C. LÉGER

Le groupe des métamorphoses d'une catégorie, un exemple

Diagrammes, tome 21 (1989), exp. nº 3, p. L1-L4
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1989__21__A3_0>

LE GROUPE DES METAMORPHOSES D'UNE CATEGORIE, UN EXEMPLE

C. Léger

Dans cette note nous montrons que, étant donné un groupe G , le groupe (*) des autoéquivalences à équivalence naturelle près de la catégorie des G-ensembles s'identifie au groupe des automorphismes extérieurs de G .

Nous remercions Jacques Emsalem qui, avec la notion d'autoéquivalence de catégorie, a rendu plus pertinent un premier énoncé (cf. <1>, théorème 1 et <2>, théorème 11) et en a considérablement simplifié et resserré la démonstration.
Nous remercions à nouveau Christian Lair qui nous a donné l'idée décisive du lemme.

DEFINITION 1. Soit une catégorie K . On note Equ K le monoïde (*) des équivalences de K dans K ou *autoéquivalences* de K . On note Met K et on appelle *groupe des métamorphoses* de K le groupe (*) quotient de Equ K par la relation d'équivalence naturelle des foncteurs.

On vérifie immédiatement la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Toute équivalence d'une catégorie* K *dans une catégorie* K' *induit un isomorphisme de groupes de* Met K *sur* Met K' .

(*) Nous ne discutons pas le fait qu'ici les supports des groupes et des monoïdes ne sont pas nécessairement des ensembles.

Soit pour toute cette note un groupe G .

On note respectivement $\mathrm{Aut}\, G$, $\mathrm{Int}\, G$, $\mathrm{Out}\, G$ le groupe des automorphismes de G , le sous-groupe distingué des automorphismes intérieurs, le groupe quotient $\mathrm{Aut}\, G / \mathrm{Int}\, G$.

Un G-ensemble X c'est aussi bien une loi de composition externe $G\mathrm{x}X \to X$ satisfaisant aux axiomes usuels qu'un homomorphisme de G dans le groupe $\mathrm{Bij}(X)$ des substitutions de X . On utilise indifféremment un point de vue ou l'autre.

On note C la catégorie des G-ensembles ayant pour flèches les homomorphismes de G-ensemble. Pour tout v dans $\mathrm{Aut}\, G$ et tout objet X de C défini par l'homomorphisme $h:G \to \mathrm{Bij}(X)$, on a l'objet de C noté $Fv(X)$ ayant même ensemble sous-jacent que X et défini par l'homomorphisme $h \circ v^{-1}$.

Pour tout v dans $\mathrm{Aut}\, G$ on a le foncteur $Fv:C \to C$ qui à l'objet X associe l'objet $Fv(X)$ et agit trivialement sur les flèches.

On note encore G l'objet canonique de C défini par l'homomorphisme qui à tout élément g de G associe la translation à droite $Tg:x \to xg$ de G .

On note S la sous-catégorie pleine de C dont les objets sont ceux isomorphes à l'objet canonique (ce sont ceux sources de flèches vers tout objet de C).

La sous-catégorie S est stable par les autoéquivalences de la catégorie C .

THEOREME 3. *On a l'homomorphisme de* $\mathrm{Aut}\, G$ *dans* $\mathrm{Equ}\, C$ *qui à* v *associe* Fv . *Il induit un homomorphisme de* $\mathrm{Out}\, G$ *dans* $\mathrm{Met}\, C$. *Celui-ci est un isomorphisme de* $\mathrm{Out}\, G$ *sur* $\mathrm{Met}\, C$.

LEMME 4. *La sous-catégorie pleine* S *engendre la catégorie* C *par limites inductives.*

Plus précisément, soit un objet X de C . On lui associe la catégorie W dont les objets sont les éléments x , y , ... de X et les flèches de x dans y sont les triplets (x,y,g) tels que $y = gx$. On lui associe encore le foncteur $J:W \to S$ qui à l'objet x fait toujours correspondre l'objet canonique G et à la flèche (x,y,g) fait correspondre la translation à droite Tg . On a alors l'énoncé suivant:

LEMME 5. *L'objet* X *est limite inductive dans* C *du foncteur* $J:W \to S$.

Soit en effet pour chaque objet x de W la flèche $j(x):J(x) \to X$ définie par $j(x)(g) = gx$. Alors ces flèches définissent un cône de base J .
Ce cône est universel et fait donc de X la limite inductive de J .
La correspondance qui vient d'être définie entre les objets de C d'une part et les catégories W et les foncteurs J d'autre part est fonctorielle. Tout ceci permet d'établir:

PROPOSITION 6. *Soit une catégorie* C' *et des foncteurs* $F_1,F_2:C \to C'$, *compatibles aux limites inductives. S'il existe une équivalence naturelle de la restriction à* S *de* F_1 *vers celle de* F_2 , *alors il existe une équivalence naturelle de* F_1 *vers* F_2 .

Ainsi, toute autoéquivalence de C , donc compatible aux limites inductives, est déterminée par sa restriction à S :

PROPOSITION 7. *L'opération de restriction définit un homomorphisme injectif de* Met C *dans* Met S .

On note S_o la sous-catégorie pleine de C comportant l'objet canonique G pour seul objet. Le foncteur d'inclusion de S_o dans S est une équivalence de catégorie et induit donc un isomorphisme de Met S_o sur Met S .
Comme il est trivial que Equ S_o s'identifie à Aut G et que la relation d'équivalence naturelle dans Equ S_o s'identifie à la congruence modulo Int G , alors Met S_o , et par suite Met S , s'identifie à Out G .
Ainsi, l'homomorphisme injectif de Met C dans Met S est en fait bijectif, et le théorème 3 annoncé est finalement démontré.

Tous les énoncés de cette démonstration restent vrais en remplaçant C par une quelconque sous-catégorie pleine K comportant l'objet canonique G , et stable par les foncteurs F_v . On a en fait l'énoncé plus général suivant, où l'on note pareillement les foncteurs F_v et les foncteurs de K dans K induits:

THEOREME 8. *Soit une sous-catégorie pleine* K *de* C *, comportant l'objet canonique* G *et stable par les foncteurs* Fv *pour* v *dans* Aut G *. On a l'homomorphisme de* Aut G *dans* Equ K *qui à* v *associe* Fv *. Il induit un homomorphisme de* Out G *dans* Met K *. Celui-ci est un isomorphisme de* Out G *sur* Met K .

Remarque. Un cas particulier géométrique non trivial de la notion de métamorphoses est développé dans <1> et <2>.

Références.

<1> C. Léger et J.-C. Terrasson:
L'action du groupe symétrique S_3 sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de pavages de surface fermée, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 302, série I , n°1, pp. 39-42, 1986.

<2> C. Léger et J.-C. Terrasson:
Les cinq métamorphoses des surfaces pavées, Diagrammes, supplément au volume 18, pp. 1-48, Paris, 1987.

UNIVERSITE PARIS 7

U.F.R. DE MATHEMATIQUES
TOURS 45-55-5ème ETAGE

2 PLACE JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE