gamma' \cdot s(v',\delta') \; R_{fl} \; v' \; .$$

En posant maintenant :

$$\check{y} = \alpha \cdot s(y,\beta)$$

et

$$\check{w} = s(\varepsilon \cdot s(w,\zeta), f(y,\beta)) \; ,$$

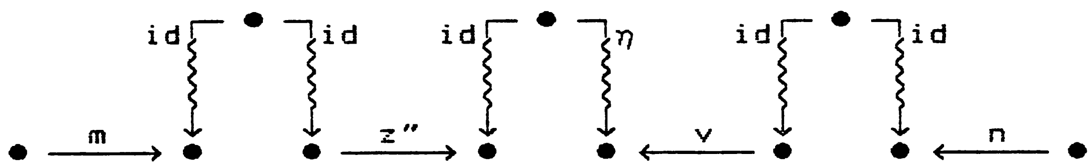
le lemme 16 permet de conclure.

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Lemme 18 :</u> *Si l'on a :*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] & \bullet \arrow[r, "z''"] & \bullet \arrow[r, rightsquigarrow, "\eta"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] & \bullet \arrow[l, "n"'] \end{tikzcd}$$

autrement dit, si l'on a :



alors on a :

$$\tilde{p}(z'',y,m,n,id,\eta,id,id,id,id) \; R_{fl} \; p(\eta\cdot z'',y,m,n) \; .$$

<u>Preuve.</u>
En raison du lemme 11, il suffit d'établir que :

$$\tilde{p}_2(z'',y,m,n,id,\eta,id,id,id,id) \; R_{fl} \; p(\eta\cdot z'',y,m,n) \; .$$

La preuve de cette propriété est analogue (comme la preuve du lemme 14) à celle de la proposition 7.
<u>Fin de la preuve.</u>

Remarquons que la proposition 7 apparaît bien entendu, à nouveau, comme un cas particulier du lemme 18 ci-dessus.

<u>Lemme 19 :</u> *Si l'on a :*

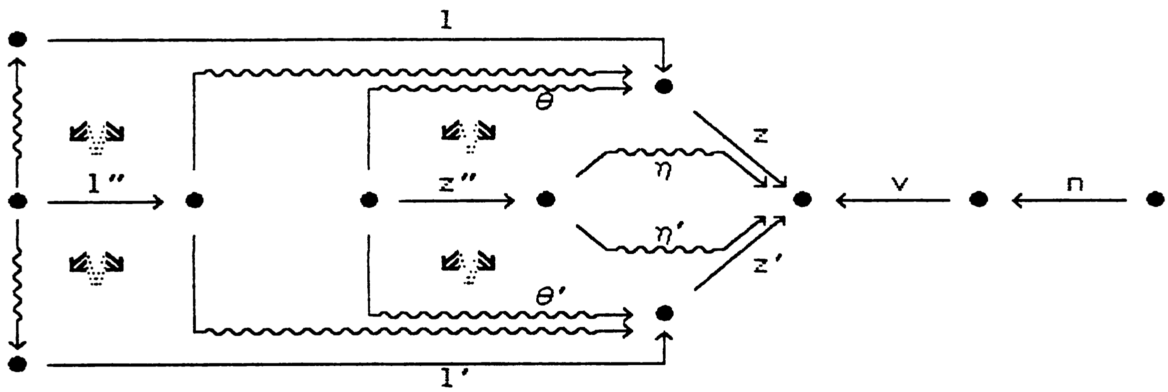
$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "m"] & \bullet \arrow[r, "z''"] & \bullet \arrow[r, squiggly, bend left, "\eta"] \arrow[r, squiggly, bend right, "\eta'"'] & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] & \bullet \arrow[l, "n"'] \end{tikzcd}$$

alors on a :

$$p(\eta\cdot z'',y,m,n) \; R_{fl} \; p(\eta'\cdot z'',y,m,n) \; .$$

<u>Preuve.</u>
On établit ce lemme en s'appuyant sur les lemmes 18 et 13, comme on avait établi le lemme 15 en s'appuyant sur les lemmes 14 et 12.
<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Lemme 20 :</u> *Si l'on a :*



et donc, si, d'une part, les flèches z *et* z' *ont même codomaine et vérifient* $z \; R_{fl} \; z'$ *et si, d'autre part, les flèches* l *et* l' *ont pour codomaines respectifs les domaines de* z *et* z' *et vérifient* $l \; R_{fl} \; l'$ *, alors on a :*

$$p(z,y,l.n) \; R_{fl} \; p(z',y.l'.n) \; .$$

<u>Preuve.</u>

On a :

$$p(z,y,l,n) \; R_{fl} \; p(z,y,l\cdot f(l,\theta),n)$$

(en vertu du lemme 9 et car $f(l,\theta) \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl} \; p(z,y,\theta\cdot s(l,\theta),n)$$

(en vertu du lemme 10 et des axiomes (cône$_1$) et (cône$_2$))

$$R_{fl} \; p(z\cdot\theta,y,s(l,\theta),n)$$

(en vertu du lemme 9 et car $\theta \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl} \; p(\eta\cdot z'',y,s(l,\theta),n)$$

(en vertu du lemme 10 et car $z\cdot\theta \; \swarrow\!\searrow \; \eta\cdot z''$).

On prouve de même que :

$$p(z',y.l',n) \; R_{fl} \; p(\eta'\cdot z''.y,s(l',\theta'),n) \; .$$

Or les flèches $s(l,\theta)$ et $s(l',\theta')$, qui ont le même codomaine, vérifient en outre :

$$s(l,\theta) \; R_{fl} \; s(l',\theta') \; ,$$

puisque, comme déjà vu plusieurs fois, on a :

$$s(l.\theta)\ R_{fl}\ l \quad \text{et} \quad s(l'.\theta')\ R_{fl}\ l' \ .$$

Le lemme 16 assure donc que :

$$p(z',y,l',n)\ R_{fl}\ p(\eta'\cdot z'',y,s(l.\theta),n) \ .$$

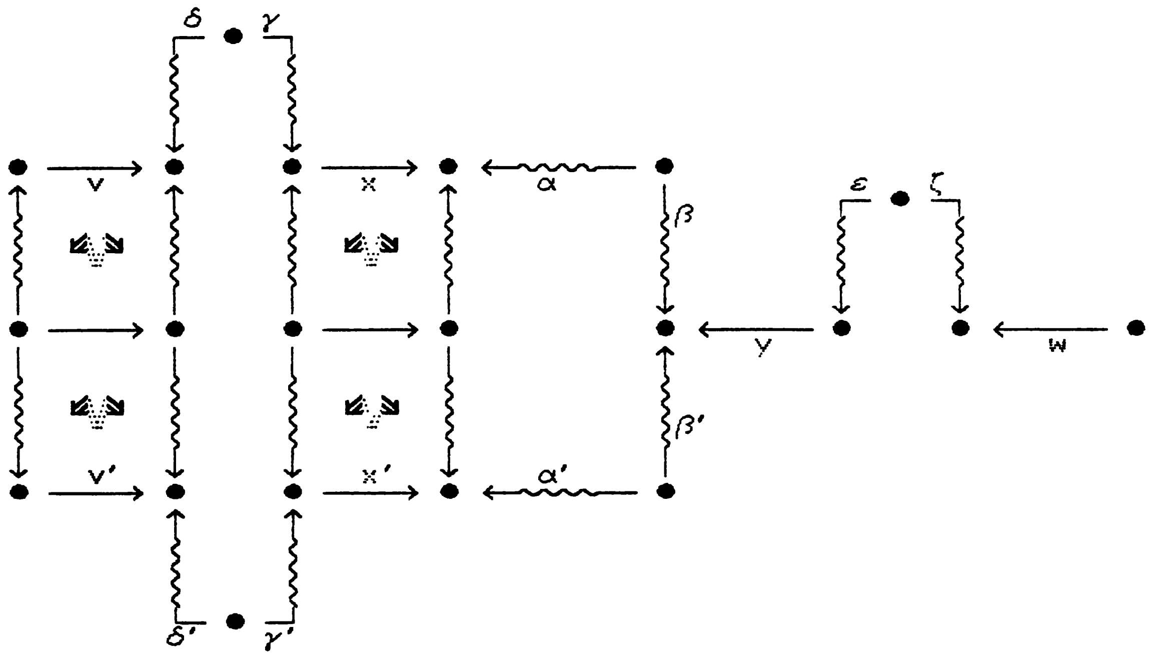
Et le lemme 19 permet alors de conclure que :

$$p(z',y,l',n)\ R_{fl}\ p(\eta\cdot z'',y,s(l,\theta),n) \ .$$

ce qui achève la démonstration.

Fin de la preuve.

Lemme 21 : *Si l'on a :*



et donc, en particulier, si l'on a $x\ R_{fl}\ x'$ *et* $v\ R_{fl}\ v'$, *alors on a :*

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)\ R_{fl}\ \tilde{p}(x',y,v',w,\alpha',\beta',\gamma',\delta',\varepsilon,\zeta) \ .$$

Preuve.

En raison du lemme 11, il est équivalent de prouver que :

$$\tilde{p}_2(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)\ R_{fl}\ \tilde{p}_2(x',y,v',w,\alpha',\beta',\gamma',\delta',\varepsilon,\zeta) \ ,$$

c'est-à-dire de prouver que :

$p(\beta\cdot s(x,\alpha), y, s(\gamma\cdot s(v,\delta).f(x.\alpha)), \varepsilon\cdot s(w,\zeta))$
$\quad R_{fl}\ p(\beta'\cdot s(x',\alpha'), y, s(\gamma'\cdot s(v',\delta'), f(x',\alpha')), \varepsilon\cdot s(w,\zeta))$.

Or, d'une part, on a (comme déjà vu plusieurs fois) :

$$\beta\cdot s(x.\alpha)\ R_{fl}\ x\ R_{fl}\ x'\ R_{fl}\ \beta'\cdot s(x'.\alpha') .$$

Et, d'autre part, on a :

$s(\gamma\cdot s(v,\delta), f(x.\alpha))\ R_{fl}\ f(x.\alpha)\cdot s(\gamma\cdot s(v,\delta).f(x.\alpha))$
(car $f(x,\alpha) \in \mathcal{R}$)
$R_{fl}\ \gamma\cdot s(v,\delta)\cdot f(\gamma\cdot s(v,\delta), f(x,\alpha))$
(en vertu des axiomes (cône$_1$) et (cône$_2$))
$R_{fl}\ \gamma\cdot s(v,\delta)$
(car $f(\gamma\cdot s(v,\delta), f(x,\alpha)) \in \mathcal{R}$)
$R_{fl}\ v$
(comme déjà vu plusieurs fois);

on a donc de même $s(\gamma'\cdot s(v',\delta'), f(x',\alpha'))\ R_{fl}\ v'$. ce qui assure que :

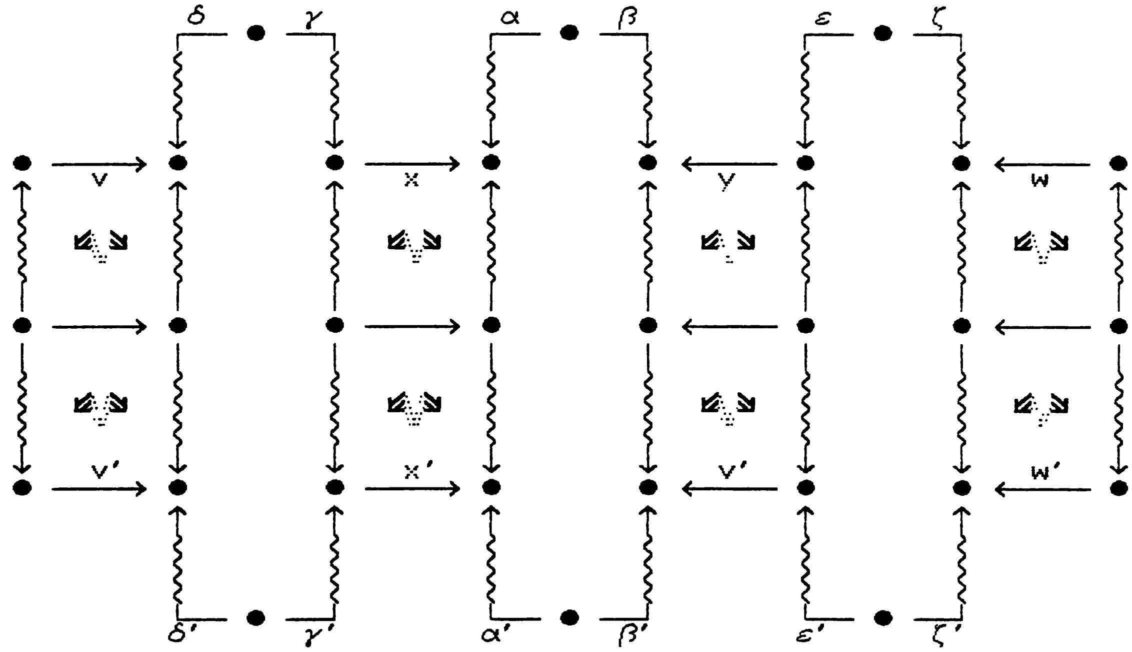
$$s(\gamma\cdot s(v,\delta), f(x,\alpha))\ R_{fl}\ s(\gamma'\cdot s(v',\delta'), f(x',\alpha')) .$$

Le lemme 20 permet alors de conclure.

Fin de la preuve.

Maintenant, comme nous avions procédé dans le sous-paragraphe 5.1 pour y obtenir la proposition 4. nous remarquons que la loi $\tilde{p}_2$ est la "symétrique" de la loi $\tilde{p} = \tilde{p}_1$ (et que la donnée des lois et axiomes de la structure de LLCC présente "le même type de symétrie"). Le lemme 11 nous permet donc d'affirmer que les "symétriques" du lemme 12 et des lemmes 14 à 21 sont vrais (le lemme 13 est son propre "symétrique"), et notamment celui du lemme 21. En rassemblant ce résultat avec celui du lemme 21 lui-même, nous obtenons alors la proposition qui suit.

Proposition 9 : *Si l'on a :*



autrement dit, si l'on a :

$$x \; R_{fl} \; x' \quad \textit{et} \quad y \; R_{fl} \; v' \;,$$

$$v \; R_{fl} \; v' \quad \textit{et} \quad w \; R_{fl} \; w' \;,$$

$$\mathrm{codom}(x) \; R_{ob} \; \mathrm{codom}(v) \;,$$

$$\mathrm{dom}(x) \; R_{ob} \; \mathrm{codom}(v) \quad \textit{et} \quad \mathrm{dom}(y) \; R_{ob} \; \mathrm{codom}(w) \;,$$

(et donc :

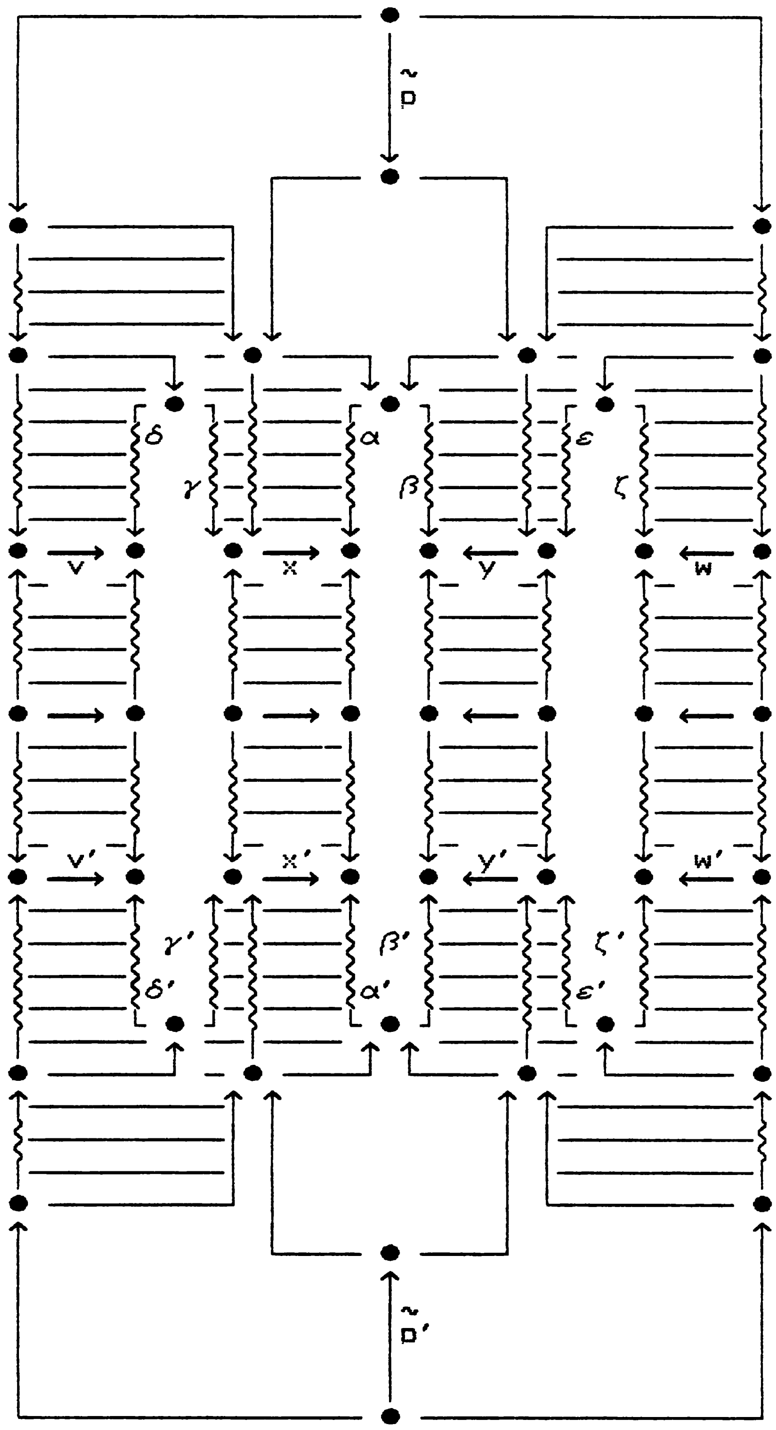
$$\mathrm{codom}(x') \; R_{ob} \; \mathrm{codom}(y') \;,$$

$$\mathrm{dom}(x') \; R_{ob} \; \mathrm{codom}(v') \quad \textit{et} \quad \mathrm{dom}(y') \; R_{ob} \; \mathrm{codom}(w') \;),$$

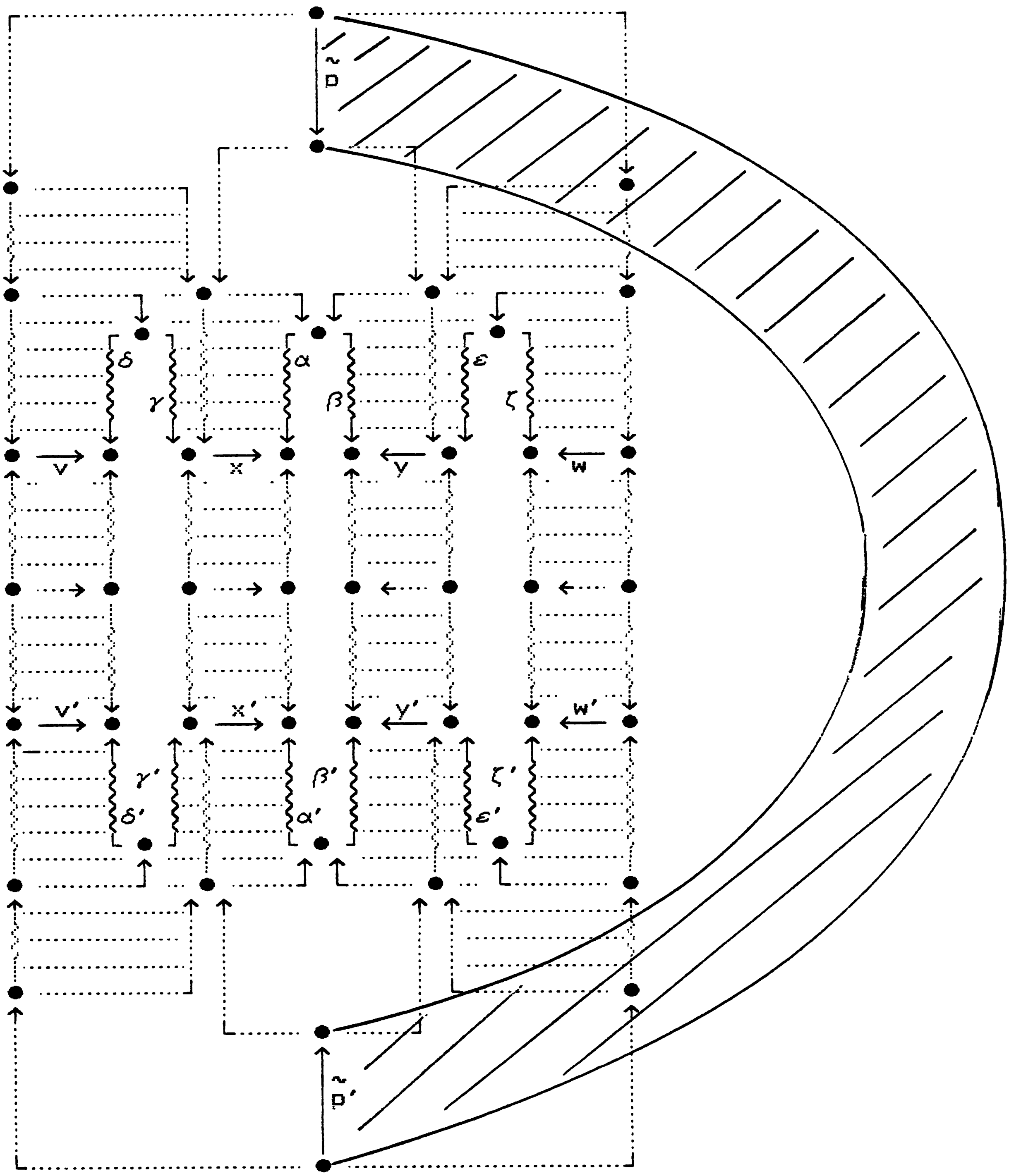
alors on a :

$$\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta) \; R_{fl} \; \tilde{p}(x',y',v',w',\alpha',\beta',\gamma',\delta',\varepsilon',\zeta') \;.$$

Cette proposition 9, qui est tout à fait essentielle, peut être qualifiée, comme précédemment, de *proposition de contournement*. Cette proposition exprime que, si, a priori, il n'est pas possible (notamment en raison des trois "trous centraux") de faire directement "glisser par connexité" la lax-préfactorisation $\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$ vers la lax-préfactorisation $\tilde{p}(x',y',v',w',\alpha',\beta',\gamma',\delta',\varepsilon',\zeta')$ dans le premier dessin qui suit. il est cependant possible de le faire par un chemin détourné comme le suggère le deuxième dessin qui suit :



p̃
δ
γ
α
β
ε
ζ
v
x
y
w
v'
x'
y'
w'
γ'
δ'
β'
α'
ζ'
ε'
p̃'



p̃
δ
γ
α
β
ε
ζ
v
x
y
w
v'
x'
y'
w'
γ'
δ'
β'
α'
ζ'
ε'
p̃'

Nous terminons maintenant l'étude de la loi $\tilde{p}$ par la proposition ci-dessous qui concerne sa "restriction", p .

<u>Proposition 10 :</u> *La loi* p *est compatible avec la relation* R_{fl} .

<u>Preuve.</u>
Cette proposition se déduit des propositions 7 et 9. exactement comme la proposition 5 du paragraphe 4 se déduisait des propositions 2 et 4 (§4).
<u>Fin de la preuve.</u>

5.3. La structure de LCC

Par souci d'homogénéiser les notations, nous posons maintenant :

- *si* $x \in Fl(llcc(\mathbb{G}))$:

$$\tilde{d}(x) = d(x) ,$$

- $\tilde{un} = un$ *i.e.* $\tilde{1} = 1$,

- *si* $A \in Ob(llcc(\mathbb{G}))$:

$$\tilde{cte}(A) = cte(A) .$$

Etablissons les propriétés relatives à ces lois.

Par définition même de $\tilde{d}$, on a la proposition suivante.

<u>Proposition 11 :</u> *Si* $x \in Fl(llcc(\mathbb{G}))$, *alors on a :*

$$\tilde{dom}(\tilde{d}(x)) = dom(x)$$

et

$$\tilde{codom}(\tilde{d}(x)) = PF(x,x) .$$

<u>Proposition 12 :</u> *La loi* $\tilde{d} = d$ *est compatible avec la relation* R_{fl} .

<u>Preuve.</u>

Soient x , $x' \in Fl(llcc(\mathbb{G}))$ telles que $x \; R_{fl} \; x'$.
Il existe donc des flèches α , α' , γ et γ' (éléments de $\mathcal{R}$) et une flèche x'' telles que :

$$\begin{tikzcd}
\bullet & \bullet \arrow[l, squiggly, "\alpha"'] \arrow[r, squiggly, "\alpha'"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "x"] \arrow[d, "d(x)"'] \arrow[ur, phantom, "\swarrow\searrow"] & \bullet \arrow[l, squiggly, "\gamma"] \arrow[r, squiggly, "\gamma'"'] \arrow[u, "x''"'] \arrow[d, "d(x'')"] \arrow[ur, phantom, "\swarrow\searrow"] & \bullet \arrow[u, "x'"'] \arrow[d, "d(x')"] \\
\bullet & \bullet & \bullet \\
PF(x,x) & PF(x'',x'') & PF(x',x')
\end{tikzcd}$$

On a alors :

$$\tilde{d}(x) = d(x) \; R_{fl} \; o(x,x,\gamma,\gamma)\cdot d(x\cdot\gamma)$$

(en vertu de l'axiome (d_{comp}) et car $\gamma \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl} \; d(x\cdot\gamma)$$

(car $o(x,x,\gamma,\gamma) \in \mathcal{R}$ en vertu de l'axiome ($o_{\mathcal{R}}$))

$$R_{fl} \; d(\alpha\cdot x'')$$

(en vertu de l'axiome (ρ_{fl},d) et car $x\cdot\gamma \;\swarrow\searrow\; \alpha\cdot x''$)

$$R_{fl} \; d(x'') = \tilde{d}(x'')$$

(en vertu de l'axiome (ρ_q,d) et car $\rho_q(\alpha,x'',x'') \in \mathcal{R}$).

On a ainsi :

$$\tilde{d}(x) \; R_{fl} \; \tilde{d}(x'')$$

et, de même :

$$\tilde{d}(x') \; R_{fl} \; \tilde{d}(x'') \;,$$

ce qui achève la démonstration.

<u>Fin de la preuve.</u>

Par définition même de $\widetilde{cte}$, on a la proposition suivante.

<u>Proposition 13 :</u> *Si* $A \in Ob(llcc(\mathbb{G}))$, *alors on a :*

$$\widetilde{dom}(\widetilde{cte}(A)) = A$$

et

$$\widetilde{codom}(\widetilde{cte}(A)) = 1 \;.$$

<u>Proposition 14 :</u> *La loi* $\widetilde{\mathrm{cte}} = \mathrm{cte}$ *est compatible avec le couple de relations* $R = (R_{ob}, R_{fl})$.

<u>Preuve.</u>
Soient A ,$A' \in \mathrm{Ob}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ tels que $A\ R_{ob}\ A'$.
Il existe donc des flèches α et α' telles que :

$$A \overset{\alpha}{\longleftarrow\!\!\!\sim\!\!\sim\!\!\sim} A'' \overset{\alpha'}{\sim\!\!\sim\!\!\sim\!\!\!\longrightarrow} A'$$

On a alors le diagramme ci-dessous (en vertu de l'axiome (cte_{Fl})) :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "\mathrm{cte}(A)"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow"] & A'' \arrow[l, squiggly, "\alpha"'] \arrow[r, squiggly, "\alpha'"] \arrow[d, "\mathrm{cte}(A'')"] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & A' \arrow[d, "\mathrm{cte}(A')"] \\
1 & 1 \arrow[l, squiggly, "id"] \arrow[r, squiggly, "id"'] & 1
\end{tikzcd}$$

ce qui achève la démonstration.
<u>Fin de la preuve.</u>

En raison des propositions 2, 4, 5, 7, 9, 10, 12 et 14, nous savons maintenant que les lois PF , f , s , b , p , d , *un* et cte (sur $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$), sont compatibles avec le couple de relations $R = (R_{ob}, R_{fl})$ (pour la loi *un* , c'est trivialement vrai), et passent donc au quotient, et cu'en outre les lois au quotient sont représentées (par les lois $\widetilde{PF}$, $\tilde{f}$. $\tilde{s}$, $\tilde{b}$, $\tilde{p}$, $\tilde{d}$, $\widetilde{un}$ et $\widetilde{\mathrm{cte}}$ sur $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$).

Nous pouvons donc légitimement poser la définition ci-dessous et affirmer alors la proposition qui la suit (où $\mathbb{C}$ désigne, bien entendu, la catégorie des composantes connexes définie dans le paragraphe 4).

<u>Définition 3 :</u> *Si* $\overline{x}$, $\overline{y} \in Fl(\mathbb{C})$ *sont telles que :*

$$\overline{codom}(\overline{x}) = \overline{codom}(\overline{y}) ,$$

alors on pose (et cela a bien un sens) :

$$\overline{PF}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{\widetilde{PF}(x,y,\alpha,\beta)} ,$$

$$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{\widetilde{f}(x,y,\alpha,\beta)} ,$$

$$\overline{s}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{\widetilde{s}(x,y,\alpha,\beta)} ,$$

$$\overline{b}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{\widetilde{b}(x,y,\alpha,\beta)} ,$$

où (α,β) *est une connexion (arbitrairement choisie) entre les objets* $codom(x)$ *et* $codom(y)$.

Si $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{v}$, $\overline{w} \in Fl(\mathbb{C})$ *sont telles que :*

$$\overline{codom}(\overline{x}) = \overline{codom}(\overline{y}) ,$$

$$\overline{dom}(\overline{x}) = \overline{codom}(\overline{v}) \quad et \quad \overline{dom}(\overline{y}) = \overline{codom}(\overline{w}) ,$$

alors on pose (et cela a bien un sens) :

$$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w}) = \overline{\widetilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)} ,$$

où (α,β) , (γ,δ) *et* (ε,ζ) *sont respectivement des connexions (arbitrairement choisies) entre les objets* $codom(x)$ *et* $codom(y)$, $dom(x)$ *et* $codom(v)$, $dom(y)$ *et* $codom(w)$.

Si $\overline{x} \in Fl(\mathbb{C})$, *alors on pose (et cela a bien un sens) :*

$$\overline{d}(\overline{x}) = \overline{\widetilde{d}(x)} .$$

Si $\overline{A} \in Ob(\mathbb{C})$, *alors on pose (et cela a bien un sens) :*

$$\overline{cte}(\overline{A}) = \overline{\widetilde{cte}(A)} .$$

Et enfin, on définit bien entendu la loi $\overline{un}$ *comme étant la loi typante qui sélectionne le seul objet* $\overline{1}$.

<u>Proposition 15 :</u> *Si* x , $y \in Fl(llcc(\mathbb{G}))$ *sont telles que :*

$$codom(x) = codom(y) ,$$

alors on a :

$$\overline{PF}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{PF(x,y)} ,$$
$$\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{f(x,y)} ,$$
$$\overline{s}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{s(x,y)} ,$$
$$\overline{b}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{b(x,y)} .$$

Si $x , y , v , w \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$ *sont telles que :*

$$\mathrm{codom}(x) = \mathrm{codom}(v) ,$$
$$\mathrm{dom}(x) = \mathrm{codom}(v) \quad et \quad \mathrm{dom}(y) = \mathrm{codom}(w) ,$$

alors on a :

$$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w}) = \overline{p(x,y,v,w)} .$$

Si $x \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$, *alors on a :*

$$\overline{d}(\overline{x}) = \overline{d(x)} .$$

Si $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$, *alors on a :*

$$\overline{cte}(\overline{A}) = \overline{cte(A)} .$$

Les propositions 3, 8, 11 et 13 assurent alors que :

<u>Proposition 16 :</u> *Si* $\overline{x} , \overline{y} \in \mathrm{Fl}(\mathbb{C})$ *sont telles que :*

$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{x}) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{v}) ,$$

alors on a :

$$\overline{\mathrm{dom}}(\overline{f}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{\mathrm{dom}}(\overline{s}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{\mathrm{dom}}(\overline{b}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{PF}(\overline{x},\overline{y})$$

et

$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{f}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{\mathrm{dom}}(\overline{x}) ,$$
$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{s}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{\mathrm{dom}}(\overline{y}) ,$$
$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{b}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{x}) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{v}) .$$

Si $\overline{x} , \overline{y} , \overline{v} , \overline{w} \in \mathrm{Fl}(\mathbb{C})$ *sont telles que :*

$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{x}) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{y}) ,$$
$$\overline{\mathrm{dom}}(\overline{x}) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{v}) \quad et \quad \overline{\mathrm{dom}}(\overline{y}) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{w}) ,$$

alors on a :

$$\overline{\mathrm{dom}}(\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w})) = \overline{PF}(\overline{x}\cdot\overline{v},\overline{y}\cdot\overline{w})$$

et

$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w})) = \overline{PF}(\overline{x},\overline{v}) \ .$$

Si $\overline{x} \in \mathrm{Fl}(\mathbb{C})$, *alors on a :*

$$\overline{\mathrm{dom}}(\overline{d}(\overline{x})) = \overline{\mathrm{dom}}(\overline{x})$$

et

$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{d}(\overline{x})) = \overline{PF}(\overline{x},\overline{x}) \ .$$

Si $\overline{A} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$, *alors on a :*

$$\overline{\mathrm{dom}}(\overline{\mathrm{cte}}(\overline{A})) = \overline{A}$$

et

$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{\mathrm{cte}}(\overline{A})) = \overline{1} \ .$$

Il nous reste maintenant à établir que les axiomes de la structure de LCC (cf proposition 2 du paragraphe 1) sont vérifiés. Ceci fait l'objet des propositions qui suivent.

Proposition 17 : *Si* $\overline{x}$, $\overline{y} \in \mathrm{Fl}(\mathbb{C})$ *sont telles que :*

$$\overline{\mathrm{codom}}(\overline{x}) = \overline{\mathrm{codom}}(\overline{y}) \ ,$$

alors on a :

$$\overline{x}\cdot\overline{f}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{b}(\overline{x},\overline{y})$$

et

$$\overline{y}\cdot\overline{s}(\overline{x},\overline{y}) = \overline{b}(\overline{x},\overline{y}) \ .$$

Preuve.

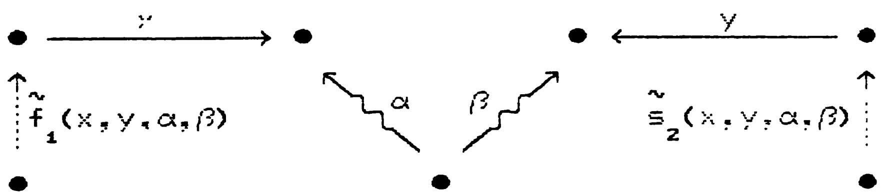
Pour ce faire, il suffit (en vertu du lemme 3) d'établir que :

$$x\cdot\tilde{f}_1(x,y,\alpha,\beta) \ R_{fl} \ \tilde{b}_1(x,y,\alpha,\beta)$$

et

$$y\cdot\tilde{s}_2(x,y,\alpha,\beta) \ R_{fl} \ \tilde{b}_2(x,y,\alpha,\beta) \ ,$$

où (α,β) est une connexion entre $\mathrm{codom}(x)$ et $\mathrm{codom}(y)$:



Or on a :

$$x\cdot\tilde{f}_1(x,y,\alpha,\beta) = x\cdot f(x,\alpha\cdot s(y,\beta))$$
$$\Longrightarrow b(x,\alpha\cdot s(y,\beta))$$
(en vertu de l'axiome (cône$_1$))
$$= \tilde{b}_1(x,y,\alpha,\beta)\ .$$

Et l'on prouve de manière analogue la seconde propriété.

Fin de la preuve.

Proposition 18 : *Si* $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$, $\bar{w} \in \mathrm{Fl}(\bar{\mathbb{C}})$ *sont telles que :*

$$\overline{\mathrm{codom}}(\bar{x}) = \overline{\mathrm{codom}}(\bar{y})\ ,$$
$$\overline{\mathrm{dom}}(\bar{x}) = \overline{\mathrm{codom}}(\bar{v}) \quad et \quad \overline{\mathrm{dom}}(\bar{y}) = \overline{\mathrm{codom}}(\bar{w})\ ,$$

alors on a :

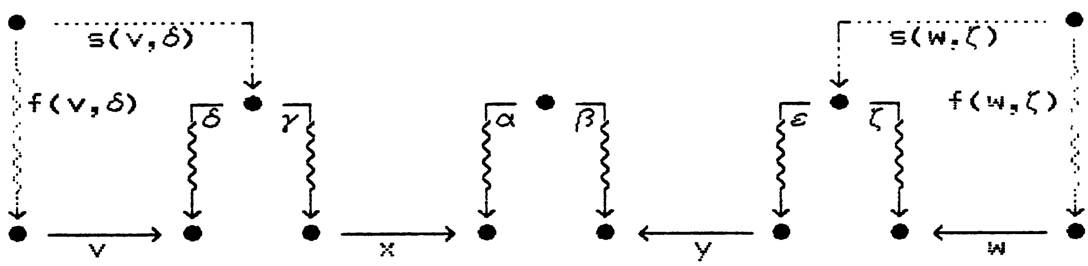
$$\bar{f}(\bar{x},\bar{y})\cdot\bar{p}(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{w}) = \bar{v}\cdot\bar{f}(\bar{x}\cdot\bar{v},\bar{y}\cdot\bar{w})$$

et

$$\bar{s}(\bar{x},\bar{y})\cdot\bar{p}(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{w}) = \bar{w}\cdot\bar{s}(\bar{x}\cdot\bar{v},\bar{y}\cdot\bar{w})\ .$$

Preuve.

Soient (α,β) , (γ,δ) et (ε,ζ) des connexions entre objets, comme représenté ci-dessous :



Pour établir la première des égalités recherchées, il suffit (en raison de la proposition 9 du paragraphe 4 d'une part et car $f(v,\delta) \in \mathcal{R}$ d'autre part) d'établir que :

$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta)\cdot\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$$

$$R_{fl}\ v\cdot f(v,\delta)\cdot\tilde{f}(x\cdot\gamma\cdot s(v,\delta),y\cdot\varepsilon\cdot s(w,\zeta),\alpha,\beta)\ .$$

Posons $\hat{v} = \gamma\cdot s(v,\delta)$ et $\hat{w} = \varepsilon\cdot s(w,\zeta)$.

On a alors :

$$\tilde{f}(x,y,\alpha,\beta)\cdot\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)$$

$$= f(x,\alpha\cdot s(y,\beta))\cdot p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},s(\hat{w},f(v,\beta)))$$

$$\Longrightarrow \hat{v}\cdot f(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y,\beta)\cdot s(\hat{w},f(y,\beta)))$$

(en vertu de l'axiome (p_f))

$$R_{fl}\ \hat{v}\cdot f(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y\cdot\hat{w},\beta)\cdot\rho_c(y,\hat{w},\beta))$$

(en vertu du lemme 2 et de l'axiome $((\rho_c)_s)$)

$$R_{fl}\ \hat{v}\cdot f(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y\cdot\hat{w},\beta))$$

(en vertu du lemme 1 et car $\rho_c(y,\hat{w},\beta) \in \mathcal{R}$)

$$= \gamma\cdot s(v,\delta)\cdot\tilde{f}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\alpha,\beta)$$

$$R_{fl}\ s(v,\delta)\cdot\tilde{f}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\alpha,\beta)$$

(car $\gamma \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl}\ \delta\cdot s(v,\delta)\cdot\tilde{f}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\alpha,\beta)$$

(car $\delta \in \mathcal{R}$)

$$R_{fl}\ v\cdot f(v,\delta)\cdot\tilde{f}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\alpha,\beta)$$

(en vertu des axiomes (cône_1) et (cône_2)) .

La première des égalités recherchées est donc prouvée et la seconde se démontre de manière analogue.

Fin de la preuve.

Proposition 19 : *Si* $\overline{x} \in \mathrm{Fl}(\mathbb{C})$, *alors on a :*

$$\overline{f}(\overline{x},\overline{x})\cdot\overline{d}(\overline{x}) = \overline{id}(\overline{dom}(\overline{x}))$$

et

$$\overline{s}(\overline{x},\overline{x})\cdot\overline{d}(\overline{x}) = \overline{id}(\overline{dom}(\overline{x}))\ .$$

Preuve.

On a :

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{x})\cdot\bar{d}(\bar{x}) = \overline{f(x.x)}\cdot\overline{d(x)}$$

(en vertu de la proposition 15)

$$= \overline{f(x,x)\cdot d(x)}$$

(en vertu de la proposition 9 du paragraphe 4).

L'axiome (d_f) assure alors que :

$$\bar{f}(\bar{x},\bar{x})\cdot\bar{d}(\bar{x}) = \bar{i}d\ .$$

La seconde égalité se démontre de manière analogue.

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Proposition 20 :</u> *Si* $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, $\bar{m}$, $\bar{n} \in Fl(\mathbb{C})$ *sont telles que :*

$$\bar{c}odom(\bar{x}) = \bar{c}odom(\bar{y})\ ,$$

$$\bar{d}om(\bar{x}) = \bar{c}odom(\bar{v})\ ,\quad \bar{d}om(\bar{y}) = \bar{c}odom(\bar{w})\ ,$$

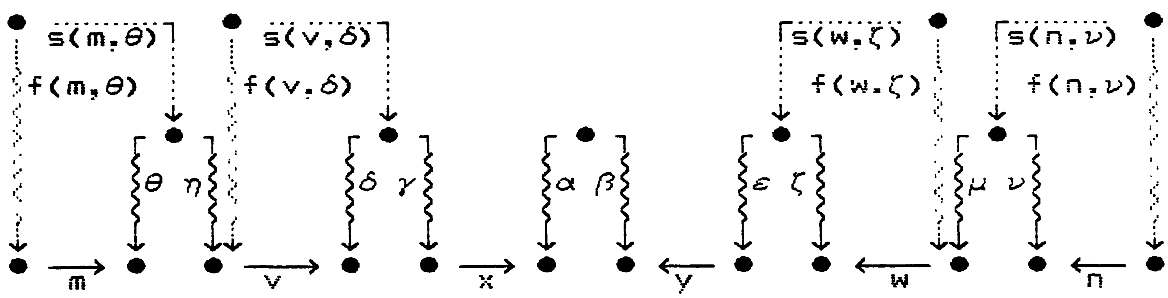
$$\bar{d}om(\bar{v}) = \bar{c}odom(\bar{m}) \quad \textit{et} \quad \bar{d}om(\bar{w}) = \bar{c}odom(\bar{n})\ ,$$

alors on a :

$$\bar{p}(\bar{x},\bar{y},\bar{v},\bar{w})\cdot\bar{p}(\bar{x}\cdot\bar{v},\bar{y}\cdot\bar{w},\bar{m},\bar{n}) = \bar{p}(\bar{x},\bar{y},\bar{v}\cdot\bar{m},\bar{w}\cdot\bar{n})\ .$$

<u>Preuve.</u>

Soient (α,β) , (γ,δ) , (ε,ζ) , (η,θ) et (μ,ν) des connexions entre objets, comme représenté ci-dessous :



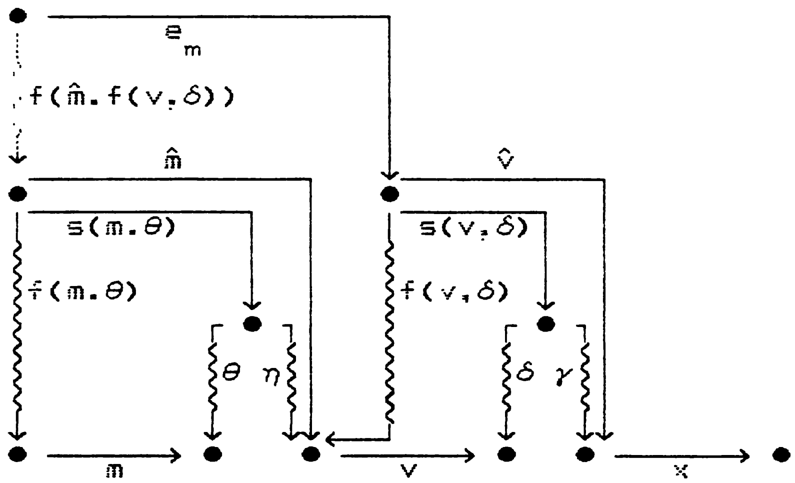
Posons :

$$\hat{v} = \gamma\cdot s(v,\delta)\ ,\quad \hat{m} = \eta\cdot s(m.\theta)$$

et

$$e_m = s(\hat{m},f(v.\delta))\ ,$$

comme représenté ci-dessous :



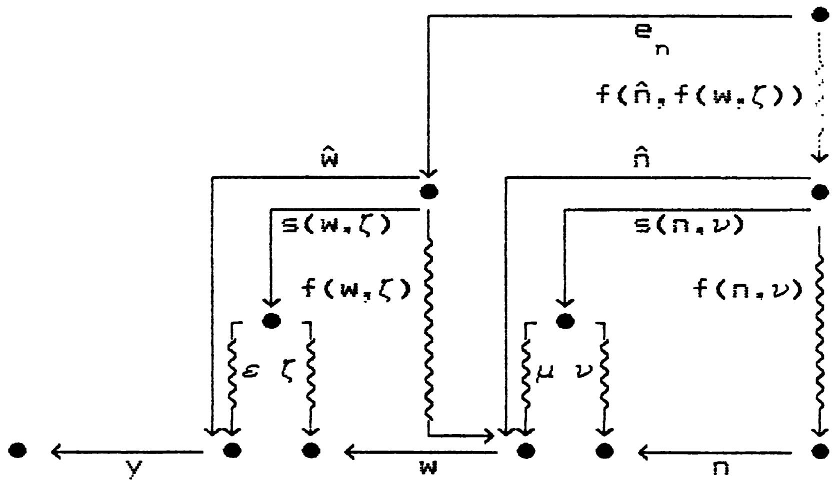
Et, de la même façon, posons enfin :

$$\hat{w} = \varepsilon \cdot s(w,\zeta) \quad , \quad \hat{n} = \mu \cdot s(n,\nu)$$

et

$$e_n = s(\hat{n}, f(w,\zeta)) \quad ,$$

comme représenté ci-dessous :



Par définition, on a :

$$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w}) = \overline{\tilde{p}(x,y,v,w,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)} \quad ,$$

$$\overline{p}(\overline{x}\cdot\overline{v},\overline{y}\cdot\overline{w},\overline{m},\overline{n}) = \overline{\tilde{p}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\hat{m},\hat{n},\alpha,\beta,id,f(v,\delta),id,f(w,\zeta))}$$

(car, comme déjà vu, on a $\hat{m}\ R_{fl}\ m$ et $\hat{n}\ R_{fl}\ n$)

et

$$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v}\cdot\overline{m},\overline{w}\cdot\overline{n}) = \overline{\tilde{p}(x,y,v\cdot\hat{m},w\cdot\hat{n},\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta)} \ .$$

Or on a :

$$\tilde{p}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\hat{m},\hat{n},\alpha,\beta,id,f(v,\delta),id,f(w,\zeta))$$
$$= p(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y\cdot\hat{w},\beta),s(\hat{m},f(v,\delta)).s(s(\hat{n},f(w,\zeta)),f(y\cdot\hat{w},\beta)))$$
$$= p(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y\cdot\hat{w},\beta),e_m,s(e_n,f(y\cdot\hat{w},\beta)))$$

Remarquons maintenant que :

$$s(e_n,f(y\cdot\hat{w},\beta)) \ R_{fl} \ s(e_n,f(y\cdot\hat{w},\beta)\cdot\rho_c(y,\hat{w},\beta))$$
(en vertu du lemme 1 et car $\rho_c(y,\hat{w},\beta) \in \mathcal{R}$)
$$R_{fl} \ s(e_n,f(\hat{w},f(y,\beta)))$$
(en vertu du lemme 2 et de l'axiome $((\rho_c)_f)$)
$$R_{fl} \ \rho_c(y,\hat{w},\beta)\cdot s(e_n,f(\hat{w},f(y,\beta)))$$
(car $\rho_c(y,\hat{w},\beta) \in \mathcal{R}$).

La flèche $\rho_c(y,\hat{w},\beta)\cdot s(e_n,f(\hat{w},f(y,\beta)))$ ayant même codomaine que la flèche $s(e_n,f(y\cdot\hat{w},\beta))$, la compatibilité de p avec R_{fl} (proposition 10) assure alors que :

$$\tilde{p}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\hat{m},\hat{n},\alpha,\beta,id,f(v,\delta),id,f(w,\zeta))$$
$$R_{fl} \ p(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y\cdot\hat{w},\beta),e_m,\rho_c(y,\hat{w},\beta)\cdot s(e_n,f(\hat{w},f(v,\beta))))$$

et donc que :

$$\tilde{p}(x\cdot\hat{v},y\cdot\hat{w},\hat{m},\hat{n},\alpha,\beta,id,f(v,\delta),id,f(w,\zeta))$$
$$R_{fl} \ p(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y\cdot\hat{w},\beta)\cdot\rho_c(y,\hat{w},\beta),e_m,s(e_n,f(\hat{w},f(v,\beta))))$$
(en vertu du lemme 9 et car $\rho_c(y,\hat{w},\beta) \in \mathcal{R}$)
$$R_{fl} \ p(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y,\beta)\cdot s(\hat{w},f(y,\beta)),e_m,s(e_n,f(\hat{w},f(y,\beta))))$$
(en vertu du lemme 10 et de l'axiome $((\rho_c)_s)$).

Notons provisoirement :

$$p(x\cdot\hat{v},\alpha\cdot s(y,\beta)\cdot s(\hat{w},f(v,\beta)),e_m,s(e_n,f(\hat{w},f(y,\beta)))) = \kappa \ .$$

On a alors :

$$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w})\cdot\overline{p}(\overline{x}\cdot\overline{v},\overline{y}\cdot\overline{w},\overline{m},\overline{n}) = \overline{p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},s(\hat{w},f(y,\beta)))\cdot\kappa}$$
$$= \overline{p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v},s(\hat{w},f(y,\beta)))\cdot\kappa}$$

(en vertu de la proposition 9 du paragraphe 4).

Par conséquent, l'axiome (p_{comp}) assure que :

$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w})\cdot\overline{p}(\overline{x}\cdot\overline{v},\overline{y}\cdot\overline{w},\overline{m},\overline{n})$

$$= \overline{p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v}\cdot e_m,s(\hat{w},f(v,\beta))\cdot s(e_n,f(\hat{w}\cdot f(v,\beta))))}\ .$$

Remarquons maintenant que :

$s(\hat{w},f(y,\beta))\cdot s(e_n,f(\hat{w},f(y,\beta)))$

$= s(\hat{w},f(y,\beta))\cdot s(s(\hat{n},f(w,\zeta)),f(\hat{w},f(y,\beta)))$

$R_{fl}\ s(\hat{w}\cdot s(\hat{n},f(w,\zeta)),f(y,\beta))\cdot\rho_c(\hat{w},s(\hat{n},f(w,\zeta)),f(v,\beta))$

(en vertu de l'axiome $((\rho_c)_s)$ puisque $f(v,\beta)\in\mathcal{R}$)

$R_{fl}\ s(\hat{w}\cdot s(\hat{n},f(w,\zeta)),f(y,\beta))$

(car $\rho_c(\hat{w},s(\hat{n},f(w,\zeta)),f(y,\beta))\in\mathcal{R}$)

$= s(\varepsilon\cdot s(w,\zeta)\cdot s(\hat{n},f(w,\zeta)),f(y,\beta))$

$R_{fl}\ s(\varepsilon\cdot s(w\cdot\hat{n},\zeta)\cdot\rho_c(w,\hat{n},\zeta),f(y,\beta))$

(en vertu du lemme 2 et de l'axiome $((\rho_c)_s)$)

$R_{fl}\ s(\varepsilon\cdot s(w\cdot\hat{n},\zeta),f(y,\beta))$

(en vertu du lemme 1 et car $\rho_c(w,\hat{n},\zeta)\in\mathcal{R}$).

La flèche $s(\varepsilon\cdot s(w\cdot\hat{n},\zeta),f(y,\beta))$ ayant même codomaine que la flèche $s(\hat{w},f(y,\beta))\cdot s(e_n,f(\hat{w},f(y,\beta)))$, la compatibilité de p avec R_{fl} (proposition 10) assure alors que :

$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w})\cdot\overline{p}(\overline{x}\cdot\overline{v},\overline{v}\cdot\overline{w},\overline{m},\overline{n})$

$$= \overline{p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\hat{v}\cdot e_m,s(\varepsilon\cdot s(w\cdot\hat{n},\zeta),f(y,\beta)))}$$

et donc que :

$\overline{p}(\overline{x},\overline{v},\overline{v},\overline{w})\cdot\overline{p}(\overline{x}\cdot\overline{v},\overline{y}\cdot\overline{w},\overline{m},\overline{n})$

$$= \overline{p(x,\alpha\cdot s(v,\beta),\gamma\cdot s(v,\delta)\cdot s(\hat{m},f(v,\delta)),s(\varepsilon\cdot s(w\cdot\hat{n},\zeta),f(v,\beta)))}$$

$$= \overline{p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\gamma\cdot s(v\cdot\hat{m},\delta)\cdot\rho_c(v,\hat{m},\delta),s(\varepsilon\cdot s(w\cdot\hat{n},\zeta),f(v,\beta)))}$$

(en vertu du lemme 10 et de l'axiome $((\rho_c)_s)$)

$$= \overline{p(x,\alpha\cdot s(y,\beta),\gamma\cdot s(v\cdot\hat{m},\delta),s(\varepsilon\cdot s(w\cdot\hat{n},\zeta),f(v,\beta)))}$$

(en vertu du lemme 9 et car $\rho_c(v,\hat{m},\delta)\in\mathcal{R}$)

$$= \overline{\tilde{p}(x,v.v\cdot\hat{m}.w\cdot\hat{n},\alpha,\beta,\gamma,\delta.\varepsilon.\zeta)}$$

$$= \overline{p}(\overline{x},\overline{y}.\overline{v}\cdot\overline{m}.\overline{w}\cdot\overline{n}) \ .$$

ce qui achève la démonstration.

Fin de la preuve.

Proposition 21 : *Si* $\overline{y}$, $\overline{x} \in Fl(\mathbb{C})$ *sont consécutives i.e. telles que :*

$$\overline{dom}(\overline{y}) = \overline{codom}(\overline{x}) \ ,$$

alors on a :

$$\overline{p}(\overline{y},\overline{y},\overline{x},\overline{x})\cdot\overline{d}(\overline{y}\cdot\overline{x}) = \overline{d}(\overline{y})\cdot\overline{x} \ .$$

Preuve.

Soit $(\alpha.\beta)$ une connexion entre $codom(x)$ et $dom(y)$. comme représenté ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} & \bullet & \bullet \arrow[l, squiggly, "\alpha"'] \arrow[r, squiggly, "\beta"'] & \bullet \arrow[dr, "y"] & \\ \bullet \arrow[ur, "x"] & & & & \bullet \end{tikzcd}$$

On a alors d'une part :

$$\overline{p}(\overline{y},\overline{y},\overline{x},\overline{x}) = \overline{p}(\overline{y},\overline{y},\overline{\beta\cdot s(x,\alpha)},\overline{\beta\cdot s(x.\alpha)})$$

(car, comme déjà vu, $x \ R_{fl} \ \beta\cdot s(x,\alpha)$)

$$= \overline{p(y,y,\beta\cdot s(x,\alpha).\beta\cdot s(x,\alpha))}$$

(en vertu de la proposition 15).

Et on a d'autre part (en vertu de la proposition 15 encore) :

$$\overline{d}(\overline{y}\cdot\overline{x}) = \overline{d}(\overline{y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha)}) = \overline{d(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha))} \ .$$

On a ainsi :

$$\overline{p}(\overline{y},\overline{y},\overline{x},\overline{x})\cdot\overline{d}(\overline{y}\cdot\overline{x}) = \overline{p(y,y,\beta\cdot s(x,\alpha).\beta\cdot s(x,\alpha))\cdot d(y\cdot\beta\cdot s(x.\alpha))}$$

(en vertu de la proposition 9 du paragraphe 4)

$$= \overline{d(y)\cdot\beta\cdot s(x.\alpha)}$$

(en vertu de l'axiome (d_{comp}))

$$= \overline{d(y)}\cdot\overline{s(x,\alpha)}$$

(en vertu de la proposition 9 (§4) et car $\beta \in \mathcal{R}$)

$$= \overline{d}(\overline{y}) \cdot \overline{x}$$

(en vertu de la proposition 15 et car $s(x,\alpha)\ R_{fl}\ x$).

<u>Fin de la preuve.</u>

<u>Proposition 22 :</u> *Si* $\overline{x}, \overline{y} \in Fl(\mathbb{C})$ *sont telles que :*

$$\overline{codom}(\overline{x}) = \overline{codom}(\overline{y}) \ ,$$

alors on a :

$$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{f}(\overline{x},\overline{y}),\overline{s}(\overline{x},\overline{y}))\cdot\overline{d}(\overline{b}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{id}(\overline{PF}(\overline{x},\overline{y})) \ .$$

<u>Preuve.</u>

Soit (α,β) une connexion entre $codom(x)$ et $codom(y)$, comme représenté ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \bullet & \bullet \arrow[l, "y"'] \\
& & \bullet \arrow[ul, rightsquigarrow, "\alpha"] \arrow[ur, rightsquigarrow, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

Notons $s(x,\alpha) = e_x$ et $s(y,\beta) = e_y$. Ainsi et comme déjà vu, on a $x\ R_{fl}\ e_x$ et $y\ R_{fl}\ e_y$.

On a alors d'une part :

$$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{f}(\overline{x},\overline{y}),\overline{s}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{p}(\overline{e_x},\overline{e_y},\overline{f}(\overline{x},\overline{y}),\overline{s}(\overline{x},\overline{y}))$$

$$= \overline{p}(\overline{e_x},\overline{e_y},\overline{\tilde{f}_3(x,y,\alpha,\beta)},\overline{\tilde{s}_3(x,y,\alpha,\beta)})$$

(en vertu du lemme 3)

$$= \overline{p}(\overline{e_x},\overline{e_y},\overline{f(e_x,e_y)},\overline{s(e_x,e_y)})$$

$$= \overline{p(e_x,e_y,f(e_x,e_y),s(e_x,e_y))}$$

(en vertu de la proposition 15).

Et on a d'autre part :

$$\overline{d}(\overline{b}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{d(\tilde{b}_3(x,y,\alpha,\beta))}$$

(en vertu du lemme 3)

$$= \overline{d(b(e_x,e_y))} \ .$$

Or l'axiome (p,f,s,b,d) (et la proposition 9 du paragraphe 4) assure(nt) que :

$$\overline{p(e_x,e_y,f(e_x,e_y),s(e_x,e_y))} \cdot \overline{s(d(b(e_x,e_y)),\lambda)}$$
$$= \overline{f(d(b(e_x,e_y)),\lambda)} \ ,$$

où λ est une certaine flèche élément de $\mathcal{R}$ (et dont le domaine est bien $PF(e_x \cdot f(e_x,e_y), e_y \cdot s(e_x,e_y))$); ainsi, comme on a :

$$\overline{f(d(b(e_x,e_y)),\lambda)} = \overline{id}$$

(en vertu de l'axiome (h_f) et car $\lambda \in \mathcal{R}$)

et

$$\overline{s(d(b(e_x,e_y)),\lambda)} = \overline{d(b(e_x,e_y))}$$

(comme déjà vu plusieurs fois et car $\lambda \in \mathcal{R}$),

on a en fin de compte :

$$\overline{p(e_x,e_y,f(e_x,e_y),s(e_x,e_y))} \cdot \overline{d(b(e_x,e_y))} = \overline{id} \ .$$

et donc :

$$\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{f}(\overline{x},\overline{y}),\overline{s}(\overline{x},\overline{y})) \cdot \overline{d}(\overline{b}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{id} \ .$$

Fin de la preuve.

Proposition 23 : *Si* $\overline{x} \in Fl(\mathbb{C})$, *si* $\overline{codom}(\overline{x}) = \overline{A}$ *et si* $\overline{dom}(\overline{x}) = \overline{B}$, *alors on a :*

$$\overline{f}(\overline{x},\overline{id}(\overline{A})) = \overline{id}(\overline{B})$$

et

$$\overline{s}(\overline{id}(\overline{A}),\overline{x}) = \overline{id}(\overline{B}) \ .$$

Preuve.

Par hypothèse, on a :

$$x : B' \longrightarrow A' \quad \text{avec} \quad \overline{B'} = \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A'} = \overline{A} \ .$$

On a donc :

$$\overline{f}(\overline{x},\overline{id}(\overline{A})) = \overline{f}(\overline{x},\overline{id}(\overline{A'}))$$
$$= \overline{f(x,id(A'))}$$

(en vertu de la proposition 9 (§4) et de la proposition 15)

$$= \overline{\mathrm{id}}(\overline{\mathrm{dom}}(\overline{x}))$$

(en vertu de l'axiome (h_f))

$$= \overline{\mathrm{id}}(\overline{B}) \ .$$

L'autre égalité se prouve de manière analogue.

Fin de la preuve.

Il est immédiat (en vertu de l'axiome (cte.1) et de la proposition 15) que :

Proposition 24 : $\overline{\mathrm{cte}}(\overline{1}) = \overline{\mathrm{id}}(\overline{1})$.

Enfin, il reste à établir que :

Proposition 25 : *Si* $\overline{x} \in \mathrm{Fl}(\mathbb{C})$, *si* $\overline{\mathrm{codom}}(\overline{x}) = \overline{A}$ *et si* $\overline{\mathrm{dom}}(\overline{x}) = \overline{B}$, *alors on a :*

$$\overline{\mathrm{cte}}(\overline{A}).\overline{x} = \overline{\mathrm{cte}}(\overline{B}) \ .$$

Preuve.

Par hypothèse, on a :

$$x : B' \longrightarrow A' \quad \text{avec} \quad \overline{B'} = \overline{B} \quad \text{et} \quad \overline{A'} = \overline{A} \ .$$

On a donc :

$$\overline{\mathrm{cte}}(\overline{A}).\overline{x} = \overline{\mathrm{cte}}(\overline{A'}).\overline{x}$$

$$= \overline{\mathrm{cte}(A')}.\overline{x}$$

(en vertu de la proposition 15)

$$= \overline{\mathrm{cte}(A').x}$$

(en vertu de la proposition 9 du paragraphe 4)

$$= \overline{\mathrm{cte}}(\overline{B'})$$

(en vertu de l'axiome (cte_{Fl}) et de la proposition 15)

$$= \overline{cte}(\overline{B}) \ .$$

<u>Fin de la preuve.</u>

On conclut de la définition 3 et des propositions 16 à 25 que les lois $\overline{PF}$, $\overline{f}$, $\overline{s}$ (, $\overline{b}$), $\overline{o}$, $\overline{d}$, $\overline{un}$ et $\overline{cte}$ définissent bien une structure de LCC sur la catégorie $\mathbb{C} = \underline{llcc(\mathbb{G})}/_R$ (définie dans le paragraphe 4) et qu'ainsi le point (ii) du théorème (§2) est établi: désormais cette LCC des composantes connexes sera donc notée :

$$\langle\mathbb{C}\rangle = llcc(\mathbb{G})/_R \ .$$

Le foncteur "composantes connexes" i.e. le foncteur passage au quotient :

$$\underline{cano(\mathbb{G})} : \underline{llcc(\mathbb{G})} \longrightarrow \underline{llcc(\mathbb{G})}/_R = \mathbb{C}$$

est un homomorphisme de LLCC en raison de la proposition 15 (pour les lois dont il n'y est pas fait mention, les propriétés voulues sont trivialement vérifiées): désormais ce foncteur sera donc noté :

$$cano(\mathbb{G}) : llcc(\mathbb{G}) \longrightarrow llcc(\mathbb{G})/_R = \langle\mathbb{C}\rangle \ .$$

Enfin, c'est justement parce que les lois de LCC (cf ci-dessus) de $\langle\mathbb{C}\rangle$ sont représentées (par les lois $\widetilde{PF}$, $\tilde{f}$, $\tilde{s}$ (, $\tilde{b}$), $\tilde{o}$, $\tilde{d}$, $\widetilde{un}$ et $\widetilde{cte}$) que les propositions 1 et 6 assurent que le foncteur cano($\mathbb{G}$) vérifie le point (ix) du théorème (§2).

---

6. Liberté de la LCC des composantes connexes

Nous reprenons ici, entre autres, les notations du paragraphe 2.

Proposition : *La catégorie localement cartésienne*

$$\langle\mathbb{C}\rangle = \mathrm{llcc}(\mathbb{G})/_{R}$$

est librement engendrée par le graphe orienté $\mathbb{G}$ *(relativement au foncteur d'oubli "graphe orienté sous-jacent"* $\mathbb{O} : \mathbb{LCC} \longrightarrow \mathbb{GO}$ *). Autrement dit, on a :*

$$\mathrm{llcc}(\mathbb{G})/_{R} = \mathrm{lcc}(\mathbb{G}) .$$

Preuve.

Par définition même, $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$ est librement engendrée par $\mathbb{G}$ (relativement au foncteur d'oubli "graphe orienté sous-jacent" $\mathbb{LO} : \mathbb{LLCC} \longrightarrow \mathbb{GO}$). Par "transitivité des structures libres", il suffit donc d'établir que $\langle\mathbb{C}\rangle = \mathrm{llcc}(\mathbb{G})/_{R}$ est librement engendrée par $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$ (relativement au foncteur "LLCC sous-jacente" $\mathbb{L} : \mathbb{LCC} \hookrightarrow \mathbb{LLCC}$). C'est ce que nous allons faire, moyennant le choix, pour (future) flèche canonique d'adjonction, de l'homomorphisme de LLCC :

$$\mathrm{cano}(\mathbb{G}) : \mathrm{llcc}(\mathbb{G}) \longrightarrow \langle\mathbb{C}\rangle = \mathrm{llcc}(\mathbb{G})/_{R}$$

défini dans les paragraphes 4 et 5.

Pour ce faire, on se donne un homomorphisme (quelconque) de LLCC :

$$\mathbb{H} : \mathrm{llcc}(\mathbb{G}) \longrightarrow \langle\mathbb{D}\rangle$$

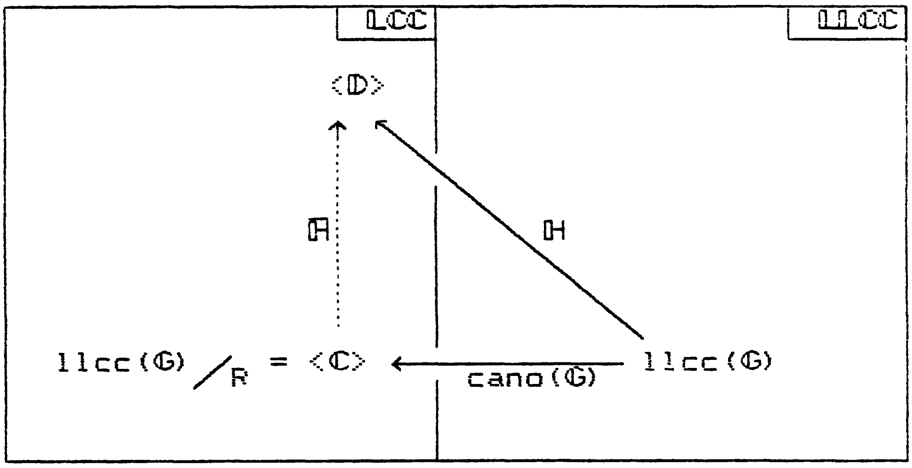
où $\langle\mathbb{D}\rangle$ est une LCC et on doit prouver qu'il existe alors un unique homomorphisme de LCC :

$$\overline{\mathbb{H}} : \langle\mathbb{C}\rangle \longrightarrow \langle\mathbb{D}\rangle$$

vérifiant :

$$\overline{\mathbb{H}}.\mathrm{cano}(\mathbb{G}) = \mathbb{H} .$$

comme représenté par le diagramme ci-dessous :



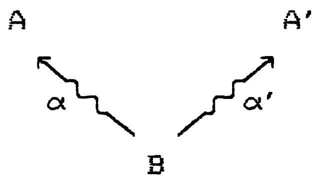
(dit autrement, on doit prouver que $\mathbb{H}$ passe au quotient).

Si un tel $\overline{\mathbb{H}}$ existe, il est nécessairement unique; en effet, l'égalité $\overline{\mathbb{H}}.\mathrm{cano}(\mathbb{G}) = \mathbb{H}$ équivaut à :

(1) $\overline{\mathbb{H}}(\overline{A}) = \mathbb{H}(A)$ si $\overline{A} \in \mathrm{Ob}(\mathbb{C})$ i.e. si $A \in \mathrm{Ob}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$
et
(2) $\overline{\mathbb{H}}(\overline{x}) = \mathbb{H}(x)$ si $\overline{x} \in \mathrm{Fl}(\mathbb{C})$ i.e. si $x \in \mathrm{Fl}(\mathrm{llcc}(\mathbb{G}))$.

Etablissons maintenant que $\overline{\mathbb{H}}$ existe bien.

L'égalité (1) définit $\overline{\mathbb{H}}$ sur les objets : en effet, si deux objets A et A' de $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$ représentent le même objet de $\langle\mathbb{C}\rangle$, on a dans $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$:



(en vertu de la proposition 1 (§2))

et on a ainsi :

$$\mathbb{H}(\alpha) = \mathrm{id}(\mathbb{H}(B))$$

(car $\alpha \in \mathcal{R}$
et
les flèches de réécriture de $\langle \mathbb{D} \rangle$ sont les identités)

$$= \mathbb{H}(\alpha')$$

(de façon analogue).

et donc :

$$\mathbb{H}(A) = \mathbb{H}(A') \ .$$

L'égalité (2) définit $\overline{\mathbb{H}}$ sur les flèches : en effet, si deux flèches x et x' de $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$ représentent la même flèche de $\langle \mathbb{C} \rangle$, on a dans $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$:

$$\begin{tikzcd}
A & & A' \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"'] \arrow[ur, squiggly, "\alpha'"] & \\
B \arrow[uu, "x"] \arrow[r, phantom, "\Leftrightarrow"] & {} \arrow[r, phantom, "\Leftrightarrow"] & B' \arrow[uu, "x'"'] \\
& \bullet \arrow[ul, squiggly, "\beta"] \arrow[ur, squiggly, "\beta'"'] \arrow[uu, "x''"'] &
\end{tikzcd}$$

(en vertu de la proposition 2 (§2))

et on a ainsi :

$$\mathbb{H}(x) = \mathbb{H}(x) \cdot \mathrm{id}(\mathbb{H}(B))$$

$$= \mathbb{H}(x) \cdot \mathbb{H}(\beta)$$

(car $\beta \in \mathcal{R}$)

$$= \mathbb{H}(x \cdot \beta)$$

$$= \mathbb{H}(\alpha \cdot x'')$$

(car $x \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot x''$
et
la relation $\Rightarrow$ de $\langle \mathbb{D} \rangle$ est l'égalité)

$$= \mathbb{H}(\alpha) \cdot \mathbb{H}(x'')$$

$$= \mathbb{H}(x'')$$

(car $\alpha \in \mathcal{R}$)

et, bien entendu, on a de même :

$$\mathbb{H}(x') = \mathbb{H}(x'') .$$

Dans un deuxième temps, vérifions que $\overline{\mathbb{H}}$ est bien un foncteur en prouvant que, si $\overline{y}$ et $\overline{x}$ sont consécutives dans $\langle\mathbb{C}\rangle$, alors $\overline{\mathbb{H}}(\overline{y})$ et $\overline{\mathbb{H}}(\overline{x})$ le sont dans $\langle\mathbb{D}\rangle$ et on a $\overline{\mathbb{H}}(\overline{y}\cdot\overline{x}) = \overline{\mathbb{H}}(\overline{y})\cdot\overline{\mathbb{H}}(\overline{x})$ (les autres propriétés de foncteur étant trivialement vérifiées par construction de $\overline{\mathbb{H}}$).

On suppose donc que l'on a dans $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "x"] & A & & B \arrow[r, "y"] & \bullet \\
& \bullet \arrow[ul, dotted, "f(x,\alpha)"] \arrow[r, dotted, "s(x,\alpha)"] & C \arrow[ul, squiggly, "\alpha"'] \arrow[ur, squiggly, "\beta"] & &
\end{tikzcd}$$

On a alors dans $\langle\mathbb{D}\rangle$:

$$\bullet \xrightarrow{\mathbb{H}(x)} \mathbb{H}(A) = \mathbb{H}(B) \xrightarrow{\mathbb{H}(y)} \bullet$$

$$(\text{car } \alpha , \beta \in \mathcal{R})$$

et l'on a :

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbb{H}}(\overline{y}\cdot\overline{x}) &= \overline{\mathbb{H}}(\overline{y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha)}) \\
&= \mathbb{H}(y\cdot\beta\cdot s(x,\alpha)) \\
&= \mathbb{H}(y)\cdot\mathbb{H}(\beta)\cdot\mathbb{H}(s(x,\alpha)) \\
&= \mathbb{H}(y)\cdot\mathbb{H}(s(x,\alpha)) \\
&\quad (\text{car } \beta \in \mathcal{R}) \\
&= \mathbb{H}(y)\cdot\mathbb{H}(x) ,
\end{aligned}$$

puisque :

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(s(x,\alpha)) &= id(\mathbb{H}(C))\cdot\mathbb{H}(s(x,\alpha)) \\
&= \mathbb{H}(\alpha)\cdot\mathbb{H}(s(x,\alpha)) \\
&\quad (\text{car } \alpha \in \mathcal{R}) \\
&= \mathbb{H}(\alpha\cdot s(x,\alpha)) \\
&= \mathbb{H}(x\cdot f(x,\alpha)) \\
&\quad (\text{car } \alpha\cdot s(x,\alpha) \leftrightsquigarrow x\cdot f(x,\alpha)) \\
&= \mathbb{H}(x)\cdot\mathbb{H}(f(x,\alpha)) \\
&= \mathbb{H}(x)
\end{aligned}$$

(car $f(x,\alpha) \in \mathcal{R}$).

ce qui prouve donc que :

$$\overline{\mathbb{H}}(\overline{v}.\overline{x}) = \overline{\mathbb{H}}(\overline{y}).\overline{\mathbb{H}}(\overline{x}) \ .$$

Dans un troisième temps, vérifions que le foncteur $\overline{\mathbb{H}}$ est bien un homomorphisme de LCC.

Prouvons déjà que $\overline{\mathbb{H}}$ commute aux lois "f" et "s" (il est facile de voir qu'alors il commutera aussi à la loi "PF" (et à la loi "b")).

On suppose donc que l'on a dans $\langle \mathbb{C} \rangle$:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\overline{x}"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "\overline{y}"'] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que l'on a dans $llcc(\mathbb{G})$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \bullet \arrow[rr, "x"] & & \bullet & & \bullet & & \bullet \arrow[ll, "y"'] \\ & \bullet \arrow[ul, dotted, "f(x,\alpha)"'] \arrow[rr, dotted, "s(x,\alpha)"] & & \bullet \arrow[ul, squiggly, "\alpha"] \arrow[ur, squiggly, "\beta"'] & & \bullet \arrow[ll, dotted, "s(y,\beta)"'] \arrow[ur, dotted, "f(y,\beta)"] & \end{tikzcd}$$

On a alors :

$$\overline{\mathbb{H}}(\overline{f}(\overline{x},\overline{y})) = \overline{\mathbb{H}}(\overline{f(s(x,\alpha),s(v,\beta))})$$

(en vertu du lemme 3 du paragraphe 5)

$$= \mathbb{H}(f(s(x,\alpha),s(y,\beta)))$$

$$= f(\mathbb{H}(s(x,\alpha)),\mathbb{H}(s(y,\beta)))$$

$$= f(\mathbb{H}(x),\mathbb{H}(y))$$

(comme vu ci-dessus puisque α . $\beta \in \mathcal{R}$)

$$= f(\overline{\mathbb{H}}(\overline{x}),\overline{\mathbb{H}}(\overline{y})) \ .$$

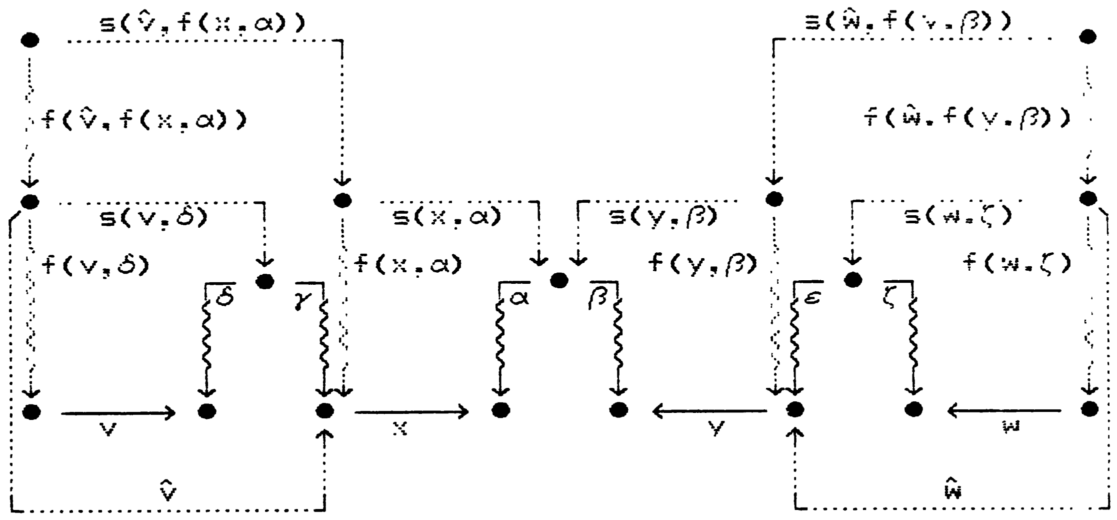
La commutation de $\overline{\mathbb{H}}$ à la loi "s" s'établit de manière analogue.

Prouvons maintenant que $\overline{\mathbb{H}}$ commute à la loi "p" .

On suppose donc que l'on a dans $\langle \mathbb{C} \rangle$:

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "\overline{v}"] & \bullet \arrow[r, "\overline{x}"] & \bullet & \bullet \arrow[l, "\overline{y}"'] & \bullet \arrow[l, "\overline{w}"'] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que l'on a dans $\mathrm{llcc}(\mathbb{G})$:



(où l'on a posé $\hat{v} = \gamma \cdot s(v,\delta)$ et $\hat{w} = \varepsilon \cdot s(w,\zeta)$).

On a alors :

$\overline{\mathbb{H}}(\overline{p}(\overline{x},\overline{y},\overline{v},\overline{w}))$

$$= \overline{\mathbb{H}}(\overline{p(s(x,\alpha),s(y,\beta),s(\hat{v},f(x,\alpha)),s(\hat{w},f(y,\beta)))})$$

(en vertu du lemme 11 du paragraphe 5)

$$= \mathbb{H}(p(s(x,\alpha),s(y,\beta),s(\hat{v},f(x,\alpha)),s(\hat{w},f(y,\beta))))$$

$$= p(\mathbb{H}(s(x,\alpha)),\mathbb{H}(s(y,\beta)),\mathbb{H}(s(\hat{v},f(x,\alpha))),\mathbb{H}(s(\hat{w},f(y,\beta))))$$

$$= p(\mathbb{H}(x),\mathbb{H}(y),\mathbb{H}(\hat{v}),\mathbb{H}(\hat{w}))$$

(comme vu ci-dessus puisque α , β , $f(x,\alpha)$, $f(y,\beta) \in \mathcal{R}$)

$$= p(\mathbb{H}(x),\mathbb{H}(y),\mathbb{H}(\gamma \cdot s(v,\delta)),\mathbb{H}(\varepsilon \cdot s(w,\zeta)))$$

$$= p(\mathbb{H}(x),\mathbb{H}(y),\mathbb{H}(\gamma) \cdot \mathbb{H}(s(v,\delta)),\mathbb{H}(\varepsilon) \cdot \mathbb{H}(s(w,\zeta)))$$

$$= p(\mathbb{H}(x),\mathbb{H}(y),\mathbb{H}(s(v,\delta)),\mathbb{H}(s(w,\zeta)))$$

(car γ , $\varepsilon \in \mathcal{R}$)

$$= p(\mathbb{H}(x),\mathbb{H}(y),\mathbb{H}(v),\mathbb{H}(w))$$

(comme vu ci-dessus puisque δ , $\zeta \in \mathcal{R}$)

$$= p(\overline{\mathbb{H}}(\overline{x}),\overline{\mathbb{H}}(\overline{y}),\overline{\mathbb{H}}(\overline{v}),\overline{\mathbb{H}}(\overline{w})) .$$

Comme la commutation de $\overline{\mathbb{H}}$ aux lois "d" , "cte" et "un" est évidente à montrer, nous avons ainsi prouvé que

$\overline{\mathbb{H}}$ est bien un homomorphisme de LCC et nous avions vu auparavant qu'il vérifie $\overline{\mathbb{H}}.\mathrm{cano}(\mathbb{G}) = \mathbb{H}$ et qu'il est unique à le vérifier.

Fin de la preuve.

Nous avons établi, par cette dernière proposition, le point (iii) du téorème (§2) et nous avons donc achevé la preuve de ce théorème.

TABLE