L. COPPEY

Actes des journées E.L.I.T. (Univ. Paris 7. 27 juin-2 juillet 1988)

Diagrammes, tome 24 (1990), p. 33-76
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1990__24__33_0>

ACTES DES JOURNEES E.L.I.T.
(UNIV. PARIS 7, 27 JUIN-2 JUILLET 1988)

GRAPHES STRUCTURAUX

L. Coppey

En hommage à Claude Levi-Strauss,
en hommage à la mémoire de Charles Ehresmann,
à la mémoire des victimes de la gare de Lyon (27 juin 1988)

Le texte qui suit développe quelques idées exposées dans une conférence que j'ai faite aux Journées E.L.I.T., le 27 Juin 1988, intitulée: $\mathcal{D}$-algèbres. Il déborde assez largement la conférence proprement dite, mais, en cela, je ne me démarque pas des autres conférenciers qui ont bien voulu nous remettre un texte, pour publication dans DIAGRAMMES

Ce même jour, tandis que j'achevais cette conférence, un terrible accident de chemin de fer se produisait en gare de Lyon, faisant cinquante six morts et de nombreux blessés. J'aurais pu être parmi eux si je n'avais pas quelque peu abusé du temps de mon auditoire.

Je dédie ce texte à toutes les victimes de cet accident.

0. QUELQUES STRUCTURES DE BASE POUR DEFINIR LES STRUCTURES.

Reprenant des définitions plus ou moins classiques, mais reprenant aussi le titre même de l'article que nous leur consacrions, il y a quelques années déjà [S.B.D.S.], nous voulons seulement rendre plus lisible l'introduction qui suit [cf. § 1].

Sur le style adopté, il y a toujours à redire: s'il n'est pas trop formalisé, on s'en émeut, et s'il prend une tournure trop technique ou trop à l'emporte pièce, on s'en émeut encore. Dans le premier cas, on évoque inévitablement le 'baratin', dans le second, on avoue n'y rien comprendre, ce qui, comme chacun sait, veut dire très exactement le contraire, et n'est, de ce fait, qu'une simple étape dans toute entreprise de récupération.

J'ai allègrement papillonné entre le "je", le "on" et le "nous", et, à l'instar des lépidoptères, j'ai su, chaque fois, tant bien que mal, choisir ma fleur.

J'aurais dû citer plusieurs fois le magnifique ouvrage de C. Levi-Strauss *La pensée sauvage* [P.E.N.S.] (1962), ainsi que les nombreux travaux originaux de C. Ehresmann sur les structures et leurs graphes d'hypermorphismes, et plus particulièrement ici: *Catégories et Structures* [C.A.S.T.] (1965) et *Introduction to the theory of structured categories* [I.T.S.C.] (1966), mais en fait, il s'agit de beaucoup plus que de simples citations. Aussi, j'invite le lecteur à se (re)plonger dans ces admirables textes et à y découvrir, avec tout l'enthousiasme nécessaire, les liens qu'ils ont avec les modestes lignes qui suivent.

On pourra s'étonner de trouver peu de 'résultats' (sous leurs formes traditionnelles qui ont noms: lemmes, théorèmes, propositions, corollaires, et j'en passe). C'est tout simplement que le sujet ne s'y prête pas, ce qui ne diminue en rien l'intérêt que l'on peut a priori lui porter. On m'a déjà expliqué qu'un étroit rapport existait entre la valeur 'intrinsèque' d'un texte (mathématique) et la proportion 'idéale' des théorèmes et définitions qui s'y trouvent. Je laisse ces savants calculs aux experts, mais en retour, je souhaite vivement qu'ils me disent les retombées prochaines de ces quelques 10^4 théorèmes (nouveaux?!) produits ces trente dernières années, dont aucun n'a encore fourni autre chose que des miettes de gloire à leur auteur.

Structures de base.

En préambule, notons que la spécification d'une classe dite d'objets (i.e. la structure a minima de graphe orienté) n'est pas toujours signifiative des structures dont nous allons (re)préciser les définitions, mais disons qu'elle facilite l'intelligence qu'on peut en avoir, en en fournissant une possible réalisation graphique.

Un *graphe orienté* G est constitué de:

- deux ensembles: celui dit des objets de G, noté Ob(G), et celui dit des flèches de G, noté Fl(G),
- deux applications α et β de Fl(G) dans Ob(G) fournissant pour chaque flèche x sa *source* $\alpha(x)$ et son *but* $\beta(x)$.

Remarque.

Par *élément* d'un graphe orienté G, on entend plutôt une flèche de G, dont on précise la source et le but; on écrit alors plutôt $[x\colon A \to B]$ au lieu de $[x \in Fl(G),\ A = \alpha(x)\ ,\ B = \beta(x)]$. C'est un peu le sens du préambule. On désigne aussi, et plus simplement, Fl(G) par G , donnant ainsi une certaine 'préférence' aux flèches... On pourra supposer enfin qu'il n'y a pas d'objets isolés (bien que rien ne s'y oppose), c'est-à-dire que tout objet $A \in Ob(G)$ est au moins source ou but d'au moins une flèche de G (condition dite de surjectivité pour le couple (α, β)).

Un *système multiplicatif* est un triplet $\mathbb{S} = (S, C, k)$ dans lequel:

- S est un graphe orienté (on notera aussi S_o à la place de Ob(S)),
- C est un 'sous-ensemble' de SxS, celui dit des *couples composables*,
- k est une application de C dans S, dite de composition partielle, vérifiant les conditions 'graphiques' naturelles suivantes, chaque fois que $y.x = k(y,x)$ est défini:

$$\alpha(y) = \beta(x)$$
$$\alpha(y.x) = \alpha(x)$$
$$\beta(y.x) = \beta(y)$$

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "y"] & \\ A \arrow[ur, "x"] \arrow[rr, "y.x"'] & & C \end{tikzcd}$$

Deux éléments d'un système multiplicatif ne peuvent donc se composer que s'ils se 'suivent', mais ce n'est *en général* pas suffisant. De plus, le composé de deux éléments consécutifs, lorsqu'il existe, est bien disposé conformément au graphe type ci-dessus.

Remarque.

Ici, quoique ce ne soit pas tout à fait 'évident', la classe d'objets ne joue 'aucun' rôle, relativement à la structure de graphe orienté sous-jacente (cf. encore le préambule).
Plus précisément, soit $\mathbb{S}$ = (S, C, k) ce qu'on pourrait appeler un système multiplicatif 'sans objets', i.e.: S est un ensemble, C est un sous-ensemble de SxS et k est une application de C dans S. On peut lui faire correspondre canoniquement (i.e. librement) un système multiplicatif au sens précédent, en définissant pour S (qui devient un ensemble de flèches) un ensemble d'objets S_o et deux applications, source et but, α et β, de S dans S_o, convenables. Voici cette construction (c'est une extension de Kan bien simple, mais dois-je faire une telle remarque, ou attendre qu'inévitablement on me la fasse un jour ?)
Soient S_a et S_b deux copies disjointes de S et S_a+S_b leur somme disjointe; soient a et b les deux injections canoniques de S vers S_a+S_b. Soit R la relation d'équivalence dans S_a+S_b engendrée par la relation binaire constituée de tous les couples suivants: (a(y),b(x)), (b(z),b(y)), (a(z),a(x)) , pour $(y, x) \in C$ et où $z = y.x$. Soit $S_o = (S_a+S_b)/R$ et π le passage au quotient. On pose alors $\alpha = \pi\cdot a$ et $\beta = \pi\cdot b$. Il est clair que le graphe orienté ainsi défini est sous-jacent cette fois au système multiplicatif $\mathbb{S}$ pour lequel on garde, sciemment, la même notation (S, C, k).
Désormais, et pour la raison dite dans le préambule, nous considérerons la structure multiplicative avec son graphe orienté sous-jacent; on se gardera bien de croire que celle-ci est toujours la structure libre construite ci-dessus; nous avons seulement fait observer que cette structure (quoique compatible

avec la composition partielle) ne joue pas de rôle spécifique dans la composition des ... flèches de $\mathbb{S}$.

Un *graphe multiplicatif* $\mathbb{G}$ est constitué d'un système multiplicatif, encore noté $\mathbb{G} = (G, C, k)$ et d'une loi 'fournissant les identités' $i : G_0 \to G$, dans le sens suivant:

(i) $\alpha \cdot i = \beta \cdot i = Id_{G_0}$, soit graphiquement

$$A_{\times} \longmapsto \overset{\circlearrowright}{\times} \quad i(A)$$, qu'on note encore Id_A ou 1_A,

(ii) $\forall A \in G_0$, 1_A est *neutre* au sens fort, c'est-à-dire:
$\forall x : A \to B$, le composé $x.1_A$ existe et vaut x , et
$\forall y : C \to A$, le composé $1_A.y$ existe et vaut y .

Remarques.

La loi i ne figure pas dans la notation de $\mathbb{G}$. En effet, son existence est seule en cause, étant donné le point de vue que nous avons adopté sur les systèmes multiplicatifs. La loi qui fournit les identités est assimilable à une *propriété* que peut avoir ou non un système multiplicatif.

Ici, quoique ce soit parfaitement 'évident', la classe des identités peut être adjointe librement et ne joue 'aucun' rôle (mais quoi donc alors jouera un rôle, à ce jeu ?!) Faisons observer toutefois qu'il s'agit ici encore de calculs de structures libres ni plus ni moins triviaux que tout autre calcul de structures libres (algébriques !), donc d'extensions de Kan. On verra plus loin qu'il est naturel aussi d'envisager des graphes multiplicatifs partiels (la partialité valant pour les objets, leurs identités, la faculté de certaines flèches d'être neutres, etc...)

Un graphe multiplicatif est dit *associatif* lorsque tous composés des mêmes éléments, dans le même ordre, sont égaux dès lors qu'ils sont définis. On notera bien, à cet égard, que l'associativité portant sur trois éléments n' *entraîne rien* en général... Plus précisément, il existe des genres d'associativité intermédiaires entre 'rien' et l'associativité ci-dessus, mais nous n'en (re)parlerons pas ici (cf. [P.T.G.M.] et [S.B.D.S.])

Une *précatégorie* $\mathbb{G}$ = (G, C, k) est un graphe multiplicatif satisfaisant l'axiome dit d' *associativité forte* suivant:

> $\forall$ x, y, z $\in$ G, si (z.y).x ou z.(y.x) est défini, les deux le sont et sont égaux.

Une précatégorie est un graphe multiplicatif associatif. L'inverse n'est pas vrai, puisque l'axiome de forte associativité comporte en lui une clause d'existence qui ne saurait en aucun cas provenir de 'simples égalités de composés supposés déjà donnés'. Là aussi, il est possible de définir d'intéressantes notions d'associativité intermédiaires entre l'associativité ci-dessus qu'on peut qualifier de faible et l'associativité forte.

Dans une précatégorie, l'usage de parenthèses est inutile, puisque le raisonnement (usuel) prouvant que l'associativité à 3 entraîne l'associativité à n est applicable. Plus précisément, on montre que si un composé de n éléments, dans un certain ordre, avec une certaine disposition cohérente de parenthèses, est défini, alors tout composé de ces mêmes éléments, dans le même ordre, avec n'importe quelle disposition cohérente de parenthèses, est défini et égal au premier composé. On notera bien que la clause d'existence figurant dans l'axiome de forte associativité est l'élément indispensable qui rend possible (d'un point de vue graphique) la démonstration d'un énoncé du type:

$$[\text{Assoc. à } 3] \Rightarrow [\forall n \geq 3 \ [\text{Assoc. à } n]]$$

Insistons aussi sur le fait que, dans une précatégorie, la condition $\alpha(y) = \beta(x)$ qui est nécessaire pour l'existence du composé y.x n'est nullement suffisante.

Une *catégorie* est justement, de ce point de vue, une précatégorie dans laquelle la condition de composabilité $\alpha(y) = \beta(x)$ est aussi suffisante.

Morphismes de base.

Soient G et G' deux graphes orientés. Un *homomorphisme* h de source G et de but G' est un couple d'applications qu'on peut noter (Fl(h), Ob(h)):

$Fl(h): Fl(G) \to Fl(G')$
$Ob(h): Ob(G) \to Ob(G')$

qui commutent aux applications sources et buts. Il faut, en général, se donner effectivement Fl(h) *et* Ob(h). Mais on pourra aussi supposer que la condition de surjectivité de (α, β) est remplie, auquel cas il est clair que Fl(h) (qu'on peut noter h plus simplement) détermine Ob(h). De toute manière la notation h privilégie Fl(h) de la même manière que G privilégie, par convention, Fl(G).

Soient $\mathbb{S} = (S, C, k)$ et $\mathbb{S}' = (S', C', k')$ deux systèmes multiplicatifs.
Un *homomorphisme* h de source $\mathbb{S}$ et de but $\mathbb{S}'$ est déjà un homomorphisme entre les graphes orientés sous-jacents [h est donc donné comme application de S dans S', indépendamment du fait qu'elle détermine ou non $Ob(h) : Ob(S) \to Ob(S')$]. En outre, h doit satisfaire l'axiome suivant:

(H) $\forall (y, x) \in C \quad [(hy, hx) \in C' \text{ et } hy.hx = h(y.x)\ ]$

Les homomorphismes se composent de façon évidente et constituent une catégorie $\mathbb{Sym}$ (relative à un univers $\mathbb{U}$ qu'on ne mentionnera pas explicitement dans les notations !)

Une *correspondance* c entre systèmes multiplicatifs, de source $\mathbb{S}$ et de but $\mathbb{S}'$, est déjà un homomorphisme entre les graphes orientés sous-jacents [c est donc donnée comme application de S dans S', indépendamment du fait qu'elle détermine ou non $Ob(c) : Ob(S) \to Ob(S')$]. En outre, c doit satisfaire l'axiome suivant:

(K) $\forall (y,x) \in S\times S \ [[(y,x) \in C, (cy,cx) \in C'] \Rightarrow cy.cx = c(y.x)\ ]$

Les correspondances se composent de façon naturelle et constituent, de ce fait, non pas une catégorie, mais seulement un graphe multiplicatif $\mathbb{Cor}$ (relatif à $\mathbb{U}$).
Plus précisément, pour que $c: \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ et $c': \mathbb{S}'_1 \to \mathbb{S}''$ soient composables et de comoposé $c'.c: \mathbb{S} \to \mathbb{S}''$ il faut (et il suffit) que $\mathbb{S}'_1 = \mathbb{S}'$ *et que* c'.c définisse bien une correspondance de $\mathbb{S}$ vers $\mathbb{S}''$ (axiome (K)). Le graphe multiplicatif $\mathbb{Cor}$ est associatif (au sens faible), mais ce n'est pas une précatégorie.

Bien sûr, on dispose aussi de notions d'homomorphismes et de correspondances entre graphes multiplicatifs, précatégories et catégories. Entre catégories, les notions d'homomorphisme et de correspondance se confondent.

Remarque sur les éléments neutres et les identités.

Dans un système multiplicatif $\mathbb{S} = (S, C, k)$, on a la notion d'élément neutre, au sens faible suivant: on dit que $e \in S$ est un élément *neutre à droite* de $\mathbb{S}$ si et seulement si l'axiome suivant est vérifié:

(U_d) $\forall x \in S$ $[\ (x,e) \in C \Rightarrow x.e = x\ ]$

On définit de même les éléments neutres à gauche ou neutres (bilatères).

Toute identité est, par définition, neutre (bilatère), mais un élément neutre à gauche ou à droite n'est pas forcément neutre et un élément neutre n'est pas forcément une identité.

Comme pour la composabilité, comme pour l'associativité, comme pour les données d'objets ou identités, les données d'éléments neutres peuvent être partielles; elles peuvent aussi être 'modulées' de bien des façons jusqu'à devenir des identités (à gauche, à droite ou bilatères) etc... Autant c'est bien l'endroit et le moment de signaler ce genre de développements possibles, autant il n'est pas utile d'y procéder vraiment ici.

1. INTRODUCTION.

Un des objectifs de cet exposé est de montrer que les graphes multiplicatifs (appelés aussi, plus récemment, *graphes compositifs* ou *compographes* afin d'éviter la confusion avec une éventuelle et indépendante donnée de produit tensoriel $\otimes$) interviennent à tous les niveaux dès qu'on veut parler de présentations de structures.

Une première observation consiste en ceci: un graphe multiplicatif $\mathbb{G} = (G, C, k)$ est justement une manière de *présenter* une catégorie $\mathbb{C}$ par générateurs et relations:

- les flèches de G (ou $\mathbb{G}$) sont les éléments générateurs (de $\mathbb{C}$).

- si $\mathbb{G}$ n'a pas d'autres composés que les composés (dits triviaux) avec les identités, alors la catégorie $\mathbb{C}$ est la catégorie (dite *libre*) des chemins *propres* de $\mathbb{G}$, qu'on note $\mathbb{L}(G)$),

- si $\mathbb{G}$ a des composés non triviaux ($z = y.x$, où y et x ne sont pas des identités), alors la catégorie (dite *libre engendrée par* $\mathbb{G}$, ou *présentée* par $\mathbb{G}$) n'est autre que le quotient de $\mathbb{L}(G)$ par la relation d'équivalence $r_{\mathbb{G}}$ compatible (avec source, but et composition des chemins) engendrée par C ; on peut encore la noter $\mathbb{L}(\mathbb{G})$; l'application canonique qui à x fait correspondre sa classe modulo $r_{\mathbb{G}}$ définit un foncteur $\mathbb{G} \to \mathbb{L}(\mathbb{G})$ qui a la propriété universelle requise.

Une deuxième observation renforce la première, au niveau de la théorie classique des esquisses:

une *esquisse* (classique) $\mathbb{E}$ est constituée d'un graphe multiplicatif muni de cônes (projectifs et inductifs) distingués, destinés à devenir des cônes limites (projectives et inductives) dans les modèles (ou réalisations) de ladite esquisse $\mathbb{E}$.

Ainsi, une esquisse peut être vue comme système de générateurs et relations d'une catégorie à limites (ou *type*) et ce, indépendamment du fait que le langage des esquisses permet de décrire 'tous les types' de structures (au moins ceux dits classiquement du premier ordre, et relatifs à $\mathbb{E}\mathrm{ns}$).

Historiquement, on s'est moins attaché (en dehors d'un groupe assez restreint d'élèves de C. Ehresmann) à étudier de tels systèmes générateurs (i.e. des esquisses de telle ou telle forme) que les types (théories) qu'elles engendrent. Citons:

- du point de vue dit syntaxique, les topos (géométriques) ou catégories de faisceaux, les théories de Lawvere, les types de Bénabou, ...

- du point de vue dit sémantique, les catégories localement α-présentables de Gabriel-Ulmer, les catégories multi-α-présentables de Diers, puis les catégories polyprésentables, qui chronologiquement viennent très nettement après les catégories θ-modelables de Lair (que d'aucuns rebaptisent aujourd'hui - est-ce vraiment en souvenir de Grothendieck ? - catégories accessibles).

Notons que la seule terminologie employée, concernant justement ces catégories de modèles, montre à quel point le problème de la recherche systématique de systèmes de générateurs et relations (i.e. d'esquisses, par exemple) de formes particulières s'est posé dès le début (i.e. dans les années 1970). L'emploi du qualificatif '*présentable*' en témoigne.

Nous avons séparé, en les citant, les points de vue syntaxique et sémantique. Quelques mots seulement de cette fausse (apparente) opposition. Un type (i.e. une esquisse de forme bien particulière qu'on ne discutera pas ici) décrit des structures, tout comme la catégorie-même de ces structures est sa propre description. Alors, il n'y a là que l'inévitable question de la dualité. Mais elle n'est pas aussi centrale qu'on peut (ou veut) le croire. Ce n'est pas la dualité qui trace une quelconque 'limite infranchissable' entre syntaxe et sémantique.

Le couple syntaxe-sémantique est plus essentiellement du genre 'inclusion', l'un n'étant qu'un 'complété spécifique' de l'autre. Ce que doit à la dualité l'opposition syntaxe-sémantique que nous avons qualifiée de fausse opposition, peut fort bien être gommé en effet. Le rapport entre syntaxes de $\mathcal{D}$-algèbres et triples fournira, plus loin, un exemple naturel à l'appui de cette remarque.

Un autre point de vue pour décrire (au moins) l'algèbre sur une catégorie, sans doute issu de la topologie algébrique, et, plus précisément, de la considération des résolutions (objets simpliciaux, etc...), est celui des monades (ou triples). A toute monade $\mathbb{T}$ sur une catégorie $\mathbb{C}$ est associée sa catégorie d'algèbres Alg($\mathbb{T}$) au dessus de $\mathbb{C}$. Ce qui a beaucoup séduit à une époque déjà ancienne (et qui séduit toujours d'ailleurs !) c'est la forme générique des descriptions d'une monade et de ses algèbres, indépendante de telle ou telle monade $\mathbb{T}$, de telle ou telle catégorie $\mathbb{C}$:

- équations d'une monade, qui ne sont autres, dans leur forme, que celles qui génèrent toutes les équations de type face et dégénérescence d'un ensemble simplicial, et c'est bien ce qui explique qu'historiquement les monades générales en soient issues,

- équations d'une algèbre, qui sont, dans leur forme, celles de la monade, parce qu'une algèbre de monade n'est qu'une 'contingence' - au niveau de l'objet sous-jacent et des relations particulières qui la définissent comme algèbre - de la monade. Chaque $\mathbb{T}$-algèbre est quotient (canonique) d'une $\mathbb{T}$-algèbre libre, laquelle admet une description uniforme (i.e. indépendante de l'objet de base qui l'engendre).

Ne reste alors que la monade particulière $\mathbb{T}$, laquelle offre, à un degré supplémentaire de généralité une structure uniforme, indépendante de son contexte (cf. esquisse de monade, etc...)

Ce point de vue possède sa version syntaxique, de forme invariable (i.e. indépendante de telle ou telle monade) , dans la considération de la catégorie dite de Kleisli Kl($\mathbb{T}$), qui en un certain sens, doit être interprétée comme la syntaxe complète engendrée par $\mathbb{T}$; on retrouve (au moins) une *catégorie* comme syntaxe, mais là les limites n'ont aucun rôle à jouer, puisqu'une telle syntaxe revient à se donner toutes les algèbres libres, i.e. autant d'objets qui n'ont pas à être présentés comme limites d'autres objets, puisqu'ils sont déjà donnés comme tels.
Encore faut-il alors, pour récupérer toutes les algèbres, effectuer (calculer !) certains conoyaux de paires contractiles,

c'est-à-dire certaines limites inductives, d'un genre bien particulier, soit en usant de notations si usuelles que nous n'éprouvons pas le besoin d'en rappeler la signification:

$$(L^2X, \mu_X) \underset{\mu_X}{\overset{L\theta}{\rightrightarrows}} (LX, \mu_X) \xrightarrow{\theta} (X, \theta)$$

où il y a finalement, pour décrire une $\mathbb{T}$-algèbre, tous les générateurs possibles (= tout X !) et toutes les relations possibles (cf. le couple $(L\theta, \mu_X)$). On n'est pas loin de la tautologie.

Le souci de mettre au point les systèmes de générateurs et relations pour les monades, au même titre donc que les esquisses sont les systèmes de générateurs et relations pour les types, date à peu près de la même époque (70-71-72) (cf. [T.A.E.P.], (a) et (b)) , et, faut-il le souligner (je pense que oui !), il s'agit du texte initial sur ce sujet.

Puis, ceci étant fait, il a fallu comparer avec le point de vue des esquisses : foncteurs esquissés - triplabilité - etc... On pourra utilement (re)lire [T.F.A.E.] et [E.T.S.R.] à ce propos.

Plus récemment, désirant donner de ces travaux de 1971-72 une formulation actualisée, plus opératoire (cf. par exemple: [S.B.D.S.], [C.A.P.E.], [A.M.E.N.] etc...) j'ai pris conscience que tout *méta*-objet pouvait (devait) être décrit par générateurs et relations, qu'il s'agisse des catégories de base, des syntaxes d'algèbres (ou de structures plus générales) , des algèbres elles-mêmes, des homomorphismes entre elles, des variations de syntaxes (en plus ou en moins !), etc...La structure de base semblait être celle de graphe multiplicatif.

Qu'on songe un peu, dans le même sens, à ce qu'il est convenu d'appeler le *préfabriqué*! Les graphes multiplicatifs existent: ce sont les *matériaux* de construction *modernes*; ils remplacent avantageusement les ensembles qui nécessitaient, il y a peu encore, beaucoup de ciment et de sueurs. Je n'ai pas la faiblesse de croire que les choses s'arrêteront là, soyons *modernes*, i.e. de notre temps: ni attardés tristement dans un passé passé, ni précipités bêtement dans un avenir à venir. Pour plus de réflexion sur ce point (très important) j'invite à (re)lire Baudelaire [A.R.O.M.] .

L'exposé proprement dit comportera alors trois parties:

- Catégories de base.
- Syntaxes de $\mathcal{D}$-algèbres.
- $\mathcal{D}$-algèbres et homomorphismes.

Chacune de ces parties ne tend qu'à viser l'objectif dont il vient d'être question dans cette trop *brève* introduction.

2. CATEGORIES DE BASE.

La définition d'une syntaxe de $\mathcal{D}$-algèbres suppose fourni un cadre 'sémantique' sous forme, par exemple, d'une catégorie $\mathbb{C}$, dite *catégorie de base*, qui elle-même peut être 'présentée' de bien des façons différentes, par exemple:

- $\mathbb{C}$ est donnée comme la catégorie des modèles (ou réalisations) d'une esquisse $\mathbb{E}$ dans une autre catégorie $\mathbb{H}$, elle-même donnée auparavant ...

- $\mathbb{C}$ est donnée comme catégorie de $\mathcal{D}$-algèbres sur une autre catégorie $\mathbb{C}'$ préalablement définie ...

- $\mathbb{C}$ est donnée comme catégorie de modèles d'une théorie définie elle-même dans un autre langage, etc ...

Cette catégorie de base $\mathbb{C}$ fournira une partie du langage syntaxique à définir (cf. § 3) ; ce sont des objets, arités ou co-arités de lois, et des flèches, qui sont certaines de ces lois, dites encore naturelles.

C'est dire que du point de vue des $\mathcal{D}$-algèbres, il n'est guère possible d'opérer une séparation nette entre syntaxe et sémantique. C'est pourquoi on peut, dans la désignation-même d'une syntaxe rappeler, par choix d'un adjectif approprié, la catégorie de base $\mathbb{C}$; c'est ainsi, et par exemple, qu'on aura des syntaxes d'algèbres (et donc des algèbres):

ensemblistes , lorsque $\mathbb{C} = \mathbf{Ens}$,
catégoriques , lorsque $\mathbb{C} = \mathbf{Cat}$,
graphiques , lorsque $\mathbb{C} = \mathbf{Gra}$ (orientés ou non),
(graphico)multiplicatives , lorsque $\mathbb{C} = \mathbf{Sym}$, ...

Concrètement, la *catégorie de base* $\mathbb{C}$ sera elle-même donnée (à un certain niveau) par un (ou plusieurs) graphe(s) multiplicatif(s). Mais remarquons que rien, a priori, ne nécessite que $\mathbb{C}$ soit une catégorie. On souhaite que ses objets soient des structures, et ses flèches des 'liens' entre ces structures, par exemple de type homomorphismes ou correspondances.

Nous avons déjà décrit, dans le § 1, un exemple significatif d'objet de base **C** qui n'est pas naturellement une catégorie: il s'agit du graphe multiplicatif **Cor** des correspondances entre systèmes multiplicatifs. Cet objet **Cor** engendre une catégorie, qui n'est pas une 'catégorie libre' (dans l'absolu!). Ce n'est pas un graphe multiplicatif fortement associatif, mais seulement associatif.
Notons au passage que **Cor** possède toutes les limites projectives (petites), qu'on prenne les indexations de celles-ci avec ou sans leur compositions. Ces limites se calculent en fait comme dans **Ens** (le 'foncteur d'oubli' naturel **Cor** → **Ens** les crée et les reflète...) . Il en est de même pour toutes les sommes (petites) , mais pas pour les conoyaux. Précisons qu'il s'agit ici de la notion usuelle de limite, assortie de toutes les clauses d'existence (exigée) des composés prévus dans l'expression de la propriété universelle. Sans nous étendre ici sur cette question, indiquons cependant qu'il existe, pour les graphes multiplicatifs, une notion de limite (projective ou inductive) plus subtile que celle qui vient d'être évoquée, et qu'en général, ces limites ne sont pas préservées (en tant que telles) lorsqu'on passe à la catégorie libre engendrée.

A part l'exemple des correspondances entre les (des) systèmes multiplicatifs (ou graphes multiplicatifs, ou précatégories) nous n'avons pas encore proposé d'exemples 'concrets' de graphes multiplicatifs de 'grande taille'. Il y a, bien sûr, la possibilité qui consiste à s'emparer d'une grande catégorie naturelle (**Ens**, **Sym**, **Gr**, **Ab**, **K-Vect**, **Top**, etc..., etc...) et d'en 'retirer artificiellement de la composition' (avec ou sans les composés concernés). On mesure aussi bien l'arbitraire de cette manipulation que son efficacité à produire de nombreux exemples !

Venons-en donc à des exemples de grands graphes multiplicatifs **C** tout à fait naturels et qui *rendent compte* de l'idée simple déjà formulée, à savoir que: $z = y.x$ sera défini lorsqu'une certaine condition, plus que purement graphique $[\alpha(y) = \beta(x)]$ sera remplie.

Soit $\mathbf{U}$ un univers et $f : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ une application 'choix de sous-ensemble', i.e.: $\forall\ A \in \mathbf{U}\ [\ f(A) \subset A\ ]$. On fait correspondre à f le système multiplicatif $\mathbf{Ens}_{f}^{\circ}$ suivant:

- les objets de $\mathbb{Ens}_f{}^\circ$ sont les ensembles de $\mathbb{U}$,

- les flèches de $\mathbb{Ens}_f{}^\circ$ sont les fonctions (ou applications partielles) entre ensembles (éléments de $\mathbb{U}$) .

Si $x : A \to B$ est une telle fonction, on notera Ax son domaine de définition et xA son image.

- la composition des fonctions est la suivante: $x : A \to B$ et $y : B_1 \to C$ sont composables si et seulement si:
 (i) $B = B_1$ [condition graphique usuelle],
 (ii) $\forall\, a \in f(A) \cap Ax \ [x(a) \in By]$,
 condition dépendant globalement de f et, localement, de x et de y.

- dans ce cas, la composée, notée $y \cdot_f x$ n'est autre que la composée usuelle des fonctions.

En général, $\mathbb{Ens}_f{}^\circ$ n'est pas un graphe multiplicatif: en effet, s'il doit y avoir une identité en $A \in \mathbb{U}$, ce ne peut être évidemment que l'application identique $1_A : A \to A$. Or, 1_A n'est identité qu'à gauche: pour tout $x : C \to A$ de but A , $1_A \cdot x$ est défini et vaut bien x, par contre, la condition pour que $x \cdot 1_A$ soit défini (et égal à x !) est très exactement $f(A) \subset Ax$.

Cette dernière remarque justifie à elle seule que l'on s'intéresse au sous-système multiplicatif de $\mathbb{Ens}_f{}^\circ$, qu'on note $\mathbb{Ens}_f$, et qui est, lui, un graphe multiplicatif: $x : A \to B$ est une flèche de $\mathbb{Ens}_f$ si et seulement si $f(A) \subset Ax$, i.e. la fonction x est définie au moins sur $f(A)$. Le graphe multiplicatif $\mathbb{Ens}_f$ est trivialement associatif, mais ce n'est pas une précatégorie; plus précisément $\mathbb{Ens}_f$ admet le déplacement de parenthèses vers la gauche:

si $(z \cdot y) \cdot x$ est défini, alors $z \cdot (y \cdot x)$ l'est aussi et est égal,

tandis que $z \cdot (y \cdot x)$ peut être défini sans pour autant que $(z \cdot y) \cdot x$ le soit. On dispose bien évidemment des notions de précatégorie gauche, droite, bilatère ...

Quelques remarques de *calcul* dans les graphes multiplicatifs $\mathbb{Ens}_f$ trouvent leur place ici.

Soit A ($\in \mathbb{U}$) un objet de $\mathbf{Ens}_f$; à tout ensemble intermédiaire E entre les ensembles $f(A)$ et A correspond la flèche $i_{A,E} : A \to A$, qui est la restriction de l'identité de A à E. Soit $x : A \to B$ une flèche de $\mathbf{Ens}_f$. On remarque que:

- la condition $xf(A) \subset f(B)$ entraîne que $y \cdot x$ est défini, mais ce n'est pas une condition nécessaire.

- $x \cdot i_{A,E}$ est toujours défini, car la condition (ii) de composabilité se réduit ici à $f(A) \subset Ax$.

- la composée $x \cdot i_{A,E} : A \to B$ n'est autre que la restriction de x à E, qui a pour domaine de définition l'ensemble $Ax \cap E$; en particulier, $x \cdot i_{A,E} = x$ si et seulement si $Ax \subset E$; on peut dire que $i_{A,E}$ est 'neutre à droite' pour les fonctions dont le domaine est dans E ; de manière imagée, $i_{A,E}$ est d'autant plus 'neutre à droite' que E est grand.

- en désignant par F un ensemble intermédiaire entre les ensembles $f(B)$ et B , on voit que $i_{B,F} \cdot x$ est défini si et seulement si $x(f(A)) \subset F$ et la composée n'est autre, dans ce cas, que la restriction de x à l'ensemble des éléments de Ax dont l'image est dans F ; en particulier, $i_{B,F} \cdot x = x$ si et seulement si $xA \subset F$; on peut dire que $i_{B,F}$ est 'neutre à gauche' pour les fonctions dont l'image est dans F et de manière imagée, $i_{B,F}$ est d'autant plus 'neutre à gauche' que F est grand.

- pour $A \in \mathbb{U}$, E et F intermédiaires entre $f(A)$ et A , on a l'égalité : $i_{A,E} \cdot i_{A,F} = i_{A,F} \cdot i_{A,E} = i_{A,E \cap F}$.

- ainsi, tout ensemble E intermédiaire entre $f(A)$ et A fait office de calibrage plus ou moins fin (relatif à f).

La catégorie $\mathbf{Ens}_f^-$ des applications entre ensembles de la forme $f(A)$ ($A \in \mathbb{U}$) apparaît comme sous-objet naturel de $\mathbf{Ens}_f$, lorsqu'on identifie une telle application $x : f(A) \to f(B)$ à la fonction $x : A \to B$ qui lui correspond. De même la catégorie $\mathbf{Ens}_f^+$ des applications entre ensembles (éléments de $\mathbb{U}$) apparaît comme sous-objet (naturel) de $\mathbf{Ens}_f$. Il y a d'ailleurs bien d'autres sous-objets intéressants de $\mathbf{Ens}_f$ qui sont des catégories.

On dispose d'une relation d'ordre naturelle entre les fonctions de choix f, f', ..., à savoir:

$$f \leq f' \quad \text{ssi} \quad \forall A \in \mathbb{U} \quad f(A) \subset f'(A).$$

On vérifie aisément que la relation $f \leq f'$ implique les inclusions naturelles suivantes:

$$\mathbf{Ens}_{f'}^{\circ} \subset \mathbf{Ens}_{f}^{\circ} \text{ et } \mathbf{Ens}_{f'} \subset \mathbf{Ens}_{f},$$

et ces inclusions définissent naturellement des homomorphismes entre systèmes (ou graphes) multiplicatifs. Ainsi on voit que la correspondance $f \mapsto \mathbf{Ens}_f^{\circ}$ (resp. $\mathbf{Ens}_f$) définit un foncteur : $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{SYS}$ (resp. $\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{GRM}$), où $\mathbf{C}$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonné des fonctions de choix (relatives à $\mathbb{U}$) , décrit ci-dessus et $\mathbf{SYS}$ (resp. $\mathbf{GRM}$) est la 'très grande' catégorie des 'grands' systèmes (resp. graphes) multiplicatifs, localement petits cependant, catégories qui contiennent $\mathbf{CAT}$, 'très grande' catégorie des 'grandes' catégories, localement petites cependant ...

La catégorie $\mathbf{Ens}^{\circ}$ des applications partielles (relative à $\mathbb{U}$) correspond au choix constant " $f = \emptyset$ " et la catégorie $\mathbf{Ens}$ des applications (relative à $\mathbb{U}$) correspond au choix maximum pour f (à savoir : $\forall A \in \mathbb{U}$, $f(A) = A$!) .

Concernant le problème de 'taille', qui préoccupe certains (une formule d'ordre supérieur, un décret d'ordre inférieur, ou un peu de bon sens, devrait pouvoir faire l'affaire!) , ajoutons cette définition-réflexion (intéressante) : appelons *secteur de partialisation* le support de f (i.e. l'ensemble (resp. la classe) des ensembles $A \in \mathbb{U}$ satisfaisant $f(A) \neq A$). Eh bien, le secteur de partialisation peut être 'petit', i.e. être un ensemble objet de $\mathbb{U}$ .On en tirera les conclusions que l'on veut, mais qui ne sauraient être dénuées d'intérêt (merci!)

Quelques variantes qui ne prétendent nullement épuiser les possibilités, pas plus que le sujet, suggèreront, je l'espère, une théorie générale (que d'aucuns développeront avec tout l'art voulu ...) , et voici donc de nombreux autres exemples fort naturels !

Nous gardons les mêmes notations que ci-dessus. Pour être flèche de $\mathbb{Ens}_f$, la condition imposée à une flèche $x : A \to B$ est $f(A) \subset Ax$. Il est intéressant de varier cette condition, par exemple, comme suit :

- $Ax \subset f(A)$ (correspond à l'idée de fonctions dont un domaine minimum de non-définition est prescrit, à savoir l'ensemble $A \backslash f(A)$),

- $xA \subset f(B)$ (correspond à l'idée de fonctions dont l'image ne peut excéder un ensemble prescrit, à savoir l'ensemble $f(B)$),

- $xA \supset f(B)$,

- des conjonctions (ou disjonctions) de telles conditions du genre : $[f(A) \subset Ax]$ et (ou ou) $[xA \subset f(B)]$ etc...

La composabilité des flèches admet elle-même bien des variantes possibles.

De tels éléments $x : A \to B$ avec condition(s) à la source et (ou ou) au but peuvent être appelés *fonctions calibrées* (par f) ; on peut imaginer des calibrages distincts pour source et but etc...Enfin, les calibrages peuvent être plus 'subtiles' que ceux associés (ici) à des fonctions de choix de calibrage; on peut penser à des calibrages liés à la satisfaction de formules d'ordre supérieur dans $\mathbb{Ens}$ ...

On peut remplacer, dans tout cela, les ensembles par des objets préalablement donnés (par exemple ceux d'un topos) et les choix de sous-ensembles "$f(A) \subset A$" par des choix (canoniques? cohérents?) de sous-objets.

Un autre procédé, sans doute plus général que le précédent, peut produire de grands systèmes (graphes) multiplicatifs assez naturels, qui ne sont pas des catégories.

Soit $\mathbb{G}$ une "grande esquisse", appartenant à une classe $\mathcal{C}$ d'esquisses, qui peut elle-même être esquissable (par exemple, la catégorie des *types*, i.e., à peu près, des catégories complètes, cocomplètes, et où toutes les limites voulues sont distinguées).

Soit donné aussi un $\mathbb{C}$-*cographe multiplicatif* Γ dans la catégorie $\mathbb{E}\mathbf{sq}$ des esquisses, dans le sens précis suivant, qui correspond à une "réalisation" d'une certaine $\mathbb{C}$-*esquisse de cographe multiplicatif* dans $(\mathbb{E}\mathbf{sq}, \mathbb{C})$:

- on dispose de trois esquisses $\mathbb{E}_0$, $\mathbb{E}_1$, $\mathbb{E}_2$,

- on dispose d'homomorphismes spécifiques entre ces esquisses: α, β : $\mathbb{E}_0 \to \mathbb{E}_1$; v_1, v_2, k : $\mathbb{E}_1 \to \mathbb{E}_2$,

- on dispose des égalités : $v_1 . \beta = v_2 . \alpha$, $k . \alpha = v_1 . \alpha$, $k . \beta = v_2 . \beta$

- on désigne par w_1 et w_2 les coprojections de $\mathbb{E}_1$ vers la somme amalgamée $\mathbb{E}_{\alpha,\beta}$ ($w_1 . \beta = w_2 . \alpha$) de α et de β, et par j : $\mathbb{E}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{E}_2$ l'unique homomorphisme tel que : $j . w_1 = v_1$ et $j . w_2 = v_2$. On impose à j d'être un $\mathbb{C}$-*épimorphisme*.

Nous pouvons alors décrire le 'grand système multiplicatif' $\mathbb{G}^\Gamma$ suivant :

- $\mathrm{Ob}(\mathbb{G}^\Gamma)$ n'est autre que l'ensemble des réalisations de $\mathbb{E}_0$ dans $\mathbb{G}$,

- $\mathrm{Fl}(\mathbb{G}^\Gamma)$ n'est autre que l'ensemble des réalisations de $\mathbb{E}_1$ dans $\mathbb{G}$,

- une flèche h de $\mathbb{G}^\Gamma$ a pour source $h . \alpha$ et pour but $h . \beta$,

- un couple (h_2, h_1) de flèches de $\mathbb{G}^\Gamma$ est dit *composable* si et seulement si : $h_1 . \beta = h_2 . \alpha$ et il existe un homomorphisme h^* : $\mathbb{E}_2 \to \mathbb{G}$ tel que $h^* . v_1 = h_1$ et $h^* . v_2 = h_2$ (nécessairement unique puisque j est un $\mathbb{C}$-épimorphisme), et son *composé* est $h^* . k$: $\mathbb{E}_1 \to \mathbb{G}$.

On remarque que la condition de composabilité contient en elle-même la condition graphique (source du second = but du premier), mais qu'elle ne se réduit pas en général à celle-ci : le 'supplément' de condition est esquissé dans $\mathbb{E}_2$.

Si l'on veut que $\mathbb{G}^\Gamma$ soit un graphe multiplicatif (associatif, etc...) , une précatégorie, ...il convient, par exemple, de renforcer (préciser) la structure de 'cographe multiplicatif' Γ.

Cette description est à ce point générale qu'elle comprend le cas particulier (usuel) de flèches qui sont des homomorphismes (usuels) entre structures (dans $\mathbb{G}$, qui peut être $\mathbb{E}\mathrm{ns}$) de même espèce (à savoir les modèles de $\mathbb{E}_0$) : dans ce cas, l'esquisse $\mathbb{E}_1$ n'est autre que le produit tensoriel de $\mathbb{E}_0$ par l'esquisse $\mathbb{2}$ réduite à une flèche entre deux objets. On peut aussi ne prendre que des homomorphismes plus spéciaux (en ajoutant à $\mathbb{E}_0 \otimes \mathbb{2}$ certaines conditions, dont l'expression peut nécessiter l'agrandissement de l'esquisse $\mathbb{E}_0 \otimes \mathbb{2}$ elle-même, dans un type convenable.

Il est bien clair que, pour être comprise sérieusement, cette dernière remarque renvoie à toute une littérature qui existe depuis bien longtemps, entre autre, dans de nombreux articles parus dans DIAGRAMMES et qu'il serait fastidieux de citer tous ici. Mais on viendra alors m'expliquer, dans le meilleur des cas, que tout ceci était en germe dans les oeuvres d'Euclide, Fermat et Alteri.

Pour en revenir à la description ci-dessus, elle est toujours à ce point générale qu'elle comprend le cas particulier (usuel) de composition (usuelle) de flèches qui sont des homomorphismes (usuels) entre structures (dans $\mathbb{G}$, qui peut être $\mathbb{E}\mathrm{ns}$) de même espèce. Alors, nous laissons le refrain de côté avec son cortège d' évidences, qui sans nul doute, étaient en germe dans les oeuvres d'Euclide, Fermat et Alteri. Et, si par hasard, je n'en avais pas assez dit ici, eh bien tant pis !

En résumé de ce paragraphe, nous pouvons dire ceci: la composabilité des flèches d'un système peut fort bien être soumise à une condition qui ne soit pas purement graphique. L'expression d'une telle condition de composabilité peut être réalisée dans le champ sémantique lui-même, comme les graphes multiplicatifs $\mathbb{E}\mathrm{ns}_f$ en fournissent l'exemple (la fonction de choix f avec ses 'propriétés' joue dans ce cas un rôle d'*environnement* permettant l'expression). Elle peut aussi revêtir une forme purement syntaxique, comme nous venons de le montrer avec l'exemple des graphes multiplicatifs $\mathbb{G}^{\ulcorner}$ (cf. le $\mathbb{C}$-épimorphisme $j : \mathbb{E}_{\alpha,\beta} \to \mathbb{E}_2$, et plus particulièrement la structure (interne) de $\mathbb{E}_2$). Bien évidemment, les deux modes d'expression peuvent être superposés, voire mêlés l'un à l'autre de façon plus subtile.

3. SYNTAXES DE $\mathbb{D}$-ALGEBRES.

Soit $\mathbb{C}$ un graphe multiplicatif de base, qu'on supposera être, pour plus de commodité, une catégorie.

Une $\mathbb{C}$-syntaxe [petite] $\mathbb{D}$ est la donnée d'un couple (J,K) formé de deux homomorphismes entre graphes multiplicatifs de même source, J : $\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ et K : $\mathbb{B} \to \mathbb{D}$, K étant bijectif sur les objets [$\mathbb{B}$ et $\mathbb{D}$ petits] .

Remarque 1.

C'est la condition de petitesse (ou d'appartenance à l'univers $\mathbb{U}$) qui nécessite, entre autres, justement le passage de la notion de catégorie à celle de graphe multiplicatif.

Remarque 2.

On peut supposer que J définit $\mathbb{B}$ comme sous-graphe multiplicatif de $\mathbb{C}$. Les flèches de $\mathbb{D}$ se répartissent entre celles qui proviennent de $\mathbb{B}$, donc de $\mathbb{C}$, via K , qu'on peut appeler *lois naturelles* de la $\mathbb{C}$-syntaxe $\mathbb{D}$ (cf. le paragraphe suivant n°5) , et les autres qu'on peut appeler *lois formelles* de la $\mathbb{C}$-syntaxe $\mathbb{D}$; les objets de $\mathbb{B}$ (ou de $\mathbb{D}$) , sélectionnés parmi ceux de $\mathbb{C}$, sont donc les arités ou coarités des lois.

Remarque 3.

La définition des $\mathbb{C}$-syntaxes de *structures* (cf. [D.S.D.M.] par exemple) non nécessairement algébriques, plus générale que la précédente, stipule que $\mathbb{D}$ est sous-jacent à une esquisse $\mathbb{E}$ et, corrélativement, on n'impose plus à K d'être bijectif sur les objets, prévoyant ainsi que certains objets puissent se 'déduire' formellement d'autres objets (cf. les cônes projectifs ou inductifs distingués, par exemple, et donc, sans préciser plus, ici, d'autres structures possibles de déduction).

Remarque 4.

Suposons, comme dans la remarque 2, que J est une simple inclusion $\mathbb{B} \subset \mathbb{C}$. Il est possible que $K : \mathbb{B} \to \mathbb{D}$ identifie des flèches distinctes f_1 et f_2 de même source et même but. Il semble inévitable a priori d'envisager ce cas; en effet, il se peut qu'on dispose dans $\mathbb{D}$ de l'équation "$Kf_1 = Kf_2$" , qu'elle soit ou non conséquence d'autres équations $[\ Kf_1 = (\omega_p \ldots (\ldots \omega_1)) = ((\omega'_n \ldots) \ldots \omega'_1) = Kf_2\ ]$. En fait, si $\mathbb{C}$ a des conoyaux, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que K est injectif aussi sur les flèches, c'est-à-dire identifier $\mathbb{D}$ à un sur-graphe multiplicatif d'un sous-graphe multiplicatif ($\mathbb{B}$!) de $\mathbb{C}$. Pour 'corriger' ce défaut d'injectivité éventuel de K, l'idée consiste à remplacer toute égalité formelle "$Kf = Kg$" provenant d'une paire de flèhes $(f,g) : A \to B$ dans $\mathbb{C}$, par un fragment syntaxique un peu plus riche et consistant en ceci :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, shift right, "c"'] & C \arrow[l, shift right, "d"'] \end{tikzcd}$$

où c est un conoyau choisi de (f,g) dans $\mathbb{C}$, $d : C \to B$ est une loi formelle, et, outre l'égalité naturelle $c.f = c.g$, l'égalité formelle $d.c = 1_B$ (dans ce sens !) au moins (on peut y ajouter $c.d = 1_C$, mais ce n'est pas utile a priori) . Ajouts qui nécessitent donc un agrandissement de $\mathbb{B}$. La justification de cette remarque va de soi lorsqu'on dispose de la notion d'algèbre (cf. plus loin).

Remarque 5.

Soit $\mathbb{D}_{\mathbb{C}}$ la somme amalgamée de $J: \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ et de $K: \mathbb{B} \to \mathbb{D}$. Les remarques précédentes jointes, on peut donc, presqu'en toute généralité (cf. cas d'injections), identifier $\mathbb{D}$ à un sur-graphe (multiplicatif) de $\mathbb{C}$, à savoir justement $\mathbb{D}_{\mathbb{C}}$ (on notera que la petitesse de $\mathbb{D}$ implique alors celle de $\mathbb{D}_{\mathbb{C}} \backslash \mathbb{C}$). Alors $\mathbb{D}_{\mathbb{C}}$ est aussi un système de générateurs et relations d'une certaine catégorie, qui (à isomorphisme près) est la théorie 'complète' engendrée par $\mathbb{D}$ (elle joue le rôle d'une catégorie de Kleisli, ou d'une théorie de Lawvere, selon le degré de complétion désiré). C'est ce point de vue que nous avons développé à l'origine (cf. [T.A.E.P.]), les catégories $\mathbb{C}$ en cause étant

toutes à conoyaux...
On aura à considérer aussi le graphe multiplicatif pointé (syntaxico-sémantique-local !) $\mathbb{D}_{\langle C \rangle}$ suivant:

- ses objets sont ceux de $\mathbb{D}_C$ provenant de $\mathbb{D}$, donc aussi de $\mathbb{B}$ dans le cas algébrique, qui seul nous occupe ici (on ne se privera pas de dire: ceux de $\mathbb{D}$, ou de $\mathbb{B}$, appliquant ainsi le vieux principe qui consiste à désigner une classe d'équivalence par l'un de ses représentants), et C lui-même s'il n'est pas déjà compté,
- ses flèches sont celles (provenant) de $\mathbb{D}$, celles allant de $\mathbb{D}_o$, ou $\mathbb{B}_o$, vers C, dans $\mathbb{C}$, et l'identité de C, si elle n'est pas déjà comptée,
- ses couples composables (et les composés afférents) sont tous ceux qui existent dans $\mathbb{D}_C$,
- l'objet pointant est C.

On pourrait aussi prendre pour $\mathbb{D}_{\langle C \rangle}$ le sous-graphe plein de $\mathbb{D}_C$ ayant pour objets ceux de "$\mathbb{D}$" et "C", ce qui ne serait pas tout à fait le même choix (a priori, plus de flèches de "$\mathbb{C}$" y figureraient...)

Remarque 6.

En opposition avec la remarque 2, on peut dire ceci: considérer un foncteur $J : \mathbb{B} \to \mathbb{C}$ au lieu d'une inclusion n'est pas une généralisation trop gratuite; il peut même y avoir intérêt à généraliser un peu plus , et prévoir, par exemple, un foncteur $J : \mathbb{B} \to \mathrm{Diag}(\mathbb{C})$ où $\mathrm{Diag}(\mathbb{C})$ est la catégorie des petits diagrammes dans $\mathbb{C}$.
Un objet de $\mathrm{Diag}(\mathbb{C})$ est un foncteur D d'un (petit) graphe (multiplicatif) $\mathbb{I}$ vers $\mathbb{C}$ et une flèche de $D : \mathbb{I} \to \mathbb{C}$ vers $D' : \mathbb{J} \to \mathbb{C}$ est un couple (F, t) formé d'un foncteur $F : \mathbb{I} \to \mathbb{J}$ et d'une transformation naturelle $t : D \to D' \cdot F$, et si $\mathbb{C}$ n'est donné que comme graphe multiplicatif, on sait qu'il existe bien des variantes naturelles (cf. [P.T.G.M.]) de la notion de transformation naturelle, allant de la plus 'pauvre', purement graphique, à la plus 'riche', qui redonne les transformations naturelles usuelles, pour peu qu'on passe à la catégorie libre engendrée.
Ainsi les arités ou coarités se trouvent en quelque sorte éclatées par rapport à la situation antérieure, laquelle est récupérée en choisissant les indexations triviales convenables

Remarque 7.

Prolongeant la remarque 6, on peut aussi envisager des $\mathbb{C}$-syntaxes 'tramiques' (ou *déclaratives*): $\mathbb{D}$ est alors le graphe multiplicatif sous-jacent à une... trame (cf. [T.S.T.S.] à ce sujet).

Remarque 8.

Pour une 'catégorie' de base $\mathbb{C}$ fixée, on dispose de la notion naturelle d'homomorphisme entre $\mathbb{C}$-syntaxes suivante:

> un $\mathbb{C}$-homomorphisme h de $\mathcal{D}$ = (J, K) vers $\mathcal{D}'$ = (J', K') est un couple h = (h_0, h_1) d'homomorphismes entre graphes multiplicatifs: h_0: $\mathbb{B} \to \mathbb{B}'$ et $h_1 = \mathbb{D} \to \mathbb{D}'$ satisfaisant les égalités suivantes : $J'\circ h_0 = J$ et $K'\cdot h_0 = h_1\cdot K$.

Le cas le plus fréquent est celui où $\mathbb{B}$ et $\mathbb{B}'$ sont des sous-graphes multiplicatifs de $\mathbb{C}$, où h_0 est une inclusion (de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}'$) et où K et K' sont fidèles et bijectifs sur les objets. Alors la somme amalgamée $\mathbb{D}'_C$ de J' et K' (identifiée à $\mathcal{D}'$) peut être regardée comme un surgraphe multiplicatif de la somme amalgamée $\mathbb{D}_C$ de J et K (identifiée à $\mathcal{D}$), elle-même regardée comme un surgraphe multiplicatif de $\mathbb{C}$. Moins formellement, un $\mathbb{C}$-homomorphisme consiste ici, alors, à ajouter (éventuellement):

- des lois, naturelles ou formelles,
- des objets, arités ou coarités, de $\mathbb{C}$,
- des équations.

Remarque 9.

Il se peut que l'injection (supposée reconnue) de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{D}_C$, ou de $\mathbb{D}_C$ dans $\mathbb{D}'_C$ (ou les deux) ne tienne en tant qu'injection que grâce à un défaut d'associativité de $\mathbb{D}$. Donnons cet exemple formel: soient f, g, f_1, $f_2 \in \mathbb{C}$, des lois naturelles, et soient ω_1, ω_2, $\omega_3 \in \mathbb{D}\backslash\mathbb{C}$, des lois formelles; supposons que l'on dispose des équations suivantes: $\omega_2 = \omega_3.\omega_1$, $f_2.\omega_2 = g$, $f_1.\omega_1 = f$, $f_2.\omega_3 = f_1$; alors on a: $f_2.(\omega_3.\omega_1) = g$ tandis que $(f_2.\omega_3).\omega_1 = f$.

Pour les $\mathcal{D}$-algèbres courantes (cf § 4) ce défaut peut être corrigé en décrètant l'égalité (i.e. "f = g"), d'où la relative nécessité de K. On perd l'injectivité, de ce point de vue, mais on est renvoyé à la remarque 4.

Remarque 10.

A l'inverse de ce qui a été dit dans la remarque 8, on peut vouloir garder la même partie purement syntaxique, à savoir un foncteur tel que $K : \mathbb{B} \to \mathbb{D}$, et faire varier la sémantique de base, i.e. $\mathbb{C}$, en se donnant par exemple un foncteur (voire une correspondance) $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$. Alors, même si au départ on avait une inclusion (de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{C}$) pour J, on retrouve un premier foncteur de syntaxe $J' = F.J$ qui n'est une inclusion qu'à la condition que F en soit une lui-même ! Ceci justifie en partie que dans la définition générale on ait envisagé pour J d'être un foncteur général, et pas seulement une inclusion.

Remarque 11.

On verra au paragraphe suivant que de tels homomorphismes induisent des comparaisons simples (i.e. fonctorielles) entre les catégories d'algèbres associées aux syntaxes source et but: pour $\mathbb{C}$ fixé (remarque 8) la comparaison induite est contravariante tandis que pour $K: \mathbb{B} \to \mathbb{D}$ fixé (remarque 10) elle est covariante.

Remarque 12.

Bien évidemment, on peut superposer (en les assouplissant même) les deux genres d'homomorphismes entre syntaxes dont il vient d'être question.
Indépendamment, il convient de noter encore ceci: il arrive, très naturellement, que des syntaxes différentes aient même 'indexation' (i.e.: même foncteur $K:\mathbb{B} \to \mathbb{D}$) et même catégorie de base $\mathbb{C}$, et ne soient pourtant même pas comparables (grâce à un homomorphisme, ou autre correspondance, même assoupli(e)).
L'exemple typique de ce phénomène (répétons-le très naturel!) est le suivant: soit $\varphi : \mathbf{I} \to \mathbf{J}$ un foncteur entre petits graphes multiplicatifs; soit $\mathbb{C}\mathrm{at}(\varphi)$ la catégorie des catégories à extensions de Kan (choisies) le long de φ; on a montré (voir [C.A.P.E.], par exemple, mais avec d'autres notations) que $\mathbb{C}\mathrm{at}(\varphi)$ était une catégorie de $\mathcal{D}_\varphi$-algèbres pour une certaine

syntaxe catégorique $\mathcal{D}_\varphi$ = (J_φ, K) (donc ici: $\mathbf{C}$ = $\mathbf{Cat}$, mais ce pourrait être tout aussi bien $\mathbf{Grm}$, voire $\mathbf{Sym}$, en tout cas pas en général $\mathbf{Gra}$ - cf. par exemple [A.M.E.N.]). Dans [C.A.P.E.], on s'est attaché à bien montrer justement que le foncteur K : $\mathbf{B} \to \mathbf{D}$, dit d'indexation, pouvait être choisi indépendamment de φ, mais aussi indépendamment du fait qu'on choisisse $\mathbf{Cat}$, $\mathbf{Grm}$, ou même $\mathbf{Sym}$ comme catégorie de base. Par contre le choix de φ détermine pratiquement celui de J_φ, mais les variations de φ n'induisent pas en général de morphismes naturels (d'aucune des sortes évoquées ci-dessus) entre les syntaxes $\mathcal{D}_\varphi$ correspondantes.
Bien évidemment, la catégorie $\mathbf{Cat}_Z$ des catégories à extensions de Kan (choisies) le long de foncteurs φ appartenant à une classe (un ensemble) Z prescrite est encore descriptible comme catégorie de $\mathcal{D}$-algèbres pour une syntaxe $\mathcal{D}$ = (J_Z, K_Z) (petite) qu'on obtient en amalgamant autant de copies de $\mathbf{B}$ que nécessaire (ce qui dépend de Card(Z)) et rend alors K (= K_Z) dépendant, non pas vraiment de Z, mais seulement de Card(Z), tandis que J (= J_Z) dépend effectivement de Z.

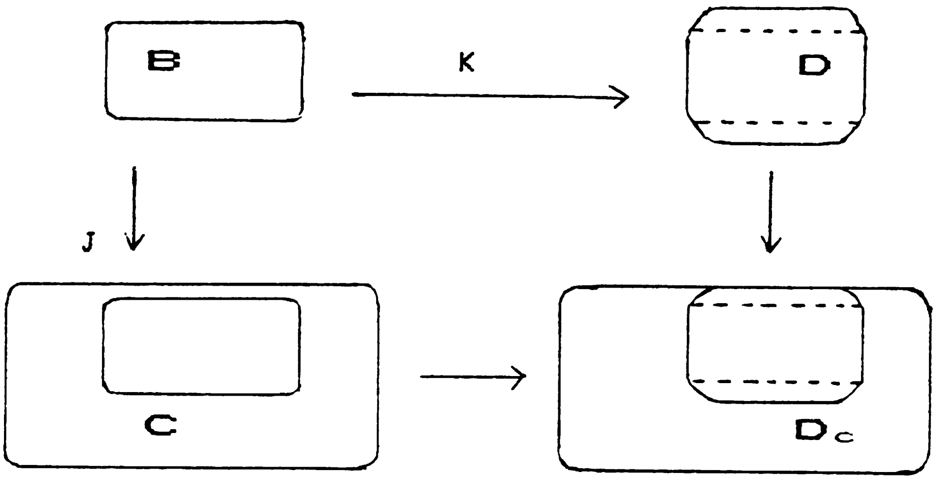
Cet exemple devait être cité ici, pour illustrer un des procédés possibles de construction d'une syntaxe d'algèbres à partir d'autres (cf. calculs de colimites dans les catégories de syntaxes).

Enfin, la considération d'un foncteur J général, à la place d'une inclusion, n'est pas tant fondée sur le fait que J pourrait n'être plus injectif que sur l'indéniable avantage qu'il peut y avoir parfois à traiter $\mathbf{B}$ comme un graphe multiplicatif d'*indexations* (d'arités et de lois naturelles). C'est ce qu'on vient de montrer.

Pour conclure ce paragraphe, nous devons signaler que l'homomorphisme (le foncteur) J: $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$ est bien à mettre sur le même plan que le classique foncteur de Yoneda , mais il en diffère cependant ici, en ce qu'il n'est a priori ni naturel, ni plein, ni fidèle, ni dense. Une flèche X $\to$ C de $\mathbf{C}$ peut s'interpréter comme un élément de sorte X dans C. Le rôle de $\mathbf{B}$ est de *sélectionner* les seules sortes d'éléments à prendre en compte pour constituer les $\mathcal{D}$-algèbres.

4. $\mathcal{D}$-ALGEBRES ET HOMOMORPHISMES.

Commençons par la définition globale, en supposant d'abord que $\mathbb{C}$ est une catégorie. Soit $\mathcal{D}$ = (J, K) une $\mathbb{C}$-syntaxe. On désignera par $\mathbb{D}_{\mathbb{C}}$ 'la' somme amalgamée de J et de K au dessus de $\mathbb{B}$ [et on pourra supposer éventuellement que $\mathbb{D}_{\mathbb{C}}$ est un surgraphe multiplicatif de $\mathbb{C}$, ce qui est bien le cas lorsque J : $\mathbb{B} \to \mathbb{C}$ est une inclusion, K est un foncteur fidèle et $Ob(\mathbb{B}) = Ob(\mathbb{D})$ $Ob(\mathbb{C})$].



On désigne par $\langle \mathbb{X}, \mathbb{Y} \rangle$ soit l'habituelle catégorie des foncteurs de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$, soit tout autre objet qui en tient lieu, et qui n'est donc pas forcément une catégorie, comme on le sait [P.T.G.M.], surtout si $\mathbb{Y}$ n'est pas une catégorie ! Dans ce qui suit, la catégorie $\mathbf{Ens}$ n'est pas immédiatement substituable par d'autres catégories (ou graphes multiplicatifs), mais, avec des adaptations qui ressortent à la fois de la routine catégorique (cf. catégories structurées, catégories dominées, $\mathbb{V}$-catégories...) et d'une lecture attentive de *tout* ce qui précède, il est loisible de procéder à de telles substitutions, chaque fois que l'on peut.

Soit H : $\mathbb{C} \to \langle \mathbb{B}^{op}, \mathbf{Ens} \rangle$ le composé du foncteur de Yoneda $\mathbb{C} \to \langle \mathbb{C}^{op}, \mathbf{Ens} \rangle$ et du foncteur d'oubli J^* (composition à droite par J): $\langle \mathbb{C}^{op}, \mathbf{Ens} \rangle \to \langle \mathbb{B}^{op}, \mathbf{Ens} \rangle$.

On dispose aussi de l'oubli K^* (composition à droite par K) : $\langle \mathbf{D}^{op}, \mathbf{Ens}\rangle \to \langle \mathbf{B}^{op}, \mathbf{Ens}\rangle$.

La catégorie $\mathbf{Alg}_D$ des $\mathcal{D}$-algèbres est alors le produit fibré (dans la ... catégorie des ... catégories) de H et K^*. La notion de $\mathcal{D}$-algèbre est ainsi introduite indirectement (ou globalement si l'on préfère) par l'intermédiaire de sa 'catégorie' . La définition de l'objet $\mathbf{Alg}_D$ est susceptible de variantes liées à la structure (globale) des objets tels que $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}_C$, $\mathbf{Ens}$, et des morphismes tels que H, K, etc..., de leur composabilité, bref de la structure globale (catégorie ou autre, à limites (choisies), cartésienne (fermée), etc...) qu'ils peuvent définir et au sein de laquelle $\mathbf{Alg}_D$ n'est qu'un objet possible.

Revenant à la situation du début, on en arrive à la définition directe (ou locale si l'on préfère) de $\mathcal{D}$-algèbre, qui n'est autre qu'une K^*-structure F au dessus d'un objet (foncteur) du type H(C). On dit encore que le couple (C,F) est une $\mathcal{D}$-algèbre sur l'objet C.

Entre autre, pour tout objet B de $\mathbf{B}$, on a $F(B) = \mathrm{Hom}_C(JB,C)$, et, pour toute flèche $b: B' \to B$ telle que $Jb: JB' \to JB \in \mathbf{C}$, $F(Kb) = \mathrm{Hom}_C(Jb,C)$ est l'application de $\mathrm{Hom}_C(JB,C)$ dans $\mathrm{Hom}_C(JB',C)$ qui à $x: JB \to C$ fait correspondre le composé $x.Jb: JB' \to C$. Pour simplifier les notations, mais aussi pour donner la préférence au cas où J est une inclusion, et sans risque majeur de se tromper (eu égard à tout ce qui précède), nous écrirons $x\cdot b$ au lieu de $x.Jb$. Par analogie, il peut être intéressant de noter, aussi, pour $\omega: KB' \to KB$ élément de $\mathbf{D}$, la valeur de $F(\omega)(x)$ sous forme d'un composé $x\cdot\omega$, mais, afin de rappeler que ce composé dépend ici effectivement de F, on préférera une notation du genre $x\cdot_F\omega$.

Cela étant, si $z'' = z'\cdot z$ est une des équations de la syntaxe $\mathcal{D}$ (que z, z', z" soient des flèches de $\mathbf{C}$ ou non, et l'équation donnée une des équations de $\mathbf{C}$ ou non), la 'fonctorialité' de F se traduit par la condition d'associativité suivante (qui contient en elle-même la définition des composés en cause):

$$\forall\ x: B \to C \in F(B)\ [\ x\cdot_F(z'\cdot z) = (x\cdot_F z')\cdot_F z)\ ]$$

Nous renvoyons à la remarque 3 (suivante) pour plus de détails.

Un homomorphisme h: $(C,F) \to (C',F')$, de source (C,F) et de but (C',F') est déterminé par une flèche h: $C \to C'$ vérifiant l'axiome (H) suivant:

(H) $\forall\ \omega$: $B' \to B \in \mathbb{D}$, x: $B \to C \in \mathbb{C}$, $[F'(\omega)(h.x) = h.(F(\omega)(x))]$

Entre autre, pour tout objet B de $\mathbb{B}$, $h(B)$: $F(B) \to F'(B)$ est l'application de composition (à gauche) par h : $x \to h.x$ (cette application pourrait être, de bien des manières, partielle, structurée, plus formelle, etc... c'est en ce sens que doivent être comprises, puis appliquées maintenant, un certain nombre de remarques faites jusqu'ici). Pour toute flèche y: $B' \to B \in \mathbb{C}$, $h(y)$ n'a de sens *naturel* qu'à la condition que $H(h)$: $H(C) \to H(C')$ définisse bien une transformation *naturelle*, laquelle, en l'objet B de $\mathbb{B}$, se traduit par la condition d'associativité suivante (qui suppose tous les composés en cause définis):

$$\forall\ x:\ B \to C \in F(B)\ [\ (h\cdot x)\cdot y = h\cdot(x\cdot y)\ ]$$

Dans l'immédiat, par analogie, il peut être intéressant de noter, pour ω: $B' \to B$ élément de $\mathbb{D}$, la valeur réputée commune de $F'(\omega)(h.x)$ et de $h.(F(\omega)(x))$ sous l'une ou l'autre formes respectives suivantes : $(h\cdot x)\cdot\omega$ ou $h\cdot(x\cdot\omega)$, mais en rappelant qu'ici certains des composés peuvent dépendre effectivement des algèbres source et but de h (i.e. de F et F'), soit en utilisant la notation introduite ci-dessus: $(h\cdot x)\cdot_{F'}\omega = h\cdot(x\cdot_F\omega)$.

Les définitions et observations précédentes conduisent à associer à une $\mathbb{D}$-algèbre (C,F) le graphe multiplicatif $\mathbb{D}_{(C,F)}$ *pointé* suivant:

- ses objets sont ceux de $\mathbb{D}_C$ provenant de $\mathbb{D}$, et C lui-même s'il n'est pas déjà compté,
- ses flèches sont celles (provenant) de $\mathbb{D}$, celles allant de $\mathbb{D}_o$ vers C, et l'identité de C elle-même si elle n'a pas déjà été comptée,
- ses couples composables (et les composés afférents) sont tous ceux qui existent dans $\mathbb{D}_C$, et ceux de la forme $x\cdot_F\omega$ décrite ci-dessus, où ω: $B' \to B \in \mathbb{D}$ et où x est un élément de C de sorte B,
- l'objet pointant est C.

Remarque 1.

La dualité ($\mathbb{B}^{op}$, $\mathbb{D}^{op}$,..) se manifeste donc simplement, au niveau des algèbres, par le fait qu'on dispose de nouveaux composés *à droite*.

Remarque 2.

On ne doit pas confondre ce graphe multiplicatif $\mathbb{D}_{\langle C,F\rangle}$ avec le graphe multiplicatif $\mathbb{D}_C/C$, qui, lui, ne dépend pas de F. Un objet du graphe multiplicatif $\mathbb{D}_C/C$ est une flèche (particulière) de $\mathbb{D}_{\langle C,F\rangle}$, lequel est un graphe pointé par C, donc pointu!

Remarque 3.

Dans le cas où J et (ou ou) K ne seraient pas fidèles, il pourrait être judicieux de remplacer le graphe multiplicatif $\mathbb{D}_C$ par un graphe multiplicatif ayant toujours les mêmes objets (identifiables à certains objets de $\mathbb{C}$) mais plus de flèches (en gardant la multiplicité de celles-ci telle qu'elle est dans $\mathbb{B}$). Le mieux serait d'ailleurs de garder une trace *concrète* de J et de K en ajoutant:

- pour tout objet B de $\mathbb{B}$, deux flèches, $j_B: B \to JB$ et $k_B: B \to KB$,
- pour toute flèche $b: B \to B'$ de $\mathbb{B}$, les équations exprimant la commutativité des carrés suivants:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "j_B"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "="] & JB \arrow[d, "Jb"] \\ B' \arrow[r, "j_{B'}"'] & JB' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "k_B"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "="] & KB \arrow[d, "Kb"] \\ B' \arrow[r, "k_{B'}"'] & KB' \end{tikzcd}$$

Remarque 4.

Donnons une précision utile concernant l'associativité liée à une algèbre (C,F) donnée. Soient donc $x: B \to C \in Fl(\mathbb{C})$, $z': B' \to B$ et $z: B'' \to B'$ composables dans $\mathbb{D}$, de sorte que l'on a bien les égalités suivantes:

$$\begin{aligned} x \cdot_F (z' \cdot z) &= F(z' \cdot z)(x) \\ &= F(z)F(z')(x) \quad \text{(F foncteur)} \\ &= F(z)(x \cdot_F z') \\ &= (x \cdot_F z') \cdot_F z \,. \end{aligned}$$

Une telle associativité ne fait que traduire, comme déjà dit, la fonctorialité de F. Par contre, $(x \cdot_F z') \cdot_F z$ peut être défini sans que $z' \cdot z$ (et a fortiori $x \cdot_F (z' \cdot z)$) le soit. Autrement dit, la fonctorialité de F se manifeste par la possibilité de certains déplacements de parenthèses vers la gauche.

Remarque 5.

Le graphe multiplicatif (syntaxico-sémantique-local) $\mathbb{D}_{\langle C \rangle}$ se trouve ainsi *étendu* en le graphe multiplicatif $\mathbb{D}_{\langle C, F \rangle}$, qui ne comporte *que plus de composition*, et plus d'*associativité*, comme on l'a déjà souligné.

Remarque 6.

Les remarques précédentes, plus particulièrement la dernière, suggèrent à l'évidence une triple généralisation possible pour une algèbre F:

- tout d'abord, on pourrait n'avoir à se donner, en guise d'algèbre F (sur C), qu'un surgraphe multiplicatif (toujours pointé en C) du graphe multiplicatif $\mathbb{D}_{\langle C \rangle}$, satisfaisant certaines règles d'associativité (dont il conviendrait de préserver le caractère *global*, par opposition au caractère *local* lié à l'algèbre particulière F),

- ensuite, on imagine aisément qu'une algèbre puisse avoir plusieurs objets, voire quelques flèches et quelques composés de flèches aussi, bref un diagramme $\mathbf{I}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ *sous-jacent*, et pas seulement *un* objet C sous-jacent; il conviendrait alors de substituer à $\mathbb{D}_{\langle C \rangle}$ un graphe multiplicatif $\mathbb{D}_{\langle I \rangle}$, qu'on définit facilement,

- enfin, et c'est peut-être l'essentiel, on pourrait convenir de ne définir que certains composés $x \cdot_F \omega$, dans lesquels ω serait toujours un élément syntaxique ($\in \mathbb{D}$) et où x serait toujours un 'élément' de $\mathbf{I}$, i.e. une flèche de $\mathbb{C}$, de source le but de ω et de but un objet C_I de $\mathbb{C}$, indexé par un objet de $\mathbf{I}$.

Quant aux lois qui présideraient à la partialisation (car il s'agit bien de cela), elles devraient garder un statut minimum global (i.e. indépendant de l'algèbre F en question) du genre:

- le composé $x \cdot_F \omega$ n'est défini que si x factorise d'au moins une façon à travers un diagramme $\Phi(F, \omega)$ donné (i.e. qui fait partie des données de la structure F), diagramme dont la forme peut être constante par rapport à F ou à ω,

ou encore du genre:

- le composé $x \cdot_F \omega$ est défini, mais sa valeur y, bien qu'ayant pour source la source de ω, aurait un but non forcément égal au but C_I de x, mais un objet (ou pourquoi pas un diagramme) relié à C_I (par exemple, par une transformation naturelle).

Il va de soi que ces digressions sont pratiquement sans fin, mais ici, il faut bien que je m'explique un peu:

1) il me semble avoir montré assez largement que l'exercice qui consiste à généraliser a priori n'est pas en soi bien difficile,

2) une généralisation peut, malgré les apparences, ne pas en être vraiment une, dans la mesure où elle ne débouche pas forcément sur de nouveaux champs d'application, de nouveaux résultats,

3) cependant, elle présente toujours l'intérêt minimum qui consiste à faire voir les choses d'une autre manière, et

c'est cette autre manière qui peut générer vraiment du nouveau,

4) sur le terrain de la généralisation, on trouve toutes sortes de *chasseurs*, plus ou moins habiles; il n'y a aucune honte à en faire partie, mais gare aux flèches perdues...

5) il y a aussi l'habillage qu'on donne aux choses. Il me semble qu'on confond de plus en plus habillage et généralisation. C'est ainsi que certains, passés grands couturiers, n'ont plus qu'une idée en tête: vous vendre trois paires de chaussettes pour le prix d'une !

J'ai bien compris l'ennui que ce texte, voué presqu'exclusivement aux graphes multiplicatifs, pouvait dégager. Alors les quelques réflexions précédentes assureront au moins la récréation.

Soit h: $(C,F) \to (C',F')$ un homomorphisme entre $\mathbf{D}$-algèbres. On peut lui associer le graphe multiplicatif *fléché* $\mathbf{D}_{\langle h \rangle}$ suivant:

- ses objets sont ceux de $\mathbf{D}_C$ provenant de $\mathbf{D}$, et C et C' eux-mêmes s'il ne sont pas déjà comptés,
- ses flèches sont celles (provenant) de $\mathbf{D}$, celles allant de $\mathbf{D}_0$ vers C et C', la flèche h, et les identités de C et de C' elles-mêmes si elles n' ont pas déjà été comptées,
- ses couples composables (et les composés afférents) sont tous ceux qui existent dans $\mathbf{D}_C$, ceux de la forme $x \cdot_F \omega$ décrite plus haut, où ω: $B' \to B \in \mathbf{D}$ et où x est un élément de C (ou de C') de sorte B, et ceux de la forme $h \cdot (x \cdot_F \omega)$ décrite plus haut,
- la flèche fléchante est h.

On peut toujours associer un tel graphe multiplicatif $\mathbf{D}_{\langle h \rangle}$ à une flèche $h: C \to C'$, qui ne soit pas nécessairement un homomorphisme entre les algèbres (C,F) et (C',F') (ce pourrait être seulement une 'correspondance', par exemple). Le fait que h soit un homomorphisme se traduit par la présence dans $\mathbf{D}_{\langle h \rangle}$ de *suffisamment* d'associativité, plus précisément toutes les égalités possible du genre: $(h \cdot x) \cdot_F \omega = h \cdot (x \cdot_F \omega)$, pour x et ω variables.

La structure de telles égalités nous incite à faire au moins deux observations importantes:

- un symbole d'algèbre figure en indice du symbole de composition dans chacun des deux membres réputés égaux et ce symbole (F ou F' !) occupe la *même* place dans les deux cas,

- comme pour toute égalité, l'interprétation en termes de réécriture offre a priori deux possibilités (d'orientation), qu'on peut accepter ou refuser - là n'est pas la question -, mais on doit noter que le déplacement de parenthèses vers la droite est contraire au sens naturel de l'homomorphisme h ($F \to F'$), et donc il correspond au sens ($F' \to F$), ce qui, au delà de la simple lapalissade, exprime qu'on va dans le sens "moins d'algèbre, plus de syntaxe", tant il est vrai qu'un homomorphisme conduit toujours vers une structure plus riche ou plus contrainte (voire les deux à la fois).

Il convient alors d'établir un parallèle avec ce qui se passe dans le graphe multiplicatif (pointé) $\mathbb{D}_{\langle C,F \rangle}$ associé à une algèbre (C,F). Considérons donc une égalité d'associativité du genre: $(x \cdot_F \omega) \cdot_F \omega' = x \cdot_F (\omega \cdot \omega')$.

- le symbole d'algèbre figure en indice du symbole de composition dans chacun des deux membres réputés égaux, mais ici, il figure deux fois lorsque les parenthèses sont à gauche et une fois lorsqu'elles sont à droite, autrement dit le déplacement de parenthèses vers la droite correspond encore au sens "moins d'algèbre, plus de syntaxe", mais cette *covariance* se manifeste ici de façon comptable ($2 \to 1$) tandis que, dans le cas d'un homomorphisme, elle se manifeste de manière moins apparente (cf. la deuxième observation ci-dessus), l'aspect comptable ($1 \to 1$) étant 'neutre'.

De cette analyse, on retiendra donc que les déplacements de parenthèses vers la droite, dans les graphes multiplicatifs associés, s'accompagnent d'une *élimination partielle* de l'algèbre au *profit* de la syntaxe, ce qui suggère fortement de nouvelles manières possibles et relativement systématiques de traiter l'algèbre dans une catégorie ou un système multiplicatif plus général.

Nous allons finir par quelques réflexions simples qu'inspire le point de vue (très/trop général) de la réécriture que nous venons d'évoquer.

Appelons *élément d'algèbre généralisé* un triplet $E = (h, x, \omega)$ dans lequel, pour fixer un cadre minimum:

- $\omega : B' \to B$ est une loi d'une $\mathcal{C}$-syntaxe $\mathcal{D}$,
- $x : B \to C$ est un élément de C de sorte B (cf. fin du §4),
- $h : (C,F) \to (C',F')$ est un homomorphisme entre $\mathcal{D}$-algèbres,

Ainsi dispose t-on des éléments (cf. fin du §4) suivants:

- h , x , ω , $h.x$, $x.\omega$, $(h.x)._F\omega$, $h._{F'}(x.\omega)$.

On peut dire que ω est la partie syntaxique de E , x la partie élémentaire (au sens du §4) de E , et h sa partie sémantique; on peut qualifier le composé commun $(h.x)._F\omega = h._{F'}(x.\omega)$ d'élément (au sens du §4) sous-jacent à E.

En présence d'un élément généralisé $E = (h, x, \omega)$, trois types naturels de décomposition se présentent, qui donnent lieu à deux possibilités de réécriture, au moins:

1) $h = h_2.x_1$ où $h_2 : (C_1,F_1) \to (C',F')$ est un homomorphisme et $x_1 : C \to C_1$ un élément de C_1 de sorte C (on précisera éventuellement *composable avec* x), pas nécessairement sous-jacent à un homomorphisme.

Alors, on peut convenir de réécrire E en $E' = (h_2, x_1.x, \omega)$, qui peut correspondre au sens "moins d'algèbre, plus de syntaxe" (estimant par là que h_2 est 'plus court' que h, ou, ce qui ne revient pas forcément au même, que $x_1.x$ est 'plus long' que x - mais cette appréciation est, à ce niveau de généralité, parfaitement *arbitraire*).

Inversement, toujours avec le même arbitraire, si on a reconnu que x pouvait se décomposer en $h_1.x_2$, où $h_1 : (C'',F'') \to (C',F')$ est un homomorphisme d'algèbres, on peut convenir de réécrire $E = (h,x,\omega)$ en $E'' = (h.h_1,x_2,\omega)$ voulant 'augmenter' la composante sémantique de l'élément généralisé E.

Ce sont des structures locales de réécriture qui devraient permettre de décider de l'opportunité d'aller vers *plus* de syntaxe ou *plus* de sémantique, et non des règles générales (i.e. structures globales).

2) $x = x_2 \cdot \omega_1$ où x_2: $B_1 \to C$ est un élément de C de sorte B_1, et où ω_1: $B \to B_1$ est une loi (naturelle ou non) de la syntaxe $\mathcal{D}$.

Alors, si le composé $\omega_1 \cdot \omega$ est défini dans $\mathcal{D}$, on peut réécrire l'élément $E = (h, x, \omega)$ en $E_1 = (h, x_2, \omega_1 \cdot \omega)$, ce qui, toute précaution prise, va dans le sens "moins d'algèbre, plus de syntaxe".

Inversement, on peut être amené à reconnaître que la partie syntaxique ω de l'élément E se décompose en $\omega_2 \cdot \omega_1$ et vouloir réécrire E en $E_2 = (h, x \cdot_F \omega_2, \omega_1)$, qui est plus 'contingent' (ou moins syntaxique, ou plus algébrique).

Remarques terminales.

1) Bien évidemment, la notion d'élément d'algèbre généralisé se laisse généraliser encore un peu par la considération de triplets de chemins convenables. Viennent aussi les chemins d'éléments d'algèbre généralisés, puis les éléments d'algèbres généralisés d'ordre supérieur, etc... Interviennent ici, non pas des généralisations gratuites, mais bel et bien des éléments de structures des calculs eux-mêmes (on peut vouloir, par exemple, différer certains calculs de composés, donc certains types de réécritures, bref repousser l'évaluation de certaines expressions.)

2) On pressent la possibilité de passer *progressivement* de la syntaxe d'algèbre à l'algèbre proprement dite, en imaginant, par exemple, des 'zones intermédiaires d'écriture', pour lesquelles l'élément de décision (concernant l'appartenance à l'une des composantes de l'élément généralisé: h, x ou ω) ne serait pas formulé (possibilité d'enrichir la syntaxe):

$$(h \, , \, ?? \, , \, x \, , \, ?? \, , \, \omega)$$

3) On conçoit qu'une différence assez nette doit être faite entre structures d'algèbre et structures de réécriture (ce qui n'est pas en contradiction avec le fait que la réécriture a pour principale fonction de *calculer* des éléments de structures).

BIBLIOGRAPHIE.

[A.M.E.N.] L.Coppey et C.Lair,
Algébricité, Monadicité, Esquissabilité et Non-algébricité, Diagrammes, Vol. 13, Juillet 1985.

[A.R.O.M.] C.Baudelaire,
L'Art romantique,
Col. 'Les trésors de la littérature française',
Editions d'Art Albert Skira, Genève 1945.

[C.A.P.E.] L.Coppey,
Catégories de Peano, catégories algorithmiques, récursivité, Diagrammes, Vol. 12, Décembre 1984.

[C.A.S.T.] C.Ehresmann,
Catégories et Structures, Dunod, Paris 1965.

[D.S.D.M.] C.Lair,
Diagrammes structurés de modèles, Diagrammes, Vol. 18, Décembre 1987.

[E.S.T.R.] C.Lair,
Esquissabilité et Triplabilité, Cah.Top.Géo.Dif. Vol.XVI, 3, Amiens 1975.
(2ème Colloque sur l'algèbre des Catégories)

[I.T.S.C.] C.Ehresmann,
Introduction to the theory of structured categories, Technical Report 10, Univ. of Kansas Lawrence 1966.

[P.E.N.S.] C.Levi-Strauss,
La Pensée Sauvage, 1962.

[P.T.G.M.] L.Coppey,
Quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes,Vol.3, Paris, Juillet 1980.

[S.B.D.S.] L. Coppey,
Structures de base pour définir les structures, Diagrammes, Vol.7, Paris, Juillet 1982.

[T.A.E.P.] L. Coppey,
Théories algébriques et extensions de préfaisceaux, et compléments,
C.T.G.D., Vol XIII, 1 et 4, Paris 1972.

[T.F.A.E.] C. Lair,
Condition syntaxique de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé,
Diagrammes, Vol.1, Paris, Juillet 1979.

[T.S.T.S.] C. Lair,
Trames et sémantiques catégoriques des systèmes de trames, Diagrammes, Vol. 18, Décembre 1987.