DIAGRAMMES

C. LAIR

# Lax-co-limites structurées

*Diagrammes*, tome 20 (1988), p. CL1-CL90

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1988__20__1_0>

# LAX-CO-LIMITES STRUCTUREES

C. Lair

## INTRODUCTION

Dans ce travail, nous présentons et étudions brièvement une notion de *lax-co-limite structurée* (et, dualement, de *lax-limite structurée*) qui englobe tant celle, usuelle, de lax-co-limite (ou, dualement, de lax-limite) dans une 2-catégorie que celle de lax-co-limite *admissible* (dans la catégorie des esquisses) introduite en (S.M.A.S.).

Pour parler de telles lax-co-limites structurées, on doit d'abord disposer d'un enrichissement (pour les catégories) particulier: précisément, d'une structure monoïdale, symétrique, fermée $\mathcal{M}$ sur une catégorie $\mathbf{M}$ localement présentable (au sens de (L.P.L.G.)), ou encore *essentiellement algébrique*.
On sait que les catégories essentiellement algébriques $\mathbf{M}$ sont *exactement* les catégories de modèles d'esquisses projectives (au sens de (E.T.S.A.), par exemple). C'est justement de les voir *explicitement* comme telles qui fournit une méthode *effective* de construction et/ou de classification systématique de *toutes* les structures monoïdales, symétriques, fermées (en particulier, cartésiennes fermées et localement cartésiennes fermées) $\mathcal{M}$ sur-jacentes à $\mathbf{M}$ : nous rappelons cette méthode, initialement introduite en (F.S.C.A.), aux §§ 1, 2 et 3.
Si $\mathcal{A}$ est une catégorie enrichie par une structure monoïdale, symétrique, fermée $\mathcal{M}$ sur une telle catégorie essentiellement algébrique $\mathbf{M}$ , c'est de nouveau parce que $\mathbf{M}$ est la catégorie des modèles d'une esquisse projective qu'il est *facile* de dire si $\mathcal{A}$ est *co-représentable* (ou, dualement, *représentable*). On

A.M.S. SUB. CLASS. : 18 D 20 , 18 D 10 , 18 C 10 , 18 A 30

obtient ainsi, aux §§ 4 et 5, un procédé effectif d'étude de ces catégories co-représentables (ou représentables) $\mathbb{A}$ ayant un enrichissement essentiellement algébrique $\mathcal{M}$ , a fortiori si $\mathbb{A}$ est, elle-même, essentiellement algébrique. Bien entendu, de la sorte, on englobe la théorie, usuelle, des (seules) 2-catégories co-représentables (ou représentables).

Dès lors, au §6 nous sommes en mesure d'introduire les lax-co-limites (ou les lax-limites) structurées (par les modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$ ) dans une catégorie $\mathbb{A}$ , enrichie par une structure monoïdale, symétrique, fermée $\mathcal{M}$ sur la catégorie $\mathbb{M}$ = Mod($\mathbb{E}$) des modèles de l'esquisse $\mathbb{E}$ .
Généralisant le résultat connu sur les lax-co-limites (ou les lax-limites) usuelles dans les (seules) 2-catégories, nous montrons enfin, au §7, que si $\mathbb{A}$ est co-représentable (ou représentable), complète et co-complète, ces lax-co-limites (ou ces lax-limites) structurées se *calculent* à l'aide de limites et co-limites usuelles.

La terminologie, les notations et les résultats préliminaires, utilisés ou supposés connus dans toute la suite, ont été regroupés dans un §0. Le lecteur pourra, éventuellement, les omettre lors de sa lecture, quitte à s'y reporter en cas de besoin.

Nous avons assorti le texte de quelques commentaires, regroupés dans des "Notes", placées entre [...] à la fin de chaque paragraphe.

Enfin, nous avons cru bon d'agrémenter certaines considérations de "Figures" révélant (du moins, nous l'espérons) le véritable caractère *géométrique* des méthodes utilisées. Ces figures ont été regroupées (pour de pures raisons typographiques) dans un "Atlas" placé à la fin du texte.

## 0. TERMINOLOGIE ET NOTATIONS.

On appelle *graphe compositif* (voir (C.A.S.T.), où les graphes compositifs ont été introduits initialement, mais sous le nom de *graphes multiplicatifs*) tout graphe orienté muni d'une composition (partielle et non nécessairement associative - mais

pour laquelle les flèches identités sont des éléments neutres) de certaines (seulement) flèches consécutives (voir le Groupe de Figures 1).
En particulier, une catégorie est un graphe compositif où la composabilité des flèches est maximum et la composition associative. De même, un graphe orienté s'identifie à un graphe compositif, où la composabilité des flèches est minimum.
Si $\mathbb{G}$ et $\mathbb{G}'$ sont deux tels graphes compositifs, on définit facilement (par analogie avec le cas des catégories) ce qu'est un *foncteur* $F : \mathbb{G} \to \mathbb{G}'$ .
Si $\mathbb{G}$ est un graphe compositif, si $\mathbb{C}$ est une catégorie et si $F, F' : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ sont deux foncteurs, on définit facilement (par analogie avec le cas des catégories) ce qu'est une transformation naturelle $n : F \dot{\to} F' : \mathbb{G} \to \mathbb{C}$ . On note alors $\mathrm{Fonct}(\mathbb{G}, \mathbb{C})$ la catégorie dont les objets sont les foncteurs de $\mathbb{G}$ vers $\mathbb{C}$ et dont les flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.
On note Grpho (resp. Grphcmp , Cat ) la catégorie des petits graphes orientés (resp. des petits graphes compositifs, des petites catégories). Ainsi, Grpho et Cat s'identifient à deux sous-catégories pleines de Grphcmp .

Soit $\mathbb{T}$ un graphe compositif petit, $\mathbb{G}$ un autre graphe compositif et $B : \mathbb{T} \to \mathbb{G}$ un foncteur.
On dit que $p = (p_T : P \to B(T))_{T \in \mathbb{T}}$ est un *cône* (projectif) de $\mathbb{G}$ , de *base* $B$ , d'*indexation* $\mathbb{T}$ , de *sommet* $P$ si, et seulement si:
- pour tout objet $T$ de $\mathbb{T}$ , $p_T : P \to B(T)$ est une flèche, dite *projection relative à* $T$ , du graphe compositif $\mathbb{G}$ ,
- pour toute flèche $t : T \to T'$ de $\mathbb{T}$ , on a:
  + les deux flèches consécutives $p_T : P \to B(T)$ et $B(t) : B(T) \to B(T')$ de $\mathbb{G}$ sont composables,
  + $B(t).p_T = p_{T'}$ .

Evidemment, on prendra garde de ne pas confondre un (quelconque) cône $p$ de base $B$ avec la *famille* $(p_T : P \to B(T))_{T \in \mathrm{Ob}(\mathbb{T})}$ de flèches de $\mathbb{G}$ (de même domaine $P$ ), indexée par l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathbb{T})$ des objets de $\mathbb{T}$ (famille qui, évidemment, s'identifie à un cône d'indexation le graphe compositif discret des objets de $\mathbb{T}$ !).
En particulier, si $\mathbb{G} = \mathbb{C}$ est une catégorie, on note $\mathrm{Cône}(B)$ la catégorie définie comme suit:
- ses objets sont les cônes $p$ de base $B$ ,

- ses flèches sont les $(p,c,p'):p \to p'$ tels que:
  + $p$ et $p'$ sont deux cônes de (même) base $B$,
  + $c:P \to P'$ est une flèche de $\mathbb{C}$,
  + pour tout objet $T$ de $\mathbb{T}$, on a $p'_T.c = p_T$.

Evidemment une limite du foncteur $B$ est (définie, à isomorphisme près, par) un cône de base $B$ particulier (i. e. final dans Cône($B$) ), que l'on notera souvent:

$$\lim(B) = (\lim(B)_T : \mathrm{Lim}(B) \to B(T))_{T \in \mathbb{T}}$$

Dans ce cas, il nous arrivera aussi de poser:

$$\mathrm{Lim}(B) = \mathrm{Lim}_{T \in \mathbb{T}}\ B(T) .$$

Dualement, on dit que $q = (q_T : B(T) \to Q)_{T \in \mathbb{T}}$ est un *co-cône* (i. e. un cône inductif) de $\mathbb{G}$, de *base* $B$, d'*indexation* $\mathbb{T}$ et de sommet $Q$ si, et seulement si:
- pour tout objet $T$ de $\mathbb{T}$, $q_T:B(T) \to Q$ est une flèche, dite *co-projection relative à* $T$, du graphe compositif $\mathbb{G}$,
- pour toute flèche $t:T \to T'$ de $\mathbb{T}$, on a:
  + les deux flèches consécutives $B(t):B(T) \to B(T')$ et $q_{T'}:B(T') \to Q$ sont composables,
  + $q_{T'}.B(t) = q_T$.

Bien entendu, on prendra garde de ne pas confondre un (quelconque) co-cône $q$ de base $B$ avec la *co-famille* $(q_T:B(T) \to Q)_{T \in \mathrm{Ob}(\mathbb{T})}$ de flèches de $\mathbb{G}$ (de même co-domaine $Q$ ), indexée par l'ensemble $\mathrm{Ob}(\mathbb{T})$ des objets de $\mathbb{T}$ (co-famille qui, évidemment, s'identifie à un co-cône d'indexation le graphe compositif discret des objets de $\mathbb{T}$ !).

En particulier, si $\mathbb{G} = \mathbb{C}$ est une catégorie, on note Co-Cône($B$) la catégorie définie comme suit:
- ses objets sont les co-cônes $q$ de base $B$,
- ses flèches sont les $(q,c,q'):q \to q'$ tels que:
  + $q$ et $q'$ sont deux co-cônes de (même) base $B$,
  + $c:Q \to Q'$ est une flèche de $\mathbb{C}$,
  + pour tout objet $T$ de $\mathbb{T}$, on a $c.q_T = q'_T$.

Bien sûr, une co-limite du foncteur $B$ est (définie, à isomorphisme près, par) un co-cône de base $B$ particulier (i. e. initial dans Co-Cône($B$) ), que l'on notera souvent:

$$\text{co-lim}(B) = (\text{co-lim}(B)_T : B(T) \to \text{Co-Lim}(B))_{T \in \mathbb{T}} .$$

Dans ce cas, il nous arrivera aussi de poser:

$$\text{Co-Lim}(B) = \text{Co-Lim}_{T \in \mathbb{T}}\ B(T) .$$

On dit que $\mathbb{E} = (\mathrm{Supp}(\mathbb{E}),\mathbb{P},\mathbb{Q})$ est une *esquisse* (voir (E.T.S.A.), où la notion d'esquisse a été introduite

initialement, mais sous le nom de pré-esquisse) si, et seulement si (consulter le Groupe de Figures 1):
- Supp($\mathbb{E}$) est un graphe compositif petit, appelé *support* de $\mathbb{E}$ ,
- $\mathbb{P}$ est un ensemble de cônes de Supp($\mathbb{E}$) , dits *distingués* (parmi tous les cônes de Supp($\mathbb{E}$) !),
- $\mathbb{Q}$ est un ensemble de co-cônes de Supp($\mathbb{E}$) , dits *distingués* (parmi tous les co-cônes de Supp($\mathbb{E}$) !).
Si $\mathbb{Q} = \emptyset$ , on dit que $\mathbb{E}$ = (Supp($\mathbb{E}$),$\mathbb{P}$) est une esquisse (*purement*) *projective*.
Si $\tau$ (resp. $\tau'$ ) sont deux ensembles de petits graphes compositifs, on dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est une $(\tau,\tau')$-*esquisse* si, et seulement si:
- l'indexation de tout cône distingué est élément de $\tau$ ,
- l'indexation de tout co-cône distingué est élément de $\tau'$ .
En particulier, une $(\tau,\emptyset)$-esquisse sera encore appelée une esquisse $\tau$-*projective*.
Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses et si H:Supp($\mathbb{E}$) $\rightarrow$ Supp($\mathbb{E}'$) est un foncteur (entre leurs supports), on dit que H *définit un homomorphisme* de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}'$ , ou encore que H:$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ "est" un *homomorphisme* de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}'$ , si et seulement si:
- l'image par H de tout cône distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône distingué dans $\mathbb{E}'$ ,
- l'image par H de tout co-cône distingué dans $\mathbb{E}$ est un co-cône distingué dans $\mathbb{E}'$ .
Si $\tau$ et $\tau'$ sont deux ensembles de petits graphes compositifs, on note alors $(\tau,\tau')$-Esq la catégorie dont les objets sont les $(\tau,\tau')$-esquisses et dont les flèches sont les homomorphismes entre ces $(\tau,\tau')$-esquisses.

Si $\mathbb{E}$ est une esquisse et si $\mathbb{C}$ est une catégorie, on dit qu'un foncteur M:Supp($\mathbb{E}$) $\rightarrow \mathbb{C}$ *définit* un modèle de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$ , ou encore que M:$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{C}$ "est" un *modèle* de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$ , si et seulement si:
- l'image par M de tout cône distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône limite dans $\mathbb{C}$ ,
- l'image par M de tout co-cône distingué dans $\mathbb{E}$ est un co-cône co-limite dans $\mathbb{C}$ .
Alors, on note Mod($\mathbb{E}$,$\mathbb{C}$) la sous-catégorie pleine de Fonct(Supp($\mathbb{E}$),$\mathbb{C}$) , dont les objets sont les modèles de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$ .

Si $\mathbb{C}$ = Ens , on note plus simplement Mod($\mathbb{E}$) = Mod($\mathbb{E}$,Ens) .
On rappelle que (voir (L.D.T.E.), par exemple, et/ou le Groupe de Figures 2):

*Esquissabilté de catégories particulières. On peut construire une (Ø,Ø)-esquisse* $\mathbb{E}_{ens}$ *dont la catégorie de modèles* Mod($\mathbb{E}_{ens}$) *est équivalente à la catégorie* Ens .
*On peut construire une (Ø,Ø)-esquisse* $\mathbb{E}_{grpho}$ *dont la catégorie de modèles* Mod($\mathbb{E}_{grpho}$) *est équivalente à la catégorie* Grpho *des petits graphes orientés.*
*On peut construire une esquisse projective* $\mathbb{E}_{grphcmp}$ *dont la catégorie de modèles* Mod($\mathbb{E}_{grphcmp}$) *est équivalente à la catégorie* Grphcmp *des petits graphes compositifs.*
*On peut construire une esquisse projective* $\mathbb{E}_{cat}$ *dont la catégorie de modèles* Mod($\mathbb{E}_{cat}$) *est équivalente à la catégorie* Cat *des petites catégories.*
*Si* $\tau$ *et* $\tau'$ *sont deux ensembles de petits graphes compositifs, on peut construire une esquisse projective* $\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$ *dont la catégorie de modèles* Mod($\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$) *est équivalente à la catégorie* $(\tau,\tau')$-Esq *des (petites)* $(\tau,\tau')$*-esquisses.*

Si H:$\mathbb{E}$ → $\mathbb{E}$' est un homomorphisme entre deux esquisses et si $\mathbb{C}$ est une catégorie, on note:

Mod(H,$\mathbb{C}$):Mod($\mathbb{E}$',$\mathbb{C}$) → Mod($\mathbb{E}$,$\mathbb{C}$)

le foncteur *composition (des modèles) par* H , i. e. le foncteur restriction du foncteur (*composition des foncteurs par le foncteur* H ):

Fonct(H,$\mathbb{C}$):Fonct(Supp($\mathbb{E}$'),$\mathbb{C}$) → Fonct(Supp($\mathbb{E}$),$\mathbb{C}$) .

Si $\mathbb{C}$ = Ens , on note plus simplement Mod(H) = Mod(H,Ens) .
On rappelle que (revoir le Groupe de Figures 2):

*Esquissabilité de foncteurs d'oubli particuliers. On peut construire un homomoprhisme (injection canonique):*

$H_{grphocmp}$:$\mathbb{E}_{grpho}$ → $\mathbb{E}_{grphcmp}$

*tel que* Mod(H) *soit "équivalent" au foncteur "graphe orienté sous-jacent":*

$ssj_o$:Grphcmp → Grpho .

*On peut construire un homomoprhisme (injection canonique):*

$H_{grphcmpcat}$:$\mathbb{E}_{grphcmp}$ → $\mathbb{E}_{cat}$

*tel que* Mod(H) *soit "équivalent" au foncteur "graphe compositif sous-jacent":*

$ssj_c$:Cat → Grphcmp .

*Si $\tau$ et $\tau'$ sont deux ensembles de petits graphes compositifs, on peut construire un homomoprhisme (injection canonique):*

$$H_{supp}:\mathbb{E}_{grphcmp} \to \mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$$

*tel que* Mod(H) *soit "équivalent" au foncteur "support":*

$$Supp:(\tau,\tau')\text{-}Esq \to Grphcmp \ .$$

Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses, à tout objet E (resp. E' ) de $\mathbb{E}$ (resp. $\mathbb{E}'$ ) on associe le foncteur:

$$\begin{aligned}(E,-):Supp(\mathbb{E}') &\longrightarrow Supp(\mathbb{E})\times Supp(\mathbb{E}')\\ E' &\longmapsto (E,E')\\ e':E'_1 \to E'_2 &\longmapsto (id(E),e')\end{aligned}$$

(resp.

$$\begin{aligned}(-,E'):Supp(\mathbb{E}) &\longrightarrow Supp(\mathbb{E})\times Supp(\mathbb{E}')\\ E &\longmapsto (E,E')\\ e:E_1 \to E_2 &\longmapsto (e,id(E')) \text{ ).}\end{aligned}$$

Alors, on note $\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'$ la structure d'esquisse la moins riche (en cônes et co-cônes distingués), de support $Supp(\mathbb{E})\times Supp(\mathbb{E}')$ , telle que (voir (E.G.C.E.) et/ou le Groupe de Figures 3):

- pour tout objet E de $\mathbb{E}$ , $(E,-):\mathbb{E}' \to \mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'$ est un homomorphisme,
- pour tout objet E' de $\mathbb{E}$ , $(-,E'):\mathbb{E} \to \mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'$ est un homomorphisme.

Si $\tau$ et $\tau'$ sont deux ensembles de petits graphes compositifs et si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux $(\tau,\tau')$-esquisses, il est clair que $\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'$ est encore une $(\tau,\tau')$-esquisse.
En particulier, il est facile de vérifier (en raison de la commutation des limites entre elles) que:

*Commutation projective complète. Si $\tau$ est un ensemble de petits graphes compositifs, si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses $\tau$-projectives et si $\mathbb{C}$ est une catégorie possédant toutes les limites $\tau$-indexées, alors on dispose de deux isomorphismes canoniques:*

$$\begin{aligned}\phi: Mod(\mathbb{E},Mod(\mathbb{E}')) &\xrightarrow{\sim} Mod(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}')\\ M &\longmapsto \phi(M):(E,E')\mapsto M(E)(E')\end{aligned}$$

*et*

$$\begin{aligned}\phi': Mod(\mathbb{E}',Mod(\mathbb{E})) &\xrightarrow{\sim} Mod(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}')\\ M' &\longmapsto \phi'(M'):(E,E')\mapsto M'(E')(E) \ .\end{aligned}$$

Dans la suite, $\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'$ sera appelée (pour fixer les idées) le produit tensoriel *usuel* de $\mathbb{E}$ par $\mathbb{E}'$ (sans que l'on préjuge ici et par avance qu'il s'agit d'un produit tensoriel *fermé*).

Si $\mathbb{E}$ est une esquisse et $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ est un modèle, on associe à $M$ son *graphe compositif d'hypermorphismes* ("fibration discrète scindée partielle") $HP(M)$ défini comme suit (voir (C.A.S.T.) et/ou le Groupe de Figures 3):

- ses objets sont les $(E,x)$ tels que:
    + $E$ est un objet de $\mathbb{E}$ ,
    + $x$ est élément de $M(E)$ ,
- ses flèches sont les $((E,x),e,(E',x')):(E,x) \to (E',x')$ tels que:
    + $e:E \to E'$ est une flèche de $\mathbb{E}$ ,
    + $M(e)(x) = x'$ ,
- les deux flèches consécutives $((E,x),e,(E',x')):(E,x) \to (E',x')$ et $((E',x'),e',(E'',x'')):(E',x') \to (E'',x'')$ sont composables si, et seulement si:
    + $e:E \to E'$ et $e':E' \to E''$ sont deux flèches composables dans (le support de) $\mathbb{E}$ ,

dans ce cas la composée est $((E,x),e'.e,(E'',x''))$ .

Alors, on note:

$$\begin{array}{rcl} hp(M):\ HP(M) & \longrightarrow & \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \\ (E,x) & \longmapsto & E \\ ((E,x),e,(E',x')) & \longmapsto & e \end{array}$$

le foncteur de *projection*.

Si $\tau$ est un ensemble de petits graphes compositifs, si $\mathbb{E}$ est une esquisse $\tau$-projective et si $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ est un modèle, on note $M|\mathbb{E}$ l'esquisse $\tau$-projective la plus riche, de support $HP(M)$ et telle que $hp(M):M|\mathbb{E} \to \mathbb{E}$ est un homomorphisme (voir le Groupe de Figures 3).

Alors, il est facile de vérifier que:

*Esquissabilité pour les localisations projectives. Si $\tau$ est un ensemble de petits graphes compositifs, si $\mathbb{E}$ est une esquisse $\tau$-projective et si $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ est un modèle, alors les catégories $\mathrm{Mod}(M|\mathbb{E})$ et $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M$ sont (canoniquement) équivalentes.*

Si $\tau$ est un ensemble de petits graphes compositifs ayant le graphe compositif $\emptyset$ pour élément, si $\tau'$ est un (autre) ensemble de petits graphes compositifs, si $\mathbb{E}$ est une $(\tau,\tau')$-esquisse et si $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ est un modèle, on note $\mathbb{E}|M$ la

$(\tau,\tau')$-esquisse la moins riche telle que (voir le Groupe de Figures 3):
- $\mathbb{E}|M$ contient $\mathbb{E}$ ,
- $\mathbb{E}|M$ possède un objet supplémentaire $1_M$ , sommet d'un cône distingué d'indexation $\emptyset$ ,
- pour tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et pour tout élément $x \in M(E)$ , $(x,E): 1_M \to E$ est une flèche de $\mathbb{E}|M$ ,
- pour toute flèche $e: E \to E'$ de $\mathbb{E}$ et tout élément $x \in M(E)$ , les deux flèches consécutives $(x,E): 1_M \to E$ et $e: E \to E'$ de $\mathbb{E}|M$ sont composables et de composée $(M(e)(x),E'): 1_M \to E'$ .

Alors, il est facile de voir que:

*Esquissabilité pour les co-localisations. Si* $\tau$ *est un ensemble de petits graphes compositifs ayant le graphe compositif* $\emptyset$ *pour élément, si* $\tau'$ *est un autre ensemble de petits graphes compositifs, si* $\mathbb{E}$ *est une* $(\tau,\tau')$*-esquisse et si* $M: \mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ *est un modèle, alors les deux catégories* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}|M)$ *et* $M/\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *sont équivalentes* .

Rappelons (voir (S.L.S.A.) pour l'origine de ce résultat ou (C.Q.C.E.), par exemple, pour les détails techniques) que:

*Théorème du faisceau associé. Si* $H: \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ *est un homomorphisme entre deux esquisses projectives, alors le foncteur* $\mathrm{Mod}(H): \mathrm{Mod}(\mathbb{E}') \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *admet un adjoint à gauche.*

Si $\mathbb{E}$ est une esquisse, on dispose toujours d'un modèle canonique, appelé *évaluation* (voir le Groupe de Figures 4):

$$\mathrm{ev}: \mathbb{E} \longrightarrow \mathrm{Fonct}(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}),\mathrm{Ens})$$
$$E \longmapsto \mathrm{ev}_E: M \to M(E) \ .$$

Si, pour tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ , on note $H_E: \mathbb{1} \to \mathbb{E}$ l'homomorphisme "sélectionnant" l'objet $E$ de $\mathbb{E}$ , il est facile de vérifier que:
- naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$, le diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \arrow[dl, "\mathrm{Mod}(H_E)"'] \arrow[dr, "\mathrm{ev}_E"] & \\
\mathrm{Mod}(\mathbb{1}) \arrow[rr, "\sim"] & & \mathrm{Ens}
\end{tikzcd}$$

Ainsi, si $\mathbb{E}$ est, plus particulièrement, une esquisse purement projective, on voit que, pour tout objet $E$ de $\mathbb{E}$, le foncteur $ev_E:\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Ens}$ admet un adjoint à gauche $q_E:\mathrm{Ens} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ (puisque, en vertu du théorème du faisceau associé, $\mathrm{Mod}(H_E)$ en admet un). On dispose donc d'un (autre) modèle canonique (dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$, cette fois), dit *de Yoneda*:

$$Y_{\mathbb{E}}:\mathbb{E} \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$$
$$E \longmapsto q_E(1)\ .$$

Alors, on peut énoncer (voir (L.P.L.G.), (F.O.S.A.) et/ou le Groupe de Figures 4):

*Théorème de complétude projective. Si* $\alpha$ *est un ordinal régulier, si* $\tau$ *est un ensemble de graphes compositifs* $\alpha$*-petits et si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse* $\tau$*-projective, alors:*

- $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *est complète et les limites se calculent point par point,*
- $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *est co-complète,*
- $\{\ Y_{\mathbb{E}}(E)\ /\ E\in\mathrm{Ob}(\mathbb{E})\ \}$ *est un ensemble propre de générateurs* $\alpha$*-présentables,*
- *le foncteur* $Y_{\mathbb{E}}{}^{op}:\mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *est dense, autrement dit:*

    + *pour tout modèle* $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ *(i. e. pour tout objet* $M$ *de* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *), on a:*

$$M = \text{Co-Lim}\,(Y_{\mathbb{E}}{}^{op}.hp(M)^{op}:HP(M)^{op} \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}))\ ,$$

*ou encore:*

    + *pour tout modèle* $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ *(i. e. pour tout objet* $M$ *de* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *), on a:*

$$M = \text{Co-Lim}_{x\in M(E),\,E\in\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}\ Y_{\mathbb{E}}(E)_x$$

*(si l'on pose* $Y_{\mathbb{E}}(E)_x = Y_{\mathbb{E}}(E)$ *, pour tout* $x\in M(E)$ *, et ce que l'on peut convenir d'écrire, plus simplement:*

$$M = \text{Co-Lim}_{x\in M(E),\,E\in\mathrm{Supp}(\mathbb{E})}\ Y_{\mathbb{E}}(E)\ ).$$

En particulier, et plus précisément, on a:

*Calculs de limites et co-limites particulières. La catégorie* $\mathrm{Grpho} \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{grpho})$ *est complète et co-complète; de plus:*

- *les limites s'y calculent point par point,*
- *les co-limites s'y calculent point par point (car* $\mathbb{E}_{grpho}$ *est une* $(\emptyset,\emptyset)$*-esquisse et donc* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{grpho})$ *est une catégorie de foncteurs).*

*La catégorie* $\mathrm{Grphcmp} \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{grphcmp})$ *est complète et co-complète; de plus:*

*- les limites s'y calculent point par point et le foncteur* $\mathrm{ssj_o}:\mathrm{Grphcmp} \to \mathrm{Grpho}$ *y commute,*
*- si* $\mathbf{T}$ *est un petit graphe compositif et si* $F:\mathbf{T} \to \mathrm{Grphcmp}$ *est un foncteur, alors* $\mathrm{Co\text{-}Lim}_{T\in\mathbf{T}}\ F(T)$ *est la structure de graphe compositif la moins riche (en composabilité des flèches consécutives) telle que:*

+ *son graphe orienté sous-jacent est quotient du graphe orienté* $\mathrm{Co\text{-}Lim}_{T\in\mathbf{T}}\ \mathrm{ssj_o}(F(T))$ *par la congruence (de graphe orienté)* $\rho$ *telle que:*

$$g:G_1 \to G_2 \ \ \rho \ \ g':G'_1 \to G'_2$$

*si et seulement si:*

*il existe* $T\in\mathrm{Ob}(\mathbf{T})$ , *il existe* $T'\in\mathrm{Ob}(\mathbf{T})$ ,
*il existe* $(x:X\to Y)\in\mathrm{Fl}(F(T))$ , *il existe* $(y:Y\to Z)\in\mathrm{Fl}(F(T))$ ,
*il existe* $(x':X'\to Y')\in\mathrm{Fl}(F(T'))$ , *il existe* $(y':Y'\to Z')\in\mathrm{Fl}(F(T'))$,
*tels que:*

$$s_T(x) = s_{T'}(x') \ ,$$
$$s_T(y) = s_{T'}(y') \ ,$$

$y$ *et* $x$ *sont composables dans* $F(T)$ ,

$$s_T(y,x) = g \ ,$$

$y'$ *et* $x'$ *sont composables dans* $F'(T')$ ,

$$s_{T'}(y',x') = g' \ ,$$

+ *pour tout objet* $T$ *de* $\mathbf{T}$ , $q.s_T$ *est (un homomorphisme de graphes orientés, sous-jacent à) un foncteur,*

*(si, pour tout objet* $T$ *de* $\mathbf{T}$ *, on désigne par:*

$$s_T:\mathrm{ssj_o}(F(T)) \to \mathrm{Co\text{-}Lim}_{T\in\mathbf{T}}\ \mathrm{ssj_o}(F(T))$$

*la co-projection relative à* $T$ *et si:*

$$q:\mathrm{Co\text{-}Lim}_{T\in\mathbf{T}}\ \mathrm{ssj_o}(F(T)) \to \mathrm{Co\text{-}Lim}_{T\in\mathbf{T}}\ \mathrm{ssj_o}(F(T))/\rho$$

*désigne l'homomorphisme - de graphes orientés - "passage au quotient").*

*Si* $\tau$ *et* $\tau'$ *sont deux ensembles de petits graphes compositifs, alors la catégorie* $(\tau,\tau')\text{-Esq} \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}})$ *est complète et co-complète; de plus:*
*- les limites s'y calculent point par point et le foncteur* $\mathrm{Supp}:(\tau,\tau')\text{-Esq} \to \mathrm{Grphcmp}$ *y commute,*
*- le foncteur* $\mathrm{Supp}:(\tau,\tau')\text{-Esq} \to \mathrm{Grphcmp}$ *est à structures initiales et, par conséquent, commute aux co-limites (qui se calculent donc "comme" dans* Grphcmp *).*

Dans la suite, on convient de noter une structure de catégorie multiplicative $\mathcal{M}$ de la façon suivante:

$$\mathcal{M} = (\mathbf{M},\circledast) \ ,$$

si $\mathbf{M}$ est sa catégorie sous-jacente et $\otimes:\mathbf{M}\times\mathbf{M} \to \mathbf{M}$ est sa "multiplication".
Une telle structure multiplicative peut-être unitaire et d'unité l'objet $I$, de plus elle peut être associative et/ou commutative et éventuellement cohérente ... Dans ce cas (sans plus de précision dans la notation, mais le contexte permettra de lever toute ambiguïté) on la notera:

$$\mathcal{M} = (\mathbf{M},\otimes,I,...)$$

Cette structure multiplicative, unitaire, ... peut être bi-fermée (et non fermée), auquel cas nous la noterons:

$$\mathcal{M} = (\mathbf{M},\otimes,I,\mathcal{M}[-,-[,\mathcal{M}]-,-],...) ,$$

où:

$$\mathcal{M}[-,-[:\mathbf{M}^{op}\times\mathbf{M} \to \mathbf{M}$$

et

$$\mathcal{M}]-,-]:\mathbf{M}^{op}\times\mathbf{M} \to \mathbf{M}$$

sont ses fermetures.
Enfin, elle peut être monoïdale, symétrique et fermée, auquel cas nous la noterons:

$$\mathcal{M} = (\mathbf{M},\otimes,I,\mathcal{M}[-,-],...)$$

où:

$$\mathcal{M}[-,-]:\mathbf{M}^{op}\times\mathbf{M} \to \mathbf{M}$$

désigne le (seul) foncteur de fermeture.
Si $\mathcal{M}$ est une catégorie monoïdale symétrique et fermée et si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{M}$-catégorie, on notera (sans plus de précisions):

$$\mathcal{A} = (\mathbf{A},\mathcal{A}[-,-],...)$$

où:
- $\mathbf{A}$ est la catégorie sous-jacente à $\mathcal{A}$,
- $\mathcal{A}[-,-]:\mathbf{A}^{op}\times\mathbf{A}\to\mathbf{M}$ est le "foncteur Hom à valeurs dans $\mathbf{M}$",
(et, où les "..." font allusion aux autres données constituant la structure $\mathcal{A}$).
Dans ce cas, on dit qu'un objet $M$ de $\mathcal{M}$ et un objet $A$ de $\mathcal{A}$ ont l'objet (noté) $M\odot A$ de $\mathcal{A}$ pour *tenseur* si, et seulement si:
- naturellement en tout objet $A'$ de $\mathcal{A}$, on a:

$$\mathcal{M}[M,\mathcal{A}[A,A']] \simeq \mathcal{A}[M\odot A,A'] ,$$

(ainsi, nous affaiblissons légèrement la notion introduite en (K.E.C.T.), en écrivant seulement "naturellement" plutôt que "$\mathcal{M}$-naturellement"; on pourrait l'affaiblir davantage encore en imposant seulement à ce que l'on pourrait appeler un *tenseur faible* $M\odot_f A$ de vérifier que:
- naturellement en tout objet $A'$ de $\mathcal{A}$, on a:

$$\mathrm{Hom}(M,\mathcal{A}[A,A']) \simeq \mathrm{Hom}(M\odot_f A,A') ).$$

Alors, on dit (comme en (K.E.C.T.)) que $\mathcal{A}$ est *$\mathcal{M}$-tensorisée* si, et seulement si:
- tout objet M de $\mathcal{M}$ et tout objet A de $\mathcal{A}$ ont un tenseur.

Nous laissons au lecteur le soin de définir les *co-tenseurs* (affaiblissant ceux de (K.E.C.T.)), les *co-tenseurs faibles* (les affaiblissant davantage encore) et (comme en (K.E.C.T.)) les $\mathcal{M}$-catégories *$\mathcal{M}$-co-tensorisées*.

## 1. DETERMINATION DES STRUCTURES MULTIPLICATIVES BI-FERMEES, MONOIDALES BI-FERMEES, MONOIDALES SYMETRIQUES FERMEES, DES CATEGORIES ESSENTIELLEMENT ALGEBRIQUES.

On dispose (voir (F.S.C.A.)) d'une méthode systématique de construction et de classification de toutes les structures multiplicatives bi-fermées sur une catégorie de modèles d'une esquisse projective donnée (i. e. sur une catégorie essentiellement algèbrique): il suffit d'y rechercher et classifier "les co-modèles doubles".

Précisément, prouvons que (voir le Groupe de Figures 5):

*Proposition* 1. *Si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse projective, alors les structures multiplicatives bi-fermées sur la catégorie* Mod($\mathbb{E}$) *des modèles de* $\mathbb{E}$ *sont entièrement déterminées (à isomorphisme près) par les modèles de la forme* $\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$ *(qu'on peut appeler co-modèles doubles de* $\mathbb{E}$ *dans* Mod($\mathbb{E}$) *) et réciproquement.*

*Preuve.* En effet, si $\mathcal{M} = (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}),\otimes,\mathcal{M}[-,-[,\mathcal{M}]-,-],\ldots)$ est une structure multiplicative bi-fermée, on dispose du foncteur:

$$D_{\mathcal{M}}\colon \mathrm{Supp}(\mathbb{E})\times\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \xrightarrow[Y_{\mathbb{E}}\times Y_{\mathbb{E}}]{} \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}\times\mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op} \xrightarrow[(-\otimes-)^{op}]{} \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$$

Pour tout objet M de Mod($\mathbb{E}$) , le foncteur $M\otimes-$ (resp. $-\otimes M$ ) commutant aux co-limites (puisque c'est un adjoint à gauche), on en déduit que, naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}$ :

$$D_{\mathcal{M}}(-,E)\colon\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$$

et

$$D_M(E,-):\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$$

sont deux modèles.
Ainsi, $D_M(-,-):\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$ est aussi un modèle.

Réciproquement, supposons que $D:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$ est un modèle.
Naturellement en tous modèles $M,M':\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$, on voit que:
- on dispose du modèle:

$$\square_D M' = \mathrm{Hom}(D(-,-),M') : \mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathrm{Ens} ,$$

- il lui correspond donc (puisque, $\mathbb{E}$ étant une esquisse projective, on dispose - en vertu de la propriété de commutation projective complète - de deux isomorphismes canoniques $\phi,\phi':\mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathrm{Mod}(\mathbb{E})) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E})$ ) les deux modèles:

$$\begin{aligned} \boxbar_D M':\mathbb{E} &\to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \\ E &\mapsto \boxbar_D M'(E):\mathbb{E} \longrightarrow \mathrm{Ens} \\ &\qquad\qquad E' \longmapsto M'(E,E') \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \boxminus_D M':\mathbb{E} &\to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \\ E &\mapsto \boxminus_D M'(E):\mathbb{E} \longrightarrow \mathrm{Ens} , \\ &\qquad\qquad E' \longmapsto M'(E',E) \end{aligned}$$

- on obtient deux nouveaux modèles en posant:

$$[M,M'[_D = \mathrm{Hom}(M,\boxbar_D M'(-)):\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$$

et

$$]M,M']_D = \mathrm{Hom}(M,\boxminus_D M'(-)):\mathbb{E} \to \mathrm{Ens} .$$

Ainsi, on définit deux bi-foncteurs "de fermeture":

$$\begin{aligned} [-,-[_D:\mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}\times\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) &\to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \\ (M',M) &\mapsto [M',M[_D \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} ]-,-]_D:\mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}\times\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) &\to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \\ (M',M) &\mapsto ]M',M]_D . \end{aligned}$$

Si $M,M':\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ sont deux modèles, alors on voit que (en vertu du théorème de complétude projective):
- comme $Y_{\mathbb{E}}{}^{op}:\mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est dense, on a:

$$M = \text{Co-Lim}_{x\in M(E),E\in\mathbb{E}}\ Y_{\mathbb{E}}(E)$$

et

$$M' = \text{Co-Lim}_{x'\in M'(E'),E'\in\mathbb{E}}\ Y_{\mathbb{E}}(E') ,$$

- comme $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est co-complète, on peut poser (en effectuant un choix de co-limites):

$$M\otimes_D M' = \text{Co-Lim}_{x\in M(E),E\in\mathbb{E},x'\in M'(E'),E'\in\mathbb{E}}\ D(E,E') ,$$

(en particulier, on vérifie que, naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$, on a:

$$Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes_D Y_{\mathbb{E}}(E') \simeq D(E,E') ).$$

Ainsi, on définit un bi-foncteur "produit tensoriel":

$$-\otimes_D-:\mathrm{Mod}(\mathbb{E})\times\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) .$$

et il est facile de vérifier que

$$(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}), \otimes_D, [-,-[_D, ]-,-]_D, \ldots)$$

est bien une structure multiplicative bi-fermée. *Fin de la preuve.*

On en déduit immédiatement que:

*Corollaire* 1. *Si* $\tau$ *est un ensemble de petits graphes compositifs, si* $\tau^{op}$ *désigne l'ensemble des graphes compositifs duaux de ceux appartenant à* $\tau$ *, si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse* $\tau$*-projective et si* $F:\mathrm{Mod}(\mathbb{E})\times\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *est un bi-foncteur, alors* $F$ *est bi-fermé si, et seulement si, l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée:*
- $F$ *bi-commute aux co-limites* $\tau^{op}$*-indexées,*
- $F(Y_{\mathbb{E}}(-), Y_{\mathbb{E}}(-)):\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$ *est un modèle.*

*Preuve.* La première condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si $F$ bi-commute aux co-limites $\tau^{op}$-indexées, on dispose alors d'un modèle:

$$D_F = F(Y_{\mathbb{E}}(-), Y_{\mathbb{E}}(-)):\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op} \ .$$

On déduit, en vertu de la proposition 1 précédente, une structure multiplicative bi-fermée:

$$\mathcal{M}_F = (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}), \otimes_F, [-,-[_F, ]-,-]_F, \ldots) = \mathcal{M}_{D_F} \ .$$

Mais, il est facile de voir que $\otimes_F$ et $F$ sont équivalents.

Bien évidemment, ceci prouve aussi que les deux conditions énoncées sont équivalentes. *Fin de la preuve.*

Maintenant, pour caractériser, parmi les structures multiplicatives bi-fermées sur la catégorie des modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$ , celles qui sont monoïdales bi-fermées (resp. monoïdales, symétriques et fermées), il suffit évidemment de vérifier que le produit tensoriel $\otimes_D$ , associé à un modèle $D:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$ , est associatif, unitaire et cohérent (resp. associatif, symétrique, unitaire et cohérent). Pour ce faire, il est facile de voir qu'il suffit de *tester* qu'il en est bien ainsi pour les seules tensorisations entre eux des objets $Y_{\mathbb{E}}(E)$ , quand $E$ parcourt $\mathbb{E}$ , et $I$ , quand $I$ est candidat à être l'unité du produit tensoriel (voir les "tests standards" de (F.S.C.A.)): s'il en est ainsi, nous dirons que $D$ est *associatif, unitaire* et *cohérent* (resp. *associatif, symétrique, unitaire* et *cohérent*).

Par exemple (voir la Note 1), si $\tau$ (resp. $\tau'$ ) est un ensemble de petits graphes compositifs), on sait que la catégorie $(\tau,\tau')$-Esq des $(\tau,\tau')$-esquisses est essentiellement algébrique, puisqu'équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse projective $\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}}$ (qui n'est pas, en général, une $(\tau,\tau')$-esquisse).

Comme on sait calculer (assez) facilement les co-limites dans $(\tau,\tau')$-Esq , il est aisé de vérifier que le bi-foncteur produit tensoriel usuel:

$$-\otimes-:(\tau,\tau')\text{-Esq}\times(\tau,\tau')\text{-Esq}\to(\tau,\tau')\text{-Esq}$$

bi-commute aux co-limites, ou encore que:

$$Y_{\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}}}\otimes Y_{\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}}}:\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}}\otimes\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}}\to(\tau,\tau')\text{-Esq}^{op}$$

est un modèle (voir le Groupe de Figures 6).
De plus, par construction, $\otimes$ est évidemment associatif, symétrique, unitaire (d'unité la $(\tau,\tau')$-esquisse $\mathbb{1}$ !) et cohérent.
Du corollaire 1 résulte que $(\tau,\tau')$-Esq est sous-jacente à une structure de catégorie monoïdale symétrique et fermée ayant $\otimes$ pour produit tensoriel (voir la Note 2).

On peut construire d'autres structures monoïdales, symétriques et fermées sur $(\tau,\tau')$-Esq (voir la Note 3 et le §2): en toute généralité, le corollaire 1 énonce qu'on dispose d'autant de structures multiplicatives bi-fermées sur $(\tau,\tau')$-Esq que de bi-foncteur $(\tau,\tau')$-Esq x $(\tau,\tau')$-Esq $\to$ $(\tau,\tau')$-Esq bi-commutant aux co-limites. Les rechercher tous peut être techniquement plus difficile que de déterminer et classifier seulement toutes les "co-$(\tau,\tau')$-esquisses doubles internes à la catégorie $(\tau,\tau')$-Esq ", i. e. tous les modèles

$$\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}}\otimes\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}}\to(\tau,\tau')\text{-Esq}^{op}$$

qui, d'après la proposition 1 décrivent aussi toutes les structures recherchées (voir la Note 4).

[Note 1. Nous ne donnerons, essentiellement, que des exemples se rapportant à la catégorie des $(\tau,\tau')$-esquisses, afin de montrer comment le présent travail intègre (S.M.A.S.) qui l'a suscité. Bien entendu, on pourrait les multiplier à loisir dans nombre d'autres situations. On pourra consulter, par exemple:
- (C.C.M.F.) pour une utilisation systématique de la proposition 1 concernant la catégorie des groupes abéliens (resp. des groupes, des monoïdes abéliens, des monoïdes, des anneaux ...),

- (Q.P.G.M.) pour l'utilisation systématique de la proposition 1 concernant la catégorie des graphes compositifs.]

[Note 2. La fermeture sur $(\tau,\tau')$-Esq , associée au produit tensoriel $\otimes$ , se définit en utilisant explicitement la construction générale de la preuve de la proposition 1 (voir (E.G.C.E.) pour la ré-écriture propre à $(\tau,\tau')$-Esq de cette construction générale).

Si $\tau$ et $\tau'$ sont deux ensembles de petits graphes compositifs et si $\mathbb{C}$ est une petite catégorie, désignons par $(\tau,\tau')$-esq($\mathbb{C}$) la $(\tau,\tau')$-esquisse de support $\mathbb{C}$ obtenue en distinguant dans $\mathbb{C}$ tous les cônes limites, d'indexations appartenant à $\tau$ , et tous les co-cônes co-limites, d'indexations appartenant à $\tau'$ .

Il convient de remarquer alors que, si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux $(\tau,\tau')$-esquisses quelconques et si $\mathbb{C}$ est une petite catégorie, *on n'a pas* (en général):

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathrm{Mod}(\mathbb{E}',\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}',\mathbb{C}) ,$$

ne serait-ce que parce que les limites ne commutent pas aux co-limites dans $\mathbb{C}$ . C'est dire que la $(\tau,\tau')$-esquisse "exponentielle" $[\mathbb{E},(\tau,\tau')\text{-esq}(\mathbb{C})]$ *n'est pas* obtenue en distinguant dans son support Mod($\mathbb{E}$,$\mathbb{C}$) tous les cônes limites, d'indexations appartenant à $\tau$ , et tous les co-cônes co-limites, d'indexations appartenant à $\tau'$ .

Même si $\tau' = \emptyset$ (i. e. si les esquisses considérées sont projectives) *on n'a toujours pas* (en général):

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathrm{Mod}(\mathbb{E}',\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}',\mathbb{C}) ,$$

ne serait-ce que parce qu'il peut "manquer" des limites dans $\mathbb{C}$ et en manquer "moins" dans Mod($\mathbb{E}'$,$\mathbb{C}$) ($\mathbb{C}$ n'étant pas supposée suffisamment complète).

Par contre, ce n'est que si $\tau' = \emptyset$ et si $\mathbb{C}$ possède toutes les limites, d'indexations appartenant à $\tau$ , qu'on a (enfin) l'équivalence espérée (voir (E.G.C.E.)).]

[Note 3. Supposons que $\tau$ (resp. $\tau'$ ) ait pour élément particulier la catégorie PF (resp. la catégorie SF ) "d'indexation des produits fibrés" (resp. "d'indexation des sommes fibrées") représentée ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "{(1,0)}"'] & & 2 \arrow[dl, "{(2,0)}"] \\
& 0 &
\end{tikzcd}$$

PF

(resp.

$$\begin{tikzcd}
1 & & 2 \\
& 0 \arrow[ul, "{(0,1)}"] \arrow[ur, "{(0,2)}"'] &
\end{tikzcd}$$

SF ).

Naturellement en toutes $(\tau,\tau')$-esquisses $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ , notons $\mathbb{E}\otimes'_{pf}\mathbb{E}'$ (resp. $\mathbb{E}\otimes'_{sf}\mathbb{E}'$ ) la "plus petite" $(\tau,\tau')$-esquisse obtenue comme suit:
- son support est le graphe compositif $\mathrm{Supp}(\mathbb{E})\mathrm{x}\mathrm{Supp}(\mathbb{E}')$ , produit des supports de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ (elle a donc même support que le produit tensoriel usuel $\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'$ ),
- le foncteur identité
$\mathrm{id}(\mathrm{Supp}(\mathbb{E})\mathrm{x}\mathrm{Supp}(\mathbb{E}')):\mathrm{Supp}(\mathbb{E})\mathrm{x}\mathrm{Supp}(\mathbb{E}') \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E})\mathrm{x}\mathrm{Supp}(\mathbb{E}')$
définit un homomorphisme
$$i_{pf}(\mathbb{E},\mathbb{E}'):\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}' \to \mathbb{E}\otimes'_{pf}\mathbb{E}'$$
(resp. $i_{sf}(\mathbb{E},\mathbb{E}'):\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}' \to \mathbb{E}\otimes'_{sf}\mathbb{E}'$ ),
- pour toute flèche $e:E_1 \to E_2$ de $\mathbb{E}$ , différente d'une flèche identité, et pour toute flèche $e':E'_1 \to E'_2$ de $\mathbb{E}'$ , différente d'une identité, le cône (resp. le co-cône) d'indexation PF (resp. SF ) ci-dessous est distingué:

$$\begin{tikzcd}
& (E_1,E'_1) \arrow[dl, "{(id(E_1),e')}"'] \arrow[dr, "{(e,id(E'_1))}"] \arrow[dd, "{(e,e')}"'] & \\
(E_1,E'_2) \arrow[dr, "{(e,id(E'_2))}"'] & & (E_2,E'_1) \arrow[dl, "{(id(E_2,e')}"] \\
& (E_2,E'_2) &
\end{tikzcd}$$

(resp.

$$\begin{tikzcd}
 & (E_2,E'_2) & \\
(E_1,E'_2) \arrow[ur, "{(e,id(E'_2))}"] & & (E_2,E'_1) \arrow[ul, "{(id(E_2,e')}"'] \\
 & (E_1,E'_1) \arrow[ul, "{(id(E_1,e')}"] \arrow[ur, "{(e,id(E'_1))}"'] \arrow[uu, "{(e,e')}"] &
\end{tikzcd}$$

).

Alors, il est facile de voir qu'on définit de la sorte un nouveau bi-foncteur:

$$-\otimes'_{pr}-:(\tau,\tau')\text{-Esq} \times (\tau,\tau')\text{-Esq} \to (\tau,\tau')\text{-Esq}$$

(resp.

$$-\otimes'_{sr}-:(\tau,\tau')\text{-Esq} \times (\tau,\tau')\text{-Esq} \to (\tau,\tau')\text{-Esq} \quad )$$

bi-commutant aux co-limites et, de plus, unitaire (d'unité $\mathbb{1}$ ). Ainsi, on obtient une nouvelle structure multiplicative, unitaire, bi-fermée sur $(\tau,\tau')$-Esq .

On peut même "améliorer" ce bi-foncteur en un autre $\otimes_{pr}$ (resp. $\otimes_{sr}$ ) qui soit, de plus, symétrique, associatif et cohérent; il suffit d'imposer que les cônes (resp. les co-cônes) distingués introduits ci-dessus se composent avec les cônes (resp. les co-cônes) de même indexation, antérieurement distingués dans $\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'$ . On obtient, de la sorte, une nouvelle structure monoïdale, symétrique et fermée sur $(\tau,\tau')$-Esq .

Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter un modèle de $\mathbb{E}\otimes_{pr}\mathbb{E}'$ (resp. $\mathbb{E}\otimes_{sr}\mathbb{E}'$ ) en termes de modèles de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ "suffisamment compatibles".

La fermeture sur $(\tau,\tau')$-Esq , associée au produit tensoriel $\otimes_{pr}$ (resp. $\otimes_{sr}$ ), se définit en utilisant explicitement la construction générale de la preuve de la proposition 1.

Il convient d'ajouter ici que, même si $\tau' = \emptyset$ et si $\mathbb{C}$ est une petite catégorie possédant toutes les limites d'indexations appartenant à $\tau$ , *on n'a pas* (voir la Note 2):

$$\mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathrm{Mod}(\mathbb{E}',\mathbb{C})) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}\otimes_{pr}\mathbb{E}',\mathbb{C}) \ .$$

Ceci limite l'intérêt de ce nouveau produit tensoriel $\otimes_{pr}$ , du point de vue sémantique (i. e. du point de vue des modèles). Cependant, du point de vue syntaxique (i. e. pour décrire des constructions particulières dans la catégorie $(\tau,\tau')$-Esq ), il peut se révéler utile (voir la Note 15, §6).

Nous laissons au lecteur le soin de formuler des remarques duales concernant $\otimes_{\mathbb{E}'}$ .]

[Note 4. Le lecteur désireux de classifier toutes les structures multiplicatives bi-fermées sur $(\tau,\tau')$-Esq (et, parmi elles, les monoïdales symétriques fermées seulement), i. e. toutes les co-$(\tau,\tau')$-esquisses doubles internes à $(\tau,\tau')$-Esq pourra s'inspirer du travail analogue, et qu'on adapte facilement, effectué en (Q.P.G.M.), pour la catégorie des petits graphes compositifs.]

## 2. DETERMINATION DES STRUCTURES CARTESIENNES FERMEES DES CATEGORIES ESSENTIELLEMENT ALGEBRIQUES.

Comme une catégorie à produits finis est cartésienne fermée si, et seulement si, son bi-foncteur produit est bi-fermé, il résulte de ce qui précède un test *élémentaire* permettant de déterminer si une catégorie de modèles d'une esquisse projective donnée est - ou non - cartésienne fermée.
On peut l'énoncer comme suit:

*Proposition 2. Si* $\tau$ *est un ensemble de petits graphes compositifs, si* $\tau^{op}$ *désigne l'ensemble des graphes compositifs duaux de ceux appartenant à* $\tau$ *et si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse* $\tau$*-projective, alors la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *des modèles de* $\mathbb{E}$ *(qui est complète - d'après le théorème de complétude projective - et donc, en particulier, à produits finis) est cartésienne fermée si, et seulement si, l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée:*
*- le bi-foncteur produit:*

$$-\times- : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \times \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$$

*bi-commute aux co-limites* $\tau^{op}$*-indexées,*
- $Y_{\mathbb{E}}(-)\times Y_{\mathbb{E}}(-) : \mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}))^{op}$ *est un modèle.*

*Preuve.* Il suffit en effet d'appliquer le corollaire 1 (ou, directenment, sa preuve) en changeant $F$ en $-\times-$ . *Fin de la preuve.*

Par exemple, la catégorie Grpho des petits graphes orientés est équivalente à la catégorie des modèles de la $(\emptyset,\emptyset)$-esquisse $\mathbb{E}_{grpho}$.
Par conséquent, en vertu de la proposition 2, Grpho est cartésienne fermée, aucun test de commutation n'étant à effectuer (voir aussi le Groupe de Figures 6).

La catégorie Grphcmp des petits graphes compositifs est équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse projective $\mathbb{E}_{grphcmp}$.
Comme on sait calculer point par point les produits et (assez) facilement les co-limites dans Grphcmp, il est aisé de vérifier que le bi-foncteur produit:

$$-\times-: \mathrm{Grphcmp} \times \mathrm{Grphcmp} \to \mathrm{Grphcmp}$$

bi-commute aux co-limites.
Par conséquent, d'après la proposition 2, Grphcmp est cartésienne fermée (voir aussi le Groupe de Figures 6).

De même (re-voir la Note 1, §1), si $\tau$ et $\tau'$ sont deux ensembles de petits graphes compositifs, la catégorie $(\tau,\tau')$-Esq est équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse projective $\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$.
Comme on sait calculer point par point les produits et (assez) facilement les co-limites dans $(\tau,\tau')$-Esq, il est aisé de vérifier que le bi-foncteur produit:

$$-\times-: (\tau,\tau')\text{-Esq} \times (\tau,\tau')\text{-Esq} \to (\tau,\tau')\text{-Esq}$$

bi-commute aux co-limites.
On en déduit, grâce à la proposition 2, que $(\tau,\tau')$-Esq est cartésienne fermée (voir le Groupe de Figures 6 et la Note 5).

[Note 5. Le fait que $(\tau,\tau')$-Esq soit cartésienne fermée ne résulte pas, vu ce qui précède, d'un heureux hasard, ayant permis d'enfin découvrir une fermeture associée au produit. Au contraire, le bi-foncteur produit bi-commutant aux co-limites (ce qui est évidemment nécessaire pour que la catégorie considérée soit cartésienne fermée) la fermeture est automatiquement "découverte": elle se décrit ni plus ni moins qu'en utilisant la méthode générale utilisée dans la preuve de la proposition 1, §1. On en trouvera une ré-écriture, propre à ce cas particulier, en (S.M.A.S.).]

## 3. DETERMINATION DES STRUCTURES LOCALEMENT CARTESIENNES FERMEES DES CATEGORIES ESSENTIELLEMENT ALGEBRIQUES.

Si $\mathbb{E}$ est une esquisse $\tau$-projective et si $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ est un modèle, alors on sait que la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M$ est essentiellement algébrique, puisqu' équivalente à la catégorie $\mathrm{Mod}(M|\mathbb{E})$ des modèles de l'esquisse $\tau$-projective $M|\mathbb{E}$. Comme une catégorie $\mathbb{M}$ à produits fibrés est localement cartésienne fermée si, et seulement si, pour tout objet $M$, le bi-foncteur produit dans $\mathbb{M}/M$ (i. e. le bi-foncteur "produit fibré, dans $\mathbb{M}$, au-dessus de $M$") est bi-fermé, on déduit immédiatement de ce qui précède un test *élémentaire* permettant de déterminer si une catégorie essentiellement algébrique est - ou non - localement cartésienne fermée.
On peut l'énoncer comme suit:

*Proposition* 3. *Si* $\tau$ *est un ensemble de petits graphes compositifs, si* $\tau^{op}$ *désigne l'ensemble des graphes compositifs duaux de ceux appartenant à* $\tau$ *et si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse* $\tau$*-projective, alors la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *des modèles de* $\mathbb{E}$ *(qui est complète - d'après le théorème de complétude projective - et donc, en particulier, à produits fibrés) est localement cartésienne fermée si, et seulement si, l'une des deux conditions équivalentes suivantes est vérifiée:*
*- pour tout modèle* $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$, *le bi-foncteur "produit fibré, dans* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$, *au-dessus de* $M$*":*

$$-\times_M- : (\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M) \times (\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M) \to (\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M)$$

*bi-commute aux co-limites* $\tau^{op}$-indexées,
*- pour tout homomorphisme* $h:M \to M':\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ *entre modèles, le foncteur "changement de base, dans* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$, *le long de* $h$*":*

$$h^*:\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M' \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M$$

*commute aux co-limites* $\tau^{op}$*-indexées.*

*Preuve.* En effet, $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M$ est équivalente à $\mathrm{Mod}(M|\mathbb{E})$. Il suffit alors d'appliquer la proposition 2 en changeant $\mathbb{E}$ en $M|\mathbb{E}$ et en constatant que les produits dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M$ "sont" des produits fibrés dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ et que les co-limites dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M$ se calculent, au dessus de $M$, "comme dans" $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ (i. e. que le foncteur canonique $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})/M \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ crée les co-limites). *Fin de la preuve.*

Par exemple, la catégorie Grpho des petits graphes orientés est équivalente à la catégorie des modèles de la (Ø,Ø)-esquisse $\mathbb{E}_{grpho}$ .
Par conséquent, en vertu de la proposition 3, Grpho est localement cartésienne fermée, aucun test de commutation n'étant à effectuer (voir aussi le groupe de Figures 6).
La catégorie Grphcmp des petits graphes compositifs est équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse projective $\mathbb{E}_{grphcmp}$ .
Comme on sait calculer point par point les produits fibrés et (assez) facilement les co-limites dans Grphcmp , il est aisé de vérifier que, pour tout graphe compositif petit $\mathbb{G}$ , le bi-foncteur produit fibré au dessus de $\mathbb{G}$ :

$$- \times_{\mathbb{G}} - : (\mathrm{Grphcmp}/\mathbb{G}) \times (\mathrm{Grphcmp}/\mathbb{G}) \to (\mathrm{Grphcmp}/\mathbb{G})$$

bi-commute aux co-limites.
Par conséquent, d'après la proposition 3, Grphcmp est localement cartésienne fermée (voir aussi le Groupe de Figures 6).
De même (re-voir la Note 1, §1), si $\tau$ et $\tau'$ sont deux ensembles de petits graphes compositifs, la catégorie $(\tau,\tau')$-Esq est équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse projective $\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$ .
Comme on sait calculer point par point les produits fibrés et (assez) facilement les co-limites dans $(\tau,\tau')$-Esq , il est aisé de vérifier que, pour toute $(\tau,\tau')$-esquisse $\mathbb{E}$ , le bi-foncteur produit fibré au dessus de $\mathbb{E}$ :

$$- \times_{\mathbb{E}} - : ((\tau,\tau')\text{-Esq}/\mathbb{E}) \times ((\tau,\tau')\text{-Esq}/\mathbb{E}) \to ((\tau,\tau')\text{-Esq}/\mathbb{E})$$

bi-commute aux co-limites.
On en déduit, grâce à la proposition 3, que $(\tau,\tau')$-Esq est localement cartésienne fermée (voir aussi le Groupe de Figures 6 et la Note 6).

[Note 6. Le fait que $(\tau,\tau')$-Esq soit localement cartésienne fermée ne résulte pas, vu ce qui précède, d'un heureux hasard, ayant permis d'enfin découvrir, naturellement en chaque $(\tau,\tau')$-esquisse $\mathbb{E}$ , une fermeture associée au bi-foncteur produit fibré au dessus de $\mathbb{E}$ . Au contraire, ce bi-foncteur bi-commutant aux co-limites (ce qui est évidemment nécessaire pour que la catégorie considérée soit localement cartésienne fermée) la fermeture est automatiquement "découverte": elle se décrit ni plus ni moins qu'en utilisant la méthode générale utilisée dans la preuve de la proposition 1, §1. On en trouvera une ré-écriture, propre à ce cas particulier, en (S.M.A.S.).]

## 4. CO-REPRESENTABILITE DES CATEGORIES A ENRICHISSEMENT ESSENTIELLEMENT ALGEBRIQUE.

Soit $\mathcal{M} = (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}),\otimes,I,\mathcal{M}[-,-],\ldots)$ une structure monoïdale, symétrique, fermée, sur la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$ et $\mathcal{A} = (\mathcal{A},\mathcal{A}[-,-],\ldots)$ une $\mathcal{M}$-catégorie.

On dit que $\mathcal{A}$ est *co-représentable* (voir la Note 7) si, et seulement si (voir le Groupe de Figures 7):

- il existe un foncteur de *co-représentation* (évidemment unique à équivalence près) $C:\mathcal{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathcal{A}^{op})^{op}$ tel que, naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et en tous objets $A$ et $A'$ de $\mathcal{A}$, on a:

$$\mathcal{A}[C(A)(E),A'] \simeq \mathcal{M}[Y_{\mathbb{E}}(E),\mathcal{A}[A,A']] .$$

Il est trivial de constater que:

*Proposition* 4. *Si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse projective, si* $\mathcal{M}$ *est une structure monoïdale, symétrique, fermée, sur la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *des modèles de* $\mathbb{E}$ *et si* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie, alors:*

*-* $\mathcal{A}$ *est co-représentable si, et seulement si, pour tout objet* $E$ *de* $\mathbb{E}$ *et pour tout objet* $A$ *de* $\mathcal{A}$ *, il existe un objet* $Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes A$ *de* $\mathcal{A}$ *, tenseur de l'objet* $Y_{\mathbb{E}}(E)$ *de* $\mathcal{M}$ *par l'objet* $A$ *de* $\mathcal{A}$ *.*

Il est tout aussi facile d'établir que:

*Proposition* 5. *Si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse projective, si* $\mathcal{M}$ *est une structure monoïdale, symétrique, fermée, sur la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *des modèles de* $\mathbb{E}$ *, si* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie co-représentable et* $\mathcal{M}$*-co-complète, alors* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie* $\mathcal{M}$*-tensorisée.*

On peut caractériser "pratiquement", parmi les catégories à enrichissement essentiellement algébrique, celles qui sont co-représentables comme suit (voir le Groupe de Figures 7):

*Proposition* 6. *Si* $\mathbb{E}$ *est une esquisse projective, si* $\mathcal{M}$ *est une structure monoïdale, symétrique, fermée sur la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *des modèles de* $\mathbb{E}$ *, si* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie, alors* $\mathcal{A}$ *est co-représentable si, et seulement si:*

*- il existe un foncteur* $C:\mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op}$ *et un foncteur* $B:\mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op}$ *tels que:*

(i) *naturellement en tout objet* $E$ *de* $\mathbb{E}$ *et en tous objets* $A$ *et* $A'$ *de* $\mathbb{A}$ *, on a:*

$$\mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),\mathbb{A}[A,A']) \simeq \mathrm{Hom}(C(A)(E),A') \ ,$$

(ii) *naturellement en tous objets* $E$ *et* $E'$ *de* $\mathbb{E}$ *et en tous objets* $A$ *et* $A'$ *de* $\mathbb{A}$ *, on a:*

$$\mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes Y_{\mathbb{E}}(E'),\mathbb{A}[A,A']) \simeq \mathrm{Hom}(B(A)(E,E'),A') \ ,$$

(iii) *naturellement en tous objets* $E$ *et* $E'$ *de* $\mathbb{E}$ *et en tout objet* $A$ *de* $\mathbb{A}$ *, on a:*

$$C(C(A)(E))(E') \simeq B(A)(E,E') \ .$$

*Preuve.* Si $\mathbb{A}$ est une $\mathbb{M}$-catégorie co-représentable ayant $C:\mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op}$ pour foncteur de co-représentation, il est clair que $C$ vérifie, au moins, la condition (i).
Il est tout aussi clair que l'égalité "naturelle" de (iii) permet de définir un foncteur $B:\mathbb{A} \to \mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\mathbb{E})\times\mathrm{Supp}(\mathbb{E}),\mathbb{A}^{op})^{op}$ .
Naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tous objets $A$ et $A'$ de $\mathbb{A}$ , on a donc:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes Y_{\mathbb{E}}(E'),\mathbb{A}[A,A']) &\simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E'),\mathbb{M}[Y_{\mathbb{E}}(E),\mathbb{A}[A,A']]) \\
&\qquad \mathbb{M} \text{ étant monoïdale, symétrique, fermée} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E'),\mathbb{A}[C(A)(E),A']) \\
&\qquad C \text{ étant un foncteur de co-représentation} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(C(C(A)(E)(E'),A') \\
&\qquad C \text{ vérifiant (i)} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(B(A)(E,E'),A') \\
&\qquad \text{par construction de } B \ ,
\end{aligned}$$

ainsi, la condition (ii) est également vérifiée. Ce qui implique également que $B$ est à valeurs dans la sous-catégorie pleine $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op}$ de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\mathbb{E})\times\mathrm{Supp}(\mathbb{E}),\mathbb{A}^{op})^{op}$ .

Réciproquement, si les conditions (i), (ii) et (iii) sont vérifiées, on voit que, naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tous objets $A$ et $A'$ de $\mathbb{A}$ , on a:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E'),\mathbb{M}[Y_{\mathbb{E}}(E),\mathbb{A}[A,A']]) &\simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes Y_{\mathbb{E}}(E'),\mathbb{A}[A,A']) \\
&\qquad \mathbb{M} \text{ étant monoïdale, symétrique, fermée} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(B(A)(E,E'),A') \\
&\qquad \text{(ii) étant vérifiée} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(C(C(A)(E))(E'),A') \\
&\qquad \text{(iii) étant vérifiée}
\end{aligned}$$

$$\simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E'),\mathcal{A}[C(A)(E),A'])$$
(i) étant vérifiée.

Comme, d'après le théorème de complétude projective, $Y_{\mathbb{E}}{}^{op}:\mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op} \to \mathcal{A}$ est dense, il en résulte que, naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et en tous objets $A$ et $A'$ de $\mathcal{A}$, on a:

$$\mathcal{M}[Y_{\mathbb{E}}(E),\mathcal{A}[A,A']] \simeq \mathcal{A}[C(A)(E),A'] .$$

C'est exactement dire que $C$ est un foncteur de co-représentation. *Fin de la preuve.*

En particulier, on déduit de la proposition 6 qui précède le corollaire suivant:

*Corollaire 2. Si* $\mathcal{M}$ *est une structure monoïdale, symétrique, fermée, sur la catégorie* $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ *des modèles d'une esquisse projective* $\mathbb{E}$ *, si* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie co-représentable et si sa catégorie sous-jacente* $\mathcal{A}$ *est co-complète, alors on a:*
*-* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie* $\mathcal{M}$*-co-complète si, et seulement si, le foncteur de co-représentation* $C:\mathcal{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathcal{A}^{op})^{op}$ *commute aux co-limites.*

*Preuve.* Si la $\mathcal{M}$-catégorie $\mathcal{A}$ est $\mathcal{M}$-co-complète et si $A = \text{Co-Lim}_{T\in\mathcal{T}}\, A_T$ est une $\mathcal{M}$-co-limite dans $\mathcal{A}$ (donc, en particulier, une co-limite dans la catégorie $\mathcal{A}$ ), on voit que, naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $A'$ de $\mathcal{A}$, on a:

$$\mathrm{Hom}(C(A)(E),A') \simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),\mathcal{A}[A,A'])$$
$C$ étant un foncteur de co-représentation
$$= \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),\mathcal{A}[\text{Co-Lim}_{T\in\mathcal{T}}\, A_T,A'])$$
$$\simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),\mathrm{Lim}_{T\in\mathcal{T}^{op}}\, \mathcal{A}[A_T,A'])$$
$A$ étant une $\mathcal{M}$-co-limite
$$\simeq \mathrm{Lim}_{T\in\mathcal{T}^{op}}\, \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),\mathcal{A}[A_T,A'])$$
$$\simeq \mathrm{Lim}_{T\in\mathcal{T}^{op}}\, \mathrm{Hom}(C(A_T)(E),A')$$
$C$ étant un foncteur de co-représentation
$$\simeq \mathrm{Hom}(\text{Co-Lim}_{T\in\mathcal{T}}\, C(A_T)(E),A')$$
la catégorie $\mathcal{A}$ étant co-complète.

Par conséquent, le foncteur $C(A)$ est co-limite des foncteurs $C(A_T)$ . Comme $\mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathcal{A}^{op})^{op}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Fonct}(\mathrm{Supp}(\mathbb{E}),\mathcal{A}^{op})^{op}$ , on en déduit que $C$ commute bien aux co-limites.

Réciproquement, si $\mathcal{A}$ est une catégorie co-complète, si le foncteur C commute aux co-limites et si $A = \text{Co-Lim}_{T \in \mathcal{T}} A_T$ est une co-limite dans $\mathcal{A}$ , on voit que, naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}$ et en tout objet A' de $\mathcal{A}$ , on a:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),\mathcal{A}[A,A']) &\simeq \mathrm{Hom}(C(A)(E),E') \\
&\qquad\qquad \text{C étant un foncteur} \\
&\qquad\qquad \text{de co-représentation} \\
&= \mathrm{Hom}(C(\text{Co-Lim}_{T\in\mathcal{T}}\ A_T)(E),A') \\
&\simeq \mathrm{Hom}((\text{Co-Lim}_{T\in\mathcal{T}}\ C(A_T))\ (E),A') \\
&\qquad\qquad \text{C commutant aux co-limites} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(\text{Co-Lim}_{T\in\mathcal{T}}\ (C(A_T)(E)),A') \\
&\qquad\qquad \mathcal{A} \text{ étant co-complète,} \\
&\simeq \mathrm{Lim}_{T\in\mathcal{T}^{op}}\ \mathrm{Hom}(C(A_T)(E),A') \\
&\simeq \mathrm{Lim}_{T\in\mathcal{T}^{op}}\ \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),\mathcal{A}[A_T,A']) \\
&\qquad\qquad \text{C étant un foncteur} \\
&\qquad\qquad \text{de co-représentation} \\
&\simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),\mathrm{Lim}_{T\in\mathcal{T}^{op}}\ \mathcal{A}[A_T,A']) \\
&\qquad\qquad \mathcal{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \text{ étant} \\
&\qquad\qquad \text{complète.}
\end{aligned}
$$

Comme, d'après le théorème de complétude projective, $Y_{\mathbb{E}}{}^{op}:\mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est dense, il en résulte que, naturellement en tout objet A' de $\mathcal{A}$ , on a:

$$\mathcal{A}[\text{Co-Lim}_{T\in\mathcal{T}}\ A_T,A'] \simeq \mathrm{Lim}_{T\in\mathcal{T}^{op}}\ \mathcal{A}[A_T,A']$$

C'est dire que les co-limites dans $\mathcal{A}$ sont bien des $\mathcal{M}$-co-limites dans la $\mathcal{M}$-catégorie $\mathcal{A}$ . *Fin de la preuve.*

Si $\mathcal{M}$ est une structure monoïdale, symétrique, fermée, sur la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$ , on laisse au lecteur le soin de définir les $\mathcal{M}$-catégories $\mathcal{A}$ qui sont *représentables*, en termes de *foncteurs de représentation* $R:\mathcal{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathcal{A})$ .
On lui laisse tout autant le soin d'énoncer et de démontrer les propositions duales des propositions 4, 5 et 6 ainsi que le corollaire dual du corollaire 2.

Evidemment, si $\mathcal{M} = (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}),\otimes,I,\mathcal{M}[-,-],\ldots)$ est une structure monoïdale, symétrique, fermée, sur la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles d'une esquisse projective quelconque $\mathbb{E}$ , alors $\mathcal{M}$ (qui est certainement une $\mathcal{M}$-catégorie) est nécessairement une $\mathcal{M}$-catégorie co-représentable et représentable.

En effet, on vérifie immédiatement que le foncteur:

$$C:\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op})^{op}$$

$$M \longmapsto Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes M : \mathbb{E} \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$$

$$E \mapsto Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes M$$

est un foncteur de co-représentation et que le foncteur:

$$R:\mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathrm{Mod}(\mathbb{E}))$$

$$M \longmapsto [Y_{\mathbb{E}}(-),M]:\mathbb{E} \rightarrow \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$$

$$E \mapsto [Y_{\mathbb{E}}(E),M]$$

est bien un foncteur de représentation.

Par exemple, la catégorie Cat des petites catégories est essentiellement algébrique, puisqu'équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse projective $\mathbb{E}_{cat}$.
Elle est évidemment munie d'une structure cartésienne fermée $\mathcal{M}_{cat}$ (ce qui est parfaitement connu, ou résulte encore de la proposition 2 !).
Il est alors facile de vérifier que les $\mathcal{M}_{cat}$-catégories co-représentables (resp. représentables), dans le sens (resp. dans le sens dual) introduit plus haut, sont exactement les 2-catégories *fortement co-représentables* (resp. *fortement représentables*) de (R.E.C.A.) (voir la Note 8).
De même (re-voir la Note 1, §1), si $\tau$ (resp. $\tau'$) est un ensemble de petits graphes compositifs, la catégorie $(\tau,\tau')$-Esq des $(\tau,\tau')$-esquisses est essentiellement algébrique, puisqu'équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse projective $\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$.
Elle est munie d'une structure de catégorie monoïdale, symétrique, fermée, $\mathcal{M}_{(\tau,\tau')-esq}$, associée, par exemple, au bi-foncteur produit tensoriel usuel $-\otimes-$.
Il résulte de ce qui précède que $(\tau,\tau')$-Esq est une (i. e. est canoniquement munie d'une structure de) $\mathcal{M}_{(\tau,\tau')-Esq}$-catégorie co-représentable et représentable. Ainsi, en particulier, naturellement en toutes $(\tau,\tau')$-esquisses $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$, on dispose:
- de "2-flèches" $n:H \Rightarrow H':\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$, qui sont les *transformations naturelles* entre homomorphismes $H,H':\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$,
- ces deux flèches "s'organisent" en un graphe compositif,
- ce graphe compositif est support de la $(\tau,\tau')$-esquisse (exponentielle - ou de fermeture - usuelle) $[\mathbb{E},\mathbb{E}']$,
- chaque 2-flèche $n:H \Rightarrow H':\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$ est co-représentée par une 1-flèche, i. e. un homomorphisme, $N:\mathbb{2}\otimes\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}'$,

- chaque 2-flèche $n : H \Rrightarrow H' : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est représentée par une 1-flèche, i. e. un homomorphisme, $N' : \mathbb{E} \to Q(\mathbb{E}')$, où $Q(\mathbb{E}')$ désigne une structure de $(\tau,\tau')$-esquisse dont le support est le graphe compositif des carrés commutatifs du support de $\mathbb{E}'$ (que nous laissons au lecteur le soin de décrire complètement ou dont il trouvera une description plus détaillée en (E.G.C.E.)).

Plus généralement, si $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{M}_{\langle\tau,\tau'\rangle\text{-esq}}$-catégorie représentable (resp. co-représentable) alors, naturellement en tout objet $A$ de $\mathcal{A}$, on dispose au moins d'une "$(\tau,\tau')$-esquisse interne à $\mathcal{A}$" (resp. d'une "co-$(\tau,\tau')$-esquisse interne à $\mathcal{A}$") dont l'objet des objets est $A$ (car l'esquisse $\mathbb{1}$ est unité pour $\otimes$).

On reprendra ces exemples (notamment) au §5 suivant, d'un point de vue plus systématique.

[Note 7. Soit $\mathcal{M}$ une structure monoïdale, symétrique, fermée sur la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$ et $\mathcal{A}$ une $\mathcal{M}$-catégorie.

On peut dire que $\mathcal{A}$ est *faiblement co-représentable* si, et seulement si:

- il existe un foncteur de *co-représentation faible* (évidemment unique à équivalence près) $C' : \mathcal{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}, \mathcal{A}^{op})^{op}$ tel que, naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et en tous objets $A$ et $A'$ de $\mathcal{A}$, on a:

$$\mathrm{Hom}(C'(A)(E), A') \simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E), \mathcal{A}[A, A']) .$$

Alors, il est clair que les $\mathcal{M}$-catégories co-représentables sont faiblement co-représentables.

La réciproque est évidemment fausse: la totalité de la structure d'une $\mathcal{M}$-catégorie $\mathcal{A}$ co-représentable est décrite par le foncteur de co-représentation (voir le §5 pour s'en convaincre), alors qu'une partie seulement (le bi-foncteur "Hom à valeurs dans $\mathcal{M}$") de la structure d'une $\mathcal{M}$-catégorie $\mathcal{A}$ faiblement co-représentable est décrite par le foncteur de co-représentation faible.

On laisse le soin au lecteur d'effectuer les considérations duales concernant les $\mathcal{M}$-catégories *faiblement représentables*.]

[Note 8. Les $\mathcal{M}_{cat}$-catégories faiblement co-représentables (resp. faiblement représentables), dans le sens (resp. le sens dual) introduit à la Note 7, sont exactement les 2-catégories *co-représentables* (resp. *représentables*) de (R.E.C.A.).

La "translation d'un degré" entre la "force" de co-représentabilité (resp. de représentabilité) utilisée dans la terminologie que nous introduisons ici et celle de (R.E.C.A.) n'a qu'une seule justification: nous n'utiliserons dans la suite - pour faire plus court - que la "force" la plus élévée, que nous avons donc qualifée de la plus courte manière!]

## 5. CO-REPRESENTABILITE DES CATEGORIES ESSENTIELLEMENT ALGEBRIQUES A ENRICHISSEMENT ESSENTIELLEMENT ALGEBRIQUE.

Soit $\mathcal{M}$ une structure monoïdale, symétrique, fermée, sur la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$, soit $D = D_{\mathcal{M}}:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op}$ le co-modèle associé à $\mathcal{M}$, soit $\mathbb{E}''$ une autre esquisse projective et soit $\Delta:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'' \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')^{op}$ un autre modèle.

Naturellement en tout objet $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$, on sait que (d'après le théorème de complétude projective):

$$\Delta(E',E'') = \text{Co-Lim}_{x''\in\Delta(E',E'')(S''),S''\in\mathbb{E}''} Y_{\mathbb{E}''}(S'') ,$$

Naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$, on peut donc poser (puisque - d'après le théorème de complétude projective - $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')$ est co-complète):

$$\Delta_\Delta(E,E',E'') = \text{Co-Lim}_{x''\in\Delta(E',E'')(S''),S''\in\mathbb{E}''} \Delta(E,S'') ,$$

Clairement, on construit ainsi un modèle (voir le Groupe de Figures 8):

$$\Delta_\Delta:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'' \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')^{op} .$$

Naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$, on sait que (d'après le théorème de complétude projective):

$$D(E,E') = \text{Co-Lim}_{x\in D(E,E')(S),S\in\mathbb{E}} Y_{\mathbb{E}}(S) ,$$

Naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$, on peut donc poser (puisque - d'après le théorème de complétude projective - $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')$ est co-complète):

$$\Delta_D(E,E',E'') = \text{Co-Lim}_{x\in D(E,E')(S),S\in\mathbb{E}} \Delta(S,E'') .$$

Clairement, on construit de la sorte un nouveau modèle (voir le Groupe de Figures 8):

$$\Delta_D:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'' \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')^{op} .$$

Nous dirons que $\Delta$ est *$\mathcal{M}$-associatif* (ou *D-associatif*) si, et seulement si, $\Delta_\Delta$ et $\Delta_D$ sont des modèles naturellement équivalents, autrement dit si, et seulement si:

- naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$, on a:

$$\Delta_{\Delta}(E,E',E") \simeq \Delta_{D}(E,E',E") .$$

Par extension, il est facile de définir, encore plus précisément, les modèles $\Delta : \mathbb{E}\otimes\mathbb{E}" \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}")^{op}$ qui sont *$\mathcal{M}$-associatifs*, *$\mathcal{M}$-unitaires* et *$\mathcal{M}$-cohérents*; nous laissons ce soin au lecteur (consulter de nouveau - et généraliser sans la moindre difficulté - les "tests standards" de (F.S.C.A.))

Soit $\mathcal{M}$ une structure monoïdale, symétrique, fermée, sur la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}"$ une autre esquisse projective.

Les structures de $\mathcal{M}$-catégories (i. e. les enrichissements essentiellement algébriques) co-représentables et $\mathcal{M}$-co-complètes sur la catégorie $\mathbb{A} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}")$ des modèles de $\mathbb{E}"$ (i. e. sur une autre catégorie essentiellement algébrique) sont entièrement caractérisées comme suit (voir le groupe de Figures 8):

*Proposition 7. Si $\mathcal{M}$ est une structure monoïdale, symétrique, fermée sur la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$ et si $\mathbb{E}"$ est une autre esquisse projective, alors les structures de $\mathcal{M}$-catégories co-représentables et $\mathcal{M}$-co-complètes sur la catégorie $\mathbb{A} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}")$ des modèles de $\mathbb{E}"$ sont entièrement déterminées (à isomorphismes près) par les modèles $\Delta : \mathbb{E}\otimes\mathbb{E}" \to \mathbb{A}^{op}$ qui sont $\mathcal{M}$-associatifs, $\mathcal{M}$-unitaires et $\mathcal{M}$-cohérents, et réciproquement.*

*Preuve.* Supposons que $\mathbb{A}$ soit une structure de $\mathcal{M}$-catégorie co-représentable et $\mathcal{M}$-co-complète sur la catégorie $\mathbb{A} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}")$ (qui est certainement complète, puisque $\mathbb{E}"$ est une esquisse projective).
On dispose donc de deux foncteurs:

$$C : \mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op}$$

et

$$B : \mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op}$$

vérifiant les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition 6, §4, précédente.
En vertu du corollaire 2, §4, qui précède, le foncteur $C^{op}$ commute aux limites et l'on dispose donc du modèle "composé":

$$\Delta'_{\mathbb{A}} : \mathbb{E}" \xrightarrow[Y_{\mathbb{E}"}]{} \mathbb{A}^{op} \xrightarrow[C^{op}]{} \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A}^{op}) .$$

Comme $\mathcal{A}^{op}$ est complète (puisque - d'après le théorème de complétude projective - $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')$ est co-complète) et $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}''$ sont deux esquisses projectives, on dispose (en vertu de la propriété de commutation projective complète) d'un isomorphisme canonique:

$$\phi' : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}'', \mathrm{Mod}(\mathbb{E}, \mathcal{A}^{op})) \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E} \otimes \mathbb{E}'', \mathcal{A}^{op}) ,$$

et il correspond donc à $\Delta'_{\mathcal{A}}$ le modèle:

$$\begin{array}{lll} \Delta_{\mathcal{A}} : \mathbb{E} \otimes \mathbb{E}'' & & \mathcal{A}^{op} \\ \quad (E, E'') & & C(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(E) . \end{array}$$

Naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ , en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$ et en tout objet $A'$ de $\mathcal{A}$ , on a:

$\mathrm{Hom}(B(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(E,E'), A') \simeq \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E) \otimes Y_{\mathbb{E}}(E'), \mathcal{A}[Y_{\mathbb{E}''}(E''), A'])$
d'après le point (ii)
de la proposition 6, §4

$\simeq \mathrm{Hom}(D(E,E'), \mathcal{A}[Y_{\mathbb{E}''}(E''), A'])$

$\simeq \mathrm{Hom}(\text{Co-Lim}_{x \in D(E,E')(S), S \in \mathbb{E}}\, Y_{\mathbb{E}}(S), \mathcal{A}[Y_{\mathbb{E}''}(E''), A'])$
en notant $D = D_{\mathcal{M}} : \mathbb{E} \otimes \mathbb{E} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$
le modèle associé à $\mathcal{M}$

$\simeq \mathrm{Lim}_{x \in D(E,E')(S), S \in \mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op}}\, \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(S), \mathcal{A}[Y_{\mathbb{E}''}(E''), A'])$

$\simeq \mathrm{Lim}_{x \in D(E,E')(S), S \in \mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op}}\, \mathrm{Hom}(C(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(S), A')$
d'après le point (i) de
la proposition 6, §4

$\simeq \mathrm{Hom}(\text{Co-Lim}_{x \in D(E,E')(S), S \in \mathbb{E}}\, C(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(S), A')$
puisque $\mathcal{A}$ est co-complète.

On en déduit donc que:

(1) naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$ , on a:

$$B(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(E,E') \simeq \text{Co-Lim}_{x \in D(E,E')(S), S \in \mathbb{E}}\, C(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(S) .$$

Ainsi, naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$ , on a encore (en posant $\Delta = \Delta_{\mathcal{A}}$ , pour simplifier);

$\Delta_{\Delta}(E,E',E'') = \text{Co-Lim}_{x \in \Delta(E',E'')(S''), S'' \in \mathbb{E}''}\, \Delta(E,S'')$
par définition

$= \text{Co-Lim}_{x \in \Delta(E',E'')(S''), S'' \in \mathbb{E}''}\, C(Y_{\mathbb{E}''}(S''))(E)$
par définition

$\simeq C(\Delta(E',E''))(E)$
puisque $C$ commute aux co-limites
et $\mathcal{A}$ étant co-complète

$= C(C(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(E'))(E)$
par définition
$\simeq B(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(E,E')$
en vertu du point (iii) de la proposition 6, §4
$\simeq \text{Co-Lim}_{x\in D(E,E')(S),S\in\mathbb{E}}\ C(Y_{\mathbb{E}''}(E''))(S)$
d'après (1)
$= \text{Co-Lim}_{x\in D(E,E')(S),S\in\mathbb{E}}\ \Delta(S,E'')$
par définition
$= \Delta_D\ (E,E',E'')$
par définition.

Ainsi, le modèle $\Delta_{\mathbb{A}}$ est $\mathcal{M}$-associatif. De la même manière, on établit qu'il est $\mathcal{M}$-unitaire et $\mathcal{M}$-cohérent.

Réciproquement, supposons que $\Delta:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'' \to \mathbb{A}^{op}$ soit un modèle $\mathcal{M}$-associatif, $\mathcal{M}$-unitaire et $\mathcal{M}$-cohérent.
Naturellement en tout modèle $M:\mathbb{E} \to \text{Ens}$ (i. e. en tout objet de $\mathbb{M}$ ) et en tout modèle $A:\mathbb{E}'' \to \text{Ens}$ (i. e. en tout objet de $\mathbb{A}$ ), on voit que (en vertu du théorème de complétude projective):
- puisque $Y_{\mathbb{E}}^{op}:\text{Supp}(\mathbb{E})^{op} \to \text{Mod}(\mathbb{E}) = \mathbb{M}$ est dense, on a:
$$M = \text{Co-Lim}_{x\in M(E),E\in\mathbb{E}}\ Y_{\mathbb{E}}(E)\ ,$$
- puisque $Y_{\mathbb{E}''}^{op}:\text{Supp}(\mathbb{E}'')^{op} \to \text{Mod}(\mathbb{E}'') = \mathbb{A}$ est dense, on a:
$$A = \text{Co-Lim}_{y\in A(E''),E''\in\mathbb{E}''}\ Y_{\mathbb{E}''}(E'')\ ,$$
- puisque $\text{Mod}(\mathbb{E}'') = \mathbb{A}$ est co-complète, on peut poser:
$$M\Theta A = \text{Co-Lim}_{x\in M(E),E\in\mathbb{E},y\in A(E''),E''\in\mathbb{E}''}\ \Delta(E,E'')\ .$$
Ainsi, on définit un bi-foncteur:
$$-\Theta-:\mathbb{M}\times\mathbb{A} \to \mathbb{A}\ .$$
Alors, il est facile de voir, successivement, que:

(2) naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$ , on a (trivialement):
$$Y_{\mathbb{E}}(E)\Theta Y_{\mathbb{E}''}(E'') \simeq \Delta(E,E'')\ ,$$

(3) le bi-foncteur $-\Theta-:\mathbb{M}\times\mathbb{A} \to \mathbb{A}$ bi-commute (par construction) aux co-limites,

(4) naturellement en tous objets $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ et en tout objet $E''$ de $\mathbb{E}''$ , on a (car $\Delta$ est $\mathcal{M}$-associatif et en utilisant (1)):
$$(Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes Y_{\mathbb{E}}(E'))\Theta Y_{\mathbb{E}''}(E'') \simeq Y_{\mathbb{E}}(E)\Theta(Y_{\mathbb{E}}(E')\Theta Y_{\mathbb{E}''}(E''))\ ,$$

(5) naturellement en tous objets $M$ et $M'$ de $\mathbb{M}$ et en tout objet $A$ de $\mathbb{A}$, on a (en utilisant (4) et la construction - rappelée au §1 - du bi-foncteur $\otimes:\mathbb{M}\times\mathbb{M} \to \mathbb{M}$, connaissant $D_{\mathbb{M}}:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathbb{M}^{op}$):

$$(M\otimes M')\odot A \simeq M\odot(M'\odot A) \ .$$

Dans ces conditions, naturellement en tout objet $A$ de $\mathbb{A}$, comme le foncteur $(-\odot A)^{op}:\mathbb{M}^{op} \to \mathbb{A}^{op}$ commute (d'après (3)) aux limites, on dispose du modèle "composé":

$$C(A)(-):\mathbb{E} \xrightarrow[Y_{\mathbb{E}}]{} \mathrm{Mod}(\mathbb{E})^{op} = \mathbb{M}^{op} \xrightarrow[(-\odot A)^{op}]{} \mathbb{A}^{op}$$

On en déduit donc un nouveau foncteur:

$$C:\mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op} \ ,$$

et l'on voit que (par construction, en utilisant (3) et les co-limites se calculant point par point dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op}$, puisque $\mathbb{A} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}")$ est co-complète):

(6) le foncteur $C:\mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op}$ commute aux co-limites.

Ceci fait, naturellement en tous objets $A$ et $A'$ de $\mathbb{A}$, comme le foncteur $\mathrm{Hom}(-,A'):\mathbb{A}^{op} \to \mathrm{Ens}$ commute aux limites, on dispose maintenant d'un objet de $\mathbb{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$, i.e. du modèle "composé":

$$[A,A']_{\Delta}:\mathbb{E} \xrightarrow[C(A)]{} \mathbb{A}^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}(-,A')]{} \mathrm{Ens} \ .$$

Alors, on voit que:

(7) naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et en tous objets $A$ et $A'$ de $\mathbb{A}$, on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E),[A,A']_{\Delta}) &\simeq [A,A']_{\Delta}(E)\\ &= \mathrm{Hom}(C(A)(E),A')\\ &= \mathrm{Hom}(Y_{\mathbb{E}}(E)\odot A,A') \ .\end{aligned}$$

D'où l'on déduit que (en utilisant (3), la densité de $Y_{\mathbb{E}}{}^{op}:\mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op} \to \mathbb{M}$ et le fait que $\mathbb{A}$ est co-complète):

(8) naturellement en tout objet $M$ de $\mathbb{M}$ et en tous objets $A$ et $A'$ de $\mathbb{A}$, on a:

$$\mathrm{Hom}(M,[A,A']_{\Delta}) \simeq \mathrm{Hom}(M\odot A,A') \ ,$$

(ainsi, l'objet $M \oslash A$ de $\mathbb{A}$ est "candidat" à être un tenseur de l'objet $M$ de $\mathbb{M}$ par l'objet $A$ de $\mathbb{A}$ et le foncteur $C: \mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}, \mathbb{A}^{op})^{op}$ est "candidat" à être un foncteur de co-représentation).
Naturellement en tous objets $S$ , $E$ et $E'$ de $\mathbb{E}$ , en tous objets $A$ , $A'$ et $A''$ de $\mathbb{A}$ , en toute flèche $x: Y_{\mathbb{E}}(S) \to Y_{\mathbb{E}}(E) \otimes Y_{\mathbb{E}}(E')$ (ou encore, en tout élément $x \in Y_{\mathbb{E}}(E) \otimes Y_{\mathbb{E}}(E')(S)$ ), en toute flèche $y: Y_{\mathbb{E}}(E) \oslash A \to A'$ (ou encore, d'après (7), en tout élément $y \in [A, A']_{\Delta}(E)$ ) et en toute flèche $y': Y_{\mathbb{E}}(E') \oslash A' \to A''$ (ou encore, d'après (7), en tout élément $y' \in [A', A'']_{\Delta}(E')$ ), on dispose de la flèche composée de $\mathbb{A}$ (i. e. du diagramme commutatif):

$$\begin{tikzcd}
Y_{\mathbb{E}}(S) \oslash A \arrow[d, "x \oslash id(A)"] \arrow[ddddd, bend right=60, "k'_{A'',A',A,y',y,x}"'] \\
(Y_{\mathbb{E}}(E) \otimes Y_{\mathbb{E}}(E')) \oslash A \arrow[d, "\simeq \text{ (puisque } \mathbb{M} \text{ est monoïdale symétrique)}"] \\
(Y_{\mathbb{E}}(E') \otimes Y_{\mathbb{E}}(E)) \oslash A \arrow[d, "\simeq \text{ (d'après (4))}"] \\
Y_{\mathbb{E}}(E') \oslash (Y_{\mathbb{E}}(E) \oslash A) \arrow[d, "id(Y_{\mathbb{E}}(E')) \oslash y"] \\
Y_{\mathbb{E}}(E') \oslash A' \arrow[d, "y'"] \\
A''
\end{tikzcd}$$

Ainsi, naturellement en tous objets $A$ , $A'$ et $A''$ de $\mathbb{A}$ , on dispose d'une unique flèche:

$$k''_{A'',A',A}: \text{Co-Lim}_{\langle y',y,x,E',E,S \rangle \in \ldots} (Y_{\mathbb{E}}(S) \oslash A) \to A''$$

associée à la famille:

$$(k''_{A'',A',A,y',y,x})_{(y',y,x,E',E,S)\in\ldots}\ ,$$

On en déduit une flèche $k'_{A'',A',A}$ (composée dans $\mathbb{A}$ ), i. e. un diagramme commutatif):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Co\text{-}Lim}_{(y',y,x,E',E,S)\in\ldots}\,(Y_{\mathbb{E}}(S)\oslash A) \arrow[d, "\simeq\ (\text{d'après }(3))"] \arrow[ddddd, bend right=70, "k''_{A'',A',A}"'] \\
(\mathrm{Co\text{-}Lim}_{(y',y,x,E',E,S)\in\ldots}\,Y_{\mathbb{E}}(S))\oslash A \arrow[d, "\simeq"] \\
(\mathrm{Co\text{-}Lim}_{(y',y,E',E)\in\ldots}\,(\mathrm{Co\text{-}Lim}_{(x,S)\in\ldots}\,Y_{\mathbb{E}}(S))\oslash A \arrow[d, "\simeq"] \\
(\mathrm{Co\text{-}Lim}_{(y',y,E',E)\in\ldots}\,Y_{\mathbb{E}}(E)\otimes Y_{\mathbb{E}}(E'))\oslash A \arrow[d, "\simeq\ (\text{d'après la construction de }\otimes:\mathbb{M}\times\mathbb{M}\to\mathbb{M})"] \\
([A',A'']_{\Delta}\otimes[A,A']_{\Delta})\oslash A \arrow[d, "k'_{A'',A',A}"] \\
A''
\end{tikzcd}$$

et, d'après (8), à $k'_{A'',A',A}$ est associée, enfin, une flèche de $\mathbb{M}$ :

$$k_{A'',A',A}:[A'',A']_{\Delta}\otimes[A',A]_{\Delta}\to[A,A'']_{\Delta}\ .$$

Utilisant la $\mathcal{M}$-unitarité et la $\mathcal{M}$-cohérence de $\Delta$ (ce que nous laissons au lecteur le soin de faire), on vérifie que l'on obtient ainsi une famille $(k_{A'',A',A})_{A''\in\mathrm{Ob}(\mathbb{A}),A'\in\mathrm{Ob}(\mathbb{A}),A\in\mathrm{Ob}(\mathbb{A})}$ de "compositions internes" pour une structure

$$\mathbb{A}_{\Delta}=(\mathbb{A},[-,-]_{\Delta},k,\ldots)$$

de $\mathcal{M}$-catégorie sur $\mathbb{A}$ . Elle est évidemment co-représentable d'après (7) et $\mathcal{M}$-co-complète d'après le corollaire 2, §4, et (6). *Fin de la preuve.*

*Corollaire 3. Si* $\mathcal{M}$ *est une structure monoïdale symétrique fermée sur la catégorie des modèles d'une esquisse projective* $\mathbb{E}$ *, si* $\mathcal{A}$ *est une structure de* $\mathcal{M}$*-catégorie co-représentable et* $\mathcal{M}$*-co-complète sur la catégorie des modèles d'une autre esquisse projective* $\mathbb{E}''$ *, alors:*
*-* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie représentable,*
*-* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie* $\mathcal{M}$*-complète.*

*Preuve.* En effet, d'après la proposition 7 qui précède, on dispose d'un modèle $\Delta:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'' \to \mathcal{A}^{op}$ , $\mathcal{M}$-associatif, $\mathcal{M}$-unitaire et $\mathcal{M}$-cohérent, décrivant entièrement la structure de $\mathcal{M}$-catégorie sur la catégorie (sous-jacente) $\mathcal{A}$ .
Alors, naturellement en tout objet $A$ de $\mathcal{A}$ , on dispose aussi du modèle composé:

$$\mathrm{Hom}(\Delta(-,-),A):\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'' \xrightarrow[\Delta]{} \mathcal{A}^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}(-,A)]{} \mathrm{Ens}\ .$$

Comme $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}''$ sont deux esquisses projectives, on a (en vertu de la propriété de commutation projective complète) un isomorphisme $\phi:\mathrm{Mod}(\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}'') \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')) = \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathcal{A})$ , qui fait donc correspondre au modèle $\mathrm{Hom}(\Delta(-,-),A)$ un modèle:

$$R(A)(-):\mathbb{E} \to \mathcal{A}\ .$$

Ainsi, on définit un foncteur:

$$R:\mathcal{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathcal{A})\ .$$

Il est facile de vérifier (compte tenu des propriétés de $\Delta$ ) que $R$ est un foncteur de représentation pour la $\mathcal{M}$-catégorie $\mathcal{A}$ : en conséquence, $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{M}$-catégorie représentable.
Il est tout aussi facile de vérifier que $R$ commute aux limites. Comme la catégorie $\mathcal{A} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')$ est complète (en vertu du théorème de complétude projective, puisque $\mathbb{E}''$ est une esquisse projective) il résulte du dual du corollaire 2, §4, que $\mathcal{A}$ est $\mathcal{M}$-complète. *Fin de la preuve.*

Soit $\mathcal{M}$ une structure monoïdale symétrique fermée sur la catégorie des modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}$ .
D'après la proposition 1, §1, à cette structure monoïdale symétrique et fermée $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ est associé un modèle:

$$D_{\mathcal{M}}:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathbb{M}^{op}\ .$$

De même, d'après la proposition 7, à la structure (canonique) de $\mathcal{M}$-catégorie co-représentable $\mathcal{M}$-co-complète (encore notée) $\mathcal{M}$ sur $\mathbb{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E}'')$ (où $\mathbb{E}'' = \mathbb{E}$ !) est associé un modèle:

$$\Delta_{\mathcal{M}}:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathbb{M}^{op}\ .$$

Alors, il est facile de vérifier que $\Delta_{\mathcal{M}} \simeq D_{\mathcal{M}}$ (voir la Note 9).

Soit $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}"$ un homomorphisme entre deux esquisses projectives, $L:Mod(\mathbb{E}) \to Mod(\mathbb{E}")$ un adjoint à gauche (dont l'existence est assurée, en vertu du théorème du faisceau associé) au foncteur $Mod(H):Mod(\mathbb{E}") \to Mod(\mathbb{E})$ et $D:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to Mod(\mathbb{E})^{op}$ et $D":\mathbb{E}"\otimes\mathbb{E}" \to Mod(\mathbb{E}")^{op}$ deux modèles associatifs, symétriques, unitaires et cohérents tels que (voir le Groupe de Figures 8):

$$L^{op}.D \simeq D".H\otimes H .$$

Alors, à $D$ est associée (d'après la proposition 1, §1) une structure de catégorie monoïdale symétrique fermée $\mathcal{M}_D$ sur $\mathbb{M} = Mod(\mathbb{E})$, à $D"$ est associée (d'après la proposition 1) une structure monoïdale symétrique et fermée $\mathcal{M}"_{D"}$ sur $\mathbb{M}" = Mod(\mathbb{E}")$ et il est facile de voir que $Mod(H):\mathbb{M}" \to \mathbb{M}$ définit canoniquement un foncteur monoïdal (non strict, en général):

$$\mathcal{M}od_{D,D"}(H):\mathcal{M}"_{D"} \to \mathcal{M}_D .$$

Il est clair que le modèle composé:

$$\Delta_{D,D"}:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}" \xrightarrow[H\otimes id(\mathbb{E}")]{} \mathbb{E}"\otimes\mathbb{E}" \xrightarrow[D"]{} Mod(\mathbb{E}")^{op}$$

est $\mathcal{M}_D$-associatif, $\mathcal{M}_D$-unitaire et $\mathcal{M}_D$-cohérent.

De la proposition 7 et du corollaire 3 résulte que $\mathbb{M}"$ est munie d'une structure de $\mathcal{M}$-catégorie, co-représentable, représentable, $\mathcal{M}$-co-complète et $\mathcal{M}$-complète, "sous-jacente" à la structure de catégorie monoïdale symétrique et fermée $\mathcal{M}"_{D"}$ .

Soit $\mathcal{M}$ une structure monoïdale, symétrique et fermée sur la catégorie $Mod(\mathbb{E})$ d'une esquisse projective quelconque $\mathbb{E}$ et $M:\mathbb{E} \to Ens$ un modèle fixé.

On sait que la catégorie $M/Mod(\mathbb{E})$ est essentiellement algébrique puisqu'équivalente à la catégorie des modèles de l'esquisse projective $\mathbb{E}|M$ .

Naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et en toute flèche $x:Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ (i. e. en tout élément $x\in M(E)$ ) désignons par:

- $s_E:E \to M+Y_{\mathbb{E}}(E)$ et $s'_E:M \to M+E$ les deux co-projections dans $Mod(\mathbb{E})$ ,
- $c_{\langle x,E\rangle}:M+E \to M$ l'unique flèche (de *section*) de $Mod(\mathbb{E})$ telle que:

$$c_{\langle x,E\rangle}.s_E = x \quad \text{et} \quad c_{\langle x,E\rangle}.s'_E = id(M) ,$$

de la sorte:

- $s'_E$ est un objet de $M/Mod(\mathbb{E})$ ,
- $c_{\langle x,E\rangle}$ s'identifie à une flèche $c_{\langle x,E\rangle}:s'_E \to id(M)$ de $M/Mod(\mathbb{E})$ .

Il est alors facile de voir que l'on a bien:
- $Y_{\mathbb{E}|M}(1_M) = id(M)$ ,
- pour tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ (qui est donc objet de $\mathbb{E}|M$ ), $Y_{\mathbb{E}|M}(E) = s'_E$ ,
- pour toute flèche $e:E \to E'$ de $\mathbb{E}$ (qui est donc flèche de $\mathbb{E}|M$ ), $Y_{\mathbb{E}|M}(e) = id(M)+Y_{\mathbb{E}}(e)$ ,
- pour toute flèche $(x,E):1_M \to E$ de $\mathbb{E}|M$ , $Y_{\mathbb{E}|M}((x,E)) = c_{(x,E)}$ .

Autrement dit, à la mention des co-projections de source $M$ (et des flèches de section) près, le modèle (canonique) de Yoneda $Y_{\mathbb{E}|M}:\mathbb{E}|M \to (Mod(\mathbb{E}|M))^{op} \simeq (M/Mod(\mathbb{E})^{op}$ est entièrement décrit par $(M+Y_{\mathbb{E}}(-))^{op}:Supp(\mathbb{E}|M) \to Mod(\mathbb{E})^{op}$ .

Si l'on désigne maintenant par $D_{\mathcal{M}}:\mathbb{E}\otimes\mathbb{E} \to \mathbf{M}^{op}$ le modèle associé (grâce à la proposition 1, §1) à la structure monoïdale, symétrique, fermée, $\mathcal{M}$ sur $\mathbf{M} = Mod(\mathbb{E})$ , on peut construire le foncteur:

$$(M+D(-,-))^{op}:Supp(\mathbb{E})xSupp(\mathbb{E}) \to \mathbf{M}^{op}$$

qui n'est évidemment pas un modèle de $\mathbb{E}\otimes\mathbb{E}$ dans $\mathbf{M}$ . Par contre, en utilisant les co-projections de source $M$ et les sections précédentes , il est facile de voir qu'il décrit un modèle:

$$\Delta:\mathbb{E}\otimes(\mathbb{E}|M) \to (M/Mod(\mathbb{E}))^{op} ,$$

évidemment $\mathcal{M}$-associatif, $\mathcal{M}$-unitaire et $\mathcal{M}$-cohérent (car $D$ l'est).

On conclut, grâce à la proposition 7 et au corollaire 3, que $M/Mod(\mathbb{E})$ est canoniquement munie d'une structure de $\mathcal{M}$-catégorie, co-représentable, $\mathcal{M}$-co-complète, représentable et $\mathcal{M}$-complète (voir la Note 10).

Par exemple (re-voir la Note 1, §1) si $\tau$ et $\tau'$ sont deux ensembles de petits graphes compositifs, toutes les considérations particulières précédentes s'appliquent immédiatement à la catégorie $(\tau,\tau')$-Esq .

Ainsi, on sait qu'on dispose:
- d'un homomorphisme injection canonique:

$$H_{supp}:\mathbb{E}_{grphcmp} \to \mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$$

de sorte que le foncteur $Mod(H_{supp})$ est équivalent au foncteur support,
- d'un "co-graphe compositif double interne à Grphcmp ":

$$D_{grphcmp}:\mathbb{E}_{grphcmp}\otimes\mathbb{E}_{grphcmp} \to (Grphcmp)^{op}$$

associé à la structure de catégorie cartésienne fermée $\mathcal{M}_{grphcmp}$ sur Grphcmp ,

- d'une "co-$(\tau,\tau')$-esquisse double interne à $(\tau,\tau')$-Esq ":

$$D_{(\tau,\tau')-esq}:\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}\otimes\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq} \to ((\tau,\tau')\text{-Esq})^{op}$$

associée à la structure monoïdale, symétrique, fermée, usuelle $\mathcal{M}_{(\tau,\tau')-esq}$ sur $(\tau,\tau')$-Esq .
Il est facile de vérifier que (par construction):

$$L^{op}.D_{grphcmp} \simeq D_{(\tau,\tau')-esq}.H_{supp}\otimes H_{supp}$$

(si L désigne l'adjoint à gauche du foncteur support).
Il en résulte que $(\tau,\tau')$-Esq est (sous-jacente à) une $\mathcal{M}_{grphcmp}$-catégorie, $\mathcal{M}_{grphcmp}$-co-complète, co-représentable, $\mathcal{M}_{grphcmp}$-complète et représentable, sous-jacente à sa structure monoïdale, symétrique et fermée $\mathcal{M}_{(\tau,\tau')-esq}$ ; ceci permet de préciser (et d'éclairer) les considérations de la fin du §4 précédent.

[Note 9. La proposition 7 (que nous avions renoncé à faire figurer dans (F.S.C.A.), bien qu'obtenue à la même époque) généralise très naturellement la proposition 1, §1.]

[Note 10. Pour faire court, nous ne multiplierons pas ici (re-voir la Note 1, §1 !) les applications (théoriques) particulières de la proposition 7 et du corollaire 3, bien qu'il y en ait nombre d'autres: toutes (celles présentées ici) ont pour point commun de prouver le caractère éminemment pratique et/ou effectif de la caractérisation obtenue à la proposition 7 (au même titre que le travail effectué en (F.S.C.A.), (C.C.M.F.), (Q.P.G.M.) concernant la proposition 1, §1, qu'elle généralise).]

## 6. LAX-CO-LIMITES STRUCTUREES DANS LES CATEGORIES A ENRICHISSEMENT ESSENTIELLEMENT ALGEBRIQUE.

On dit que $\chi = (H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ est une *pré-configuration* (pour la structuration des lax-co-limites) si, et seulement si:
- $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses projectives (et $\mathbb{E}_{cat}$ est celle des catégories),
- $H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}$ et $K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}$ sont deux homomorphismes,

- $S_1$ (qui est l'objet des objets, dans l'esquisse $\mathbb{E}_{cat}$ des catégories) est tout autant un objet de $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ ,
- $H(S_1) = S_1$ et $K(S_1) = S_1$ ,
- $\mathcal{M} = (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}), \otimes, I, \mathcal{M}[-,-], \ldots)$ est une structure monoïdale, symétrique, fermée sur la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles de $\mathbb{E}$ ,
- $I = Y_{\mathbb{E}}(S_1)$ .

Dans ces conditions, les deux esquisses $\mathbb{E}'$ et $\mathbb{E}_{cat}$ étant projectives, on sait (en vertu du théorème du faisceau associé) que le foncteur composition par $K$ :

$$\mathrm{Mod}(K): \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{cat}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}')$$

admet un adjoint à gauche:

$$L: \mathrm{Mod}(\mathbb{E}') \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{cat}) .$$

On dispose donc des foncteurs:

$$\mathcal{L} : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \xrightarrow[\mathrm{Mod}(H)]{} \mathrm{Mod}(\mathbb{E}') \xrightarrow[L]{} \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{cat}) \simeq \mathrm{Cat}$$

et

$$\mathcal{O}b: \mathrm{Mod}(\mathbb{E}) \xrightarrow[\mathrm{Mod}(H)]{} \mathrm{Mod}(\mathbb{E}') \xrightarrow[L]{} \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{cat}) \simeq \mathrm{Cat} \xrightarrow[\mathrm{Ob}]{} \mathrm{Ens} ,$$

(où $\mathrm{Ob}(-): \mathrm{Cat} \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{cat}) \to \mathrm{Ens}$ est le foncteur "objet", i. e. le foncteur "évaluation en $S_1$ ").

Ainsi, si $M: \mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ est un modèle, on lui associe sa *catégorie engendrée* $\mathcal{L}(M)$ (i. e. la catégorie engendrée par le modèle de $\mathbb{E}'$ sous-jacent à $M$ ).

De même, on associe à $M$ l'ensemble $\mathcal{O}b(M) = \mathrm{Ob}(\mathcal{L}(M)) = \mathcal{L}(M)(S_1)$ de ses *objets* (i. e. des objets de la catégorie engendrée par $M$ ). En général, $\mathcal{O}b(M)$ est *différent* de l'ensemble $M(S_1)$ , des *éléments de sorte* $S_1$ de $M$ , mais on dispose évidemment d'une application canonique (résultant de l'adjonction à gauche de $L$ à $\mathrm{Mod}(K)$ ):

$$u_M: M(S_1) = M.H(S_1) \to \mathrm{Ob}(L(M.H)) = \mathcal{O}b(M) .$$

Alors, on dit que $\chi$ est une *configuration* si, et seulement si (voir la Note 11):

- $\chi$ est *totale*, i. e. pour tout modèle $M: \mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ l'application canonique $u_M: M(S_1) \to \mathcal{O}b(M)$ est une bijection,
- $\chi$ est *connexe*, i. e. pour tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ , la catégorie $\mathcal{L}(Y_{\mathbb{E}}(E))$ est connexe.

Soit $(H: \mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K: \mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ une configuration, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{M}$-catégorie, $M: \mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ un modèle, $B: \mathcal{L}(M) \to \mathcal{A}$ un foncteur, $s = (s_T: B(T) \to S)_{T \in \mathcal{O}b(M)}$ une co-famille de flèches de

$\mathcal{A}$ et $p = (p_T : P \to B(T))_{T \in L(M)}$ un cône (commutatif) de base $B$ dans $\mathcal{A}$ .

On dit que $\Sigma_p = ((s_T : B(T) \to S)_{T \in Ob(M)}, \sigma_p)$ est une *M-structuration, de base* $B$ *, p-admissible, de la co-famille sous-jacente* $s$ si, et seulement si (voir le Groupe de Figures 9):

- $\sigma_p : M \to \mathcal{A}[P,S]$ est une flèche de $Mod(\mathbb{E})$ ,
- pour tout objet $T$ de $M$ (ou encore, pour tout élément $T$ de $M(S_1)$ , le diagramme (d'applications) ci-dessous commute:

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r, mapsto] & s_T . p_T \\
 & 1 = \{0\} \arrow[r] \arrow[dd] & Hom_{\mathcal{A}}(P,S) \\
0 \arrow[ddd, mapsto] & & \simeq \\
 & & Hom_{Mod(\mathbb{E})}(I, \mathcal{A}[P,S]) \\
 & & = \\
 & & Hom_{Mod(\mathbb{E})}(Y_{\mathbb{E}}(S_1), \mathcal{A}[P,S]) \\
 & & \simeq \\
 & M(S_1) \arrow[r, "\sigma_p(S_1)"] \arrow[d, "\simeq"', "u_M"] & \mathcal{A}[P,S](S_1) \arrow[d, "\simeq"', "u_{\mathcal{A}[P,S]}"] \\
T & Ob(M) \arrow[r, "Ob(\sigma_p)"'] & Ob(\mathcal{A}[P,S])
\end{tikzcd}
$$

Soit $(H : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ une configuration, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{M}$-catégorie, $M : \mathbb{E} \to Ens$ un modèle et $B : L(M) \to \mathcal{A}$ un foncteur.

Si $s = (s_T : B(T) \to S)_{T \in Ob(M)}$ est une co-famille de flèches de $\mathcal{A}$ , on dit que $\Sigma = (\Sigma_p)_{p \in Cone(B)}$ est une *M-structuration globale, de base* $B$ *, de la co-famille sous-jacente* $s$ si, et seulement si:

- naturellement en tout cône projectif $p$ de base $B$ , $\Sigma_p$ est une M-structuration, de base $B$ , p-admissible, de $s$ .

Alors, il est facile de voir que:

*Proposition* 8. *Si* $(H : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K : \mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ *est une configuration, si* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie, si* $M : \mathbb{E} \to Ens$ *est un modèle, si* $B : L(M) \to \mathcal{A}$ *est un foncteur admettant un cône limite* $\lim(B)$ *et si* $s = (s_T : B(T) \to S)_{T \in Ob(M)}$ *est une co-famille de flèches de* $\mathcal{A}$ *, alors les M-structurations globales, de base* $B$ *, de* $s$ *sont entièrement déterminées par les (seules)*

M-*structurations, de base* B , lim(B)-*admissibles, de* s *et réciproquement.*

Dans ces conditions, on note $\mathrm{Struct}_g(M,B)$ la catégorie des M-structurations globales, de base B (et de co-famille sous-jacente variable).
Alors, on dit qu'un objet initial (s'il existe) de $\mathrm{Struct}_g(M,B)$ est une *lax-co-limite* M-*structurée globale du foncteur* B .

Soit $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ une configuration, $\mathbb{A}$ une $\mathcal{M}$-catégorie et $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ un modèle.
Si E est un objet de $\mathbb{E}$ , si $x:Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ est une flèche de $\mathbf{M}$ (ou encore, si $x \in M(E)$ ), si $B:L(M) \to \mathbb{A}$ est un foncteur, si $p = (p_T:P \to B(T))_{T \in L(M)}$ est un cône de base B et si $s = (s_T:B(T) \to S)_{T \in Ob(M)}$ est une co-famille de flèches de $\mathbb{A}$ , on note:
- $B(E,x) = B.L(x) : L(Y_{\mathbb{E}}(E)) \to \mathbb{A}$ le foncteur *extrait* de B , *induit* par x ,
- $p(E,x) = (p_{L(x)(J)}:P \to B(L(x)(J)))_{J \in L(Y_E(E))}$ le cône (de base $B(E,x)$ ) *extrait* de p , *induit* par x ,
- $s(E,x) = (s_{Ob(x)(J)}:B(Ob(x)(J)) \to S)_{J \in Ob(Y_E(E))}$ la co-famille de flèches *extraite* de s , *induite* par x .
Si $B:L(M) \to \mathbb{A}$ est un foncteur, on dit que $q = (q(E,x))_{E \in \mathbb{E}, x \in M(E)}$ est une *famille naturelle de cônes, de base d'extraction* B si, et seulement si:
- naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}$ et en toute flèche $x:Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ (ou encore en tout élément $x \in M(E)$ ), $q(E,x) = ( q(E,x)_J:Q(E,x) \to B(L(x)(J)) )_{J \in Ob(Y_E(E))}$ est un cône projectif de base le foncteur extrait $B(E,x)$ .
Par exemple, si pour tout objet E de $\mathbb{E}$ et toute flèche $x:Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ le foncteur extrait $B(E,x)$ admet un cône limite $\lim(B,E,x)$ , alors $\mathrm{limp}(B) = (\lim(B,E,x))_{E \in \mathbb{E}, x \in M(E)}$ est une famille naturelle de cônes, de base d'extraction B , dite *limite ponctuelle du foncteur d'extraction* B .

Soit $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ une configuration, $\mathbb{A}$ une $\mathcal{M}$-catégorie, $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ un modèle, $B:L(M) \to \mathbb{A}$ un foncteur, $s = (s_T:B(T) \to S)_{T \in Ob(M)}$ une co-famille de flèches de $\mathbb{A}$ et $q = (q(E,x))_{E \in \mathbb{E}, x \in M(E)}$ une famille naturelle de cônes, de base d'extraction B .

On dit que $\Gamma = (s,\Upsilon_q) = (s,(\Upsilon_{q(E,x)})_{E\in\mathbb{E},x\in M(E)})$ est une M-*structuration ponctuelle*, *q-admissible*, de *base d'extraction* B , de la co-famille *d'extraction sous-jacente* s si, et seulement si (voir le Groupe de Figures 9):
- naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}$ et en toute flèche $x:Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ (i. e. en tout élément $x\in M(E)$ ), $\Gamma(E,x) = (s(E,x),\Upsilon_{q(E,x)})$ est une $Y_{\mathbb{E}}(E)$-structuration, q(E,x)-admissible, de base le foncteur extrait B(E,x) , de la co-famille extraite s(E,x) .

Soit $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E},K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat},S_1,\mathcal{M})$ une configuration, $\mathbb{A}$ une $\mathcal{M}$-catégorie, $M:\mathbb{E} \to$ Ens un modèle et $B:L(M) \to \mathbb{A}$ un foncteur.

Si $s = (s_T:B(T) \to S)_{T\in Ob(M)}$ est une co-famille de flèches de $\mathbb{A}$ , on dit que $\Omega = (\Omega(E,x))_{E\in\mathbb{E},x\in M(E)}$ est une M-*structuration ponctuelle, de base d'extraction* B , *de la co-famille d'extraction sous-jacente* s si, et seulement si:
- naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}$ et en toute flèche $x:Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ (i. e. en tout élément $x\in M(E)$ ), $\Omega(E,x) = (s(E,x),\omega(E,x))$ est une $Y_{\mathbb{E}}(E)$-structuration, de base le foncteur extrait B(E,x) , de la co-famille extraite s(E,x) .
Alors, il est facile de voir que:

*Proposition* 9. *Si* $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E},K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat},S_1,\mathcal{M})$ *est une configuration, si* $\mathbb{A}$ *est une* $\mathcal{M}$-*catégorie, si* $M:\mathbb{E} \to$ Ens *est un modèle, si* $B:L(M) \to \mathbb{A}$ *est un foncteur, si pour tout objet* E *de* $\mathbb{E}$ *et toute flèche* $x:Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ *, le foncteur extrait* $B(E,x):Y_{\mathbb{E}}(E) \to \mathbb{A}$ *admet un cône limite* lim(B,E,x) *et si* $(s_T:B(T) \to S)_{T\in Ob(M)}$ *est une co-famille de flèches de* $\mathbb{A}$ *, alors les* M-*structurations ponctuelles, de base d'extraction* B *, de co-famille d'extraction sous-jacente* s *, sont entièrement déterminées par les seules* M-*structurations ponctuelles,* limp(B)-*admissibles, de base d'extraction* B *, de co-famille d'extraction sous-jacente* s *et réciproquement.*

Dans ces conditions, on note $Struct_p(M,B)$ la catégorie des M-structurations ponctuelles, de base d'extraction B (et de co-famille d'extraction sous-jacente variable).
Alors, on dit qu'un objet initial (s'il existe) de $Struct_p(M,B)$ est une *lax-co-limite* M-*structurée ponctuelle du foncteur* B (voir la Note 12) .

Il est facile de prouver que:

*Proposition* 10. *Si* $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ *est une configuration, si* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie, si* $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ *est un modèle, si* $B:L(M) \to \mathcal{A}$ *est un foncteur, si*

$$\text{lax-co-lim}_g(M,B) = (s,\sigma)$$

*est une lax-co-limite* M*-structurée globale du foncteur* B *, de co-famille sous-jacente* $s = (s_T:B(T) \to S)_{T\in Ob(M)}$ *, et si*

$$\text{lax-co-lim}_p(M,B) = (s',(\omega(E,x))_{E\in\mathbb{E},x\in M(E)})$$

*est une lax-co-limite* M*-structurée ponctuelle de* B *, de co-famille d'extraction sous-jacente* $s' = (s'_T:B(T) \to S')_{T\in Ob(M)}$ *, alors il existe une unique flèche (de comparaison):*

$$\text{lax}_{gp}(M,B):S \to S'$$

*telle que:*

*- pour tout objet* T *de* M *, on a:*

$$\text{lax}_{gp}(M,B).s_T = s'_T \ ,$$

*- pour tout cône projectif* $p = (p_T:P \to B(T))_{T\in L(M)}$ *, de base* B *, tout objet* E *de* $\mathbb{E}$ *et toute flèche* $x:Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ *, on a:*

$$\mathcal{A}[P,\text{lax}_{gp}(M,B)].\sigma_P.x = \omega(E,x)_{p(E,x)} \ .$$

Soit $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ une configuration, $\mathcal{A}$ une $\mathcal{M}$-catégorie, $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ un modèle et $B:L(M) \to \mathcal{A}$ un foncteur. Il est facile de définir dualement (voir la Note 13) ce qu'est une *lax-limite* M*-structurée globale* (resp. *ponctuelle*) du foncteur B et d'énoncer les propositions duales des propositions 8, 9 et 10 qui précèdent: nous laissons ce soin au lecteur.

Supposons, par exemple, que la pré-configuration soit définie par:

- $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{cat}$ ,
- $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{cat}$ est la structure de catégorie cartésienne fermée sur $\mathrm{Cat} \simeq \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{cat})$ ,
- $\mathbb{E}' = \mathbb{E}_{cat}$ ,
- $H = K = id(\mathbb{E}_{cat})$ .

Trivialement, elle est totale et connexe: c'est donc une configuration.

Les $\mathcal{M}_{cat}$-catégories sont les 2-catégories.

Si $M:\mathbb{E}_{cat} \to \mathrm{Ens}$ est un modèle, il s'identifie à une petite catégorie ("usuelle") $\mathbb{T}$ .

Si $\mathcal{A}$ est une 2-catégorie et si $B : L(M) = \mathbf{T} \to \mathcal{A}$ est un foncteur, il est facile de vérifier que la lax-co-limite (resp. la lax-limite) M-structurée ponctuelle de $B$, au sens précédent, est exactement ... la lax-co-limite (resp. la lax-limite) usuelle de $B$. Réciproquement, on voit aussi que les lax-co-limites (resp. les lax-limites) usuelles sont de telles lax-co-limites (resp. lax-limites) structurées ponctuelles.
Par contre, la flèche canonique, donnée par la proposition 10 (resp. sa duale), allant de la lax-co-limite M-structurée globale de $B$ vers la lax-co-limite M-structurée ponctuelle de $B$ n'est pas, en général, inversible (voir la Note 12). Pour s'en convaincre, il suffit de supposer que:
- $\mathcal{A} = \mathrm{Cat}$,
- $\mathbf{T}$ (donc $M$) est (représenté par) la catégorie:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[dr, "{(1,0)}"'] & & 2 \arrow[dl, "{(2,0)}"] \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

(alors, $L(M) = \mathbf{T}$)
- $B(1) = \{1\}$ (catégorie discrète à un objet $1$),
- $B(2) = \{2\}$ (catégorie discrète à un objet $2$),
- $B(0) = \{1,2\}$ (catégorie discrète à deux objets $1$ et $2$)
- $B(1,0)$ et $B(2,0)$ sont les foncteurs injections canoniques.

Alors, la lax-co-limite M-structurée globale de $B$ est représentée par:

$$\begin{array}{ccc} (1,1)\bullet & \qquad & \bullet(1,0) \\ \\ (2,2)\bullet & & \bullet(2,0) \end{array}$$

tandis que la lax-co-limite M-structurée ponctuelle de $B$ est (la lax-co-limite usuelle) représentée par:

$$\begin{tikzcd} (1,1) & (1,0) \arrow[l, "{(1,1,0)}"'] \\ (2,2) & (2,0) \arrow[l, "{(2,2,0)}"] \end{tikzcd}$$

Supposons, maintenant, que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{grphcmp}$ soit la structure de catégorie cartésienne fermée sur la catégorie Grphcmp des petits graphes compositifs. Considérons aussi la pré-configuration telle que:
- $\mathbb{E} = \mathbb{E}' = \mathbb{E}_{grphcmp}$ est l'esquisse des graphes compositifs,
- $H:\mathbb{E}_{grphcmp} \to \mathbb{E}_{grphcmp}$ est l'homomorphisme identité et $K:\mathbb{E}_{grphcmp} \to \mathbb{E}_{cat}$ est l'homomorphisme injection canonique (ainsi, Mod(H):Grphcmp → Grphcmp est le foncteur identité et Mod(K):Cat → Grphcmp est le foncteur "graphe compositif sous-jacent").

Elle est évidemment totale et connexe; c'est donc une configuration.
Supposons maintenant que $\mathbb{A} = (\tau,\tau')$-Esq (dont on sait qu'elle est $\mathcal{M}_{grphcmp}$-enrichie).
Alors, il est facile de vérifier (voir la Note 14) que la lax-co-limite ponctuelle, structurée par $M:\mathbb{E}_{grphcmp} \to$ Ens (qui s'identifie donc à un petit graphe compositif $\mathbb{T}$) d'un foncteur $B:L(M) = L(\mathbb{T}) \to (\tau,\tau')$-Esq (où $L(\mathbb{T})$ est la catégorie librement engendrée par $\mathbb{T}$) est ... la lax-co-limite *universelle* de B, au sens de (S.M.A.S.).
Réciproquement, on voit aussi que les lax-co-limites universelles, au sens de (S.M.A.S.), sont de telles lax-co-limites ponctuelles structurées.

Supposons que $\mathcal{M} = \mathcal{M}_{(\tau,\tau')-esq}$ soit la structure monoïdale symétrique fermée sur $(\tau,\tau')$-Esq associée au produit tensoriel usuel $\otimes$. Considérons, alors, la pré-configuration telle que:
- $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$ est l'esquisse de $(\tau,\tau')$-esquisse,
- $\mathbb{E}' = \mathbb{E}_{grphcmp}$,
- $H:\mathbb{E}_{grphcmp} \to \mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$ et $K:\mathbb{E}_{grphcmp} \to \mathbb{E}_{cat}$ sont les deux homomorphismes injections canoniques (ainsi, Mod(H):$(\tau,\tau')$-Esq → Grphcmp est le foncteur "support" et Mod(K):Cat → Grphcmp est le foncteur "graphe orienté sous-jacent").

On montre sans difficulté qu'elle est bien totale et connexe: c'est donc une configuration.
Alors, il est facile de vérifier (voir la Note 14) que la lax-co-limite ponctuelle, structurée par $M:\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq} \to$ Ens (qui s'identifie donc à une $(\tau,\tau')$-esquisse $\mathbb{T}$) d'un foncteur $B:L(M) = L(\mathbb{T}) \to (\tau,\tau')$-Esq (où $L(\mathbb{T})$ est la catégorie librement engendrée par le support de $\mathbb{T}$) est ... la lax-co-limite *admissible* de B, au sens de (S.M.A.S.).

Réciproquement, on voit aussi que les lax-co-limites admissibles, au sens de (S.M.A.S.), sont de telles lax-co-limites ponctuelles structurées (voir la Note 15).

[Note 11. Dans ce §6, l'hypothèse qu'on dispose d'une pré-configuration *totale*, n'est pas formellement indispensable (elle correspond, cependant, à la pratique). Par contre, au §7, elle est essentielle.

La notion de pré-configuration connexe peut être généralisée (moyennant quelques développements formels que nous avons renoncé - pour faire plus court - à inclure ici). Ainsi, on peut dire qu'une pré-configuration est *localement connexe* si, et seulement si:

- à tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ est associée une famille (de "composantes connexes") $(Z(E)_z)_{z \in \pi_0(E)}$ d'objets de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ telle que:
  + $Y_{\mathbb{E}}(E) = \Sigma_{z \in \pi_0(E)} Z(E)_z$ ,
  + $(L(Z(E)_z))_{z \in \pi_0(E)}$ est la famille des composantes connexes de $L(Y_{\mathbb{E}}(E))$ .

Dans ce cas, on adapte facilement:

- la notion de famille naturelle de cônes de ce §6 en considérant des familles naturelles

$$q = (q(E,x,z))_{E \in \mathbb{E},\, x \in M(E),\, z \in \pi_0(E)}$$

de cônes dont les bases sont les foncteurs extraits

$$B(E,x,z) = B.L(x).L(v_z) : L(Z(E)_z) \to \mathbb{A}$$

(où $v_z : Z(E)_z \to Y_{\mathbb{E}}(E)$ est la co-projection relative à $z$ ),

- les structurations ponctuelles q-admissibles, puis les structurations ponctuelles et les lax-co-limites ponctuelles.

Cette généralisation correspond, par exemple, au cas d'esquisses au sens de (S.M.A.S.) où les diagrammes admissibles ne sont pas nécessairement connexes (voir la Note 14).

On peut même envisager des généralisations où l'on énoncerait seulement une certaine "compatibilité" entre des présentations - en termes de limites inductives d'une certaine forme (et pas nécessairement de sommes), de "sous"-objets d'un certain genre (et pas nécessairement connexes) - des objets $Y_{\mathbb{E}}(E)$ et des catégories $L(Y_{\mathbb{E}}(E))$ .

Dans ce §6, et même dans l'essentiel du §7, l'hypothèse qu'on dispose d'une pré-configuration *connexe* ou, plus généralement, *localement connexe*, n'est pas formellement indispensable (elle correspond, cependant à la pratique). Par contre, elle est essentielle pour pouvoir obtenir les corollaires 4 et 5 du §7.]

[Note 12. Dans la pratique (voir les exemples) ce sont les lax-co-limites (resp. les lax-limites) ponctuelles (et non globales) structurées qui sont habituellement utilisées. Aussi, les lax-co-limites (resp. les lax-limites) globales structurées, introduites ici, peuvent être considérées comme un stade "technique" (que nous avons donc cru bon de ne pas occulter) préparatoire à l'introduction (plus délicate, formellement) des lax-co-limites (resp. des lax-limites) ponctuelles structurées: ceci apparaitra encore plus clairement au §7, i. e. lorsqu'il s'agira de calculer ces lax-co-limites (resp. ces lax-limites). Néanmoins, les lax-co-limites (resp. les lax-limites) globales structurées ne sont pas sans intérêt ...]

[Note 13. Nous laissons au lecteur le soin de définir les lax-co-limites "contravariantes" globales (resp. ponctuelles) structurées et les lax-limites "contravariantes" globales (resp. ponctuelles) structurées. Ceci suppose que l'on sache naturellement associer (au moins d'une façon) à tout modèle $M:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$, un (autre) modèle $M^{dual}:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ réputé "dual" de $M$. Le lecteur sera tout à fait convaincu de la possibilité d'en parler syntaxiquement (i. e. uniquement en termes d'esquisses) après avoir consulté (D.S.A.E.).]

[Note 14. Pour être tout à fait précis, il faudrait montrer que la catégorie SK, des esquisses au sens de (S.M.A.S.), est bien équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse projective (au sens utilisé ici) $\mathbb{E}_{sk}$ (qu'il n'est pas difficile de construire) de sorte que:

$$(H:\mathbb{E}_{grpho} \to \mathbb{E}_{sk}, K:\mathbb{E}_{grpho} \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$$

est une pré-configuration (si $H$ et $K$ sont les homomorphismes injections canoniques et $\mathcal{M}$ est la structure monoïdale, symétrique fermée, usuelle sur $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_{sk}) \simeq \mathrm{SK}$.

Il est alors facile de vérifier que cette pré-configuration est totale. Enfin, il est facile de vérifier que:

- cette pré-configuration est connexe si les seuls diagrammes admissibles sont toujours connexes (ce que l'on peut supposer, pour simplifier, et qui n'est pas une bien grande limitation, du moins lorsque les modèles sont destinés à transformer les diagrammes admissibles en diagrammes commutatifs!),
- dans le cas contraire, cette pré-configuration est cependant localement connexe (et l'on peut alors se placer dans le cadre un peu plus général signalé à la note 11).

Ceci précisé, on constatera que les vérifications, de routine, que nous laissons au lecteur révèlent tout le rôle joué (y compris en (S.M.A.S.), mais de manière assez occulte) par le modèle canonique:

$$Y_{\mathbb{E}}:\mathbb{E} \to (\tau,\tau')\text{-Esq}^{op}$$

(où $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$ .]

[Note 15. Nous laissons au lecteur le soin, tout en conservant la catégorie sous-jacente $(\tau,\tau')$-Esq , de changer la structure monoïdale symétrique fermée: par exemple de prendre celle correspondant au produit tensoriel $\otimes_{pr}$ (voir la Note 3, §1). Il constatera, alors, que nombre de "constructions d'esquisses" figurant en (D.S.D.M.) s'interprètent comme des lax-co-limites ponctuelles structurées, pour cet enrichissement "inusuel".
Nous lui laissons, enfin, le soin d'étudier tant les lax-limites ponctuelles structurées que les lax-co-limites et les lax-limites globales structurées dans ces différents autres cas.]

## 7. CALCUL DES LAX-CO-LIMITES STRUCTUREES DANS LES CATEGORIES A ENRICHISSEMENT ALGEBRIQUE CO-REPRESENTABLES.

Prouvons que (voir la Note 16 et le groupe de Figures 10):

*Théorème* 1. *Si* $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ *est une configuration, si* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie co-représentable (voir la Note 17) et si sa catégorie sous-jacente* $\mathcal{A}$ *est complète et co-complète, alors* $\mathcal{A}$ *possède les lax-co-limites globales structurées, i. e. est "globalement lax-co-complète".*

*Preuve.* Soit $M:\mathbb{E} \to \text{Ens}$ un modèle et $B:\mathit{L}(M) \to \mathcal{A}$ un foncteur.
On dispose de la catégorie d'hypermorphismes $HP(M)$ ainsi que du foncteur projection canonique:

$$hp(M):HP(M) \to Supp(\mathbb{E})$$

et du foncteur inclusion canonique (où l'ensemble $M(S_1)$ est identifié à une catégorie discrète):

$$j:M(S_1) \to HP(M) \ .$$

On dispose également du foncteur (entre duales de catégories discrètes !):

$$u_M^{op}:M(S_1)^{op} \to \mathit{Ob}(M)^{op} \ ,$$

et, par conséquent, on peut construire la lax-limite inductive (dans Cat !):

$$\begin{tikzcd} & J(M) & \\ M(S_1)^{op} \arrow[ur, "m"] \arrow[rr, "u_M^{op}"'] & \Rightarrow_{\alpha} & Ob(M)^{op} \arrow[ul, "b"'] \end{tikzcd}$$

Nous pouvons donc construire, maintenant, la somme fibrée (dans Cat ):

$$\begin{tikzcd} & SF(M) & \\ HP(M)^{op} \arrow[ur, "h"] & & J(M) \arrow[ul, "i"'] \\ & M(S_1)^{op} \arrow[ul, "j^{op}"] \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $\mathcal{A}$ est complète, le foncteur $B$ possède un cône limite:

$$\lim(B) = (\lim(B)_T : \mathrm{Lim}(B) \to B(T))_{T \in L(M)} .$$

Alors, on dispose des deux foncteurs canoniques:

$$\mathrm{cst}(\mathrm{Lim}(B)) : M(S_1)^{op} \to \mathcal{A}$$
constant sur Lim(B)

et

$$\omega b(M) : Ob(M)^{op} \simeq Ob(M) \hookrightarrow L(M) \xrightarrow[B]{} \mathcal{A}$$

ainsi que de la transformation naturelle définie par $\lim(B)$ :

$$\lambda\mathrm{im}(B) : \mathrm{cst}(\mathrm{Lim}(B)) \Rightarrow \omega b(M).u_M^{op} : M(S_1)^{op} \to \mathcal{A} .$$

On en déduit donc un unique foncteur:

$$k : J(M) \to \mathcal{A}$$

tel que:

- $k.\alpha = \lambda\mathrm{im}(B)$ .

En particulier, il vient:

- pour tout $x \in M(S_1)$ , on a $k(x) = \mathrm{Lim}(B)$ .

Comme $\mathbb{A}$ est co-représentable, on dispose d'un foncteur de co-représentation:

$$C:\mathbb{A} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E},\mathbb{A}^{op})^{op} ,$$

et donc du co-modèle particulier $C(\mathrm{Lim}(B))(-):\mathbb{E} \to \mathbb{A}^{op}$ , donc du foncteur:

$$r:HP(M)^{op} \xrightarrow[hp(M)^{op}]{} \mathrm{supp}(\mathbb{E})^{op} \xrightarrow[C(\mathrm{Lim}(B))^{op}]{} \mathbb{A}$$

tel que:

- pour tout $x \in M(S_1)$ , on a $r(S_1,x) = \mathrm{Lim}(B)$ .

Des constructions précédentes on déduit un unique foncteur:

$$\psi:SF(M) \to \mathbb{A}$$

tel que:

- $\psi.h = r$ et $\psi.i = k$ .

Comme $\mathbb{A}$ est co-complète, $\psi$ admet un co-cône co-limite:

$$\text{co-lim}(\psi) = (\text{co-lim}(\psi)_y:\psi(y) \to \text{Co-Lim}(\psi))_{y \in SF(M)}$$

Posons:

- $S = \text{Co-Lim}(\psi)$ ,
- pour tout $T \in \mathit{Ob}(M)$ , $s_T = \text{co-lim}(\psi)_{\psi(i(b(T)))}$ : $B(T) \to S$ .

Naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ , on dispose de l'application:

$$\begin{aligned} \sigma'_{\lim(B)}(E):M(E) &\longrightarrow \mathrm{Hom}(C(\mathrm{Lim}(B))(E),S) \\ x &\longmapsto \text{co-lim}(\psi)_{\psi(h(E,x))} \end{aligned}$$

et par conséquent de l'application:

$$\sigma_{\lim(B)}(E):M(E) \xrightarrow[\sigma'_{\lim(B)}(E)]{} \mathrm{Hom}(C(\mathrm{Lim}(B))(E),S) \simeq \mathbb{A}[\mathrm{Lim}(B),S](E) .$$

Il en résulte une flèche $\sigma_{\lim(B)}:M \to \mathbb{A}[\mathrm{Lim}(B),S]$ de $\mathbb{M} = \mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ .

Il est facile de vérifier que $\Sigma_{\lim(B)} = (s,\sigma_{\lim(B)})$ est une M-structuration, lim(B)-admissible, de base $B$ , de la co-famille $s$ . Il lui correspond donc (en vertu de la proposition 9, §6) une M-structuration $\Sigma$ , de base $B$ , de $s$ ; il est alors facile de vérifier qu'il s'agit bien d'une lax-co-limite M-structurée globale de $B$ . *Fin de la preuve.*

De même, prouvons que (voir la Note 16 et le Groupe de Figures 10):

*Théorème* 2. *Si* $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E},K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat},S_1,\mathbb{M})$ *est une configuration, si* $\mathbb{A}$ *est une* $\mathbb{M}$*-catégorie co-représentable (voir la Note 17) et si sa catégorie sous-jacente* $\mathbb{A}$ *est complète et co-complète, alors* $\mathbb{A}$ *possède les lax-co-limites* *ponctuelles structurées, i. e. est "ponctuellement lax-co-complète".*

*Preuve.* Les hypothèses permettent d'appliquer le théorème 1 qui précède. Par conséquent, naturellement en tout objet $E$ de $\mathbb{E}$ et en toute flèche $x: Y_{\mathbb{E}}(E) \to M$ (i. e. en tout élément de $M(E)$ ), le foncteur extrait $B(E,x)$ admet une lax-co-limite globale $\text{Lax-Co-Lim}_g(B(E,x))$ . Alors, il est facile de vérifier que la co-limite (usuelle et qui existe par hypothèse) $\text{Co-Lim}((\text{Lax-Co-Lim}_g(B(E,x))_{E \in \mathbb{E}, x \in M(E)})$ "est" la lax-co-limite M-structurée ponctuelle recherchée (voir la Note 18). *Fin de la preuve.*

On déduit du théorème 2 que (voir la Note 17):

*Corollaire 4. Si* $(H: \mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K: \mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ *est une configuration, si* $\mathcal{A}$ *est une* $\mathcal{M}$*-catégorie co-représentable,* $\mathcal{M}$*-complète et* $\mathcal{M}$*-co-complète (et donc, en particulier,* $\mathcal{M}$*-tensorisée - en vertu de la proposition 5, §4), si* $M: \mathbb{E} \to \text{Ens}$ *est un modèle et si* $A$ *est un objet de* $\mathcal{A}$ *, alors* $M \odot A$ *est la lax-co-limite* M*-structurée ponctuelle du foncteur:*

$$B_{M,A}: L(M) \to \mathcal{A}$$

*constant sur* $A$ *.*
*En particulier, si* $M, M': \mathbb{E} \to \text{Ens}$ *sont deux modèles, alors* $M \otimes M'$ *est la lax-co-limite* M*-structurée ponctuelle (dans la* $\mathcal{M}$*-catégorie co-représentable,* $\mathcal{M}$*-complète et* $\mathcal{M}$*-co-complète* $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ *) du foncteur:*

$$B_{M,M'}: L(M) \to \mathcal{M} = \text{Mod}(\mathbb{E})$$

*constant sur* $M'$ *.*

*Preuve.* Le théorème 2 s'applique, puisque $\mathcal{A}$ est co-représentable et la catégorie $\mathcal{A}$ est (au moins) complète et co-complète. Si $C$ est un foncteur de co-représentation, le mode de calcul des lax-co-limites structurées ponctuelles, fourni par la preuve du théorème 2 (et la preuve du théorème 1), montre qu'on a:

$$\begin{aligned}
\text{Lax-Co-Lim}_p\, B_{M,A} &= \text{Co-Lim}_{E \in \mathbb{E}, x \in M(E)}\, C(A)(E) && \text{la pré-configuration étant connexe} \\
&= \text{Co-Lim}_{E \in \mathbb{E}, x \in M(E)}\, Y_{\mathbb{E}}(E) \odot A && \text{par définition du foncteur de co-représentation et du tenseur}
\end{aligned}$$

$\simeq (\text{Co-Lim}_{E\in\mathbb{E},\, x\in M(E)}\, Y_{\mathbb{E}}(E)) \odot A$

puisque $\mathcal{A}$ est $\mathcal{M}$-tensorisée et qu'alors $\odot$ bi-commute aux co-limites

$= M \odot A$

puisque $Y_{\mathbb{E}}{}^{op}$ est dense.

En particulier, il est facile de voir que la $\mathcal{M}$-catégorie $\mathcal{M}$ est $\mathcal{M}$-complète et $\mathcal{M}$-co-complète (puisque la catégorie sous-jacente $\mathbf{M}$ = Mod($\mathbb{E}$) est - d'après le théorème de complétude projective - complète et co-complète). De plus, elle est co-représentable puisque l'on obtient bien (voir le §1) un foncteur de co-représentation C en posant, naturellement en tout objet E de $\mathbb{E}$ et en tout objet $M':\mathbb{E} \to$ Ens :

$$C(M')(E) = Y_{\mathbb{E}}(E) \otimes M' \ .$$

La première partie de l'énoncé s'applique donc. La deuxième s'en déduit puisque, pour tous modèles $M,M':\mathbb{E} \to$ Ens , on voit facilement que $M \odot M' = M \otimes M'$ . *Fin de la preuve.*

En particulier, on a aussi:

*Corollaire* 5. *Si* $(H:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}, K:\mathbb{E}' \to \mathbb{E}_{cat}, S_1, \mathcal{M})$ *est une configuration, si (l'unité du produit tensoriel de* $\mathcal{M}$ *)* $I = Y_{\mathbb{E}}(S_1)$ *est objet final dans la catégorie* $\mathbf{M}$ *, alors, naturellement en tout modèle* $M:\mathbb{E} \to$ Ens *et en tout foncteur* $B:L(M) \to \mathbf{M}$ *, on dispose d'une flèche canonique de "fibration" (dans la* $\mathcal{M}$*-catégorie, ponctuellement lax-co-complète,* $\mathcal{A} = \mathcal{M}$ *):*

$$\text{fib}(M,B):(\text{Lax-Co-Lim}_p\ B\ ) \to M\ .$$

*Preuve*. On dispose, évidemment, d'une unique transformation naturelle canonique $n:B \Rightarrow B_{M,I}$ , puisque $B_{M,I}$ est constant sur I et I est final.
D'où une flèche:

$$\text{Lax-Co-Lim}_p(B) \to \text{Lax-Co-Lim}_p(B_{M,I})\ .$$

Mais on a (d'après le corollaire 4):

$$\text{Lax-Co-Lim}_p(B_{M,I}) = M \otimes I \simeq M\ .$$

*Fin de la preuve.*

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer les duaux des théorèmes 1 et 2, permettant de calculer les lax-limites globales et ponctuelles structurées à l'aide de limites et co-limites.

Nous lui laissons, aussi, le soin d'énoncer le corollaire dual du corollaire 4, exprimant la fermeture dans $\mathcal{M}$ comme une lax-limite ponctuelle structurée particulière.

Le théorème 2 (resp. son dual), appliqué à la structure cartésienne fermée $\mathcal{M}_{\mathrm{Cat}}$ de Cat re-donne le théorème classique de calcul des lax-co-limites (resp. des lax-limites) dans une 2-catégorie co-représentable (resp. représentable) complète et co-complète (voir la Note 18).
De même, les corollaires 4 et 5 s'appliquent immédiatement :
- si $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}'$ sont deux petites catégories, alors la petite catégorie $\mathbb{C}\times\mathbb{C}'$ est bien la lax-co-limite ponctuelle structurée (i. e. usuelle) du foncteur $B_{\mathbb{C},\mathbb{C}'}:\mathbb{C} \to \mathrm{Cat}$, constant sur $\mathbb{C}'$,
- si $\mathbb{C}$ est une petite catégorie et si $B:\mathbb{C} \to \mathrm{Cat}$ est un foncteur, alors la fibration Fib(B), associée à B, est bien la lax-co-limite ponctuelle structurée (i. e. usuelle) de B et l'on dispose effectivement du foncteur (canonique) "fibrant":

$$\mathrm{fib}(\mathbb{C},B):\mathrm{Fib}(B) \to \mathbb{C} .$$

Le théorème 2 (resp. son dual), appliqué à la structure cartésienne fermée $\mathcal{M}_{\mathrm{grphcmp}}$ de Grphcmp donne un mode de calcul des lax-co-limites (resp. des lax-limites) dans une $\mathcal{M}_{\mathrm{grphcmp}}$-catégorie co-représentable (resp. représentable), complète et co-complète, évidemment très proche du cas des 2-catégories.
Les corollaires 4 et 5 s'appliquent, également, immédiatement. En particulier, notons que, si $\mathbb{G}$ est un petit graphe compositif, si $B:\mathbb{G} \to \mathrm{Ens}$ est un foncteur et si $j:\mathrm{Ens} \to \mathrm{Grphcmp}$ est le foncteur injection canonique (identifiant tout ensemble à un graphe compositif discret), alors le graphe compositif des hypermorphismes HP(B) du foncteur B est la lax-co-limite ponctuelle du foncteur $j.B:\mathbb{G} \to \mathrm{Grphcmp}$ et l'on a:

$$\mathrm{hp}(B) = \mathrm{fib}(\mathbb{G},j.B) : \mathrm{Hp}(B) \to \mathbb{G} ,$$

Le théorème 2, appliqué à la structure monoïdale, symétrique et fermée $\mathcal{M}_{(\tau,\tau')\text{-Esq}}$ sur la catégorie $(\tau,\tau')$-Esq, associée au produit tensoriel usuel $\otimes$, montre que les lax-co-limites ponctuelles structurées dans $(\tau,\tau')$-Esq, i. e. les lax-co-limites admissibles de (S.M.A.S.), se calculent à l'aide de limites et co-limites usuelles (voir la Note 19) et ce d'une manière également assez proche du cas des 2-catégories (ce que la pratique suggérait fortement, a priori).

Le corollaire 4 s'applique immédiatement. Par contre, le corollaire 5 ne s'applique pas, puisque l'esquisse $\mathbb{1} = I$ n'est pas (malgré la notation) objet final dans $(\tau,\tau')$-Esq .

[Note 16. On peut considérer le théorème 1 comme préparant au théorème 2: la brève preuve du théorème 2 faisant essentiellement appel aux conclusions du théorème 1.
Bien entendu, on aurait pu se dispenser de même énoncer et démontrer ce théorème 1: dans la preuve du théorème 2, la lax-co-limite ponctuelle structurée recherchée est présentée comme co-limite (usuelle) de lax-co-limites globales structurées qui sont (d'après le théorème 1) autant d'autres co-limites (usuelles). Ainsi, la lax-co-limite ponctuelle structurée recherchée est une certaine co-limite (usuelle) de co-limites (usuelles)! On peut donc aussi la présenter (en une seule fois) comme une (seule) co-limite totale (éliminant ainsi le recours à des lax-co-limites globales structurées intermédiaires): nous laissons ce soin au lecteur.]

[Note 17. Comme on le voit facilement en regardant les preuves des théorèmes 1 et 2, il n'est pas indispensable de supposer (comme nous l'avons fait, par simple souci d'homogénéïté dans la présentation, notamment avec le §5) que $\mathcal{A}$ est co-représentable: l'hypothèse que $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{M}$-catégorie seulement *faiblement* co-représentable (voir les Notes 7 et 8, §4) suffit, bien entendu.
De même, dans le corollaire 5, il suffirait de supposer que $\mathcal{A}$ est faiblement co-représentable, complète et co-complète pour pouvoir affirmer qu'un tenseur *faible* $M\oslash_f A$ est toujours une lax-co-limite ponctuelle structurée.]

[Note 18. La preuve du théorème 2 est une re-transcription de la preuve classique du théorème de calcul des lax-co-limites dans une 2-catégorie co-représentable, complète et co-complète. C'est d'ailleurs l'évidence de cette possibilité de re-transcription dans un cadre plus général qui est à l'origine de la définition même des lax-co-limites (globales ou) ponctuelles structurées.]

[Note 19. Si la catégorie des $(\tau,\tau')$-esquisses est, avec pertinence, considérée en (S.M.A.S.) comme permettant des constructions qui expriment la logique des types algébriques (quoique le qualificatif "algébrique" puisse être critiqué), il nous semble bon de préciser davantage.

Les lax-co-limites admissibles de (S.M.A.S.) sont considérées comme modélisant convenablement la notion de "types dépendants". Or ce sont des lax-co-limites ponctuelles structurées dans une $\mathcal{M}_{\langle\tau,\tau'\rangle\text{-esq}}$-catégorie, co-représéntable, complète et co-complète: ce sont donc des co-limites (de limites) *particulières*. Il ne nous semble donc pas plus particulier (dans un premier temps) de dire que ce sont *seulement* les limites et co-limites (usuelles) quelconques qui "construisent" des types dépendants ... de ceux dont ils sont limites et/ou co-limites, puis d'ajouter que c'est très précisément la *forme* des indexations retenues pour ces limites et/ou co-limites qui précise le "genre de dépendance".
Ainsi, par exemple, les lax-co-limites ponctuelles structurées, i. e. les lax-co-limites admissibles de (S.M.A.S.), sont des co-limites (usuelles) dont l'indexation est d'une forme bien particulière (précisée par les preuves des théorèmes 1 et 2 et compte tenu de la Note 16). Autrement dit, leur intérêt ne vient pas du fait qu'elles seraient de nouveaux (par rapport aux co-limites) constructeurs de types, mais au contraire qu'elles permettent de décrire rapidement et systématiquement, certaines formes particulières de constructeurs existant antérieurement.
Par contre, la déclaration (que SCRATCHPAD, par exemple, permet) du type "A-module" (dépendant d'un modèle variable $A:\mathbb{E}_{ann} \to \mathrm{Ens}$ de l'esquisse $\mathbb{E}_{ann}$ d'anneau unitaire et commutatif) n'est pas naturellement représentée, dans $(\tau,\tau')$-Esq (avec des $\tau$ et $\tau'$ convenables), par une lax-co-limite ponctuelle structurée mais bien, directement et naturellement, par une co-limite (usuelle) dont la forme de l'indexation est complètement conditionnée par $A$. Ainsi (plus généralement), supposons que:
- $\mathbb{E}$ est une $(\tau,\tau')$-esquisse fixée,
- $F:\mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \to ((\tau,\tau')\text{-Esq})^{op}$ est un foncteur fixé.

Alors, à tout modèle $A:\mathbb{E} \to \mathrm{Ens}$ on peut associer:
- son graphe compositif d'hypermorphismes $HP(A)$,
- le foncteur de projection $hp(A):HP(A) \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E})$,
- la co-limite (usuelle) $\mathbb{E}_A$ du foncteur

$$HP(A)^{op} \xrightarrow[hp(A)^{op}]{} \mathrm{Supp}(\mathbb{E})^{op} \xrightarrow[F^{op}]{} (\tau,\tau')\text{-Esq}$$

dont il est facile de vérifier qu'elle est "l'esquisse des opérations (dont la nature est précisée par $F$) du modèle $A$

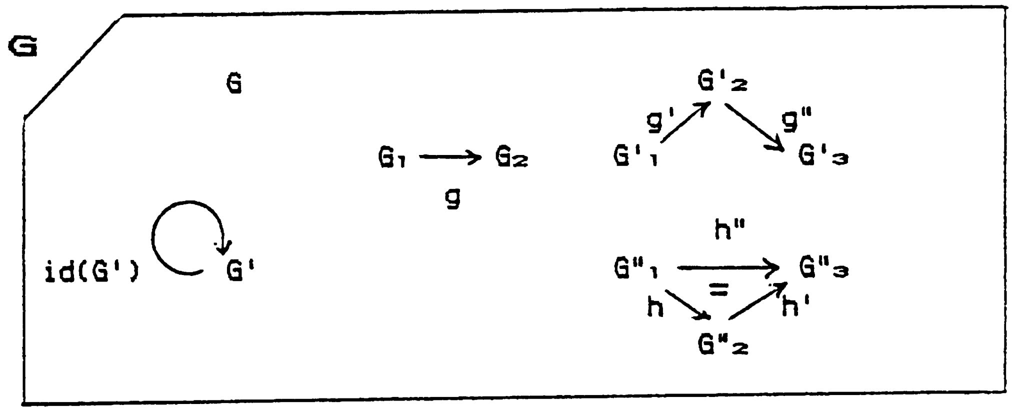
sur "des structures de certains types" (dont la nature est également précisée par $F$ ).
On construit donc un type $\mathbb{E}_A$ "dépendant" d'un autre type $\mathbb{E}$ et "paramétré" par ses modèles (nous laissons au lecteur le soin de préciser $F:\mathrm{Supp}(\mathbb{E}_{ann}) \to ((\tau,\tau')\text{-Esq})^{op}$ pour retrouver le cas des modules).

Dans un deuxième temps, il convient évidemment de dire que des solutions de problèmes universels et/ou co-universels *quelconques* construisent des types dépendants (d'un certain genre). De tels nouveaux constructeurs (qui, en général, ne se réduisent ni à des co-limites et/ou limites ni, a fortiori, à des lax-co-limites et/ou lax-limites) peuvent être modélisés à l'aide des structures de "sémantique catégorique d'un système de trames (d'un certain genre)" (voir, par exemple, (S.C.S.T.) et (S.C.D.T.)).]

# ATLAS DES FIGURES

# GROUPE DE FIGURES 1.

FIGURE 1.1. (Représentation d'un graphe compositif $\mathbb{G}$ .)



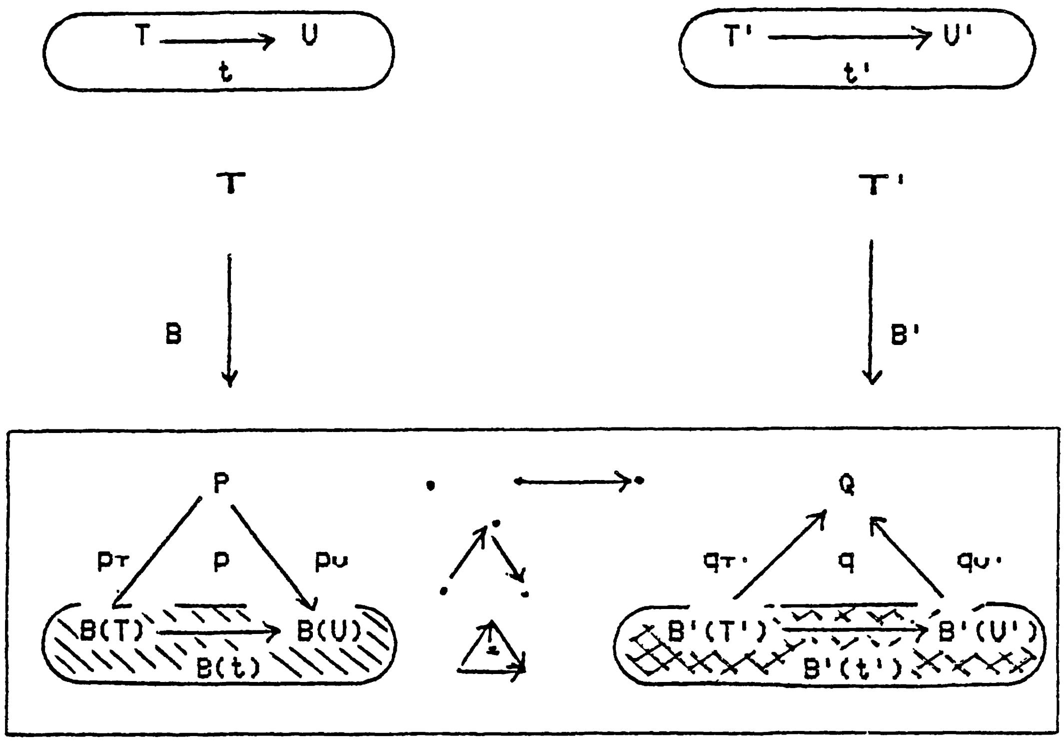

graphe orienté sous-jacent

$h'.h = h''$

table des composés (non triviaux)

[Légende:
- $G$ est un objet de $\mathbb{G}$ ,
- $id(G')$ est la flèche identité en l'objet $G'$ de $\mathbb{G}$ (mais le plus souvent, de telles flèches identités ne seront pas représentées),
- $(g'',g')$ est un coupe de flèches consécutives mais non composables dans $\mathbb{G}$ ,
- $(h',h)$ est un couple de flèches consécutives et composables (de composé $h''$ ) dans $\mathbb{G}$ ,
- on regroupe les composés des couples de flèches composables dans une *table* qui suit la représentation graphique du graphe orienté sous-jacent au graphe compositif considéré.]

FIGURE 1.2. (Représentation d'une esquisse $\mathbb{E}$ .)

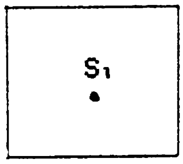



support de $\mathbb{E}$

[Légende:
- $\mathbb{T}$ est un graphe compositif, dont t est une flèche "générale",
- $\mathbb{T}'$ est un graphe compositif, dont t' est une flèche "générale"
- p est un cône distingué, de sommet P , de base B , d'indexation $\mathbb{T}$ (qui, le plus souvent, ne sera même pas représentée),
- q est un co-cône distingué, de sommet Q , de base B' d'indexation $\mathbb{T}'$ (qui, le plus souvent, ne sera même pas représentée).]

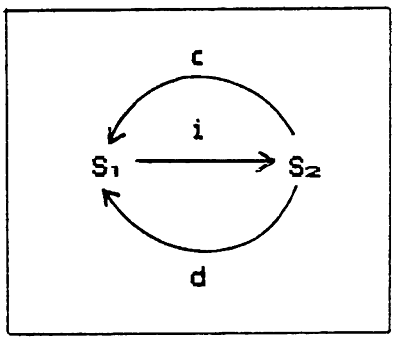
# GROUPE DE FIGURES 2.

FIGURE 2.1. (Esquisse $E_{ens}$ des ensembles.)




[Légende:
- le graphe compositif sous-jacent est discret,
- il n'y a ni cône, ni co-cône, distingué.]

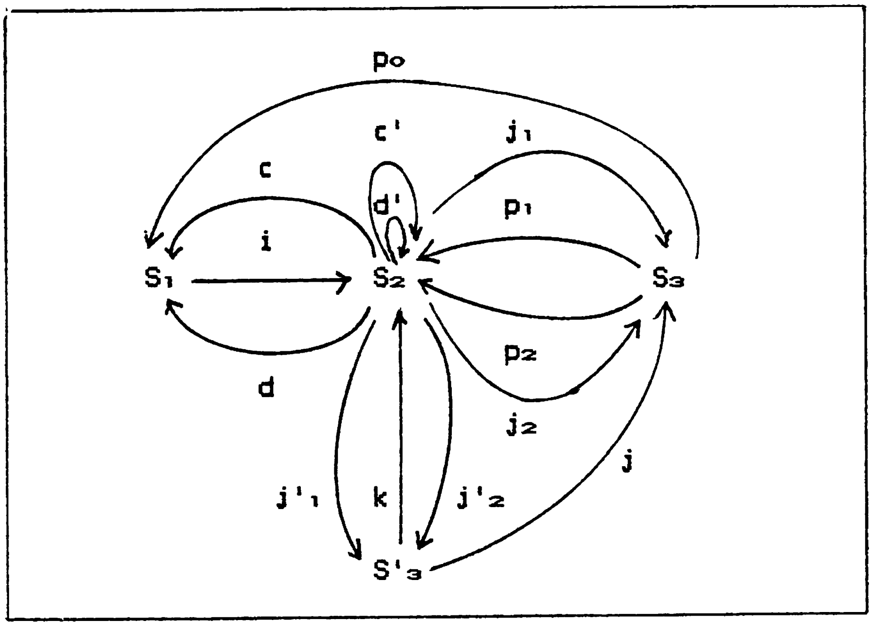
FIGURE 2.2. (Esquisse $E_{grph}$ des graphes orientés.)



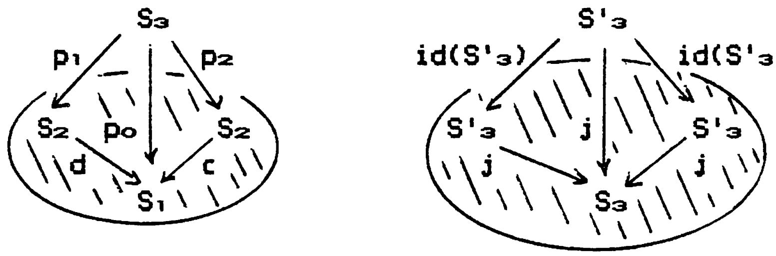

$$c.i = id(S_1) = d.i$$

[Légende:
- $S_1$ est l'*objet des objets*,
- $S_2$ est l'*objet des flèches*,
- d est l'*opération domaine*,
- c est l'*opération co-domaine*,
- i est l'*opération sélection des identités*,
- il n'y a ni cône, ni co-cône, distingué.]

FIGURE 2.3. (Esquisse $\mathbf{E}_{grphcmp}$ des graphes compositifs.)

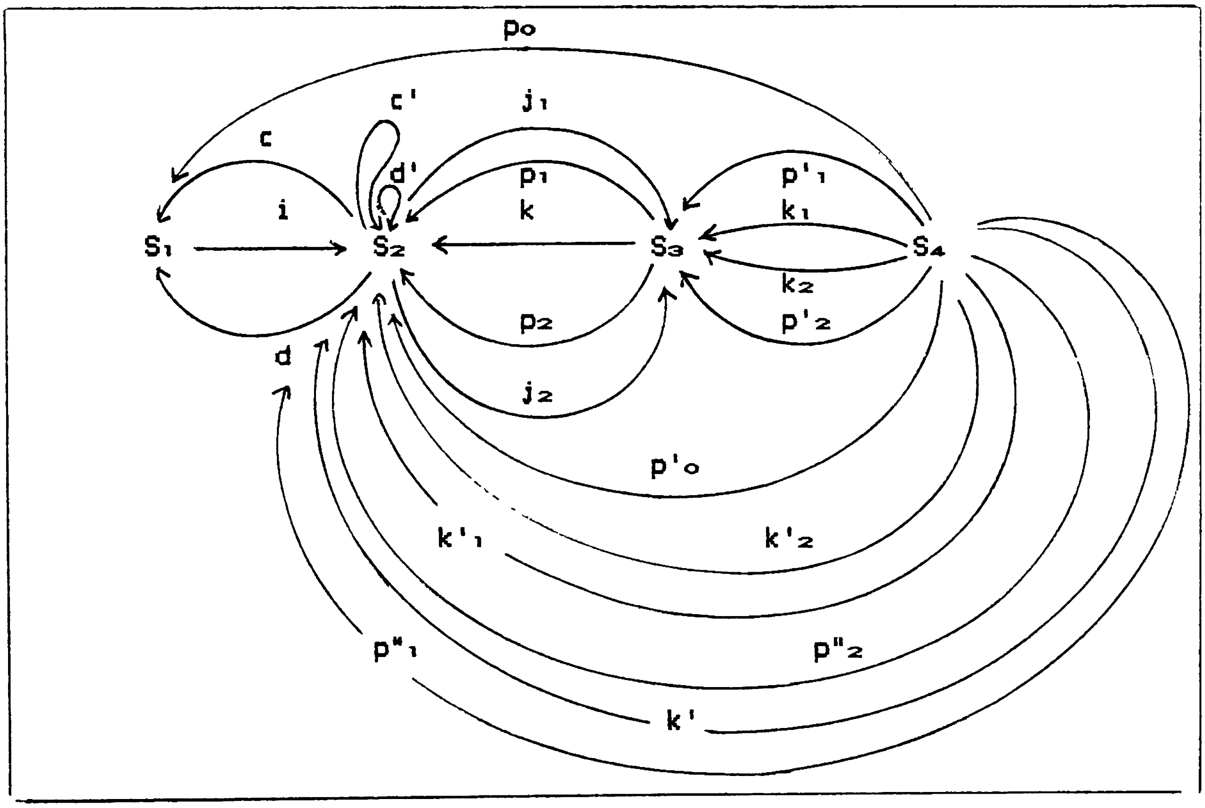



$$c.i = id(S_1) = d.i$$
$$i.d = d' \quad i.c = c'$$
$$d.p_1 = p_0 = c.p_2$$
$$j.j'_1 = j_1 \quad j.j'_2 = j_2$$
$$p_1.j_1 = id(S_2) \quad p_2.j_1 = d'$$
$$p_1.j_2 = c' \quad p_2.j_2 = id(S_2)$$
$$k.j_1 = id(S_2) = k.j_2$$

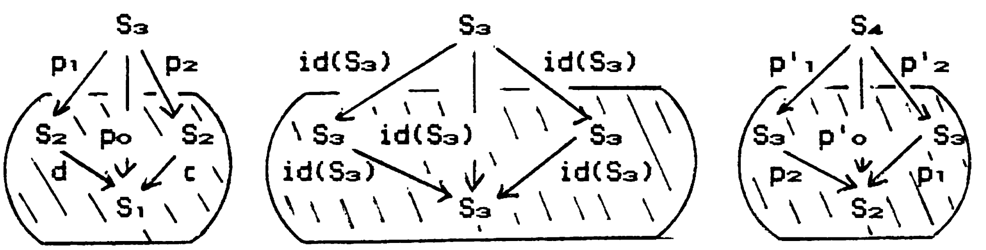



[Légende;
- $S_3$ est l'*objet des couples de flèches consécutives*,
- $S'_3$ est l'*objet des couples de flèches consécutives qui sont, de plus, composables*,
- k est l'*opération composition* (des couples de flèches composables),
- la dernière égalité exprime la neutralité des identités.]

FIGURE 2,4. (Esquisse $\mathbb{E}_{cat}$ des catégories.)

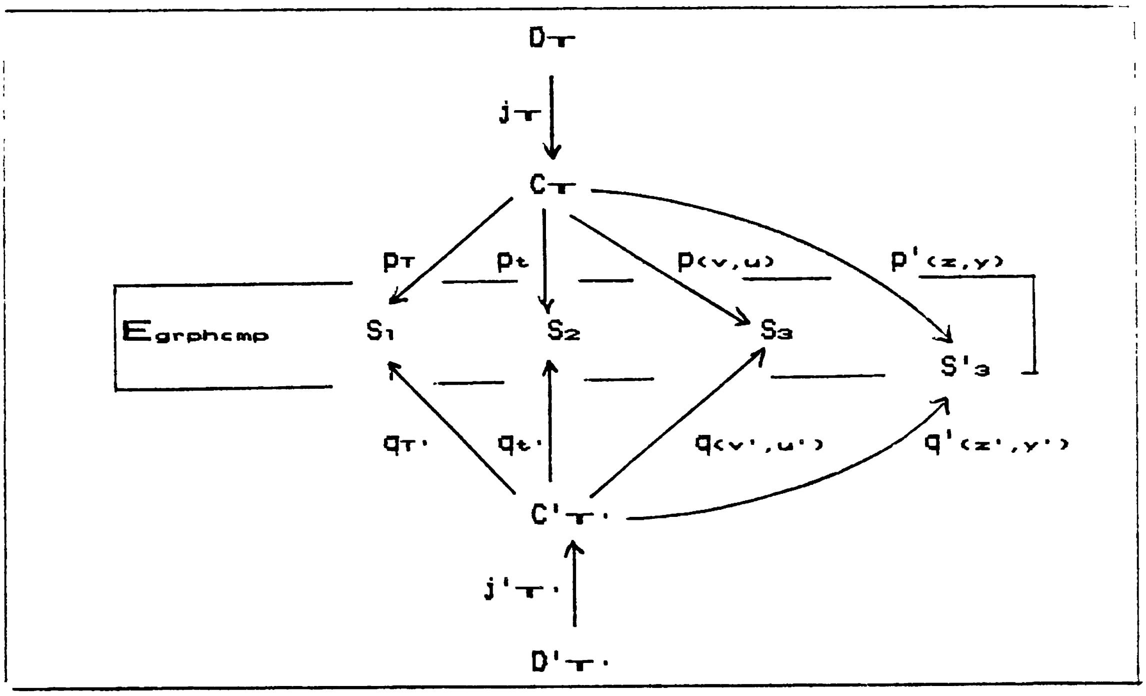



$$c.i = id(S_1) = d.i$$
$$i.d = d' \quad i.c = c'$$
$$d.p_1 = p_0 = c.p_2$$
$$p_1.j_1 = id(S_2) \quad p_2.j_1 = d'$$
$$p_1.j_2 = c' \quad p_2.j_2 = id(S_2)$$
$$k.j_1 = id(S_2) = k.j_2$$
$$p_1.k_1 = k'_1 = k.p'_1 \quad p_2.k_1 = p''_2 = p_2.p'_2$$
$$p_1.k_2 = p''_1 = p_1.p'_1 \quad p_2.k_2 = k'_2 = k.p'_2$$
$$k.k_1 = k' = k.k_2$$

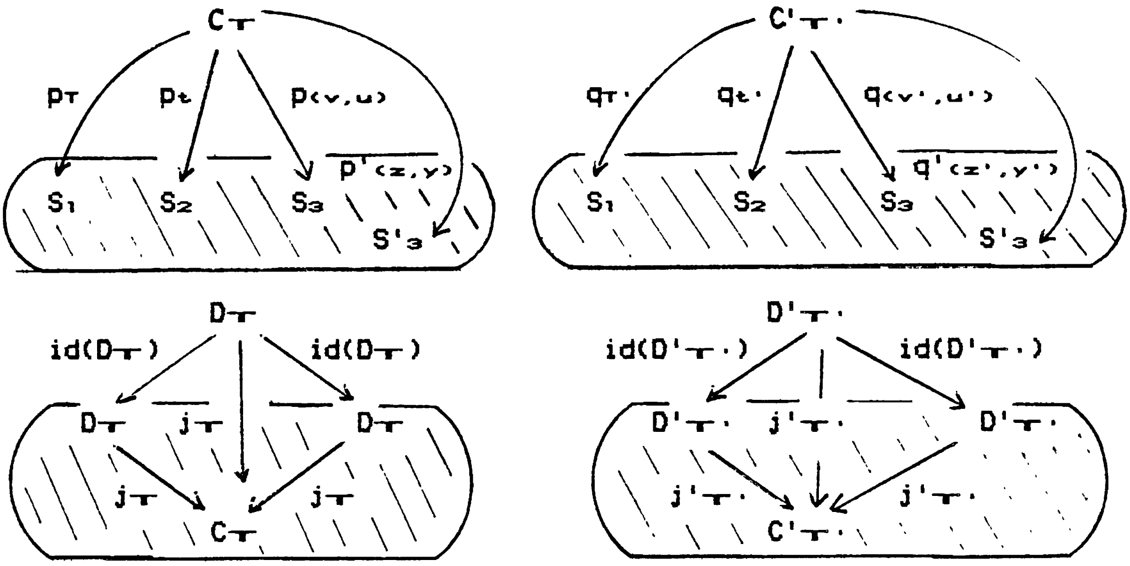



[Légende;
- la dernière égalité exprime l'associativité de la composition.]

FIGURE 2.5. (Esquisse $\mathbb{E}_{(\tau,\tau')-esq}$ des $(\tau,\tau')$-esquisses.)




$$i.p_T = p_{id(T)} \quad c.p_t = p_{codom(t)} \quad d.p_t = p_{dom(t)}$$
$$p_1.p_{(v,u)} = p_v \quad p_2.p_{(v,u)} = p_u$$
$$j.p'_{(z,y)} = p_{(z,y)} \quad k.p'_{(z,y)} = p_{z.y}$$
$$i.q_{T'} = q_{id(T')} \quad c.q_{t'} = q_{codom(t')} \quad d.q_{t'} = q_{dom(t')}$$
$$p_1.q_{(v',u')} = q_{v'} \quad p_2.q_{(v',u')} = q_{u'}$$
$$j.q'_{(z',y')} = q_{(z',y')} \quad k.q'_{(z',y')} = q_{z'.y'}$$



[Légende:
- $\mathbf{T}$ (resp. $\mathbf{T}'$ ) est un graphe compositif variable appartenant à $\tau$ (resp. $\tau'$ ),
- on désigne par $\mathbf{T}^-$ (resp. $\mathbf{T}'^+$ ) le graphe compositif obtenu en adjoignant à $\mathbf{T}$ un élément initial (resp. final), si bien que $\mathbf{T}^-$ (resp. $\mathbf{T}'^+$ ) est le "cône type" (resp. le "co-cône" type) d'indexation $\mathbf{T}$ (resp. $\mathbf{T}'$ ),
- T (resp. T' ) est un objet variable de $\mathbf{T}^-$ (resp. de $\mathbf{T}'^+$ ),
- t (resp. t' ) est une flèche variable de $\mathbf{T}^-$ (resp. de $\mathbf{T}'^+$ ),
- (v,u) (resp. (v',u') ) est un couple variable de flèches consécutives de $\mathbf{T}^-$ (resp. de $\mathbf{T}'^+$ ),
- (y,z) (resp. (y',z') ) est un couple variable de flèches consécutives et composables de $\mathbf{T}^-$ (resp. de $\mathbf{T}'^+$ ),
- $\mathbf{T}^-$ (resp. $\mathbf{T}'^+$ ) s'identifie à un modèle de l'esquisse de graphe compositif (encore noté):

$$\mathbf{T}^-: \mathbb{E}_{grphcmp} \to \mathrm{Ens}$$

(resp.

$$\mathbf{T}'^+: \mathbb{E}_{grphcmp} \to \mathrm{Ens} \text{ )},$$

et, par conséquent, il lui est associé un graphe compositif d'hypermorphismes HP($\mathbf{T}^-$) (resp. HP($\mathbf{T}'^+$) ),
- le premier (resp. le deuxième) cône distingué est précisément d'indexation HP($\mathbf{T}^-$) (resp. HP($\mathbf{T}'^+$) ) et de base le foncteur:

$$\mathrm{HP}(\mathbf{T}^-) \xrightarrow[\mathrm{hp}(\mathbf{T}^-)]{} \mathrm{Supp}(\mathbb{E}_{grphcmp}) \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E}_{<\tau,\tau'>-esq})$$

(resp.

$$\mathrm{HP}(\mathbf{T}'^+) \xrightarrow[\mathrm{hp}(\mathbf{T}'^+)]{} \mathrm{Supp}(\mathbb{E}_{grphcmp}) \to \mathrm{Supp}(\mathbb{E}_{<\tau,\tau'>-esq}) \text{ )},$$

- $C_{\mathbf{T}}$ (resp. $C'_{\mathbf{T}'}$ ) est l'*objet de tous les cônes* (resp. *de tous les co-cônes*) *d'indexation* $\mathbf{T}$ (resp. $\mathbf{T}'$ ),
- $D_{\mathbf{T}}$ (resp. $D'_{\mathbf{T}'}$ ) est l'*objet des* - seuls - *cônes* (resp. *des* - seuls - *co-cônes*) *distingués d'indexation* $\mathbf{T}$ (resp. $\mathbf{T}'$ ).]

## GROUPE DE FIGURES 3.

FIGURE 3.1. (Produit tensoriel de deux esquisses.)

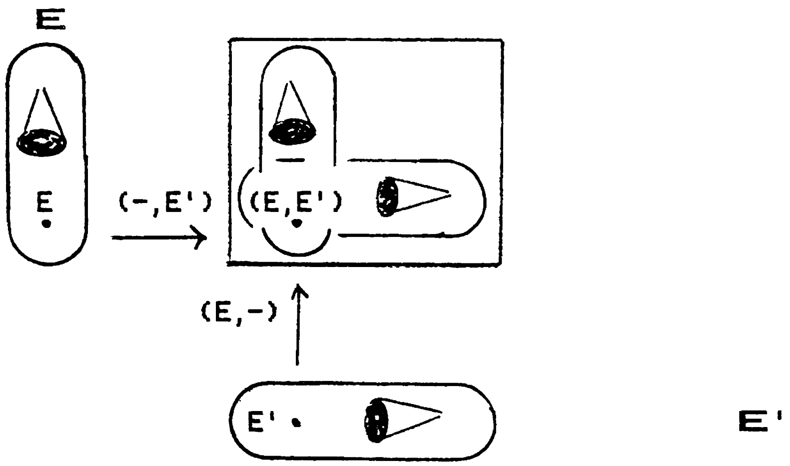



FIGURE 3.2. (Graphe compositif d'hypermorphismes.)

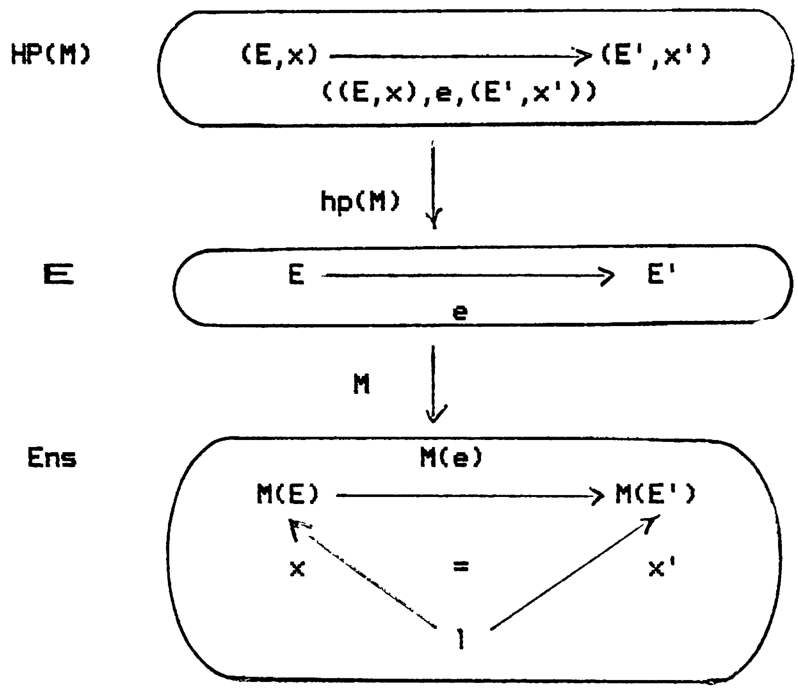


FIGURE 3.3. (L'esquisse $M|\mathbb{E}$ .)

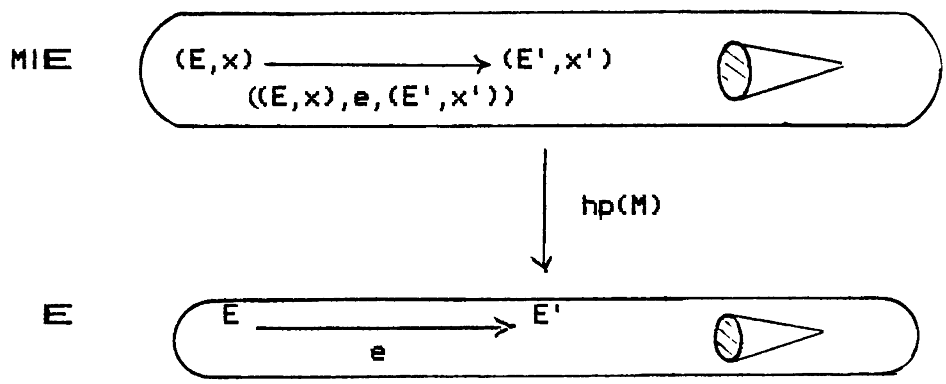
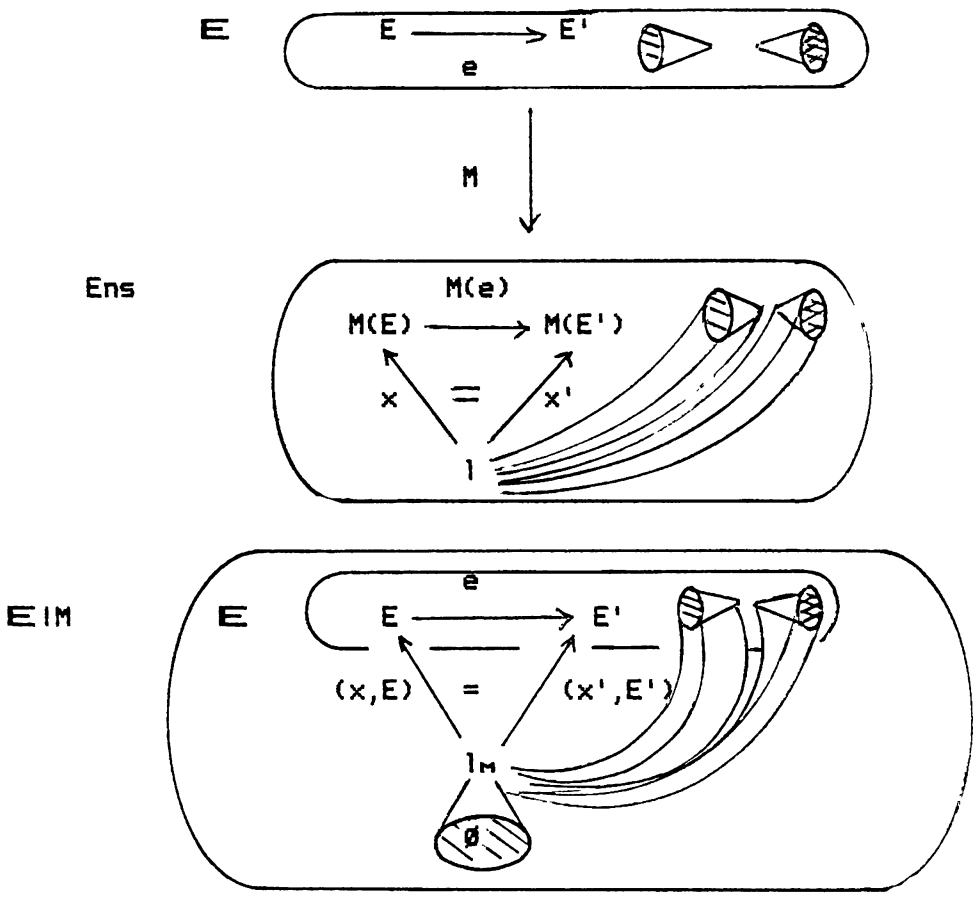



FIGURE 3.4. (L'esquisse $\mathbb{E}|M$ .)



GROUPE DE FIGURES 4.

FIGURE 4.1. (Le modèle évaluation.)

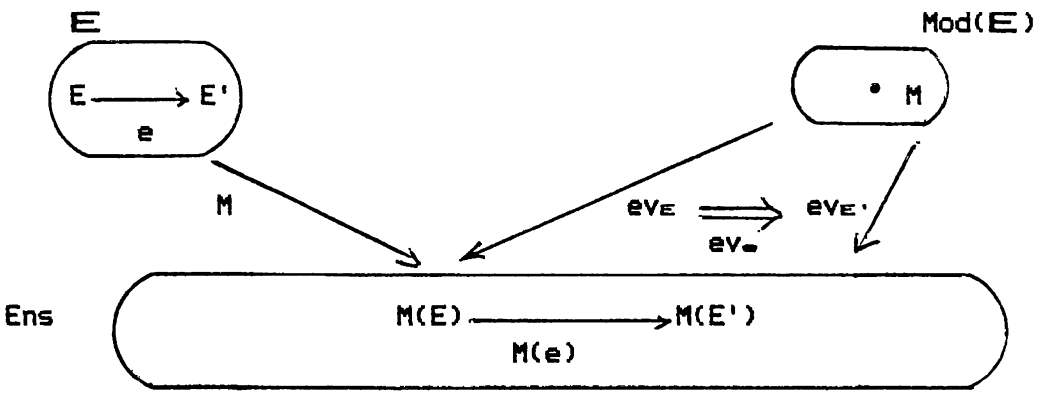
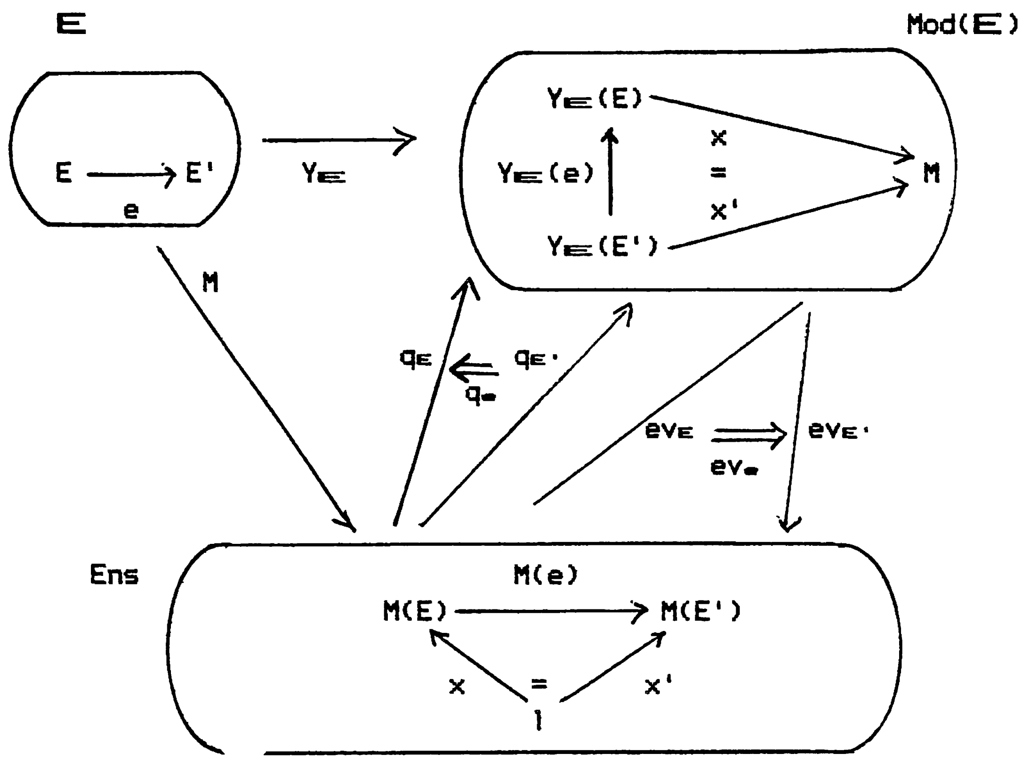
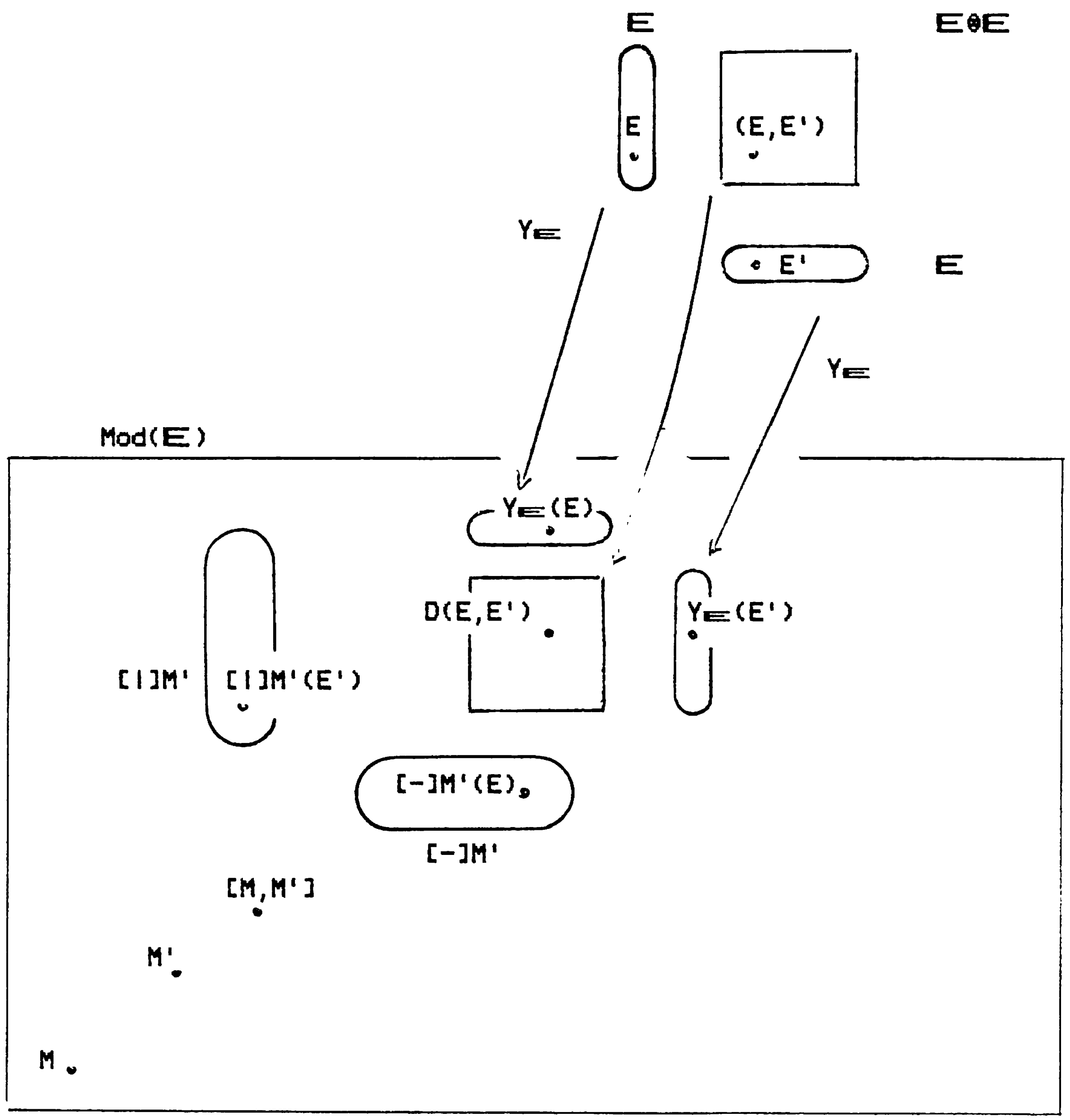



FIGURE 4.2. (Complétude projective.)



# GROUPE DE FIGURES 5.

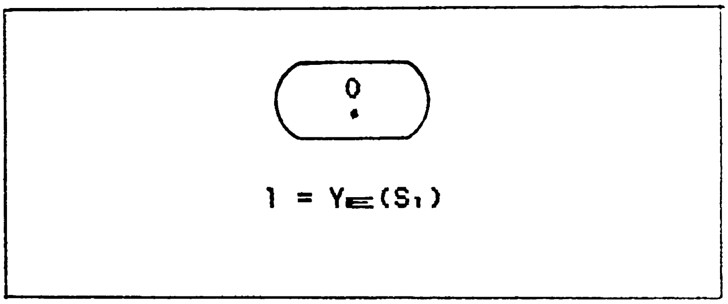
FIGURE 5.1. (Structure multiplicative bi-fermée des catégories essentiellement algébriques.)



## GROUPE DE FIGURES 6.

FIGURE 6.1. (Le modèle canonique de Yoneda pour $\mathbb{E}_{ens}$ .)

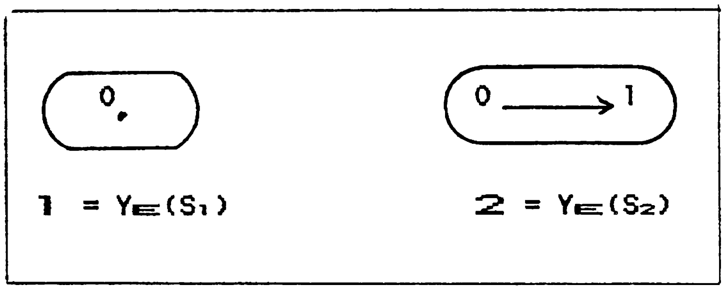
Ens




[Légende:
- on a posé $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{ens}$ .]

FIGURE 6.2. (Le modèle canonique de Yoneda pour $\mathbb{E}_{grpho}$ .)

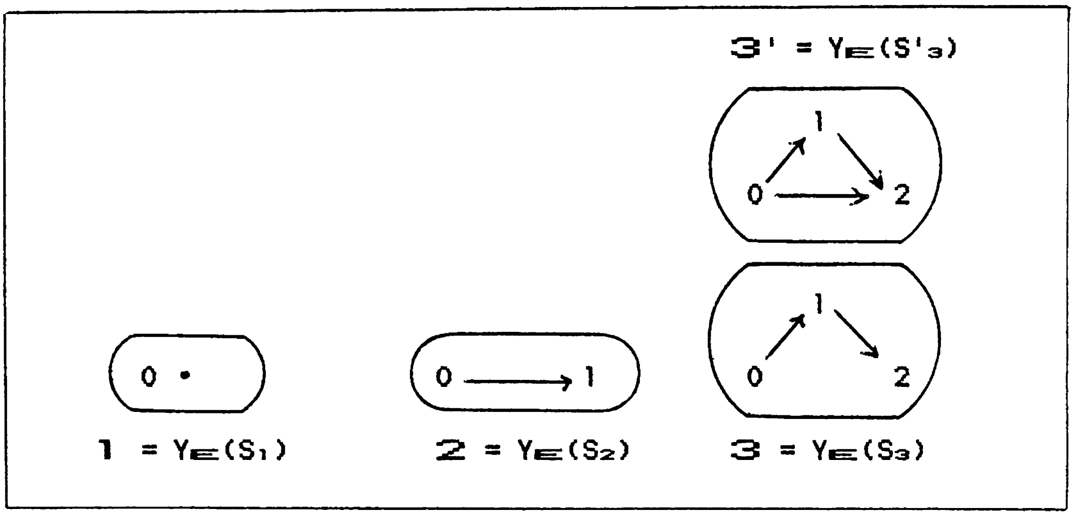
Grpho




[Légende:
- on a posé $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{grpho}$ ,
- on n'a représenté que les valeurs sur les objets, les valeurs sur les flèches s'interprétant graphiquement, alors, facilement.]

FIGURE 6.3. (Le modèle canonique de Yoneda pour $\mathbb{E}_{grphcmp}$ .]

Grphcmp

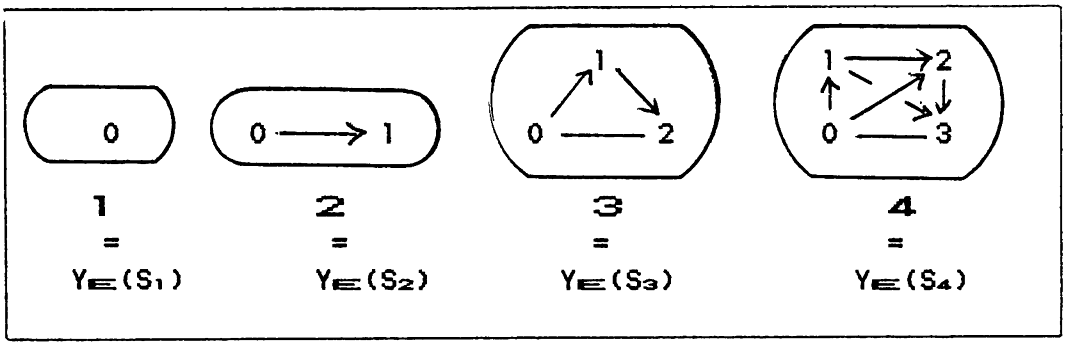



[Légende:

- on a posé $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{grphcmp}$ ,
- on n'a représenté (presque) que les valeurs sur les objets, les valeurs sur les flèches s'interprétant graphiquement, alors, facilement.]

FIGURE 6.4. (Le modèle canonique de Yoneda pour $\mathbb{E}_{cat}$ .)

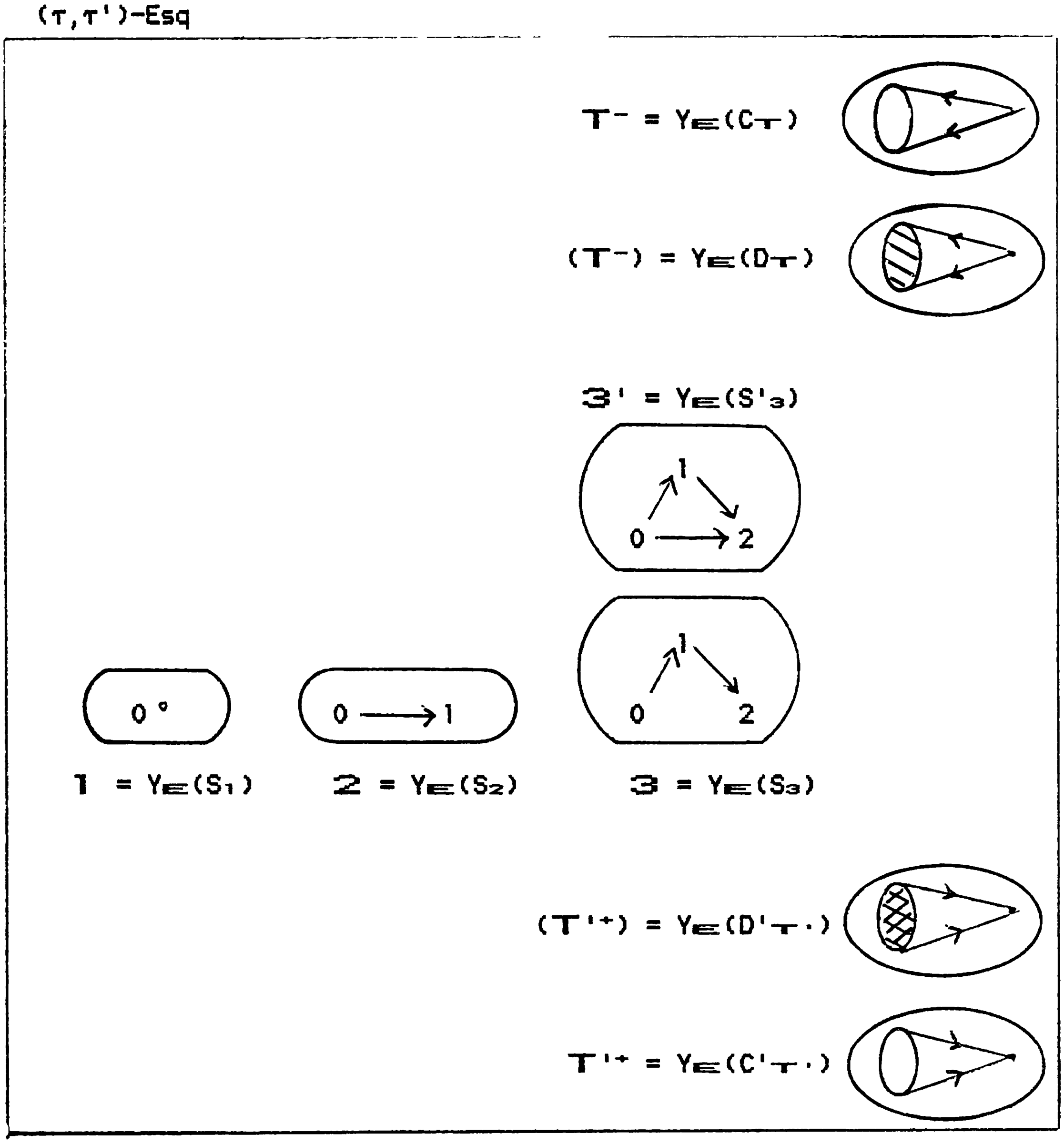
Cat




[Légende:

- on a posé $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{cat}$ ,
- on n'a représenté que les valeurs sur les objets, les valeurs sur les flèches s'interprétant graphiquement, alors, facilement.]

FIGURE 6,5, (Le modèle canonique de Yoneda pour $\mathbb{E}_{(\tau,\tau')\text{-esq}}$ ,)




[Légende;
- on a posé $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{grpho}$ ,
- on n'a représenté (presque) que les valeurs sur les objets, les valeurs sur les flèches s'interprétant graphiquement, alors, facilement,
- $\mathbb{T}$ varie dans $\tau$ ,
- $\mathbb{T}'$ varie dans $\tau'$.]

GROUPE DE FIGURES 7.

FIGURE 7.1. (Co-représentabilité.)

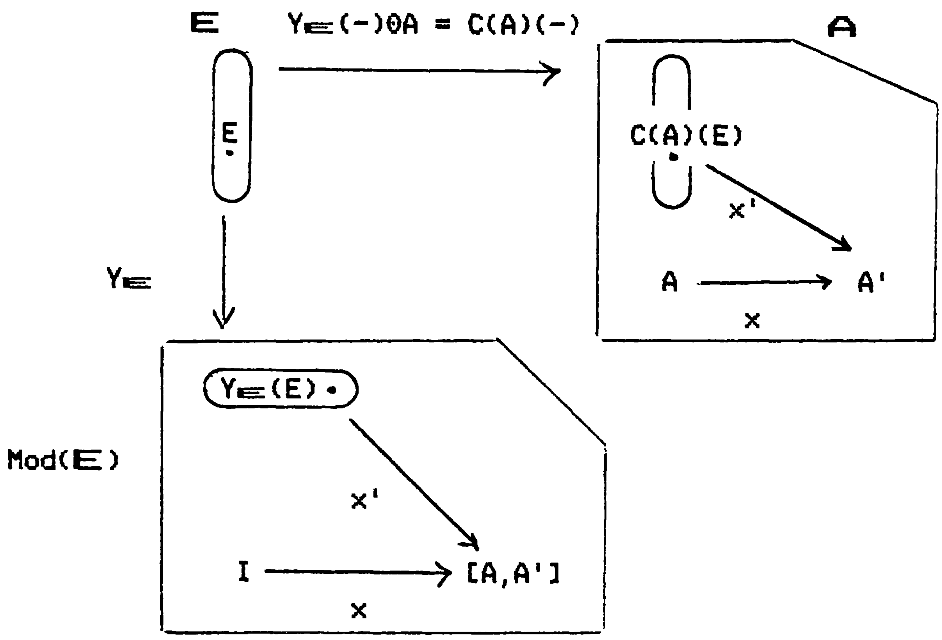
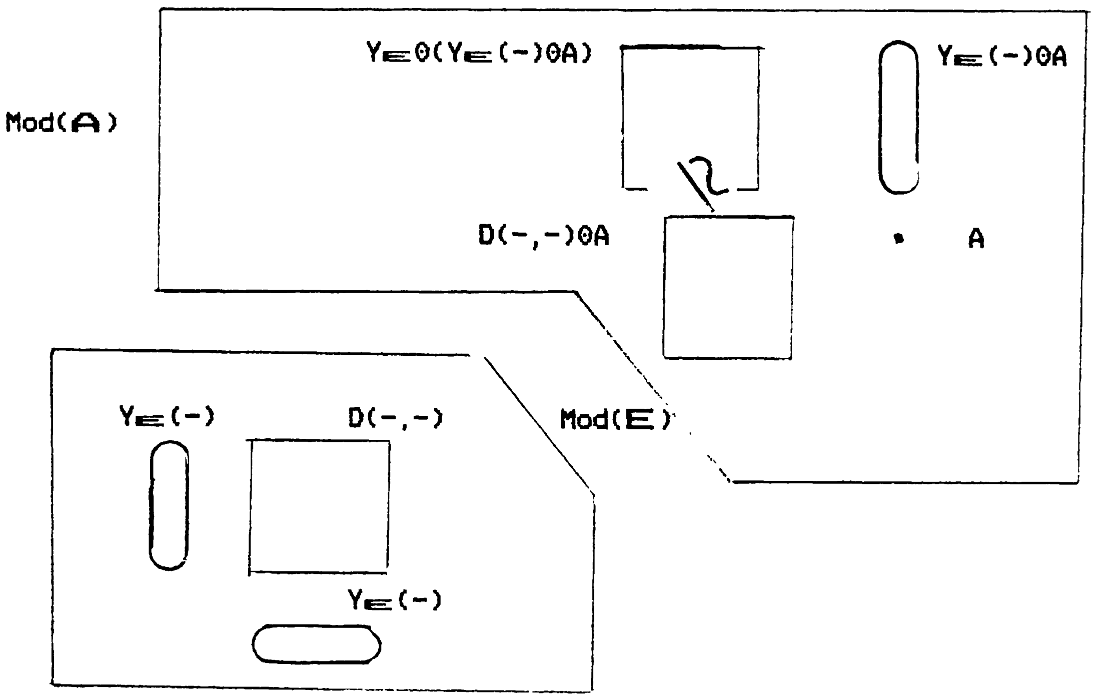



FIGURE 7.2. (Caractérisation de la co-représentabilité.)



GROUPE DE FIGURES 8.

FIGURE 8.1. (Co-représentabilité des catégories essentiellement algébriques.)

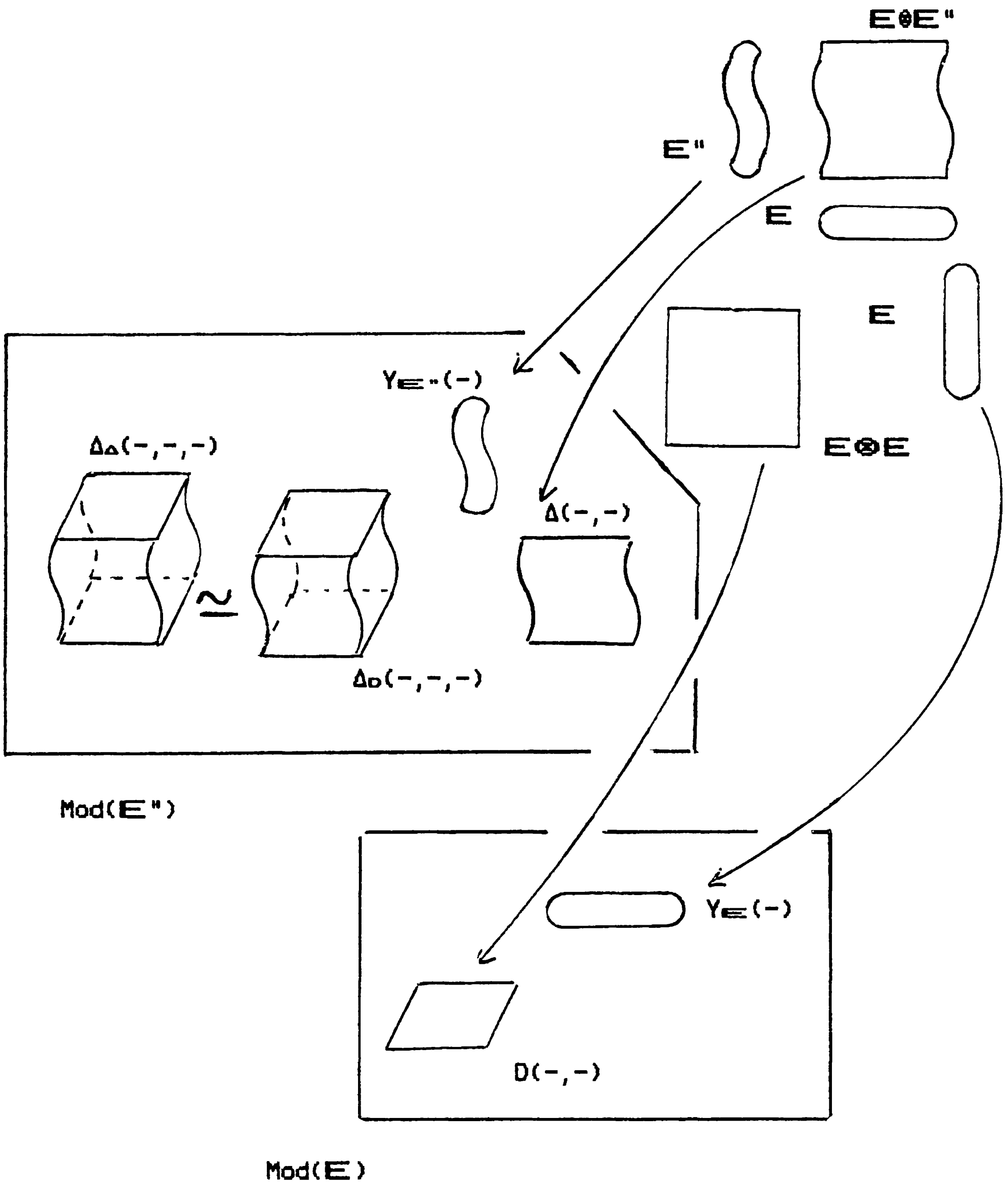
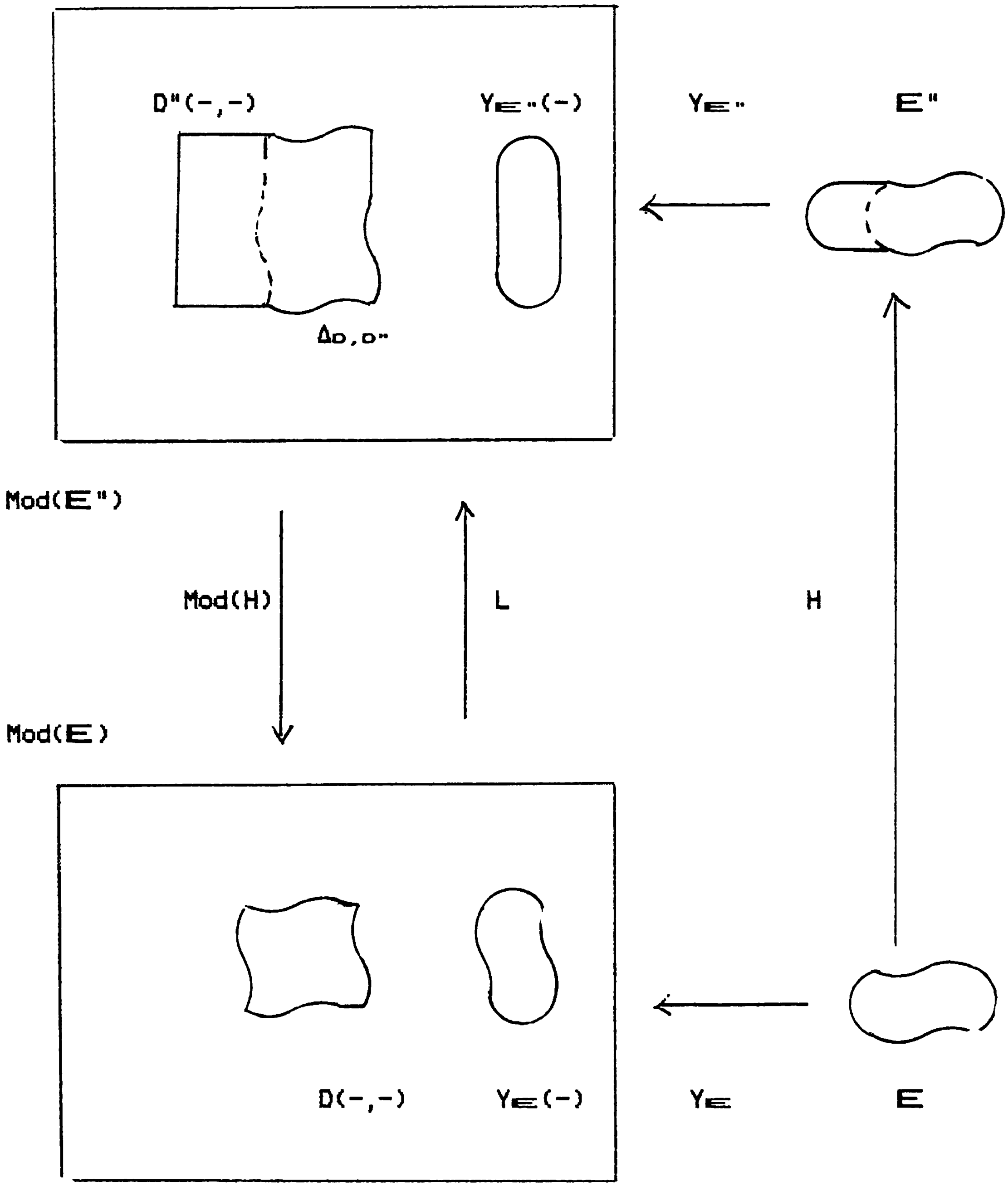
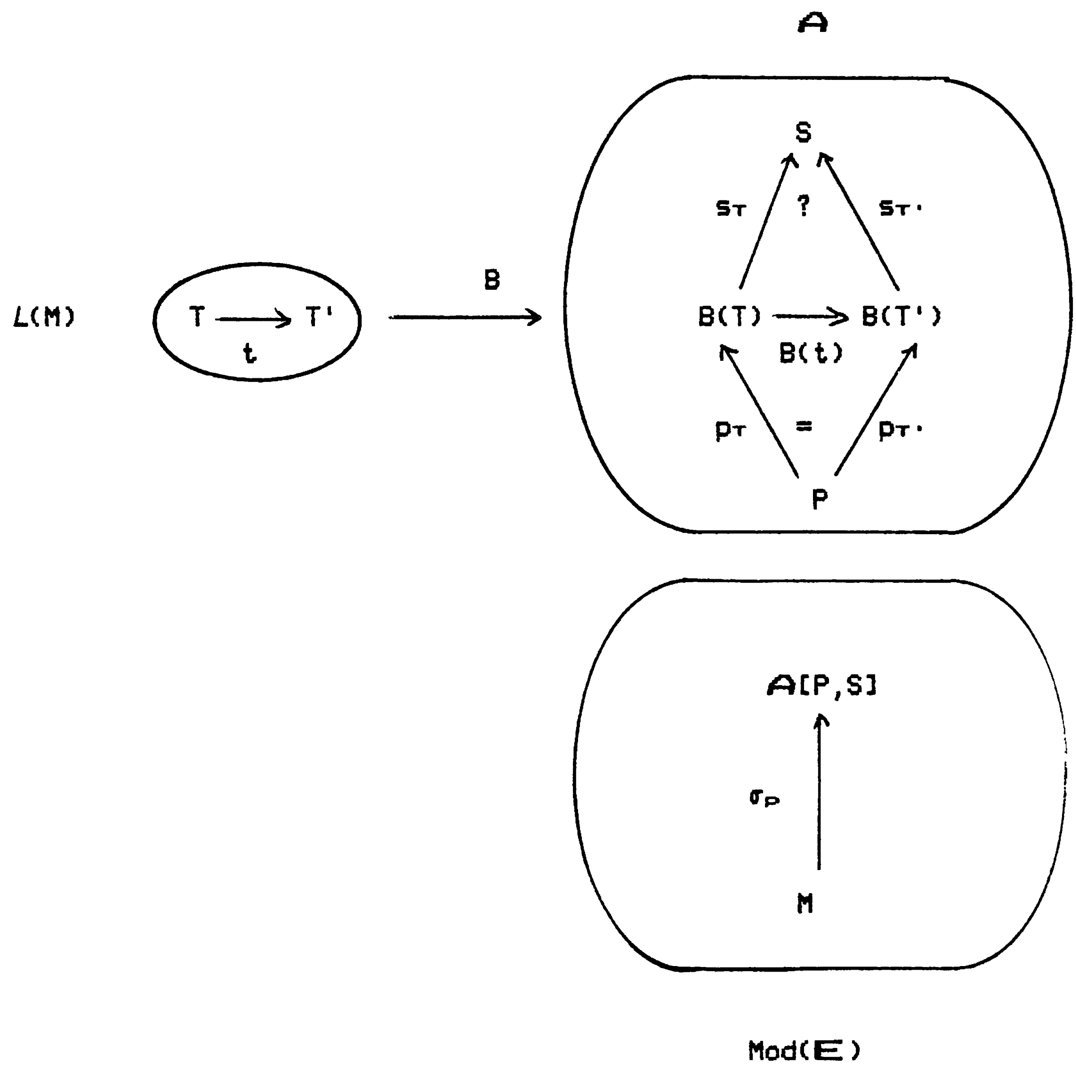


FIGURE 8.2. (Enrichissement sous-jacent.)



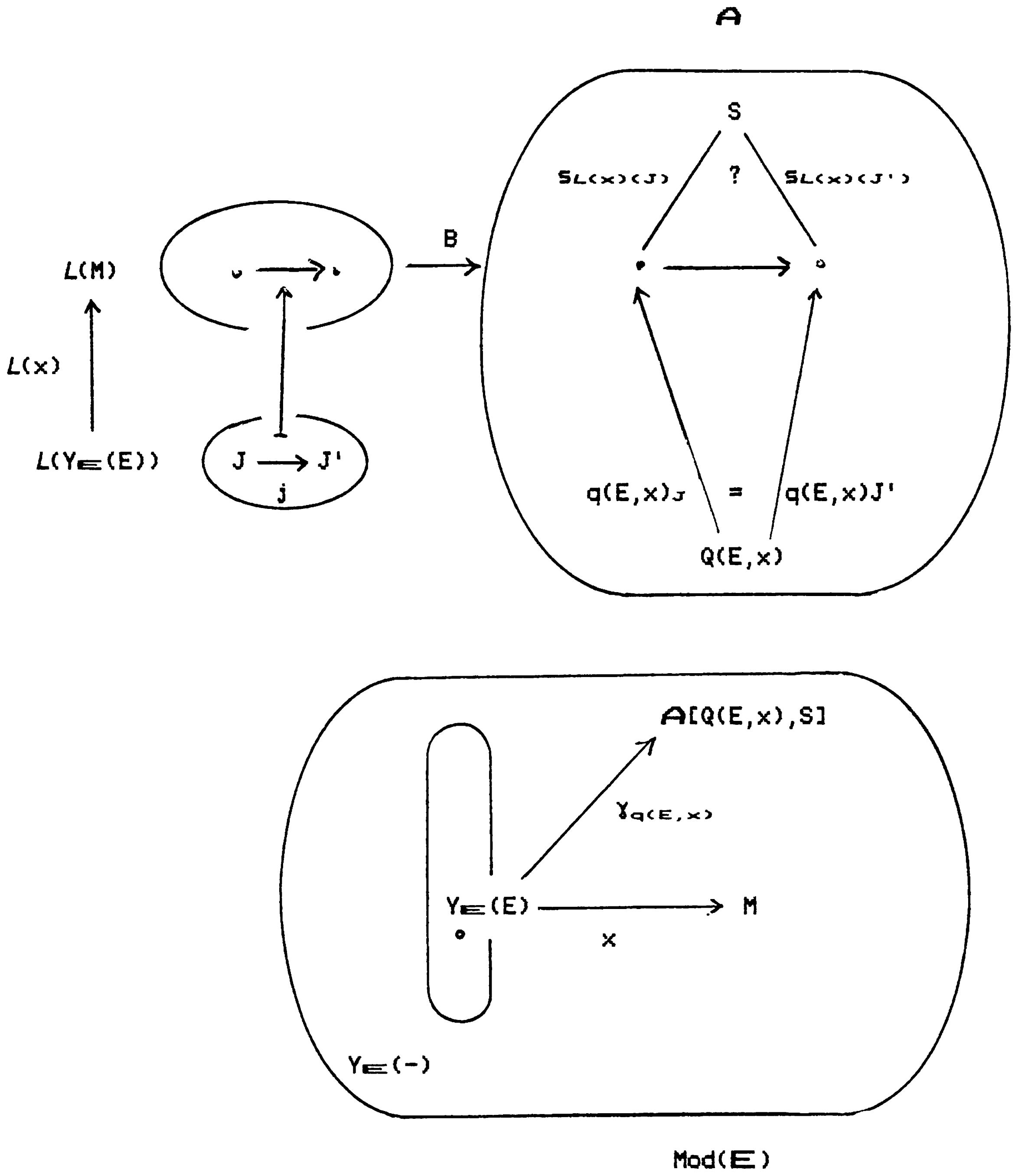
GROUPE DE FIGURES 9.

FIGURE 9.1. (M-structuration p-admissible.)




[Légende: le ? signifie que le triangle ne commute pas nécessairement ou, mieux, qu'il est "muni d'une structure de type $\mathbb{E}$ " (par exemple "qu'il y a une 2-flèche", si $\mathbb{E} = \mathbb{E}_{cat}$ .]

FIGURE 9.2. (M-structuration q-admissible ayant pour base d'extraction B .)



GROUPE DE FIGURES 10.

FIGURE 10.1. (Calcul des lax-co-limites structurées globales.)

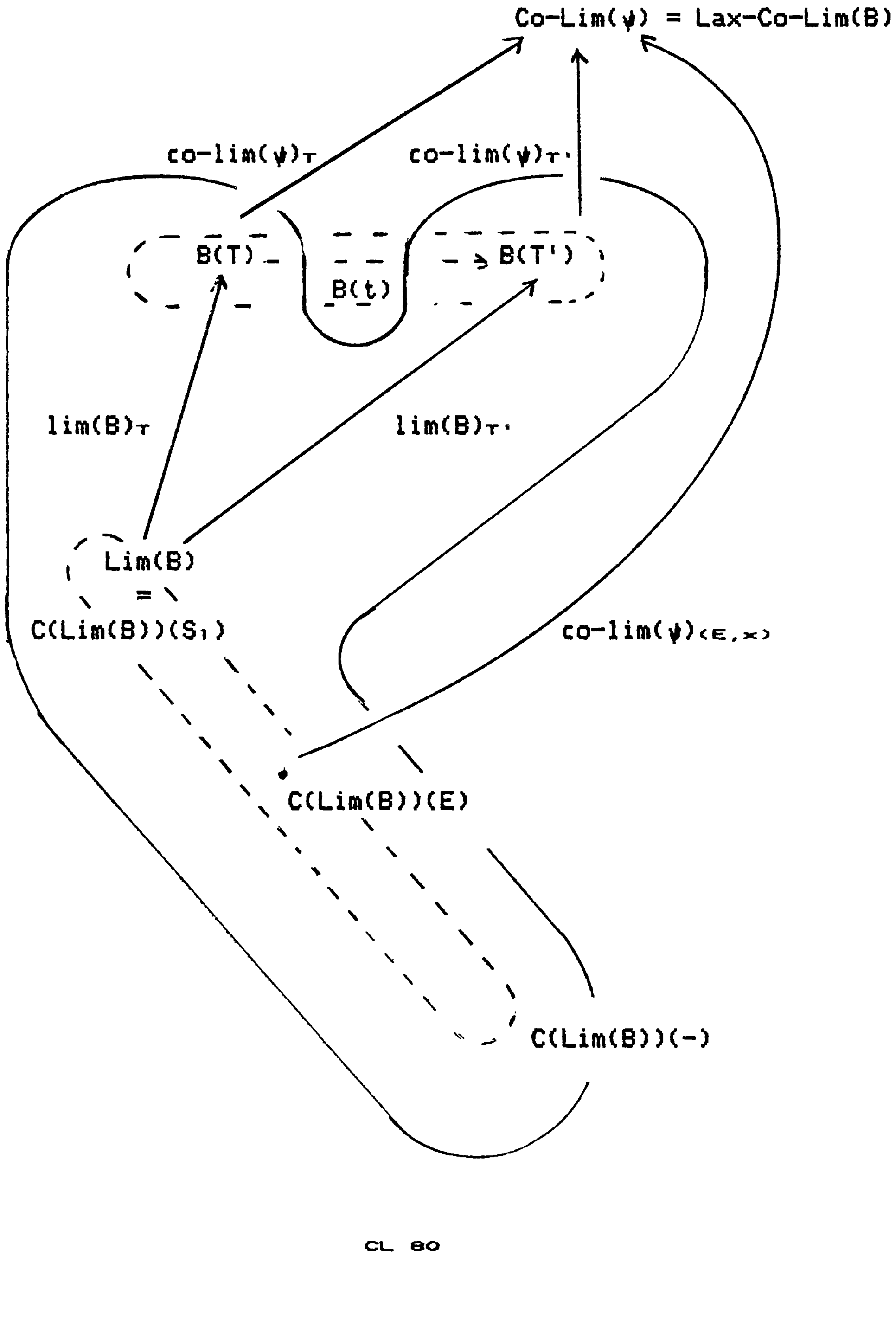
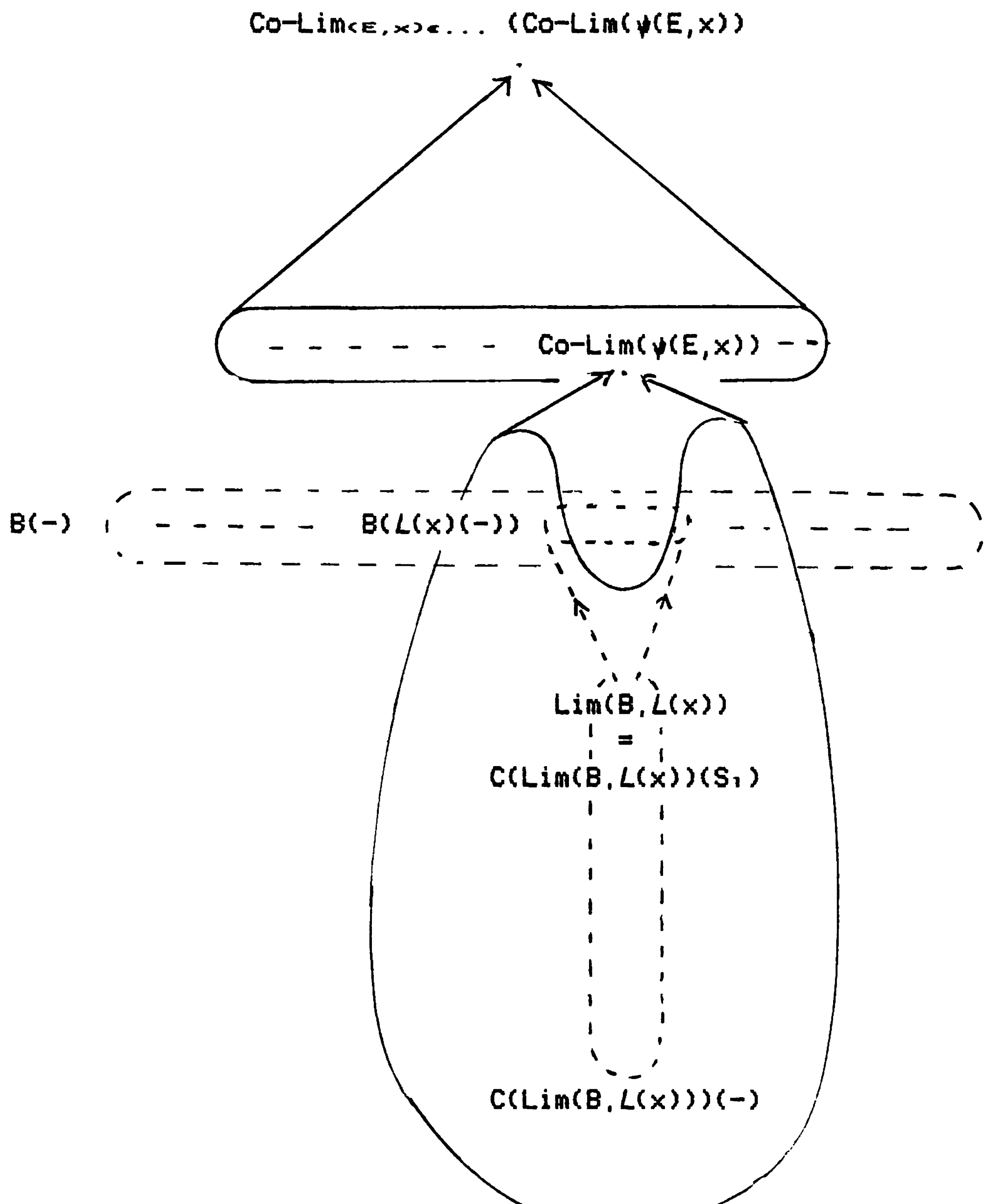


FIGURE 10,2. (Calcul des lax-co-limites structurées ponctuelles.)



# BIBLIOGRAPHIE

(C.A.S.T.) C. Ehresmann:

Catégories et Structures, Dunod, Paris, 1965.

(C.C.M.F.) F. Foltz, G. M. Kelly et C. Lair:

Algebraic categories with few monoidal biclosed structures or none, Journ. of Pure and Appl. Alg., 17, 1980.

(C.Q.C.E.) C. Lair:

Catégories qualifiables et catégories esquissables, Diagrammes 17, Paris, 1987.

(D.S.A.E.) C. Lair:

Dualité pour les structures algébriques esquissées, Cah. de Top. et Géom. Diff., vol. XV,4 , Paris, 1974.

(D.S.D.M.) C. Lair:

Diagrammes structurés de modèles, Diagrammes 18, Paris, 1987.

(E.G.C.E.) C. Lair:

Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Math. 23, Paris, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann:

Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iasi, XIV, 1968.

(F.O.S.A.) C. Lair:

Foncteurs d'omission de structures algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff., vol. XII,2 , Paris, 1971.

(F.S.C.A.) C. Lair:

Fermeture standard des catégories algébriques (II), Cah. de Top. et Géom. Diff., vol. XVIII,1 , Amiens, 1977.

(K.E.C.T.) E. J. Dubuc:

Kan extensions in enriched category theory, Lect. Notes in Math. 145, Springer, 1970.

(L.D.T.E.) L. Coppey et C. Lair:

Leçons de théorie des esquisses, fasc. I et II, Diagrammes 12 et 19, Paris, 1984 et 1988.

(L.P.L.G.) F. Ulmer:

Locally $\alpha$-presentable and locally $\alpha$-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

(Q.P.G.M.) L. Coppey:

Quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3, Paris 1980.

(R.E.C.A.) J. W. Gray:

Representable 2-categories, in "The Meeting of the Midwest Category Seminar in Zurich", Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

(S.L.S.A.) C. Ehresmann:

Sur les structures algébriques, Note aux C. R. A. S., t. 264, pp. 273-276, Paris, 1967.

(S.M.A.S.) J. W. Gray:

The category of sketches as a model for algebraic semantics, preprint, 1988.

(S.C.D.T.) P. Ageron:

Sémantique catégorique des types: comprendre le système F , Diagrammes 19, Paris, 1988.

(S.C.S.T.) C. Lair:

Trames et sémantiques catégoriques des systèmes de trames, Diagrammes 18, Paris 1987.

TABLE

UNIVERSITE PARIS 7

U. F. R. DE MATHEMATIQUES
TOURS 45-55-5ème ETAGE

2 PLACE JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE