DIAGRAMMES

L. COPPEY
C. LAIR

Leçons de théorie des esquisses

Diagrammes, tome 19 (1988), exp. nº 1, p. II1-II68
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1988__19__A1_0>

© Université Paris 7, UER math., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

DIAGRAMMES VOLUME 19 , 1988

Leçons

de

THEORIE DES ESQUISSES

L. Coppey et C. Lair

Partie II:

- Leçon 4: Calcul de limites ensemblistes.
- Leçon 5: Réalisations d'esquisses: structures et homomorphismes
- Leçon 6: Dictionnaire d'esquisses.

A.M.S. SUB. CLASS. : 18 - 02 , 18 C 10 , 18 A 10 , 00 A 25

Leçon 4

Calcul de limites ensemblistes

0. Récapitulation des trois premières leçons.

Dans la première leçon, nous avons appris, notamment avec *l'exemple des monoïdes*, à esquisser pratiquement des structures en partant de leurs définitions usuelles (i.e. quantifiées), obtenant alors une description diagrammatique de ces structures; il s'agissait, notamment dans cet exemple, d'obtenir une description particulière du "monoïde général" (ou *esquisse de monoïde*) permettant de reconstituer les monoïdes particuliers.

Ensuite, nous avons défini formellement les *esquisses*, en introduisant successivement les structures particulières nécessaires: graphes orientés, graphes multiplicatifs, cônes, etc...Pour chacune de ces structures, nous sommes partis d'une définition usuelle, puis nous l'avons esquissée. Ceci nous a naturellement conduit à esquisser les esquisses.

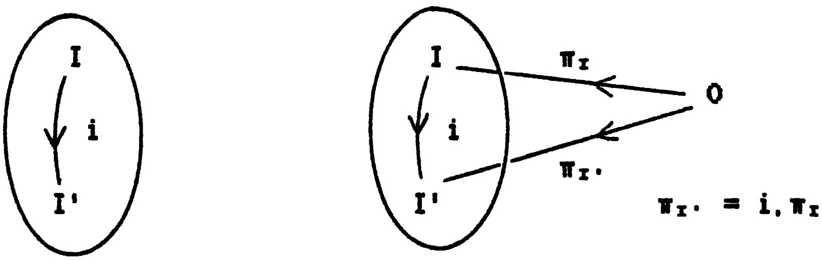
Retenons l'essentiel de ce qui figure dans les trois premières leçons: les esquisses permettent de *décrire* des "types" (ce mot prendra bientôt un sens mathématique plus précis) de structures mathématiques, en donnant de ces types une présentation uniforme (on peut d'ailleurs se demander quels sont les types de structures esquissables: nous verrons que sont esquissables toutes les structures du 1er ordre).

Il s'agit dès lors d'expliquer ce qu'est formellement une structure particulière d'un type donné, décrit par une esquisse. Pour ce faire, il nous faut revenir précisément à la notion de limites (projective ou inductive) et au calcul de ces limites. Pour commencer, nous les étudions dans $\mathbf{Ens}$, catégorie des ensembles; ce calcul ensembliste, indispensable pour toute la suite, ne résulte pas de considérations générales sur les catégories ou les esquisses et, à ce titre, il est incontournable.

1. Calcul des limites projectives dans $\mathbf{Ens}$.

Soit $\mathbf{I}$ un graphe multiplicatif et $\mathbf{I}^-$ le cône projectif type, dont on désigne ici par :

- 0 le sommet,
- π_I la projection de 0 vers un objet quelconque I de $\mathbf{I}$.



$\mathbf{I}$ $\qquad\qquad$ $\mathbf{I}^-$

Soit $F : \mathbf{I} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur.

Pour chaque $I \in Ob(\mathbf{I})$, $F(I)$ est un ensemble, et pour chaque $i: I \to I' \in Fl(\mathbf{I})$, $F(i): F(I) \to F(I')$ est une application.

Soit P le produit cartésien des ensembles $F(I)$, $I \in Ob(\mathbf{I})$, c'est-à-dire l'ensemble des familles $x = (x_I)_{I \in Ob(\mathbf{I})}$ d'éléments $x_I \in F(I)$; pour chaque I, on dispose de l'application projection canonique $p_I: P \to F(I)$ définie par $p_I(x) = x_I$.

Les applications $F(i)$, $i \in Fl(\mathbf{I})$, et p_I, $I \in Ob(\mathbf{I})$, constituent un graphe orienté dans $\mathbf{Ens}$ qui a même forme que $\mathbf{I}^-$, mais elles ne constituent pas un cône projectif (i.e. commutatif) en général ; en effet, pour une flèche $i: I \to I'$ de $\mathbf{I}$ et pour $x \in P$, on trouve:

$$[F(i).p_I](x) = F(i)(x_I),$$

et

$$p_{I'}(x) = x_{I'},$$

et, en général, $F(i).p_I \neq p_{I'}$.

Alors on se *restreint à la plus grande partie de* P où il y a égalité. A cet effet, on note:

- $P_F = \{ x \in P \mid F(i)(x_I) = x_{I'},\ \forall\, i : I \to I' \in Fl(\mathbf{I}) \}$,

- $u : P_F \to P$, l'inclusion,

- $q_I : P_F \to F(I)$, la restriction de p_I à P_F; on a donc $q_I = p_I \cdot u$,

- $q_F = (q_I)_{I \in Ob\,\mathbf{I}}$ la famille des q_I ,
  (cf. la première remarque du § 4 de cette leçon) .

Cette fois, on a $F(i) \cdot q_I = q_{I'}$, pour toute flèche $i : I \to I'$ de $\mathbf{I}$. Posons alors:

- $F_-(0) = P_F$

- $F_-(\pi_I) = q_I$, pour $I \in Ob(\mathbf{I})$,

- $F_-(i) = F(i)$, pour $i \in Fl(\mathbf{I})$.

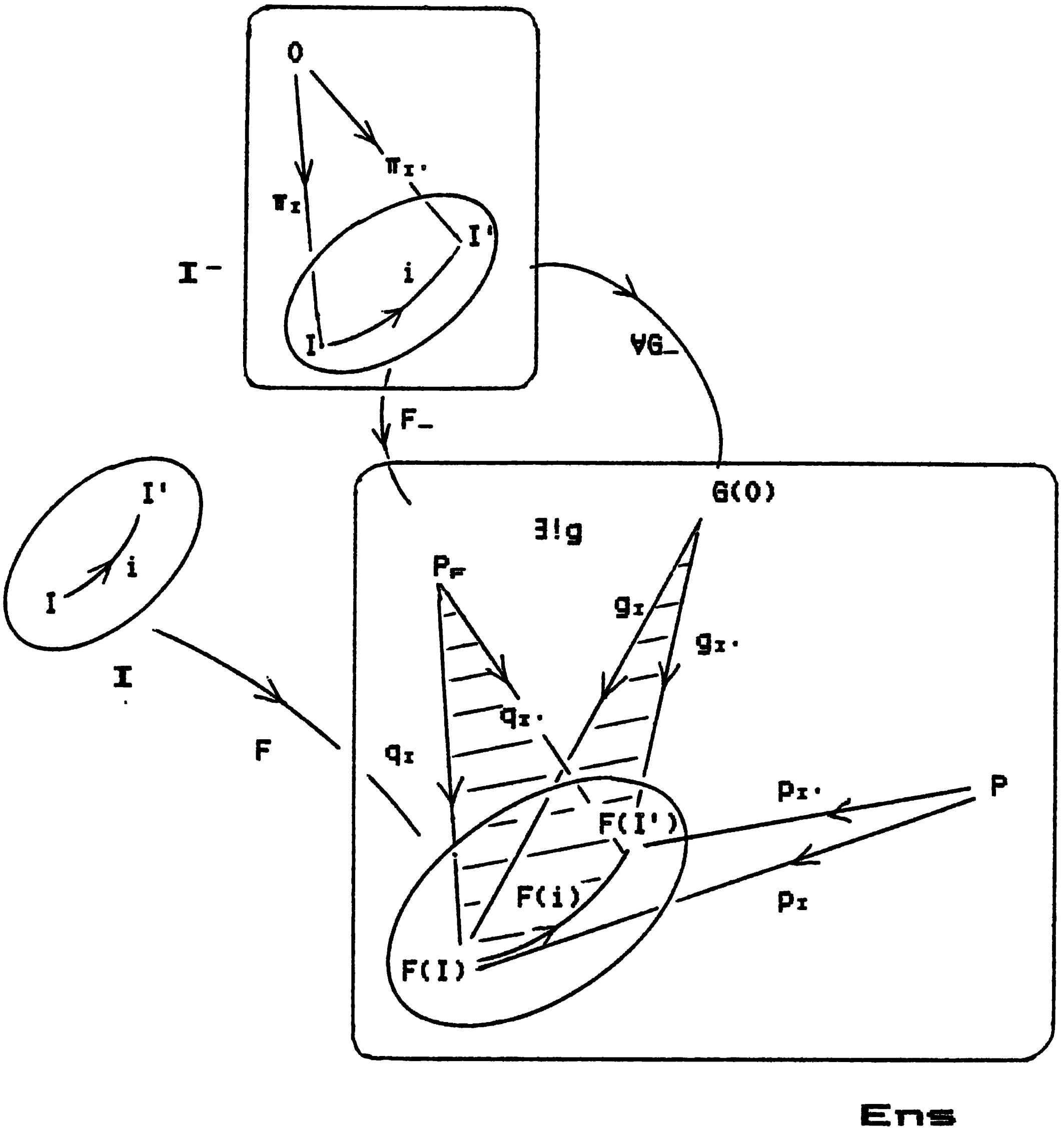
On définit ainsi un foncteur $F_- : \mathbf{I}^- \to \mathbf{Ens}$, c'est-à-dire un cône projectif (commutatif) dans $\mathbf{Ens}$ de base F. Clairement, F_- est un *cône limite projective*.

Remarque. Il est d'usage courant d'écrire (ou de dire) avec les inévitables imprécisions, précisées ici:

- $P_F = \text{limproj}\ F$, ou, plus classiquement, $\varprojlim F$,
  notation qui néglige les projections q_I.

- P_F est limite projective de F,
  locution abrégée.

- $P_F = \text{limproj}_I\ F(I)$, ou, plus classiquement, $\varprojlim_{I} F(I)$,
  notation qui rappelle l'indexation $\mathbf{I}$ de la limite, en en désignant "l'objet courant" , mais qui néglige les liens $F(i)$, $i \in Fl(\mathbf{I})$, et de nouveau, les projections q_I...



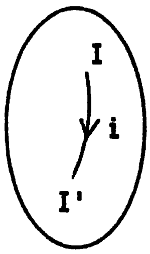
(Les triangles hâchurés sont réputés commutatifs.)

2. Calcul des limites inductives dans $\mathbf{Ens}$.

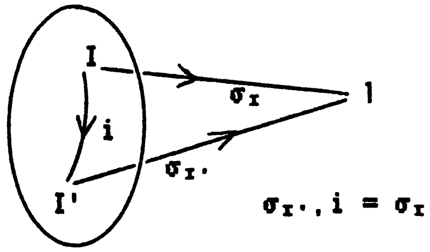
Formellement, le calcul est le même, au "sens des flèches près" (on dit encore : *"à la dualité près"*). Mais nous allons quand même le faire pour examiner justement ce qui diffère dans les "détails".

Soit donc toujours $\mathbf{I}$ un graphe multiplicatif et soit $F : \mathbf{I} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On utilise des notations analogues au cas des limites projectives.

A $\mathbf{I}^-$ on substitue $\mathbf{I}^+$, cône inductif type:



$\mathbf{I}$



$\mathbf{I}^+$

Au produit des ensembles $F(I)$ on substitue la somme disjointe des $F(I)$, soit l'ensemble S suivant:

$$S = \{ (I,x) \mid I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{I}),\ x \in F(I) \}$$

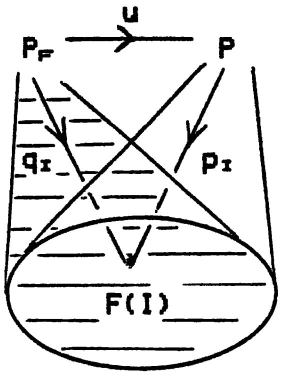
Aux projections $p_I : P \to F(I)$, on substitue les injections, encore dites *co-projections*:

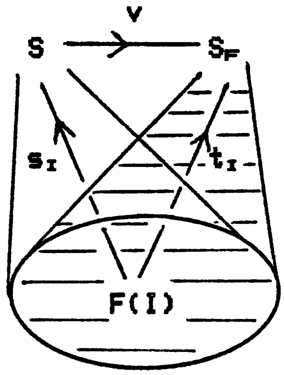
$$\begin{aligned} s_I : F(I) &\to S \\ x &\to (I,x)\ . \end{aligned}$$

En général, pour $i : I \to I'$ et $x \in F(I)$, $s_I(x) = (I,x)$ est différent de $[s_{I'}.F(i)](x) = (I',F(i)(x))$. Pour forcer les triangles ci-dessous à commuter, il faut faire un quotient de S par une équivalence R convenable.

$$\begin{tikzcd} F(I) \arrow[d, "F(i)"'] \arrow[dr, "s_I"] & \\ F(I') \arrow[r, "s_{I'}"'] & S \end{tikzcd}$$

De manière imagée, on peut dire que, dans le cas projectif, il a fallu "reculer" de P à P_F pour obtenir un I-cône projectif, et dans le cas inductif, il convient d'"avancer" de S à $S_F = S/R$ pour obtenir un I-cône inductif.





Précisons la relation R. C'est l'équivalence engendrée par la relation R_o suivante:

$$y \; R_o \; y'$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\exists\; i : I \to I' \quad \exists\; x \in F(I)$$
$$y \;=\; (I,x) \;=\; s_I(x)$$
$$y' \;=\; (I',F(i)(x)) \;=\; [s_{I'}\cdot F(i)](x)$$

Soit $v : S \to S_F = S/R$ l'application canonique. Posant $t_I = v \cdot s_I$, on voit clairement que les applications t_I et $F(i)$ constituent cette fois un I-cône inductif et que c'est bien une limite inductive de F ; on écrit:

$$S_F = \text{limind } F ,$$

ou, plus classiquement

$$S_F = \lim_{\to} F$$

Des remarques analogues à celles faites dans le cas projectif, concernant notations et locutions peuvent être faites ici.

Remarque. On peut expliciter, en termes catégoriques, la relation d'équivalence R et la limite S_F. A cet effet, nous sommes conduits à une construction qui a son intérêt propre dans l'étude générale des structures. Nous disposons d'un foncteur:

$$F : \mathbf{I} \to \mathbf{Ens}$$

et nous lui associons un autre foncteur:

$$h_F : \mathbf{H}_F \to \mathbf{I}$$

de la manière suivante:

- le graphe $\mathbf{H}_F$ a pour objets les couples (I,x) où $I \in Ob(\mathbf{I})$ et $x \in F(I)$,

- une flèche de (I,x) vers (I',x') est déterminée par la donnée d'une flèche $i : I \to I'$ de $\mathbf{I}$ satisfaisant $F(i)(x) = x'$. Remarquons alors que $i : I \to I'$ et $x \in F(I)$ déterminent entièrement la flèche en question : $(I,x) \to (I',x')$ qu'on note donc, pour cette raison, $(i,x) : (I,x) \to (I',x')$,

- les deux flèches consécutives $(i,x) : (I,x) \to (I',x')$ et $(i',y) : (I',y) \to (I'',x'')$ sont composables si et seulement si $i'.i$ est défini et $y = x'$, et dans ce cas, le composé est $(i'.i,x) : (I,x) \to (I'',x'')$,

- le foncteur h_F envoie l'objet (I,x) de $\mathbf{H}_F$ sur l'objet I et la flèche $(i,x) : (I,x) \to (I',x')$ de $\mathbf{H}_F$ sur la flèche $i : I \to I'$ de $\mathbf{I}$.

Dans la terminologie d'Ehresmann, le graphe multiplicatif $\mathbf{H}_F$ est appelé *graphe des hypermorphismes,* et

$$(i,x) : (I,x) \to (I',x')$$

est dit *hypermorphisme au dessus de* $i : I \to I'$.
On dit encore que $h_F : \mathbf{H}_F \to \mathbf{I}$ est une *fibration discrète.*

Le calcul de S_F nous montre que:

- S est l'ensemble des objets de $\mathbb{H}_F$,

- la relation R_o n'est autre que celle décrite par les flèches de $\mathbb{H}_F$: une flèche de $\mathbb{H}_F$ met en relation sa source et son but ,

- la relation R n'est autre que celle de l'appartenance à une même composante connexe de $\mathbb{H}_F$: deux objets sont connectés si et seulement si il existe un *zigzag* dans $\mathbb{H}_F$ les "joignant".

Ainsi S_F est l'ensemble des composantes connexes de $\mathbb{H}_F$.

3. Limites particulières usuelles.

En ce qui concerne $\mathbf{Ens}$, et pour nous résumer, nous voyons que c'est une catégorie qui possède *toutes les petites limites projectives et inductives* et qu'on sait les calculer (i.e. en calculer des canoniques) (d'au moins une façon, savoir celle que nous venons de proposer !). Le mot *petit* fait référence à la *taille* de $\mathbf{I}$ et signifie simplement que $Ob(\mathbf{I})$ et $Fl(\mathbf{I})$ sont des ensembles.

Quelques types particuliers de limites se rencontrent plus fréquemment que d'autres (pour des raisons techniques qu'on laisse au lecteur le soin de découvrir) et, à ce titre, ils portent des noms particuliers et ils s'écrivent de façons particulières. Nous en passons en revue quelques uns (essentiellement ceux dont nous aurons besoin) sans prétendre être exhaustifs! Nous séparons limites projectives et limites inductives. Chaque type particulier fait l'objet d'un paragraphe structuré selon le schéma suivant:

Nom de "la" limite P_F,
Forme de $\mathbf{I}$
Dessins de $\mathbf{I}$ *et de* $\mathbf{I}^-$ (*resp.* $\mathbf{I}^+$)
Valeur (et notation),
Cas particulier(s) (éventuellement).

LIMITES PROJECTIVES PARTICULIERES.

a) *Nom:* Produit d'une famille d'ensembles.

Forme: $\mathbf{I}$ est discret, i.e. $\mathbf{I} \simeq \mathrm{Ob}(\mathbf{I})$.

Dessin:

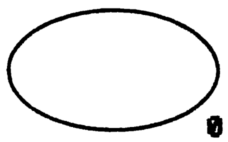
Valeur: le produit des ensembles $E_I = F(I)$ (on dit aussi $\mathbf{I}$-produit) est l'ensemble suivant:

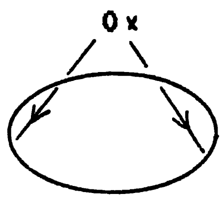
$P_F = \{ (x_I)_{I \in \mathbf{I}} \mid x_I \in E_I \}$,

noté $\prod_{I \in \mathbf{I}} E_I$ ou simplement $\prod_{\mathbf{I}} E_I$.

Cas particuliers:

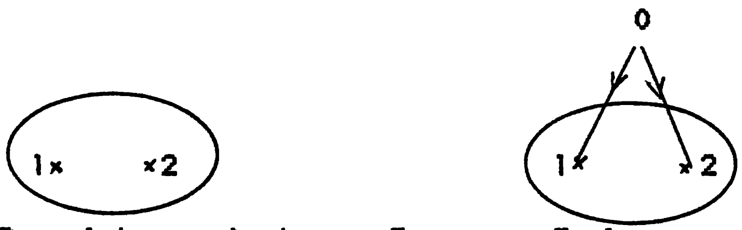
a.1) Elément final ou $\emptyset$-produit.
$\mathbf{I} = \emptyset$ (base vide).





$P_F = \{\emptyset\}$, noté aussi 1

a.2) Produit de deux ensembles E_1 et E_2.
$\mathbf{I} = \mathbf{2}_0$ (deux objets seulement).

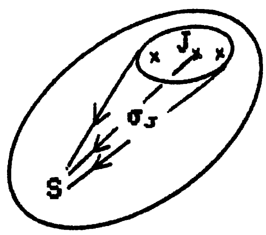


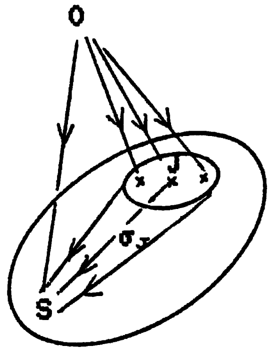
$P_F = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \in E_1 , x_2 \in E_2 \}$,
noté aussi $E_1 \times E_2$

b) *Nom:* Produit fibré d'une famille d'applications de même but.

Forme: $\mathbf{I}$ est un cône inductif de base discrète, i.e. $\mathbf{I} = \mathbf{J}^+$, où $\mathbf{J}$ est discret.

Dessin:





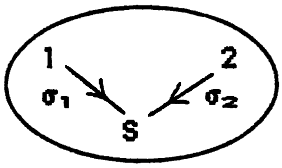
Valeur: le produit fibré des $\mathbf{J}$-ensembles $E_J = F(J)$ (ou des applications p_J: $E_J \to B = F(\sigma_J)$ au dessus de $B = F(S)$) est l'ensemble suivant:

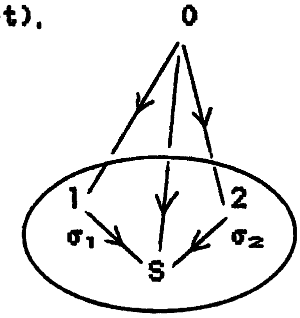
$$P_F = \{ (x_J)_{J \in \mathbf{J}} \in \prod_J E_J \mid p_J(x_J) = c^{te} \}$$

noté $\bigwedge_B P_J$

Cas particulier;

Produit fibré de deux ensembles.
$\mathbf{J} = \mathbf{2}_0$ (deux objets seulement).



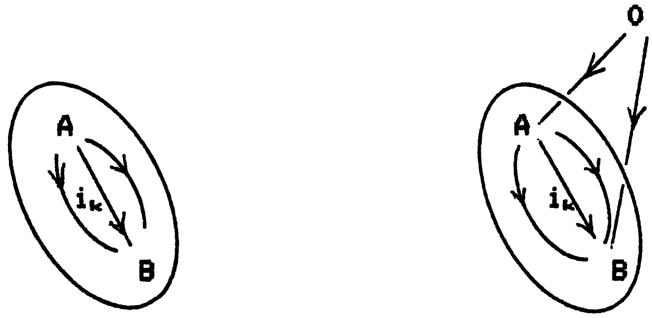


Le produit fibré de E_1 et de E_2 au dessus de B est l'ensemble P_F des couples $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tels que $p_1(x_1) = p_2(x_2)$.
On le note $E_1 \underset{B}{\wedge} E_2$ ou $E_1 \underset{B}{\times} E_2$

c) *Nom:* Noyau d'une famille d'applications.

Forme: $\mathcal{I}$ est un "muscle", i.e. a deux objets A et B et ses seules flèches non triviales, indexées par un ensemble K, vont toutes de A à B, $i_k: A \to B$.

Dessin:



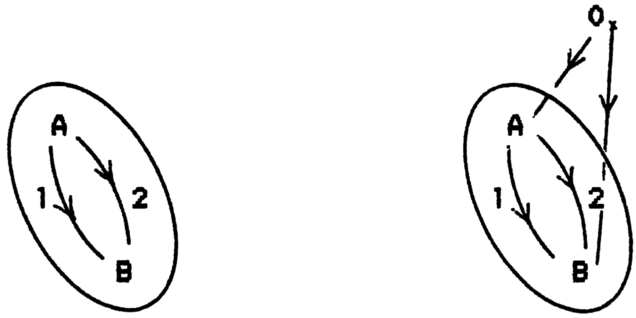
Valeur: le noyau des K flèches $f_k = F(i_k)$ (on dit aussi égalisateur des f_k) est le sous-ensemble suivant N de $E = F(A)$:

$(P_F =)\ N = \{ x \in E \mid f_k(x) = c^{te} \}$

Usuellement le mot *noyau* désigne l'ensemble N et on réserve plutôt le mot *égalisateur* pour désigner l'inclusion n de N dans E.

Cas particulier:

$K = \mathbf{2}_0$ ($\mathcal{I}$ a deux flèches de même source et de même but).

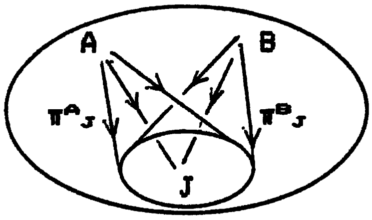


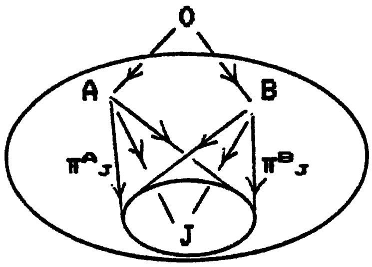
Le noyau de f_1 et de f_2 est l'ensemble N des $x \in E$ tels que $f_1(x) = f_2(x)$.

d) *Nom:* Famille monomorphe d'applications

Forme: $\mathcal{I}$ est un "bonnet d'âne", i.e. a deux sommets A et B , une base discrète, indexée par $\mathcal{J}$, et des projections (indexées par $\mathcal{J}$) allant des sommets vers la base.

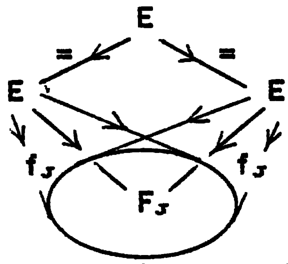
Dessin:





Ici, F est un foncteur particulier défini par: $F(\pi^A_J) = F(\pi^B_J) = f_J$: $E \to F$, quel que soit $J \in \mathcal{J}$. Les projections sont particulières: les deux qui vont vers A et B , et qui déterminent les autres sont égales à l'identité de la source commune E des f_J.

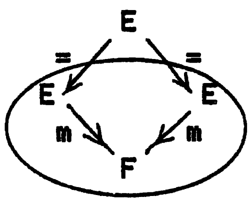
$F(\mathcal{I}^-)$



La propriété universelle s'exprime alors en disant que, si pour tout J on a $f_J.g = f_J.h$, alors $g = h$.

Cas particulier:

Monomorphisme (ou flèche simplifiable à gauche). $\mathcal{J}$ n'a qu'un objet. La limite est de type "produit fibré", et non seulement l'indexation est de forme particulière, mais encore la valeur du foncteur F et les projections sont particulières:



$m.g = m.h \Rightarrow g = h$

LIMITES INDUCTIVES PARTICULIERES.

a) *Nom:* Somme d'une famille d'ensembles.

Forme: $\mathbf{I}$ est discret, i.e. $\mathbf{I} \simeq \mathrm{Ob}(\mathbf{I})$.

Dessin:

Valeur: la somme des ensembles $E_I = F(I)$ (on dit aussi $\mathbf{I}$-*somme*, ou somme disjointe, ou réunion *disjointe* des ensembles E_I) est l'ensemble suivant:

$$S_F = \{ (I,x) \mid I \in \mathrm{Ob}(\mathbf{I}) \ , \ x \in E_I \},$$

noté $\sum\limits_{I \in \mathbf{I}} E_I$ ou $\sum\limits_{I} E_I$

Cas particuliers.

a.1) Elément initial ou $\emptyset$-somme.
$\mathbf{I} = \emptyset$ (base vide).

$S_F = \emptyset$, noté aussi 0

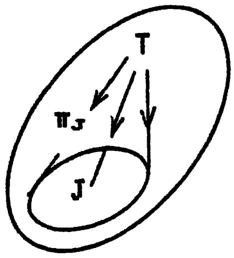
a.2) Somme de deux ensembles E_1 et E_2.
$\mathbf{I} = \mathbf{2}_0$ (deux objets seulement)

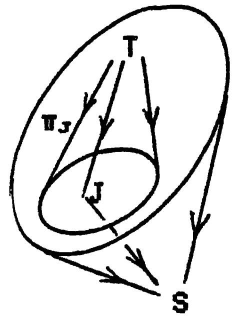
$S_F = \{ (n, x_n) \mid n = 1,\ 2 \}$,
noté $E_1 + E_2$ ou $E_1 \cup_{disj} E_2$.

b) *Nom:* Somme fibrée d'une famille d'applications de même source.

Forme: $\mathcal{I}$ est un cône projectif de base discrète, i.e. $\mathcal{I} = \mathcal{J}-$, où $\mathcal{J}$ est discret.

Dessin:





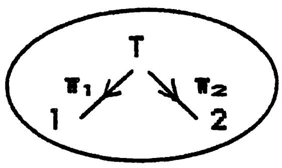
Valeur: la $\mathcal{J}$-somme fibrée (ou *amalgamée*) des ensembles $E_J = F(J)$ (ou des applications s_J: $C \to E_J = F(\pi_J)$ *au dessous de* $C = F(T)$) est l'ensemble suivant:

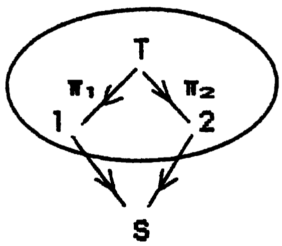
$$S_F = \sum_J E_J \ / \ R \ ,$$

où R est l'équivalence par zig-zag décrite plus haut. On la note aussi $\bigvee_C E_J$

Cas particulier:

Somme fibrée (ou amalgamée) de deux ensembles. $\mathcal{J} = \mathbf{2}_0$ (deux objets seulement).



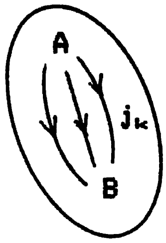


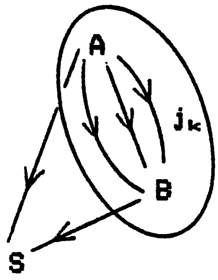
La somme fibrée des deux ensembles E_1 et E_2 *au dessous de* C est l'ensemble:
$S_F = E_1 + E_2 \ / \ R$, notée aussi $E_1 \underset{C}{+} E_2$

c) *Nom:* Conoyau d'une famille d'applications.

Forme: $\mathcal{I}$ est un "muscle", i.e. a deux objets A et B et ses seules flèches non triviales, indexées par un ensemble K, vont toutes de A à B, j_k: A → B.

Dessin:





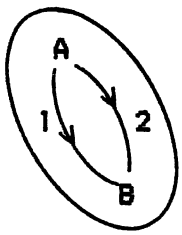
Valeur: Le conoyau des K flèches $f_k = F(j_k)$, ou *co-égalisateur* des f_k, est un quotient Q de E' = F(B):

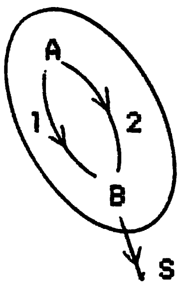
$(S_F =)\ Q = E'/R'$,

où R' est l'équivalence par zig-zag naturelle associée à R .
Usuellement le mot conoyau désigne plutôt l'ensemble E'/R', et le mot *coégalisateur* désigne l'application canonique de passage au quotient q : E' → Q.

Cas particulier:

K = $\mathbf{2}_0$ ($\mathcal{I}$ a deux flèches de même source et de même but)



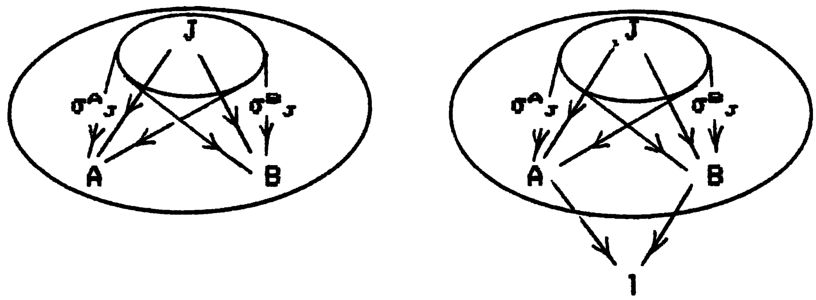


Le conoyau de f_1 et f_2 est l'ensemble E'/R', où R' a toujours la même signification.

d) *Nom:* Famille épimorphe d'applications.

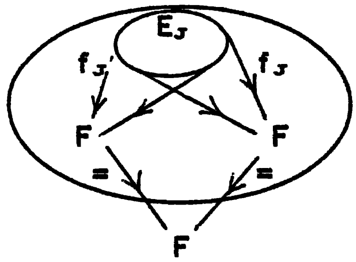
Forme: $\mathcal{I}$ est un "bonnet d'âne" dual, i.e. a deux sommets A et B , une base discrète, indexée par $\mathcal{J}$, et des coprojections allant de la base vers les sommets.

Dessin:



Ici F est un foncteur particulier défini par: $F(\sigma^A{}_J) = F(\sigma^B{}_J) = f_J\colon E \to F$, quel que soit $J \in \mathcal{J}$. Les coprojections sont particulières: les deux qui partent de A et B , et qui déterminent les autres, sont égales à l'identité du but commun F des f_J.

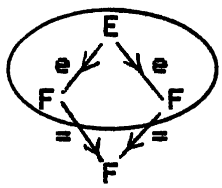
$F(\mathcal{I}^+)$



La propriété universelle s'exprime en disant que, si pour tout $J \in \mathcal{J}$ on a $g.e_J = h.e_J$, alors $g = h$.

Cas particulier:

Epimorphisme (ou flèche simplifiable à droite). $\mathcal{J}$ n'a qu'un objet. La limite est de type "somme fibrée" et, non seulement l'indexation est de forme particulière, mais encore la valeur du foncteur et les coprojections sont particulières.



$g.e = h.e \Rightarrow g = h$.

4. Remarques générales sur les limites.

a) *Applications généralisées.*

Soit $G_- : \mathbf{I}^- \to \mathbf{Ens}$ un cône projectif de restriction F. Il peut être intéressant de l'interpréter comme une *application généralisée*

- de source *un* ensemble, à savoir $G(0)$
- de but *des ensembles*, à savoir les $G(I) = F(I)$, *reliés entre eux par des applications*, à savoir les $G(i) = F(i)$.

On la notera alors de la manière suivante:

$$g_F : G(0) \to F$$

où g_F est la famille des projections $G_-(\pi_I) = g_I$.
C'est ce que nous avons fait ci-dessus avec

$$q_F : P_F \to F$$

De ce point de vue, on écrira la *propriété universelle* de q_F de la manière suivante:

$$(\forall\ g_F\colon G(0) \to F)\ (\ \exists !\ g\colon G(0) \to P_F)\ (\ g_F = q_F \cdot g),$$

en décidant de composer applications généralisées et applications ordinaires de manière évidente (se reporter au dessin !). Nous verrons bientôt que cette composition n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'une composition plus générale : celle des transformations naturelles entre foncteurs. Disons encore que la limite avec ses projections q_F permet de *représenter*, dans le sens précisé ci-dessus, toute autre application généralisée de but F par une application ordinaire.

b) *Cônes comme objets ou comme flèches*

Indépendamment de cette propriété universelle, les deux points de vue concernant les cônes, à savoir:

(i) foncteurs de $\mathbf{I}^-$ vers $\mathbf{Ens}$,
(ii) applications généralisées,

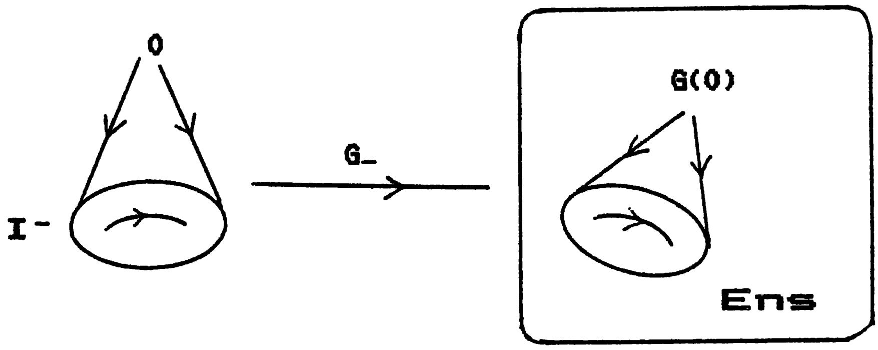
bien que pratiquement équivalents (i.e. pour ce qui se passe dans $\mathbf{Ens}$) diffèrent notoirement sur le plan *syntaxique*:

- dans le point de vue (i), l'idée même de cône figure déjà dans la forme particulière du graphe $\mathbf{I}^-$; autrement dit, $(\mathbf{I}^-, 0, 0)$ est l'esquisse de $\mathbf{I}$-cône projectif;

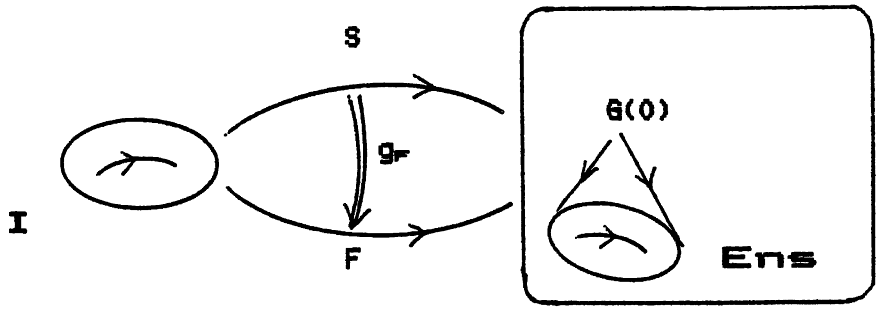
- dans le point de vue (ii), seul $\mathbf{I}$ est en cause syntaxiquement ; le cône projectif g_F de base F indexée par $\mathbf{I}$ n'apparaît que dans sa concrétisation dans **Ens**: c'est un *morphisme* (voir la leçon 5) d'un foncteur S constant (sur $G(0)$) vers F.

On peut schématiser ces deux points de vue ainsi:

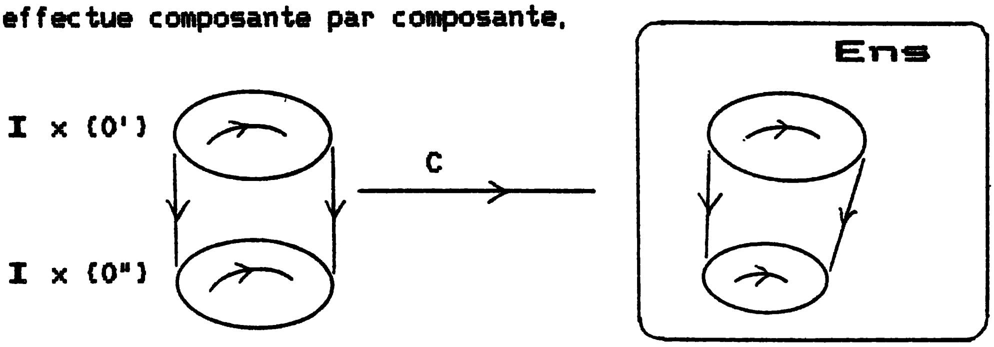
(i)



(ii)



Ceci suggère d'ailleurs d'esquisser plus généralement la *structure de morphisme* entre foncteurs de $\mathbf{I}$ vers **Ens** sous forme du graphe multiplicatif $\mathbf{I} \times \mathbf{2}$ où $\mathbf{2}$ désigne ici le graphe $1 : 0' \to 0"$, et où la composition dans $\mathbf{I} \times \mathbf{2}$ s'effectue composante par composante.



Les cônes projectifs de base $\mathbf{I}$ apparaissent bien comme des cylindres particuliers: ceux pour lesquels $C(\mathbf{I} \times \{0'\})$ est réduit à un ensemble.

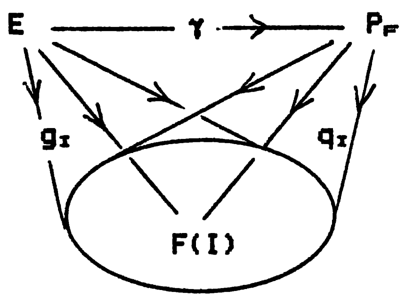
Des remarques analogues peuvent être faites concernant les cônes (limites) inductifs.

c) *"Unicité" de la limite.*

Soit toujours $F : \mathbf{I} \to \mathbf{Ens}$ un foncteur donné, et la limite projective construite précédemment, sous sa forme:

$$q_F : P_F \to F .$$

Soit $\gamma : E \to P_F$ une bijection ; on voit que $g_F = q_F \cdot \gamma$ est encore un cône limite projective de base F (il a, tout autant que q_F, la propriété universelle voulue !) Réciproquement, toute autre limite projective de F est de cette forme



$$g_I = q_I \cdot \gamma$$

Ce phénomène (et sa démonstration, laissée en exercice) est général: deux limites de même nature (projective ou inductive) d'un même foncteur à valeurs dans une catégorie quelconque sont toujours *isomorphes* par un isomorphisme (i.e. flèche inversible) qui *échange* leurs (co)projections.

Leçon 5

Réalisations d'esquisses: structures et homomorphismes.

1. Réalisations.

Soit $//\mathbb{S}// = (\mathbb{S}, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ une esquisse. Elle décrit un type de structures, i.e. des structures de ce type, encore appelées *réalisations* ou *modèles*.

En ce sens, on peut dire que $//\mathbb{S}//$ est le *modèle abstrait* de $//\mathbb{S}//$, avec toute l'ambiguïté attachée au mot modèle.

Réaliser $//\mathbb{S}//$, c'est:

- choisir d'abord une catégorie $\mathbb{C}$ où la réaliser; on parlera alors de réalisations *dans* $\mathbb{C}$, ou encore de $\mathbb{C}$-structures,
- décalquer ensuite $//\mathbb{S}//$ dans $\mathbb{C}$.

Bien sûr, nous devons préciser maintenant en quoi consiste ce décalque.

Prenons pour l'instant $\mathbb{C} = \mathbb{E}\mathrm{ns}$. Alors décalquer $//\mathbb{S}//$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ consiste à

- respecter la forme de $\mathbb{S}$, i.e. la structure de graphe,
- respecter l'algèbre de $\mathbb{S}$, i.e. la structure de graphe multiplicatif,

c'est donc se donner un foncteur $R : \mathbb{S} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$,

- transformer les cônes distingués, éléments de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{Q}$, en *cônes limites*, grâce à R (qui préserve déjà la *forme* et *l'algèbre* des cônes).

Rappelons, à ce sujet, que la notion de *cône distingué* s'est imposée justement lorsque, voulant abstraire les structures ensemblistes pour constituer une esquisse $//\mathbb{S}//$, nous ne pouvions plus, en toute généralité, garder à certains cônes leur statut de limites, à moins d'imposer à $\mathbb{S}$ d'être une catégorie suffisamment riche (nous y reviendrons à propos des *types*). Il nous restait donc la solution consistant à *se souvenir* que certains cônes d'applications étaient des cônes limites dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$. Nous faisons état de ce souvenir quand nous définissons les réalisations comme ci-dessus.

2. Homomorphismes entre réalisations.

Etant données deux réalisations de $//\mathbb{S}//$:

$$R : //\mathbb{S}// \to \mathbb{E}\mathrm{ns} \quad \text{et} \quad R' : //\mathbb{S}// \to \mathbb{E}\mathrm{ns},$$

on définit un homomorphisme h de R vers R' par la donnée d'une famille d'applications entre les ensembles sous-jacents:

$$h = (h_S : R(S) \to R'(S))_{S \in Ob(\mathbb{S})}$$

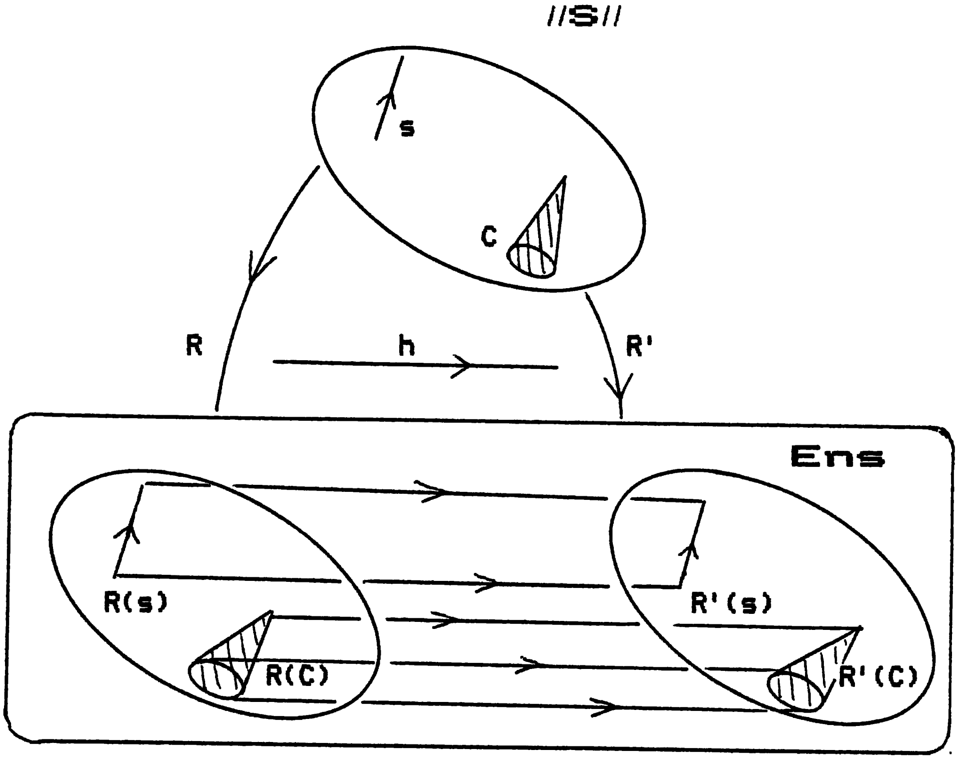
compatibles avec les lois (ou liaisons fonctionnelles) i.e.:

$$\forall\, s : S \to S' \in \mathbb{S} \qquad \forall\, x \in R(S)$$
$$h_{S'}(R(s)(x)) = R'(s)(h_S(x)).$$

On dit encore que, pour tout $s \in Fl(\mathbb{S})$, le carré suivant doit commuter:

$$\begin{tikzcd}
R(S) \arrow[r, "h_S"] \arrow[d, "R(s)"'] & R'(S) \arrow[d, "R'(s)"] \\
R(S') \arrow[r, "h_{S'}"'] & R'(S')
\end{tikzcd}$$

Géométriquement, on peut imaginer un homomorphisme comme un *glissement* de R vers R', chaque S laissant une *trace* h_S qui matérialise le glissement de $R(S)$ vers $R'(S)$:



Les homomorphismes se composent de façon naturelle; si $h : R \to R'$ est suivi de $g : R' \to R''$, le composé $g.h$ est défini par

$$\forall\ S \in \mathrm{Ob}(\mathbb{S}) \qquad (g.h)_S = g_S.h_S.$$

On obtient alors la *catégorie*, dite des *réalisations* ou *modèles* de //S//, notée $\mathbf{Ens}^{//\mathbb{S}//}$ ou Mod(//S//). Elle a pour objets les réalisations de //S// et pour flèches les homomorphismes tels qu'ils viennent d'être définis.

3. Un exemple utile pour la suite.

Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont deux ensembles de graphes multiplicatifs (destinés à indexer des bases de cônes distingués, projectifs et inductifs respectivement), nous savons qu'on peut construire une certaine esquisse projective $/\Sigma_{\mathcal{I}\mathcal{J}}/$ petite (cf. la fin de cette leçon), dont les réalisations sont les $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisses (cf. la leçon 3). Alors la notion d'homomorphisme entre esquisses en découle, comme cas particulier d'homomorphisme entre structures.

L'étude de la catégorie des esquisses ressort, de ce point de vue, de l'étude générale des catégories dites projectivement esquissables. Nous n'en dirons pas davantage ici. Précisons simplement ce que cela donne en termes usuels:

Un homomorphisme $//H// : //\mathbb{S}// \to //\mathbb{S}//'$ entre esquisses consiste en la donnée d'un foncteur $H : \mathbb{S} \to \mathbb{S}'$ qui envoie les cônes distingués sur des cônes distingués ...

On désignera par $\mathbb{Esq}$ (resp. $\mathbb{Esq}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$) la catégorie des esquisses (resp. des $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisses).

4. Esquisse de morphisme.

Les deux points de vue rencontrés, dans l'étude des limites dans $\mathbb{Ens}$, à propos des cônes, se retrouvent ici en toute généralité, à propos des homomorphismes:

(i) le point de vue qu'on vient de présenter; c'est l'aspect "application généralisée"

$$h = (h_S)_{S\in Ob(\mathbb{S})} : R \to R'.$$

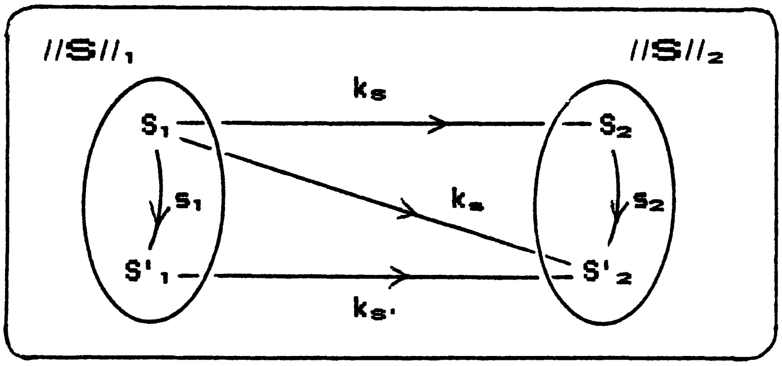
On dit encore qu'il s'agit d'une *transformation naturelle* (entre foncteurs de même source $\mathbb{S}$ et de même but la catégorie $\mathbb{Ens}$). Cette notion a évidemment un sens pour des foncteurs entre graphes multiplicatifs, mais on prendra soin de bien noter que la composabilité de deux transformations naturelles qui se suivent n'est pas automatique.

(ii) le point de vue qui consiste à *esquisser les morphismes,* déjà suggéré dans la leçon 2. Il s'agit de décrire syntaxiquement ce qu'on désire, i.e. d'esquisser les morphismes de sorte qu'une réalisation redonne bien les morphismes au sens (i).
Or ceci est aisé. Il faut dédoubler l'esquisse $//\mathbb{S}//$, une copie $//\mathbb{S}//_1$ servant à esquisser la source de h, une autre copie $//\mathbb{S}//_2$ servant à esquisser le but de h; enfin, on doit prévoir des flèches:

$$k_S : S_1 \to S_2 \quad , \quad S \in Ob(\mathbb{S})$$
$$k_s : S_1 \to S'_2 \quad , \quad s : S \to S' \in Fl(\mathbb{S}),$$

de sorte qu'on puisse écrire ce qu'on désire, soit:

$$\forall\, s : S \to S' \in Fl(\mathbb{S}) \qquad k_{S'}.s_1 = k_s = s_2.k_S$$



Anticipant très légèrement sur les produits généraux de structures, on doit remarquer que le graphe multiplicatif ainsi constitué n'est autre que $\mathbb{S} \times \mathbb{2}$. Quant aux cônes distingués, ils sont aussi dédoublés: une copie dans $\mathbb{S}_1$, une copie dans $\mathbb{S}_2$. Telle est l'esquisse de morphismes que l'on conviendra de noter $//\mathbb{S}// \otimes //\mathbb{2}//$ où $//\mathbb{2}// = (\mathbb{2}, \emptyset, \emptyset)$.

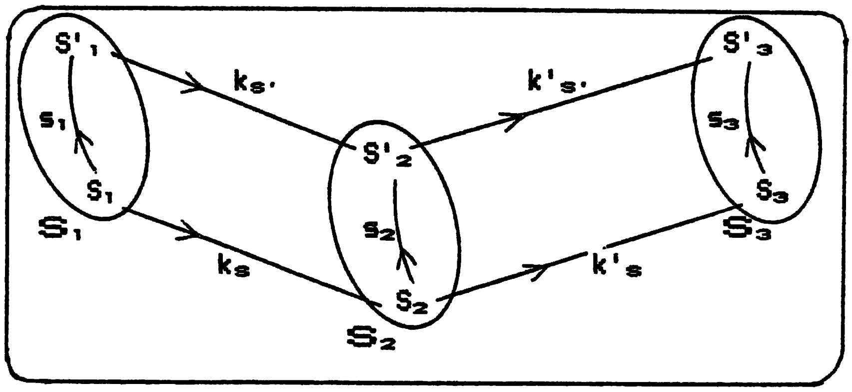
Ce qui est remarquable c'est qu'on peut continuer dans cette voie. On peut successivement:

- esquisser les couples composables, c'est-à-dire dessiner la situation résultant de la succession de deux homomorphismes esquissés, c'est-à-dire encore considérer l'esquisse notée $//\mathbb{S}// \otimes //\mathbb{2}\tfrac{1}{2}//$ où $\mathbb{2}\tfrac{1}{2}$ est le graphe (multiplicatif) trivial:

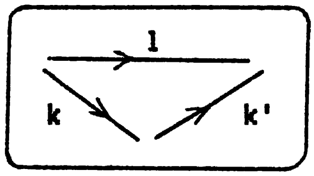
$$\boxed{1 \xrightarrow[k]{} 2 \xrightarrow[k']{} 3}$$

et $//\mathbb{2}\tfrac{1}{2}// = (\mathbb{2}\tfrac{1}{2}, \emptyset, \emptyset)$

$//\mathbb{S}// \otimes //2½//$

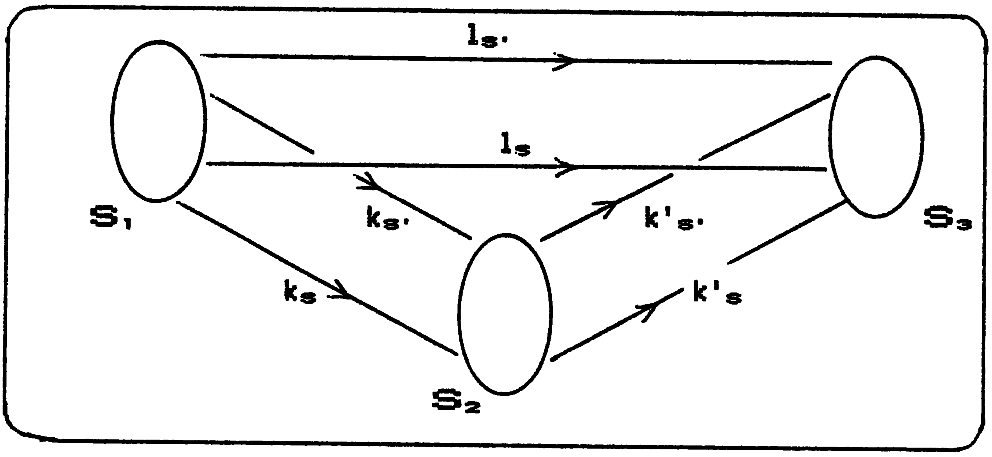


- puis, pour esquisser le composé de deux homomorphismes se succédant, soient $h : R \to R'$ et $h' : R' \to R''$, on regarde le couple (h', h) comme une réalisation de $//\mathbb{S}// \otimes //2½//$. Elle envoie k_s sur h_s et k'_s sur h'_s, etc...et on constate que cette réalisation se prolonge de manière canonique en une réalisation $//h', h//$ de $//\mathbb{S}// \otimes //3//$ où $//3// = (3, 0, 0)$ et 3 est le graphe multiplicatif suivant:



$k'.k = 1$

$//\mathbb{S}// \otimes //3//$



la raison étant que justement, pour tout objet S de $\mathbb{S}$, les applications h'_S et h_S se composent et, pour toute flèche $s : S \to S'$ de $\mathbb{S}$, on trouve bien:

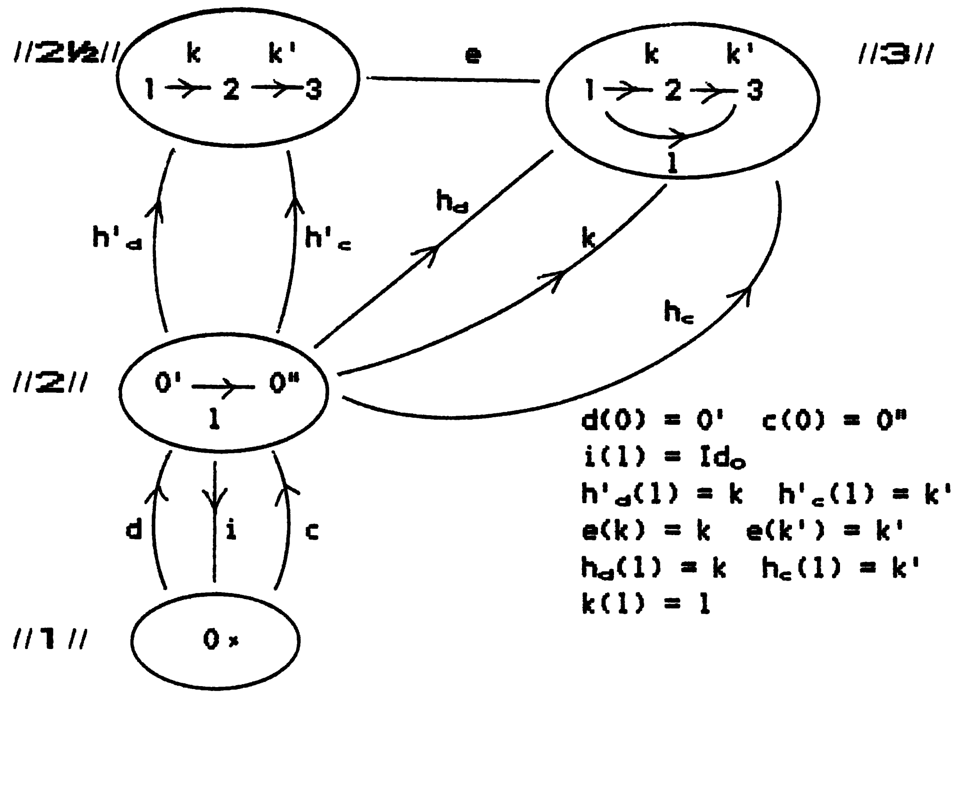
$$(h'_{S'}.h_{S'}).R(s) = h'_{S'}.(h_{S'}.R(s)) = h'_{S'}.(R'(s).h_S)$$

$$= (h'_{S'}.R'(s)).h_S = (R''(s).h'_S).h_S$$

$$= R''(s).(h'_S.h_S)$$

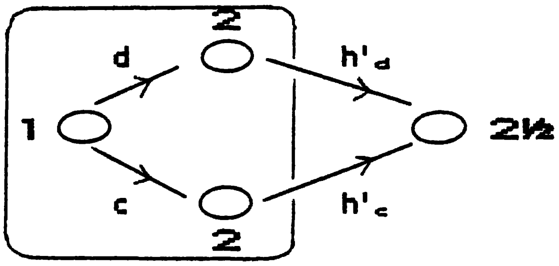
alors, pour définir le composé $h'.h$, on restreint la réalisation $//h',h//: //\mathbb{S}// \otimes //\mathbb{3}// \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ à la sous-esquisse de $//\mathbb{S}// \otimes //\mathbb{3}//$ (qui est isomorphe à $//\mathbb{S}// \otimes //\mathbb{2}//$) constituée des copies $//\mathbb{S}//_1$ et $//\mathbb{S}//_3$ et des seuls liens directs 1_S de $\mathbb{S}_1$ vers $\mathbb{S}_3$...

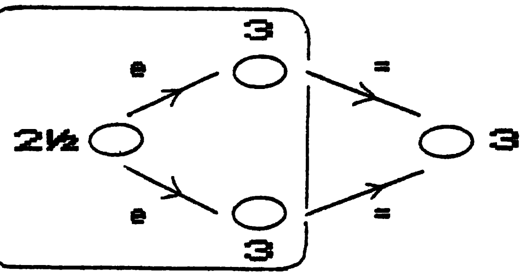
Au fond, ce qui intervient, de ce dernier point de vue, c'est d'une part l'esquisse $//\mathbb{S}//$, et d'autre part, quelques graphes multiplicatifs et homomorphismes entre eux, élémentaires, traités comme des esquisses triviales (i.e. sans cônes) et homomorphismes entre elles, que nous reproduisons dans un unique dessin:



$d(0) = 0'$ $c(0) = 0''$
$i(1) = Id_0$
$h'_d(1) = k$ $h'_c(1) = k'$
$e(k) = k$ $e(k') = k'$
$h_d(1) = k$ $h_c(1) = k'$
$k(1) = 1$

On remarque de plus que les deux cônes ci-dessous sont des sommes fibrées:





Cette dernière somme fibrée exprime que e est un épi.

Si on se reporte à la leçon 2, on reconnaît ici le *dessin* d'un graphe multiplicatif, à la dualité près, i.e. le sens des flèches est inversé (par voie de conséquence, les cônes limites projectives sont "inversés" en cônes limites inductives) et à quelques flèches près. Bref, il s'agit d'une *réalisation* de l'esquisse $/\Gamma_m/$ de graphe multiplicatif dans la duale de la catégorie des graphes multiplicatifs: on parle de *co-graphe multiplicatif dans la catégorie des graphes multiplicatifs.*

$$\mathbb{G}: /\Gamma_m/ \rightarrow (\mathbb{E}\mathrm{ns}^{/\Gamma_m/})^{op}$$

De même, si l'on considère les graphes multiplicatifs comme des esquisses triviales, on dispose d'un co-graphe multiplicatif dans $\mathbb{E}\mathrm{sq}$ associée à une quelconque esquisse $//\mathbb{S}//$; il suffit de *tensoriser* par $//\mathbb{S}//$ comme nous l'avons fait plus haut (le fait qu'il s'agisse effectivement d'un produit tensoriel peut être momentanément laissé de côté !)

C'est l'existence de telles co-graphes multiplicatifs $//\mathbb{S}// \otimes \mathbb{G}(-)$ dans la catégorie des esquisses qui rend compte de la structure de catégorie des $\mathbb{E}\mathrm{ns}^{//\mathbb{S}//}$, avec $//\mathbb{S}//$ variable.

Laissons ceci de côté pour l'instant, car nous y reviendrons en toute généralité très bientôt (cf. lemme de Yoneda / plongement de Yoneda, etc...). Non seulement l'existence de telles co-structures n'est pas anecdotique, mais elle est tout à fait générale et joue un rôle central dans la théorie.

5. Catégories de réalisations.

Terminons cette leçon en étendant la correspondance décrite ci-dessus entre:

- esquisse $//\mathbb{S}//$

et

- catégorie de réalisations $\mathbb{Ens}^{//\mathbb{S}//}$,

en une correspondance catégorique entre:

- homomorphismes entre esquisses $//H// : //\mathbb{S}// \to //\mathbb{S}'//$

et

- foncteurs entre catégories de réalisations $\mathbb{Ens}^H : \mathbb{Ens}^{//\mathbb{S}'//} \to \mathbb{Ens}^{//\mathbb{S}//}$.

On notera bien, ici encore, la dualité (i.e.: le renversement du sens des flèches).

Soit donc $//H// : //\mathbb{S}// \to //\mathbb{S}'//$ un homomorphisme entre esquisses et $R' : //\mathbb{S}'// \to \mathbb{Ens}$ une réalisation; alors $R'.H : \mathbb{S} \to \mathbb{Ens}$ est une réalisation de $//\mathbb{S}//$.
Soit encore $h' : R' \to R'_1$ un homomorphisme entre structures de type $//\mathbb{S}'//$; alors il y a un homomorphisme naturel entre les structures $R'.H$ et $R'_1.H$, naturellement noté $h'.H$, et défini par:

$$\forall\ S \in Ob(\mathbb{S}) \qquad (h'.H)_S = h'_{H(S)}.$$

On dispose alors d'un foncteur de la catégorie $\mathbb{Ens}^{//\mathbb{S}'//}$ vers la catégorie $\mathbb{Ens}^{//\mathbb{S}//}$, naturellement noté $\mathbb{Ens}^H$, et défini grâce aux correspondances précédentes:

- à l'objet R' de $\mathbf{Ens}^{//\mathbf{S}'//}$

il fait correspondre

- l'objet $R'.H$ de $\mathbf{Ens}^{//\mathbf{S}//}$

et

- à la flèche $h' : R' \to R'_1$ de $\mathbf{Ens}^{//\mathbf{S}'//}$

il fait correspondre

- la flèche $h'.H : R'.H \to R'_1.H$ de $\mathbf{Ens}^{//\mathbf{S}//}$.

La correspondance qui à $//H//$ associe $\mathbf{Ens}^{H}$ définit elle-même un foncteur de la catégorie des esquisses vers la duale de la catégorie des catégories:

$$\mathbf{Ens}^{\langle\ \rangle} : \mathbf{Esq} \to (\mathbf{CAT})^{op} ;$$

- à l'homomorphisme $H : //\mathbf{S}// \to //\mathbf{S}'//$ entre esquisses

il fait correspondre

- le foncteur $\mathbf{Ens}^{H} : \mathbf{Ens}^{//\mathbf{S}'//} \to \mathbf{Ens}^{//\mathbf{S}//}$
  entre catégories de réalisations.

Au sujet des notations, faisons juste une remarque: la notation exponentielle, empruntée aux nombres naturels, a été étendue d'abord aux ensembles (B^{A} désigne l'*ensemble* des applications de A vers B), ensuite aux catégories ($\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ désigne la *catégorie* des foncteurs de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$, i.e. ses objets sont les foncteurs de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$ et ses flèches les tranformations naturelles entre ces foncteurs), puis à des objets plus généraux, qui peuvent eux-mêmes être des flèches entre objets ($\mathbf{B}^{\mathbf{a}} : \mathbf{B}^{\mathbf{A}'} \to \mathbf{B}^{\mathbf{A}}$, avec $\mathbf{a} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}'$, et $\mathbf{B}$ étant un abrégé de $Id_{\mathbf{B}}$), etc... Au delà de cette simple remarque concernant la *notation exponentielle*, il y a bien sûr un problème de structures qui est posé: peut-on *toujours structurer*, si possible de manière naturelle, l'ensemble des morphismes entre deux objets de même nature, et si oui, de combien de façons ? En réalité, bien poser ce genre de question constitue une bonne part du problème. Nous traiterons de ces questions dans le chapître consacré aux catégories enrichies de structures, aux catégories monoïdales (fermées), et plus particulièrement cartésiennes (fermées).

Les foncteurs tels que $\mathbf{Ens}^{H}$ sont dits *foncteurs esquissés*, au même titre que sont dites *catégories esquissées* les catégories telles que $\mathbf{Ens}^{//\mathbb{S}//}$. On dit aussi que les foncteurs tels que $\mathbf{Ens}^{H}$ sont des *foncteurs d'omission* (ou *foncteurs d'oubli*).

Voyons cela plus en détail. Soit $R : //\mathbb{S}// \to \mathbf{Ens}$ une réalisation d'une esquisse $//\mathbb{S}//$. Pour beaucoup de structures usuelles il se trouve que leurs esquisses possèdent un objet privilégié S_0 , en ce sens que l'ensemble $R(S_0)$ porte le nom d' *ensemble sous-jacent* à la structure, pour une raison à préciser. Pour d'autres structures, tout aussi usuelles, il apparaît naturellement non pas *un* ensemble sous-jacent privilégié, mais plusieurs; c'est le cas, par exemple, pour les graphes, graphes multiplicatifs, catégories, où on dispose naturellement d'au moins deux ensembles sous-jacents naturels, à savoir:

- l'ensemble des objets,
- l'ensemble des flèches;

pour les graphes multiplicatifs, un troisième ensemble sous-jacent naturel s'impose:

- l'ensemble des couples composables.

Ces remarques, de type heuristique, ont des conséquences en théorie des esquisses.

a) Si certains objets de certaines esquisses apparaissent comme privilégiés pour définir un (ou des) ensemble(s) sous-jacent(s) naturel(s), il doit y avoir une raison technique, exprimable en termes purement syntaxiques, expliquant ce phénomène; en gros, c'est ici qu'intervient la notion d' ***ensemble générateur d'objets d'une esquisse***. Sans trop entrer dans les détails techniques, disons ceci: soit $\mathbb{G}_0$ un ensemble d'objets de $//\mathbb{S}//$ et soit $\mathbb{G}$ le sous-graphe de $\mathbb{S}$, dit sous-graphe *plein* de $\mathbb{S}$, contenant avec deux objets G et G' l'ensemble de toutes les flèches de $\mathbb{S}$ qui vont de G à G'; on dit alors qu'un objet S de $\mathbb{S}$ se *déduit* directement de $\mathbb{G}_0$ s'il existe un cône distingué de sommet S et de base dans $\mathbb{G}$; on dispose alors de l'ensemble $\mathbb{G}_1$ des objets qui sont soit dans $\mathbb{G}_0$, soit déduits directement de $\mathbb{G}_0$ (l'un n'excluant pas l'autre d'ailleurs !) On définit la suite des $\mathbb{G}_\lambda$ par récurrence (éventuellement transfinie) et on dit que $\mathbb{G}_0$ est un ensemble générateur d'objets de $//\mathbb{S}//$ s'il existe un ordinal λ tel que $\mathbb{G}_\lambda = \mathrm{Ob}(\mathbb{S})$. Voilà donc, en ce qui concerne les ensembles sous-jacents naturels ou privilégiés, ce que l'on peut dire techniquement.

b) Si nous ne voulons pas, pour l'instant, envisager de telles nuances, c'est notre droit, mais alors, on doit en tirer une conséquence: c'est qu'il n'y a aucune raison de privilégier un (ou des) objet(s) d'une esquisse générale $//\mathbb{S}//$; tous doivent compter : il y a *les ensembles sous-jacents* R(S) , avec $S \in Ob(\mathbb{S})$, à la structure R. Mieux, au cas où $R(S) \cap R(S') \neq \emptyset$ avec $S \neq S'$, on veut pouvoir distinguer un élément x selon qu'il est de *sorte* S ou de *sorte* S'; alors on préférera à la réunion des R(S) leur somme disjointe $\sum_S R(S)$ qui n'est autre que l'ensemble des objets du graphe multiplicatif des hypermorphismes associé à $R : //\mathbb{S}// \to \mathbb{E}ns$, et que nous avons noté $\mathbb{H}_R$. Allons un peu plus loin dans ce sens ; les hypermorphismes (s,x), avec $s : S \to S'$ et $x \in R(S)$, apparaissent *aussi* comme des *éléments de la structure* R ; mais leur *fonction* au sein de la structure est de relier entre eux les éléments (au sens plus ordinaire rappelé ci-dessus) des R(S). De plus, la composition des hypermorphismes, telle qu'elle a été définie à la leçon 4, tient compte des liens purement syntaxiques (i.e. la table de multiplication de $\mathbb{S}$) existant entre ces liens (sic !)

Ainsi, ce qui se substitue à l'usuel ensemble sous-jacent est, en toute généralité, maintenant, le graphe multiplicatif sous-jacent $\mathbb{H}_R$; il est fibré au dessus de $\mathbb{S}$ par $h_R : \mathbb{H}_R \to \mathbb{S}$. A toute structure de type $//\mathbb{S}//$ correspond donc une fibration discrète naturelle au dessus de $\mathbb{S}$, mais bien sûr, une fibration discrète quelconque au dessus de $\mathbb{S}$ n'a aucune raison a priori d'être associée à une structure de type $//\mathbb{S}//$; elle est seulement associée à un foncteur de $\mathbb{S}$ vers $\mathbb{E}ns$.

c) Laissant maintenant de côté la différence qu'il y a entre:

- *foncteur* $R : \mathbb{S} \to \mathbb{E}ns$
- et *fibration* associée $h_R : \mathbb{H}_R \to \mathbb{S}$,

nous pouvons dire qu'il y a sous-jacent à la structure $R : //\mathbb{S}// \to \mathbb{E}ns$ le foncteur $R : \mathbb{S} \to \mathbb{E}ns$.

d) Soit $\mathbb{1}$ l'esquisse triviale n'ayant qu'un objet et sa flèche identique, et n'ayant aucun cône distingué. Soit toujours $//\mathbb{S}//$ une esquisse et soit S un objet de $\mathbb{S}$. Le foncteur d'oubli qui à toute réalisation R de $//\mathbb{S}//$ associe son "ensemble sous-jacent de sorte" S, i.e. R(S) , n'est autre que le foncteur $\mathbb{E}ns^{[S]}$ où $[S] : \mathbb{1} \to //\mathbb{S}//$ est l'homomorphisme qui *sélectionne* l'objet S de $\mathbb{S}$. Ce foncteur d'oubli est encore appelé *foncteur d'évaluation en* S , et désigné alors brièvement par le symbole suggestif ev_S , car, en convenant d'identifier les catégories $\mathbf{Ens}^1$ et $\mathbf{Ens}$, on trouve que $\mathbf{Ens}^{(S)}(R)$ n'est autre que R(S) !

Convenons encore d'identifier $\mathbb{S}$ et l'esquisse dépourvue de cônes ($\mathbb{S}$, 0, 0). Le foncteur d'oubli généralisé dont il a été question plus haut en (2) et (3) , qui associe à toute réalisation R : $//\mathbb{S}//$ → $\mathbf{Ens}$ son "foncteur sous-jacent" R est encore de la forme $\mathbf{Ens}^H$ où H est l'homomorphisme naturel $\mathbb{S}$ → $//\mathbb{S}//$ (défini par l'identité). On peut dire que c'est le foncteur "oubli des cônes distingués".

Ainsi, les foncteurs $\mathbf{Ens}^H$, où H : $//\mathbb{S}//'$ → $//\mathbb{S}//$ décrivent tous les "oublis" possibles. Un tel homomorphisme "sélectionne" dans $//\mathbb{S}//$ ce qui est de "forme" $//\mathbb{S}//'$ et le foncteur d'oubli associé $\mathbf{Ens}^H$ fait correspondre à toute structure R de type $//\mathbb{S}//$ une structure "sous-jacente" de type $//\mathbb{S}//'$.

6. Questions de taille.

Au point où nous en sommes arrivés, nous devons préciser un peu les questions de taille. Bien évidemment, des objets tels que:

$//\mathbb{S}//$, $\mathbb{S}$, $\mathbf{Ens}$, $\mathbf{Ens}^{//\mathbb{S}//}$, $\mathbf{Ens}^{\mathbb{S}}$, $\mathbf{Esq}$, $\mathbf{Cat}$, $\mathbf{CAT}$,

bien qu'ayant une structure algébrique qui leur est commune (à savoir celle de graphe multiplicatif, voire de catégorie) ne sont pas de même ordre de grandeur.

On dispose de plusieurs cadres formels possibles pour développer techniquement ces questions de tailles relatives. Les deux plus connus sont:

- la théorie des *univers* (C.Ehresmann disposait de 3 univers emboîtés et s'appartenant mutuellement $\mathcal{U} \in \mathcal{U}_1 \in \mathcal{U}_2$, correspondant à peu près à la hiérarchie rencontrée plus haut $\mathbb{S}$ / $\mathbf{Ens}^{\mathbb{S}}$ / $\mathbf{CAT}$, qu'on pourrait qualifier, du point de vue taille par *"petit / grand / très grand"*)
- la théorie des *classes*, où certaines classes sont des ensembles et d'autres non (comme la classe de *tous les ensembles*).

Sans entrer dans la description axiomatique de telles théories, nous fixerons quand même ici un minimum de terminologie concernant ces questions: le mot *petit* pourra être pris comme synonyme de "est un ensemble du plus petit univers $\mathcal{U}$ ", si on se place dans une théorie des univers, ou de "est un ensemble", si on se place dans une théorie des classes. Le mot *grand* sera pris dans le sens de "non petit" ou parfois dans le sens de "pas forcément petit".

Un graphe multiplicatif (resp. une catégorie) $\mathbb{S}$ sera dit *petit* si $\mathrm{Ob}(\mathbb{S})$ et $\mathrm{Fl}(\mathbb{S})$ sont petits.

Un cône sera dit *petit* si l'indexation de sa base est petite.

Une esquisse $//\mathbb{S}// = (\mathbb{S}, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ sera dite *petite* si
- son graphe multiplicatif sous-jacent $\mathbb{S}$ est petit
- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont petits
- chaque cône, élément de $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$, est petit.

Lorsque nous avons esquissé les esquisses (leçon 3) nous avons fixé deux ensembles $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ de graphes multiplicatifs $\mathbb{I}$ petits (d'indexations possibles des bases de cônes distingués) afin que l'esquisse de $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse soit petite. Sa catégorie de réalisations a été désignée par $\mathbb{E}\mathrm{sq}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. La catégorie des esquisses (petites) $\mathbb{E}\mathrm{sq}$ n'est pas naturellement de la forme $\mathbb{E}\mathrm{ns}^{/\mathbb{S}/}$, avec $/\mathbb{S}/$ petite, bien qu'elle soit de même taille que ses sous-catégories du genre $\mathbb{E}\mathrm{sq}_{\mathcal{I}\mathcal{J}}$. Par contre, elle est naturellement de la forme $\mathbb{E}\mathrm{ns}^{/\Sigma/}$ où $/\Sigma/$ est une grande esquisse (projective) facile à décrire à partir des esquisses des $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisses, avec $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ variables.

Une catégorie $\mathbb{C}$ est dite *localement petite* si, pour tout couple d'objets (X,Y), la classe des flèches de X vers Y, notée $\mathrm{Hom}(X,Y)$ (ou plus précisément $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X,Y)$) est petite.

Une catégorie petite est localement petite. L'inverse est faux en général. Nous disposons de nombreux exemples de catégories localement petites, non petites:

$\mathbb{E}\mathrm{ns}^{//\mathbb{S}//}$, avec $//\mathbb{S}//$ petite,

$\mathbb{E}\mathrm{sq}$, bien qu'elle ne soit pas petitement esquissable.

Ce que nous avons désigné plus haut par $\mathbb{CAT}$ (par opposition à $\mathbb{C}\mathrm{at}$, catégorie des petites catégories) est la catégorie des catégories localement petites; elle a pour objets des catégories telles que $\mathsf{Ens}^{//S//}$, Esq, etc..., mais aussi les petites catégories ! Ainsi par exemple, Cat est aussi bien une *sous-catégorie* de CAT qu'un *objet* de CAT; il faut bien distinguer ces deux relations entre Cat et CAT , qui ne sont pas directement comparables...

Les foncteurs entre deux catégories localement petites constituent, en général, une classe non petite. La catégorie CAT n'est pas localement petite. Elle est *très grande*.

Un des problèmes que nous aborderons bientôt est le suivant: supposons donnée une catégorie localement petite C. Existe-t-il une esquisse petite $//S//$ telle que C soit de la forme $\mathsf{Ens}^{//S//}$, et, de façon plus précise, si l'on connaît certaines propriétés de C , peut-on en déduire que C est esquissable par une esquisse de forme particulière ? Ceci pose directement le problème général (et pour l'instant un peu vague!) d'une classification des esquisses. Il se trouve que chronologiquement on a d'abord construit "les" esquisses des structures mathématiques les plus usuelles (on les présentera dans la leçon suivante: dictionnaire d' esquisses). Ensuite, il est apparu que les constructions les plus habituelles sur ces structures avaient une interprétation syntaxique liée aux formes des esquisses considérées. Classifier les esquisses, c'est alors rendre systématique ce procédé de traduction entre la *sémantique* (constructions et propriétés des structures) et la *syntaxe* (géométrie des esquisses). C'est ce qui sera développé à partir du fascicule n° 3.

Leçon 6

Dictionnaire d'esquisses

0. Un abus de langage.

Lorsqu'on parle de *la* définition de *tel* type de structures on commet à l'évidence un certain abus de langage puisqu'en général *ce* type de structures est susceptible de *multiples* définitions. Il serait a priori plus correct de parler d'*une* définition de *tel* type de structures. Cependant, si l'on commet volontiers cet abus de langage, c'est qu'on veut exprimer par l'emploi du singulier [*la* définition] l'*univocité* du type de structures qui se trouve déterminé (par *la* définition proposée), conscient que d'autres présentations (définitions) "équivalentes" pourraient être fournies. Encore faudrait-il préciser ce qu'on entend par "type de structures", c'est-à-dire en donner *une* définition . On peut envisager au moins deux manières classiques de procéder:

- l'une consiste à décrire explicitement une "équivalence entre définitions", en fixant par exemple des règles de transformations élémentaires permettant de passer d'une définition à une définition "équivalente". Une classe d'équivalence est alors un type. Notons qu'il peut être utile, voire indispensable, d'envisager plusieurs genres d'équivalences , c'est-à-dire plusieurs genres de types possibles.

- l'autre consiste à se donner une certaine classe de types ayant une structure commune précisée dans *une* définition appropriée. Un type de structures est donc, de ce point de vue, une (autre) structure. Il est souhaitable alors de prévoir plusieurs structures (pour les types) possibles, i. e. plusieurs types de types. Une récurrence des types s'amorce alors naturellement, qui n'a aucune raison a priori de "s'arrêter". Ainsi, nous serons amenés à préciser techniquement, et en s'en tenant au langage graphico-algébrique des esquisses;

de[s] esquisse[s] de type[s],
de[s] type[s] de type[s],
de[s] type[s] d'esquisse[s],

et ceci prolongera tout naturellement le travail amorcé dans la leçon 3, où nous avons décrit une esquisse des esquisses.

Nous pouvons dire, en gros, que l'idée générale de *type* est celle d'*esquisse suffisamment complète* (tant algébriquement que géométriquement), et que les types seront donc pour le moins des catégories possédant suffisamment de limites de formes prescrites, certaines d'entre elles pouvant être *distinguées*. L'analogie avec le point de vue plus classique des logiciens est la suivante: une esquisse est à *son* type ce qu'une théorie du 1er ordre est à *la* théorie *complète* qu'elle engendre (notons qu'on retrouve ici encore la discussion sur *singulier* et *pluriel*, et qu'il conviendrait justement de préciser, par exemple, les règles de déduction syntaxiques qui permettent de définir *une* telle théorie complète).

On peut encore dire que les types sont des structures libres (de types particuliers !) engendrées par des *systèmes de générateurs et relations* que sont justement les esquisses. A ce titre, les constructions, l' existence etc... de ces types ressortent de la théorie générale des *structures libres* qu'on abordera ultérieurement.

1. Dénomination des structures.

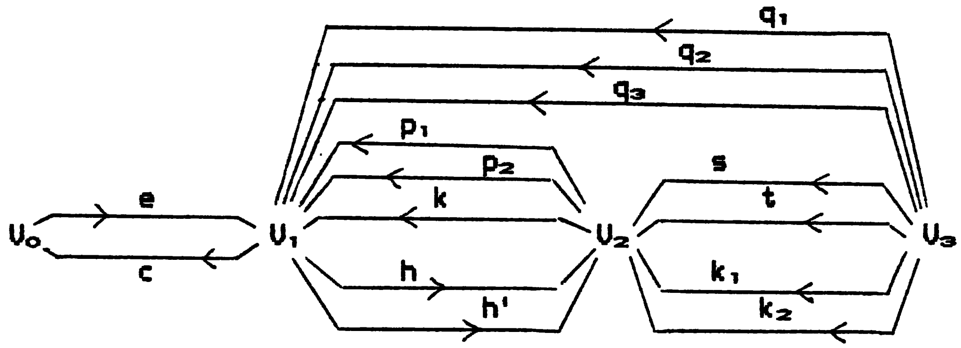
On donne souvent aux structures esquissées le nom générique de structures ensemblistes. Sont ainsi privilégiés les noms usuels des structures ensemblistes usuelles dont nous proposons ci-dessous des esquisses, mais sur certains exemples simples, nous constaterons que ce choix n'est pas forcément le plus judicieux, et nous proposerons donc parfois un nom plus *générique*.

Dans la suite de cette leçon, nous parlerons donc d'esquisse(s) de(s) structure(s) et non d'esquisse(s) de type(s) de structure(s), ce qui pourrait entretenir une certaine confusion, étant donné ce qui a été dit plus haut.

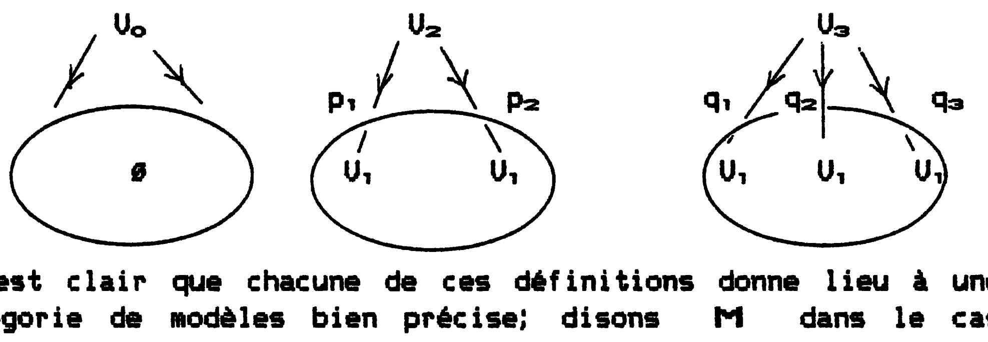
Ainsi, et par exemple, on parlera d'une esquisse (ou de *l*'esquisse, avec l'abus de langage discuté plus haut) des monoïdes, signifiant par là que *les* réalisations ensemblistes de cette esquisse sont "*les* monoïdes". Mais, là encore, une ambigüité subsiste, non pas tant dans la "terminologie" que dans "la forme même" des définitions. Expliquons cela plus en détail, en reprenant l'exemple des monoïdes (cf. leçon 1): supposons que l'on dispose d'une part de la catégorie des ensembles, notée jusqu'ici $\mathbb{Ens}$, et d'autre part de deux définitions des monoïdes:

- l'une, disons classique, sous forme de "théorie du 1er ordre",
- l'autre, disons moins classique, sous forme de l'esquisse de monoïde constituée dans la leçon 1, notée ici $\mathbb{E}$, et dont nous rappelons les principaux éléments et leurs notations:

graphe orienté sous-jacent à $\mathbb{E}$



cônes projectifs distingués sous-jacents à $\mathbb{E}$



Il est clair que chacune de ces définitions donne lieu à une catégorie de modèles bien précise; disons $\mathbb{M}$ dans le cas classique, et $\mathbb{M}'$ = Mod($\mathbb{E}$) dans l'autre cas. Ces deux catégories ne sont pas *isomorphes*. Elles sont seulement ***équivalentes***. Précisons une telle équivalence:

- à un monoïde M, au sens classique, on peut associer, par exemple, la réalisation $R_M : \mathbb{E} \to \mathbf{Ens}$ qui envoie

U_0	sur	$\{\emptyset\}$,
U_1	sur	M,
U_2	sur	$M \times M$,
U_3	sur	$M \times M \times M$,

et où les projections (formelles) distinguées p_1 et p_2 sont envoyées respectivement sur les première et deuxième projections canoniques de $M \times M$ vers M, et où les projections (formelles) distinguées q_1, q_2 et q_3 sont envoyées respectivement sur les première, deuxième et troisième projections canoniques de $M \times M \times M$ vers M. Se trouve ainsi déterminé un premier foncteur $\gamma : \mathbf{M} \to \mathbf{M}'$, qui est défini sur les objets par $\gamma(M) = R_M$ et sur les flèches de manière évidente (et automatique !).

- à une réalisation $R : \mathbb{E} \to \mathbf{Ens}$, on peut faire correspondre le monoïde M_R, au sens classique, suivant: son ensemble sous-jacent est l'ensemble $M = R(U_1)$, et, pour tout couple (y,x) d'éléments de M, on définit le composé $y.x$ comme étant égal à $R(k)(\varphi_R(y,x))$, où $k : U_2 \to U_1$ est la composition formelle (dans l'esquisse $\mathbb{E}$) et où φ_R est l'unique bijection possible, de $R(U_1) \times R(U_1)$ vers $R(U_2)$, qui transforme le produit cartésien usuel (et ses projections canoniques) en le cône limite projective image par R du cône projectif distingué voulu de $\mathbb{E}$, etc... Se trouve ainsi déterminé un autre foncteur $\gamma' : \mathbf{M}' \to \mathbf{M}$, qui est défini sur les objets par $\gamma'(R) = M_R$ et sur les flèches de manière évidente (et automatique !).

Les deux foncteurs γ et γ' ne sont pas inverses l'un de l'autre, mais ils définissent ce qu'on appelle une *équivalence* de catégories, c'est-à-dire que $\gamma.\gamma'$ et $\gamma'.\gamma$ sont naturellement (au sens des transformations naturelles!) isomorphes aux foncteurs identiques convenables; plus particulièrement ici:

$$\gamma'.\gamma = Id_{\mathbf{M}} \quad \text{et} \quad \gamma.\gamma' \simeq Id_{\mathbf{M}'}.$$

ce dernier isomorphisme étant déterminé par les bijections telles que φ_R.

On voit bien que la raison précise qui conduit à opérer une telle différence, entre *équivalence* et *isomorphisme* de catégories, c'est que, dans la définition classique, analysée d'un point de vue catégorique, il y a un *choix* (implicite ?) de limites projectives particulières dans $\mathbb{Ens}$ (limites réputées "canoniques") .

Remarques d'ordre historique. Lorsque certains catégoriciens ont donc parlé (dans les années 70-75) de catégories à limites *choisies* de certains types *choisis*, ils étaient, de ce fait, dans le droit fil des "classiques", mais ... du point de vue catégorique. Ceux qui, à l'inverse, ne s'intéressaient pas aux catégories à limites choisies, prétextant parfois que c'était une complication pointilleuse inutile, se mettaient du même coup en marge de ce qui s'était fait jusqu'alors, ... et pourquoi pas ? Mais étaient-ils en droit de faire un faux procès aux tenants des catégories à limites *choisies*, lesquels ne s'accrochaient pas d'ailleurs systématiquement à leur point de vue, mais opéraient, parcequ'il était bien nécessaire de le faire scientifiquement, une distinction nette entre catégories à limites et catégories à limites *choisies* ? Il faut ajouter que si ces deux genres de structures se "ressemblent" et ne nécessitent pas toujours d'être aussi soigneusement distingués, ils admettent des esquisses et des types fort différents (les catégories à limites choisies sont esquissables projectivement - voir plus loin - tandis que les catégories à limites ne le sont pas - mais sont cependant esquissables par une esquisse mixte). Dès le début, C. Ehresmann et ses élèves faisaient explicitement cette distinction et parlaient de "réalisations vagues" (i.e. de celles qu'on a défini dans la leçon 5 dans le cadre ensembliste) et de "réalisations strictes" (i.e. de celles qu'on peut définir lorsqu'on décide d'envoyer les cônes distingués sur des limites choisies d'une catégorie à limites choisies), de "types vagues" et de "types stricts".

Pour finir ce paragraphe, fixons quelques notations et conventions.

- Un graphe multiplicatif $\mathbb{G}$ sera identifié à l'esquisse triviale $(\mathbb{G}, \emptyset, \emptyset)$, où aucun cône n'est distingué.

- Le symbole $*$ désignera génériquement un ensemble à un élément, dont on sera amené parfois à préciser la nature.

- On notera $\mathbb{U}$ le graphe multiplicatif trivial ayant un seul objet U et une seule flèche, l'identité de U.

- On rappelle que Mod($\mathbb{E}$, $\mathbb{C}$) désigne la catégorie des modèles (ou réalisations) de l'esquisse $\mathbb{E}$ dans la catégorie $\mathbb{C}$, et que, plus brièvement, la catégorie Mod($\mathbb{E}$, $\mathbb{E}\mathrm{ns}$) est notée Mod($\mathbb{E}$).

2. Quelques esquisses ... très petites.

2.0 L'esquisse vide.

Son graphe multiplicatif sous-jacent est $\varnothing$ et, nécessairement, aucun cône ne peut y être distingué. Quelle que soit la catégorie $\mathbb{C}$, la catégorie Mod($\varnothing$, $\mathbb{C}$) est isomorphe à $\mathbb{U}$: elle n'a donc qu'un modèle (la réalisation vide $0 : \varnothing \to \mathbb{C}$) et son identité (l'identité vide du vide).

2.1 L'esquisse des ensembles.

C'est l'esquisse $\mathbb{U}$. Elle n'a pas de cône distingué. La catégorie Mod($\mathbb{U}$) est isomorphe à $\mathbb{E}\mathrm{ns}$.

Plus généralement, la catégorie Mod($\mathbb{U}$, $\mathbb{C}$) est isomorphe à $\mathbb{C}$. Ainsi, $\mathbb{U}$ devrait plutôt s'appeler esquisse des objets. Il faut noter encore ceci: une flèche $f : C \to D$ de $\mathbb{C}$ apparaît, de ce point de vue, comme une transformation naturelle entre foncteurs (constants sur C et D!), la naturalité s'exprimant ici par les seules équations dites triviales: $f.Id_C = Id_D.f = f$.

2.2 L'esquisse des applications.

C'est l'esquisse $\mathbb{2}$ constituée du graphe multiplicatif trivial suivant: $0 \xrightarrow{u} 1$, sans cônes distingués. Les modèles ensemblistes sont les applications et un morphisme entre deux applications f et g est déterminé par la donnée d'un couple d'applications (h,h') tel que $h'.f$ et $g.h$ soient définies et égales (carré commutatif d'applications, appelé aussi *quatuor* par Ehresmann).

Plus généralement, la catégorie $\mathrm{Mod}(2, \mathbb{C})$ est isomorphe à la catégorie $\square\mathbb{C}$ ayant les flèches de $\mathbb{C}$ pour objets et les quatuors de $\mathbb{C}$ pour flèches. Ainsi, $\mathbb{2}$ devrait plutôt s'appeler l'esquisse des flèches.

2.3 L'esquisse du vide.

C'est l'esquisse $\mathbb{U}_0 = (\mathbb{U}, \emptyset, *)$, où le seul cône inductif distingué a une base vide. La catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{U}_0)$ est réduite à un objet et son identité: l'ensemble vide et l'application vide. Disons que cette esquisse permet de caractériser l'objet $\emptyset$ dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ (d'où son nom).

Plus généralement, $\mathrm{Mod}(\mathbb{U}_0, \mathbb{C})$ est isomorphe au groupoïde des objets initiaux de $\mathbb{C}$ (tous isomorphes entre eux et de façon unique), lequel groupoïde est équivalent à $\mathbb{U}$ si $\mathbb{C}$ possède au moins un objet initial, et est vide autrement. En résumé:

$\mathrm{Mod}(\mathbb{U}_0, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{U}$ ou $= \emptyset$ selon que $\mathbb{C}$ a ou n'a pas d'objet initial.

Ainsi, $\mathbb{U}_0$ devrait plutôt s'appeler esquisse d'objet initial.

2.4 L'esquisse des singletons.

C'est l'esquisse $\mathbb{U}_1 = (\mathbb{U}, *, \emptyset)$, où le seul cône projectif distingué a une base vide. La catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{U}_1)$ est le groupoïde des ensembles à un élément (ou *singletons*!)

Plus généralement, $\mathrm{Mod}(\mathbb{U}_1, \mathbb{C})$ est isomorphe au groupoïde des objets finaux de $\mathbb{C}$ (tous isomorphes entre eux et de façon unique), lequel groupoïde est équivalent à $\mathbb{U}$ si $\mathbb{C}$ possède au moins un objet final, et est vide autrement. En résumé:

$\mathrm{Mod}(\mathbb{U}_1, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{U}$ ou $= \emptyset$ selon que $\mathbb{C}$ a ou n'a pas d'objet final.

Ainsi, $\mathbb{U}_1$ devrait plutôt s'appeler esquisse d'objet final. De ce point de vue, le fait que, dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$, les objets finaux soient les singletons est anecdotique.

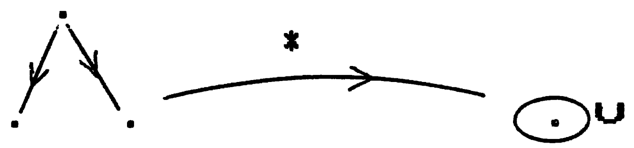
2.5 L'esquisse de rien.

C'est l'esquisse $\mathbb{U}_{0=1}$ = ($\mathbb{U}$, *, *), où le seul cône projectif (resp. inductif) distingué a une base vide. Il est clair qu'il n'y a pas de modèle ensembliste de cette esquisse, d'où l'appellation "esquisse de rien" conforme au choix de dénomination convenu plus haut. Là encore, on constate que ce choix n'est pas très judicieux! Ainsi, par exemple, la catégorie des réalisations de $\mathbb{U}_{0=1}$ dans la catégorie des groupes est équivalente à $\mathbb{U}$: c'est le groupoïde des groupes "nuls" (réduits à leur élément neutre !) L'esquisse $\mathbb{U}_{0=1}$ devrait plutôt s'appeler l'esquisse d'objet nul (i.e. à la fois initial et final), car un objet nul, lorsqu'il y en a, ce n'est pas rien.

Remarque. On vient de décrire une esquisse mixte dont la catégorie des modèles ensemblistes est $\mathbb{\emptyset}$. Il est inutile de rechercher une esquisse projective $\mathbb{E}$ telle que Mod($\mathbb{E}$) = $\mathbb{\emptyset}$, car la catégorie des modèles de $\mathbb{E}$ devrait posséder alors toutes les petites limites projectives, comme nous le verrons bientôt, or $\mathbb{\emptyset}$ n'a pas de 0-produit (i.e. objet final) bien qu'il y ait un diagramme, indexé par ø , dans $\mathbb{\emptyset}$ (c'est d'ailleurs le seul défaut de complétion de $\mathbb{\emptyset}$!)

2.6 L'esquisse de pas grand chose.

C'est l'esquisse $\mathbb{U}_{<1}$ = ($\mathbb{U}$, *, 0), où le seul cône projectif distingué a une base d'indexation discrète à deux éléments:



Les réalisations de $\mathbb{U}_{<1}$ dans $\mathbf{Ens}$ sont les ensembles E tels que, quel que soit l'ensemble X, l'ensemble Hom(X,E) des applications de X vers E a au plus un élément; il y a donc, d'une part l'ensemble vide, et d'autre part les singletons. La catégorie Mod($\mathbb{U}_{<1}$) est donc équivalente à la catégorie triviale suivante:

$$0 \longrightarrow 1$$

Plus généralement, désignons par $\mathrm{Ord}(\mathbb{C})$ la sous-catégorie pleine de $\mathbb{C}$ ayant pour objets les objets E de $\mathbb{C}$ tels que, pour tout objet X de $\mathbb{C}$, $\mathrm{Hom}(X,E)$ a au plus un élément. C'est une catégorie associée à un préordre (donc équivalente à un ordre). La catégorie des modèles de $\mathbf{U}_{<1}$ dans $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathrm{Ord}(\mathbb{C})$.

3. Esquisses de structures usuelles.

L'objectif de ce paragraphe n'est pas de décrire, en les esquissant, le maximum de structures connues en mathématiques, mais de convaincre le lecteur que la chose est théoriquement possible, pour peu qu'on s'y prenne bien.

Il n'est pas non plus d'expliciter le rapport exact entre "formules du 1er ordre" et "formules algébrico-géométriques" de la théorie des esquisses, qui fera l'objet d'une autre leçon, mais de convaincre le lecteur qu'un tel rapport existe.

Il n'est pas non plus de calculer "à la main", sur des exemples, divers types de limites inductives dans la catégorie des esquisses, ce qui, de toute manière, ressort du calcul général des limites dans les catégories de modèles (la catégorie des esquisses en est une), mais de faire voir au lecteur comment on produit de nouvelles esquisses par de tels calculs.

En gros, dans ce qui suit, il y a une esquisse par page. Les flèches "identité" n'y figurent pas et les équations triviales sont omises.

3.1 Esquisse des magmas.

Graphe orienté sous-jacent:

$$
\begin{tikzcd}
S & S' \arrow[l, bend right=40, "p_1"'] \arrow[l, "k"] \arrow[l, bend left=40, "p_2"]
\end{tikzcd}
$$

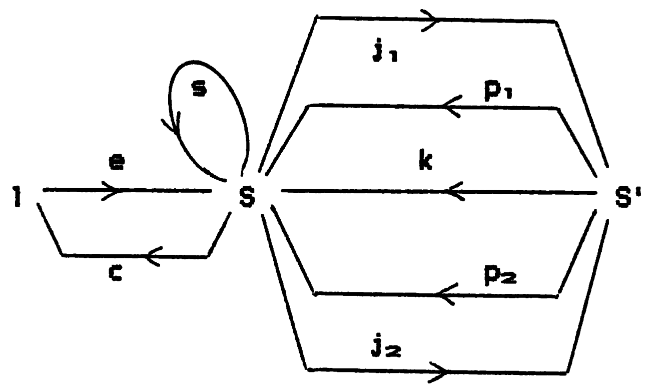
Equations: pas d'autre équation que les triviales.

Cônes distingués: un seul cône projectif

$$
\begin{tikzcd}
S & \\
& S' \arrow[ul, "p_1"'] \arrow[dl, "p_2"] \\
S &
\end{tikzcd}
$$

3.2 Esquisse des magmas unitaires.

Graphe orienté sous-jacent:



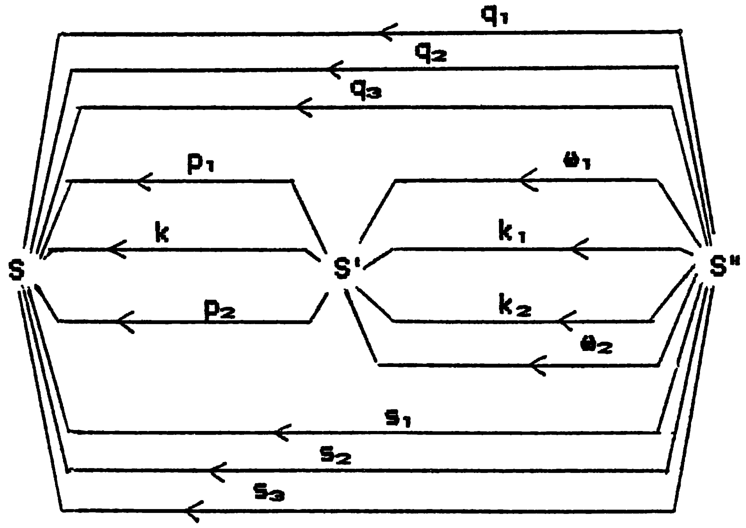
Equations:

$e.c = s$	$p_1.j_1 = s$	$p_1.j_2 = Id_S$
$k.j_1 = k.j_2 = Id_S$	$p_2.j_1 = Id_S$	$p_2.j_2 = s$

Cônes distingués: deux cônes projectifs

3.3 Esquisse des magmas associatifs ou demi-groupes.

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

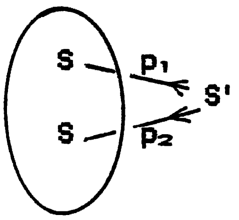
$p_1.\omega_1 = q_1$ $\qquad$ $p_1.\omega_2 = q_2$
$p_2.\omega_1 = q_2$ $\qquad$ $p_2.\omega_2 = q_3$

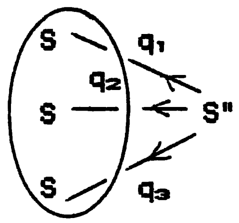
$k.\omega_1 = s_1$
$k.\omega_2 = s_2$

$p_1.k_1 = s_1$ $\qquad$ $p_1.k_2 = q_1$
$p_2.k_1 = q_3$ $\qquad$ $p_2.q_2 = s_2$

$k.k_1 = k.k_2 = s_3$

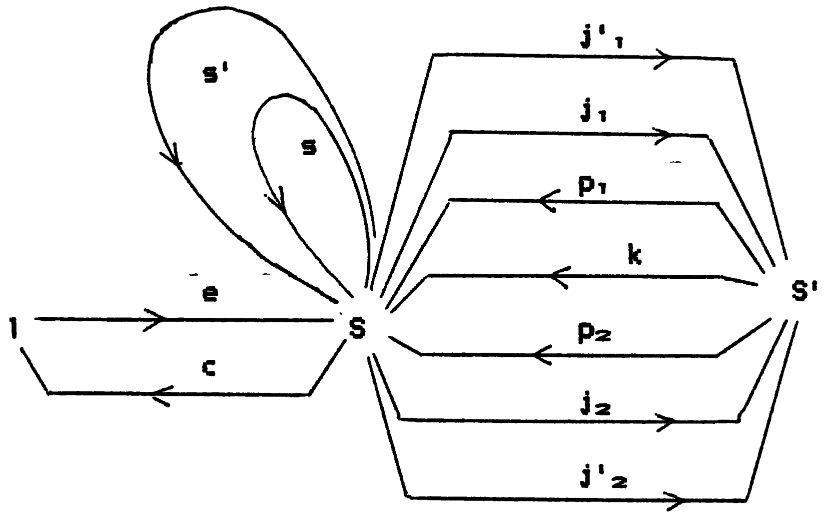
Cônes distingués: deux cônes projectifs





3.4 Esquisse des magmas unitaires à choix d'inverses.

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

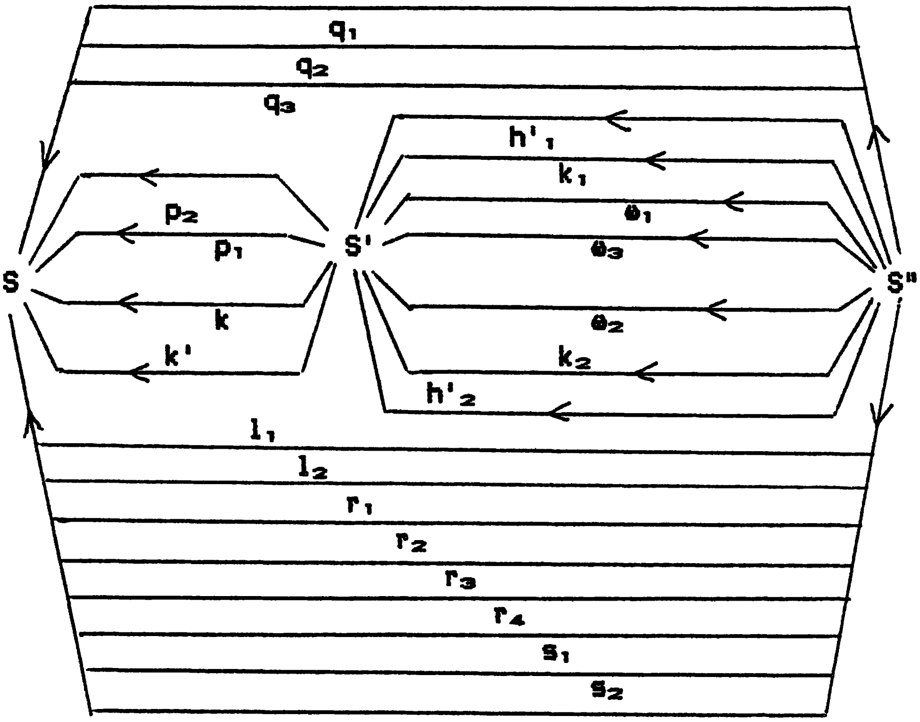
$e.c = s$

$p_1.j_1 = s$	$p_1.j'_1 = s'$
$p_2.j_1 = Id_S$	$p_2.j'_1 = Id_S$
$p_1.j_2 = Id_S$	$p_1.j'_2 = Id_S$
$p_2.j_2 = s$	$p_2.j'_2 = s'$
$k.j_1 = k.j_2 = Id_S$	$k.j'_1 = k.j'_2 = s$

Cônes distingués:
deux cônes projectifs

3.5 Esquisses des bi-magmas.

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

$p_1.\theta_1 = q_1$ $\quad$ $p_1.\theta_2 = q_2$ $\quad$ $p_1.\theta_3 = q_1$

$p_2.\theta_1 = q_2$ $\quad$ $p_2.\theta_2 = q_3$ $\quad$ $p_2.\theta_3 = q_3$

$p_1.k_1 = k.\theta_1 = s_1$ $\quad$ $p_1.k_2 = q_1$

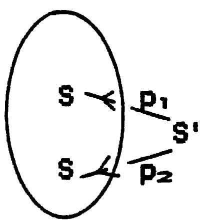
$p_2.k_1 = q_3$ $\quad$ $p_2.k_2 = k.\theta_2 = s_2$

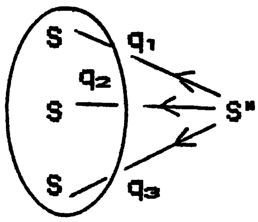
$p_1.h'_1 = k'.\theta_3 = r_1$ $\quad$ $p_1.h'_2 = k'.\theta_1 = r_2$

$p_2.h'_1 = k'.\theta_2 = r_3$ $\quad$ $p_2.h'_2 = k'.\theta_3 = r_4$

$k'.k_1 = k.h'_1 = l_1$ $\quad$ $k'.k_2 = k.h'_2 = l_2$

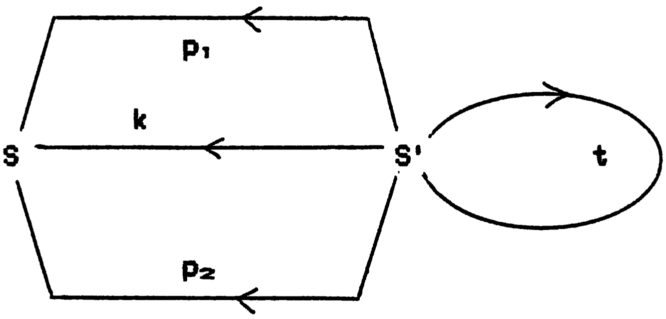
Cônes distingués: deux cônes projectifs





3.6 Esquisse des magmas abéliens.

Graphe orienté sous-jacent:

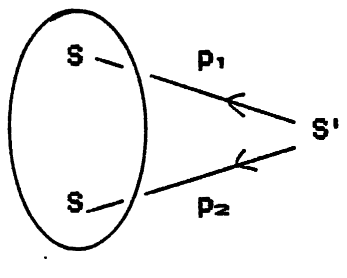


Equations:

$p_1.t = p_2$
$p_2.t = p_1$

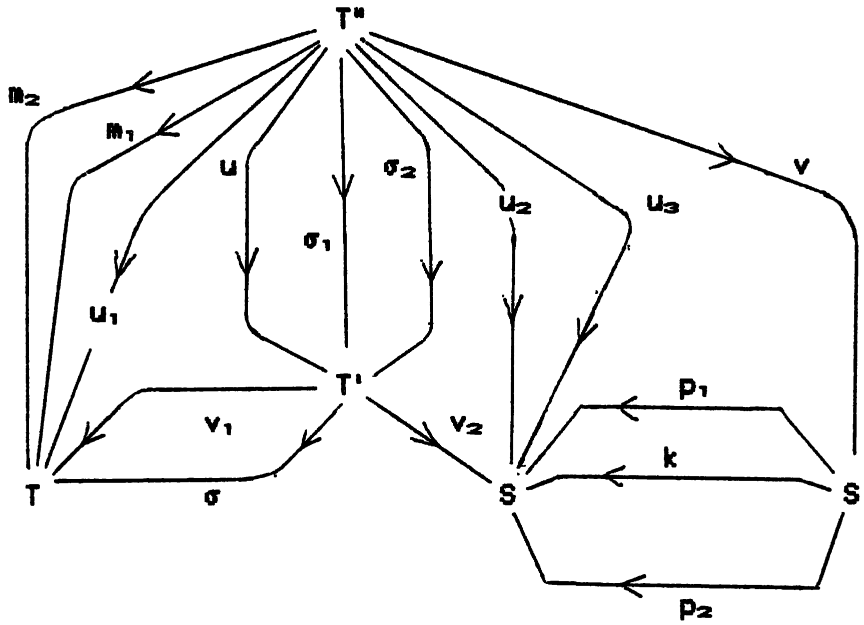
$k.t = k$

Cônes distingués: un cône projectif



3.7 Esquisse des opérations à droite de magmas

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

$v_1.u = u_1$ $\qquad$ $v_1.\sigma_1 = \sigma.u = m_1$

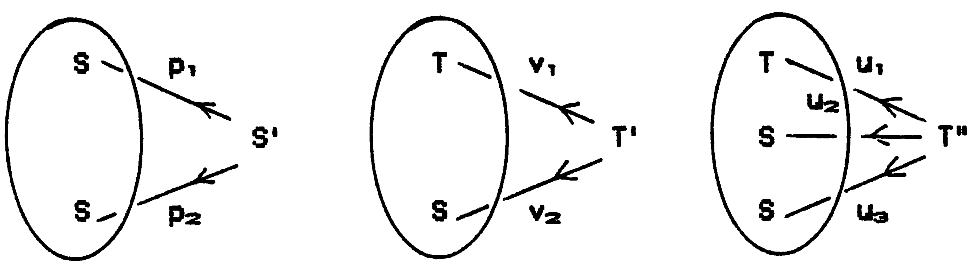
$v_2.u = u_2$ $\qquad$ $v_2.\sigma_1 = u_3$

$p_1.v = u_2$ $\qquad$ $v_1.\sigma_2 = u_1$

$p_2.v = u_3$ $\qquad$ $v_2.\sigma_2 = k.v = m_2$

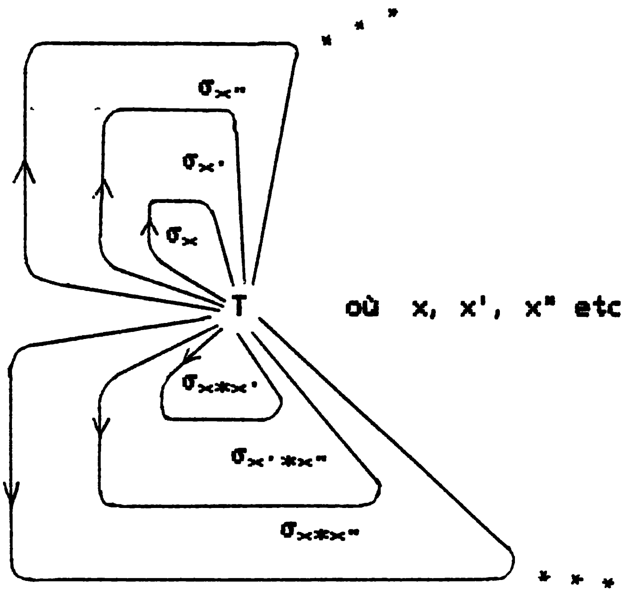
$\sigma.\sigma_1 = \sigma.\sigma_2$

Cônes distingués: trois cônes projectifs



3.8 Esquisse des M-ensembles, où M = (M,*) est un magma fixé.

Graphe orienté sous-jacent:



où x, x', x" etc... $\in$ M

Equations:

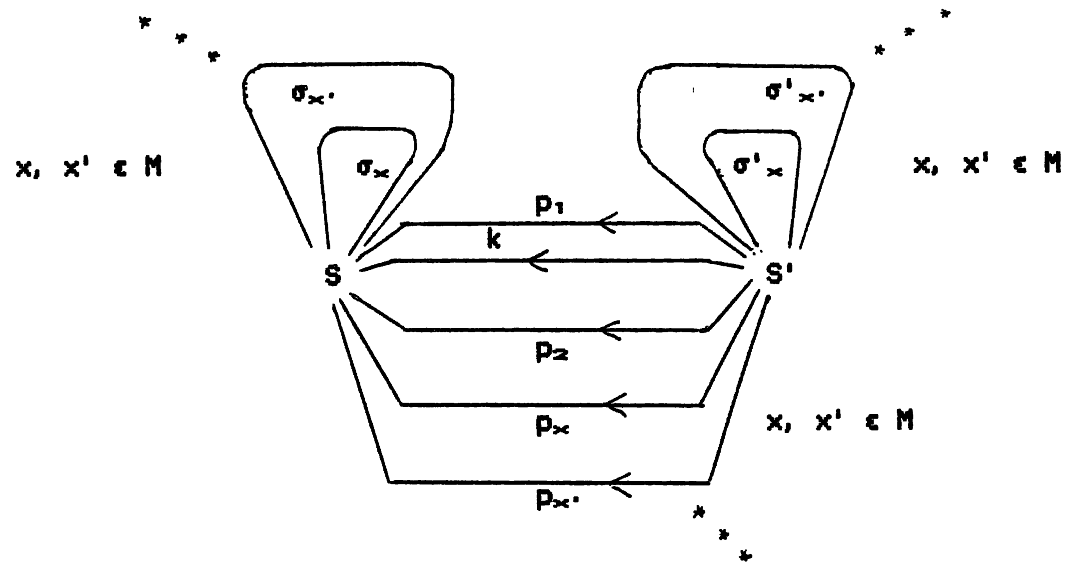
$\sigma_x . \sigma_{x'} = \sigma_{x*x'}$ pour tout $x \in M$ et $x' \in M$

Cônes distingués: néant.

Remarque. On notera bien qu'ici la structure de M n'est pas esquissée. Elle n'intervient que dans l'indexation des opérations de l'esquisse de M-ensemble. C'est un *paramètre*.

3.9 Esquisse des M-magmas, où $M = (M,*)$ est un magma fixe.

Graphe orienté sous-jacent:



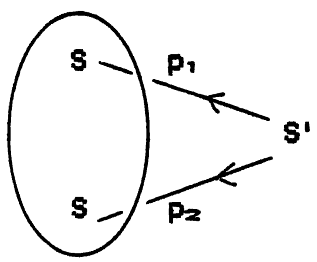
Equations:

$p_1 . \sigma'_x = \sigma_x . p_1 = p_x$ pour tout $x \in M$

$\sigma_x . \sigma_{x'} = \sigma_{x*x'}$ pour tout $x \in M$ et tout $x' \in M$

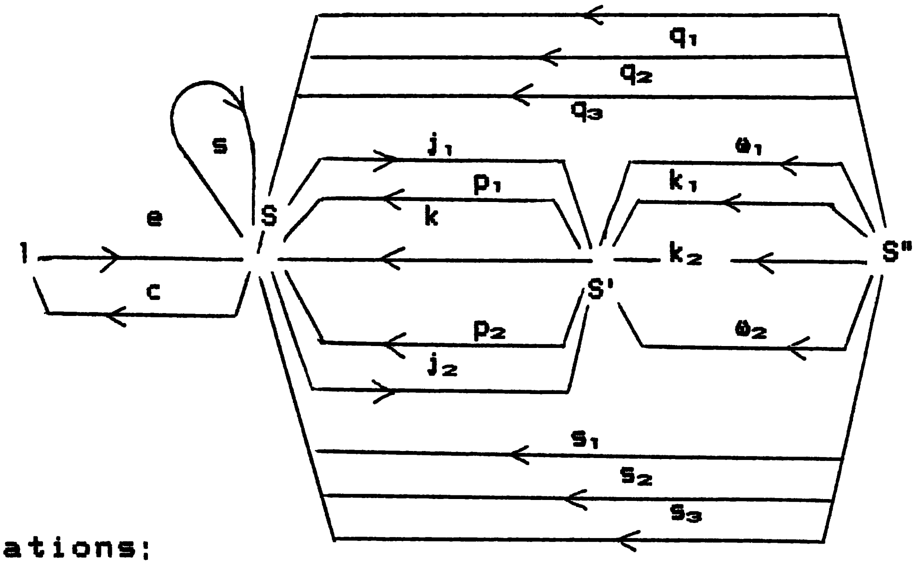
$k . \sigma'_x = \sigma_x . k$ pour tout $x \in M$

Cônes distingués: un cône projectif



3.10 Esquisse des monoïdes.

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

$e.c = s$

$p_1.j_1 = s$ $\qquad$ $p_1.j_2 = Id_S$

$p_2.j_1 = Id_S$ $\qquad$ $p_2.j_2 = s$

$p_1.\omega_1 = q_1$ $\qquad$ $p_1.\omega_2 = q_2$

$p_2.\omega_1 = q_2$ $\qquad$ $p_2.\omega_2 = q_3$

$k.j_1 = k.j_2 = Id_S$ $\qquad$ $k.\omega_1 = s_1$

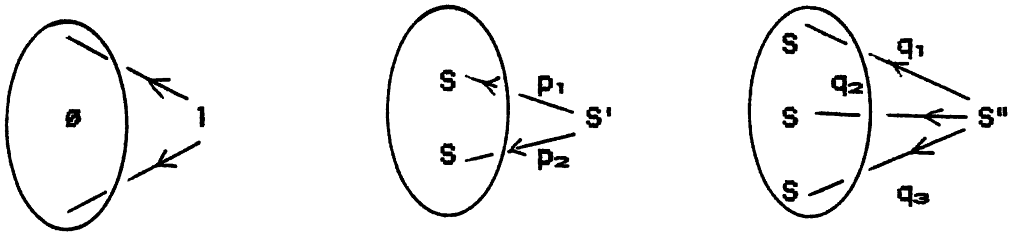
$k.\omega_2 = s_2$

$p_1.k_1 = s_1$ $\qquad$ $p_1.k_2 = q_1$

$p_2.k_1 = q_3$ $\qquad$ $p_2.k_2 = s_2$

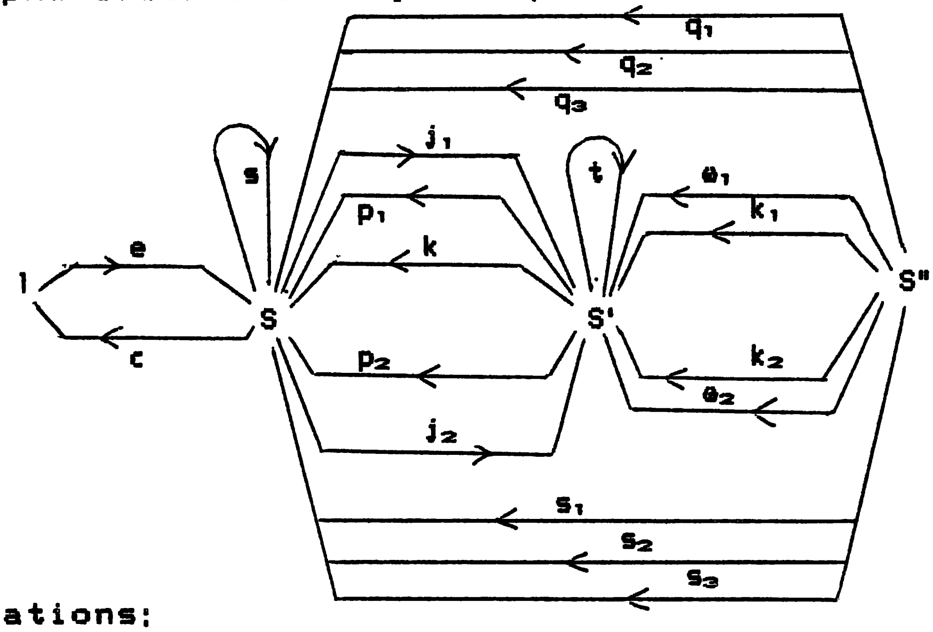
$k.k_1 = k.k_2 = s_3$

Cônes distingués: trois cônes projectifs



3.11 Esquisse des monoïdes abéliens

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

$e.c = s$

$p_1.j_1 = s$ $\quad$ $p_1.j_2 = Id_S$ $\quad$ $k.j_1 = k.j_2 = Id_S$

$p_2.j_1 = Id_S$ $\quad$ $p_2.j_2 = s$

$p_1.\theta_1 = q_1$ $\quad$ $p_1.\theta_2 = q_2$ $\quad$ $k.\theta_1 = s_1$

$p_2.\theta_1 = q_2$ $\quad$ $p_2.\theta_2 = q_3$ $\quad$ $k.\theta_2 = s_2$

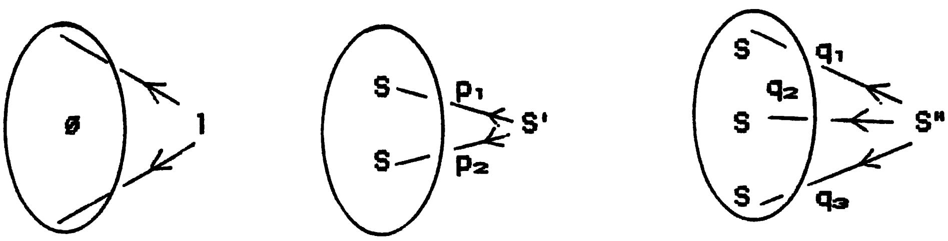
$p_1.k_1 = s_1$ $\quad$ $p_1.k_2 = q_1$ $\quad$ $k.k_1 = k.k_2 = s_3$

$p_2.k_1 = q_3$ $\quad$ $p_2.k_2 = s_2$

$p_1.t = p_2$ $\quad$ $k.t = k$

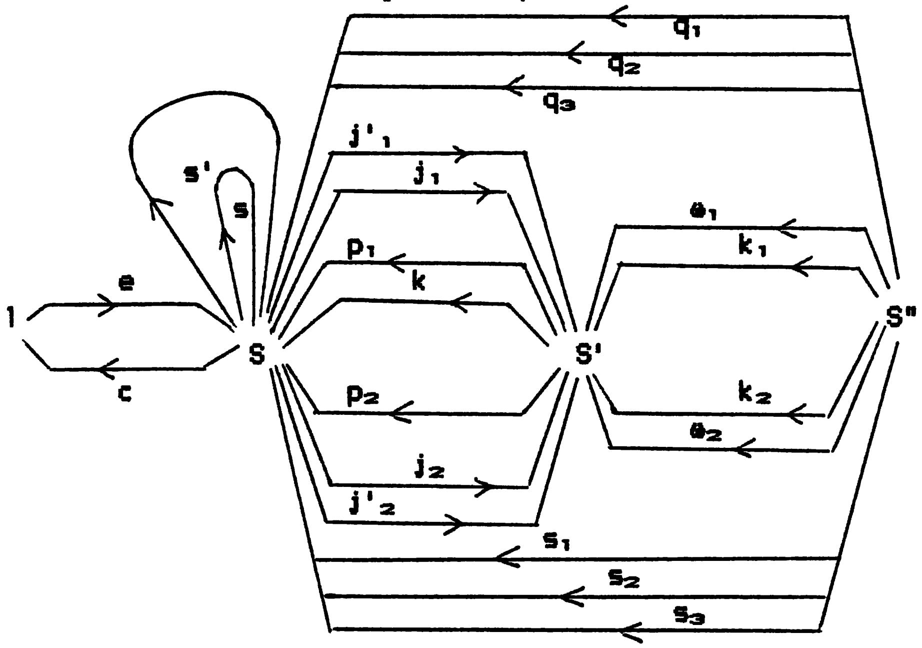
$p_2.t = p_1$

Cônes distingués: trois cônes projectifs



3.12 Esquisse des groupes

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

$e.c = s$

$p_1.j_1 = s$ $\quad$ $p_1.j_2 = Id_S$ $\quad$ $k.j_1 = k.j_2 = Id_S$

$p_2.j_1 = Id_S$ $\quad$ $p_2.j_2 = s$

$p_1.e_1 = q_1$ $\quad$ $p_1.e_2 = q_2$ $\quad$ $k.e_1 = s_1$

$p_2.e_1 = q_2$ $\quad$ $p_2.e_2 = q_3$ $\quad$ $k.e_2 = s_2$

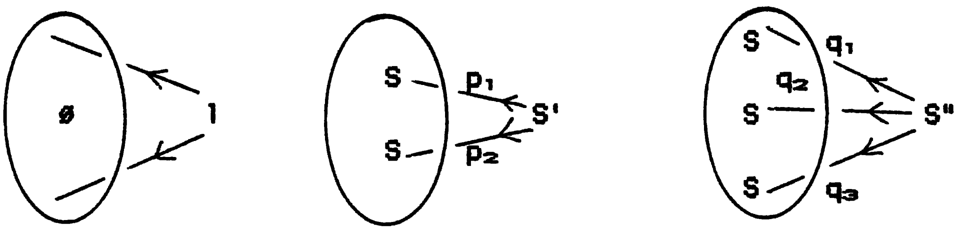
$p_1.k_1 = s_1$ $\quad$ $p_1.k_2 = q_1$ $\quad$ $k.k_1 = k.k_2 = s_3$

$p_2.k_1 = q_3$ $\quad$ $p_2.k_2 = s_2$

$p_1.j'_1 = s'$ $\quad$ $p_1.j'_2 = Id_S$ $\quad$ $k.j'_1 = k.j'_2 = s$

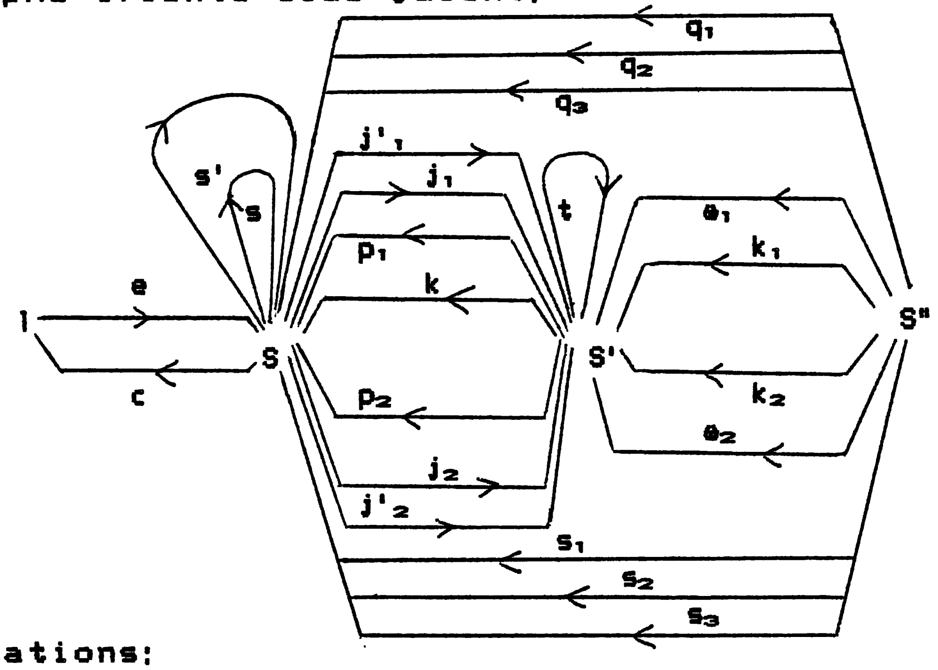
$p_2.j'_1 = Id_S$ $\quad$ $p_2.j'_2 = s'$

Cônes distingués: trois cônes projectifs



3.13 Esquisse des groupes abéliens

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

$e.c = s$

$p_1.j_1 = s$ $\quad$ $p_1.j_2 = Id_s$ $\quad$ $k.j_1 = k.j_2 = Id_s$

$p_2.j_1 = Id_s$ $\quad$ $p_2.j_2 = s$

$p_1.\omega_1 = q_1$ $\quad$ $p_1.\omega_2 = q_2$ $\quad$ $k.\omega_1 = s_1$

$p_2.\omega_1 = q_2$ $\quad$ $p_2.\omega_2 = q_3$ $\quad$ $k.\omega_2 = s_2$

$p_1.k_1 = s_1$ $\quad$ $p_1.k_2 = q_1$ $\quad$ $k.k_1 = k.k_2 = s_3$

$p_2.k_1 = q_3$ $\quad$ $p_2.k_2 = s_2$

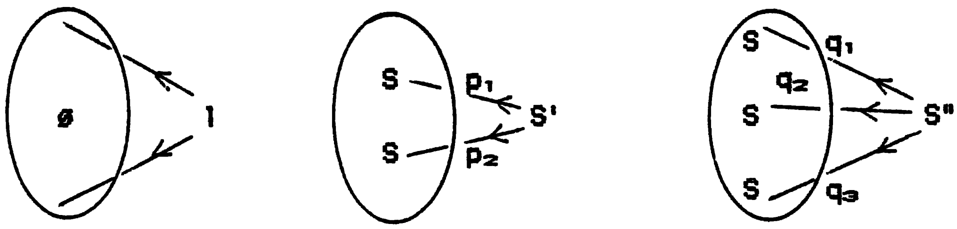
$p_1.j'_1 = s'$ $\quad$ $p_1.j'_2 = Id_s$ $\quad$ $k.j'_1 = k.j'_2 = s$

$p_2.j'_1 = Id_s$ $\quad$ $p_2.j'_2 = s'$

$p_1.t = p_2$ $\quad$ $k.t = k$

$p_2.t = p_1$

Cônes distingués: trois cônes projectifs



3.14 Esquisse des anneaux

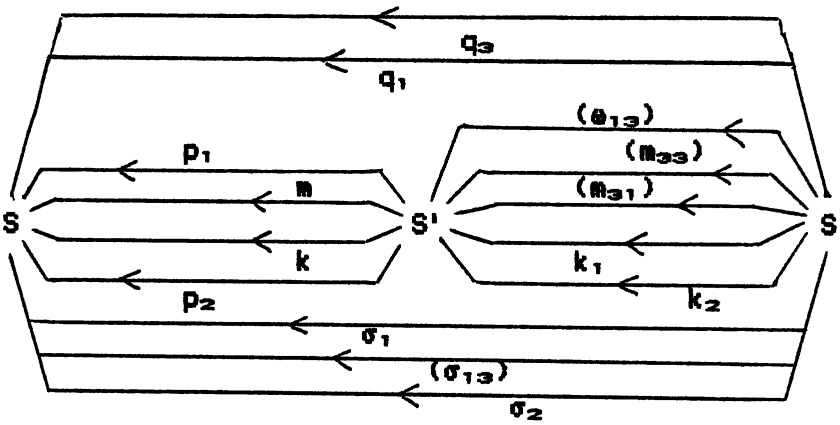
D'abord on recopie l'esquisse de groupe abélien, dans laquelle le symbole k (resp. les symboles k_1, k_2, s_1, s_2 et s_3) s'interprète(nt) comme étant le symbole d'addition (resp. les symboles de certaines lois dérivées de l'addition) de la structure d'anneau.

Ensuite, on plaque sur cette esquisse l'esquisse de demi-groupe, dont on reprend partiellement les symboles et leur notation:

S, S', S'', p_1, p_2, q_1, q_2, q_3, e_1, e_2 , inchangés, coïncident alors avec les symboles de même nom de l'esquisse des groupes abéliens,

ailleurs, on substitue la lettre m à la lettre k , et la lettre σ à la lettre s , faisant apparaître ainsi le symbole m de la multiplication et quelques uns des symboles qui s'en déduisent.

Enfin on ajoute les nouvelles flèches (celles parenthésées dans le dessin ci-dessous) et nouvelles équations suivantes, tendant à exprimer la distributivité (à gauche et à droite) de la multiplication sur l'addition:



$p_1.e_{13} = q_1$

$p_2.e_{13} = q_3$

$\sigma_{13} = m.e_{13}$

$p_1.m_{31} = \sigma_1$ $\qquad$ $p_1.m_{33} = \sigma_{13}$

$p_2.m_{31} = m.k_2$ $\qquad$ $p_2.m_{33} = \sigma_2$

$k.m_{31} = m.k_2$ $\qquad$ $k.m_{33} = m.k_1$

Les cônes distingués sont ceux de l'esquisse de groupe abélien.

3.15 Esquisses des anneaux unitaires, des anneaux commutatifs, des anneaux commutatifs unitaires des anneaux unitaires avec $0 \neq 1$

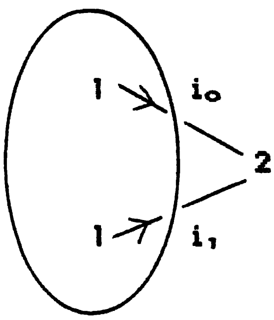
Pour les trois premières, elles peuvent se construire, tout comme l'esquisse précédente des anneaux, en plaquant sur l'esquisse de groupe abélien, non pas l'esquisse de demi-groupe, mais:

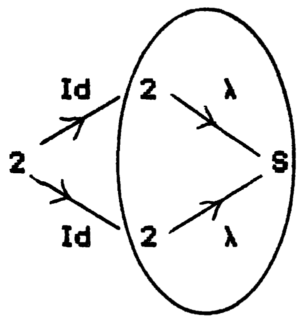
- l'esquisse de monoïde (i.e. magma associatif unitaire) pour constituer l'esquisse d'anneau unitaire (en prenant soin de bien plaquer 1 sur 1, c sur ç, mais en substituant un nouveau symbole, disons u, à e, gardant ainsi à e sa fonction qui est de "sélectionner" le 0 de l'anneau, et attribuant à u la fonction de "sélectionner" le 1 de l'anneau),
- l'esquisse de demi-groupe abélien pour constituer l'esquisse d'anneau commutatif,
- l'esquisse de monoïde abélien pour constituer l'esquisse d'anneau commutatif unitaire (en prenant soin de bien renommer tous les symboles des opérations "déduites" de m et de u, pour ne pas les confondre avec leur homologues "déduits" de k et e).

A part cela, il n'y a pas de cônes distingués supplémentaires.

Pour constituer l'esquisse d'anneau unitaire avec $0 \neq 1$, il convient de s'arranger pour que e et u, qui sélectionnent formellement le 0 et le 1 de l'anneau, ne puissent jamais s'identifier dans un modèle. A cet effet, on ajoute à l'esquisse d'anneau unitaire:

- un nouvel objet: 2 ; de nouvelles flèches: i_0 et i_1, de 1 vers 2, λ de 2 vers S ; les nouvelles équations: $\lambda . i_0 = e$ et $\lambda . i_1 = u$,
- deux nouveaux cônes distingués:
- l'un inductif à base discrète (exprimant formellement l'égalité $1 + 1 = 2$!) et l'autre projectif (exprimant que λ est formellement un mono, i.e. doit le devenir dans tout modèle, assurant ainsi la propriété désirée "$0 \neq 1$"):



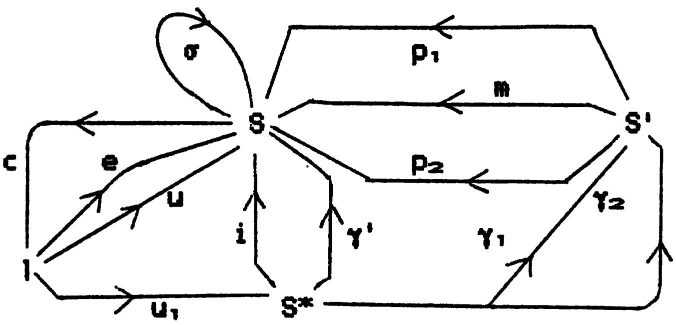


3.16 Esquisse des corps (version ensembliste)

D'abord, on reprend l'esquisse d'anneau unitaire précédemment construite, dont on reprend les symboles et leur signification; essentiellement:

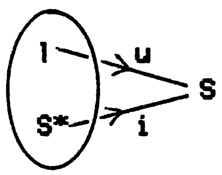
$k : S' \to S$ loi formelle d'addition
$m : S' \to S$ loi formelle de multiplication
$e : 1 \to S$ loi formelle de sélection du "0" du corps
$u : 1 \to S$ loi formelle de sélection du "1" du corps
$\sigma : S \to S$ loi formelle "constante sur 1 "

On ajoute alors le "morceau" de graphe multiplicatif suivant, dans lequel les seuls nouveaux symboles sont S^*, i, u_1, γ, γ', γ_1, γ_2 :



$\gamma' = i.\gamma$ $\qquad$ $i.u_1 = u$
$p_1.\gamma_1 = i$ $\qquad$ $p_1.\gamma_2 = \gamma'$
$p_2.\gamma_1 = \gamma'$ $\qquad$ $p_2.\gamma_2 = i$
$m.\gamma_1 = m.\gamma_2 = \sigma$

Un seul "nouveau" cône distingué, inductif à base discrète:



Si on réalise cette esquisse dans la catégorie des espaces topologiques, on n'obtient pas les corps topologiques usuels, car la topologie de K est rarement la somme de ses sous espaces {0} et K* ! D'où la mention "version ensembliste". Pour obtenir les corps topologiques, il convient de modifier légèrement l'esquisse précédente, par exemple en disant que S est, non plus la "somme 1 + S*", mais but d'un "épi-mono" de source cette "somme", et que i est un "mono régulier", i.e. que i est "noyau" des deux "coprojections" de S vers $S \underset{S^*}{+} S$.

3.17 Esquisse des graphes orientés

Graphe orienté sous-jacent:

$$
\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[rr, "i"] & & S_2 \arrow[ll, bend right=60, "c"'] \arrow[ll, bend left=60, "d"]
\end{tikzcd}
$$

Equations:

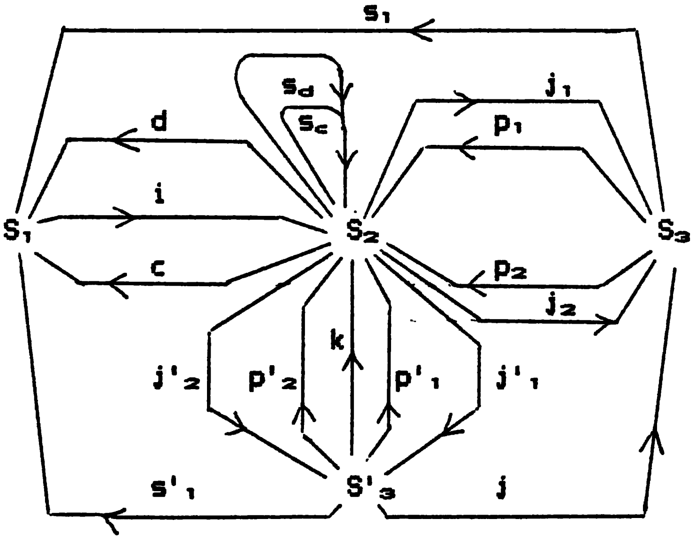
$c.i = Id_{S1}$

$d.i = Id_{S2}$

Cônes distingués: néant.

3.18 Esquisse des graphes multiplicatifs

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

$c.i = Id_{S_1}$ $\qquad$ $d.p_1 = c.p_2 = s_1$

$d.i = Id_{S_1}$ $\qquad$ $d.p'_1 = c.p'_2 = s'_1$

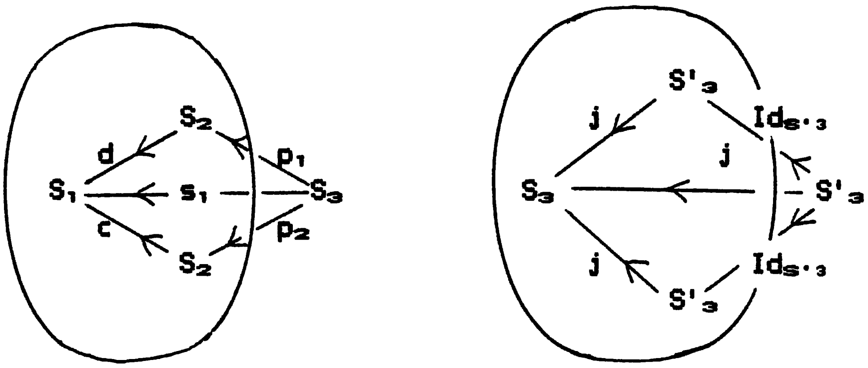
$p_1.j = p'_1$ $\qquad$ $p_1.j_1 = i.d = s_d$ $\qquad$ $p_1.j_2 = Id_{S_2}$

$p_2.j = p'_2$ $\qquad$ $p_2.j_1 = Id_{S_2}$ $\qquad$ $p_2.j_2 = i.c = s$

$j.j'_1 = j_1$ $\qquad$ $k.j'_1 = Id_{S_2} = k.j'_2$

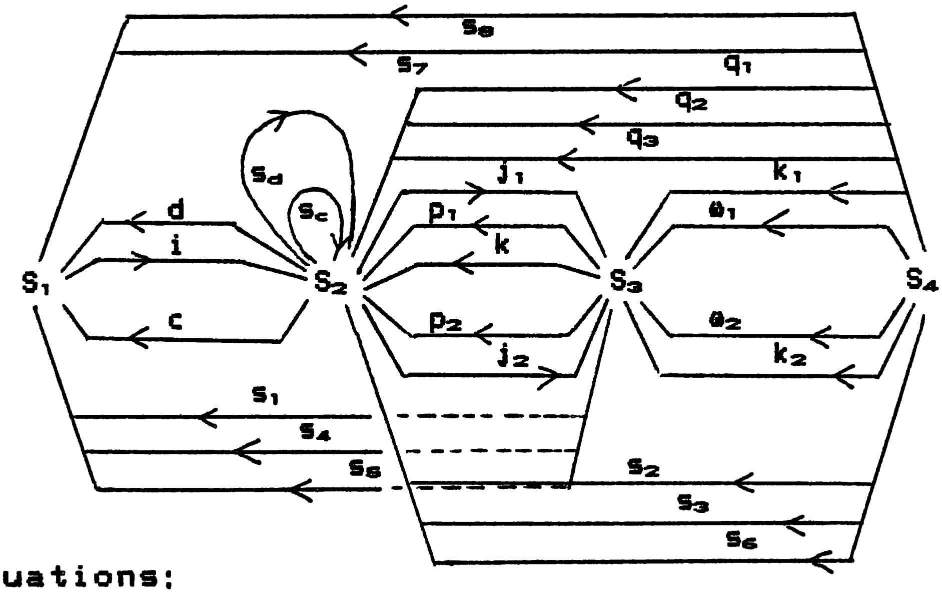
$j.j'_2 = j_2$

Cônes distingués: deux cônes projectifs



3.19 Esquisse des catégories

Graphe orienté sous-jacent:



Equations:

$d.i = Id_{S1} = c.i$ $\qquad$ $d.p_1 = c.p_2 = s_1$

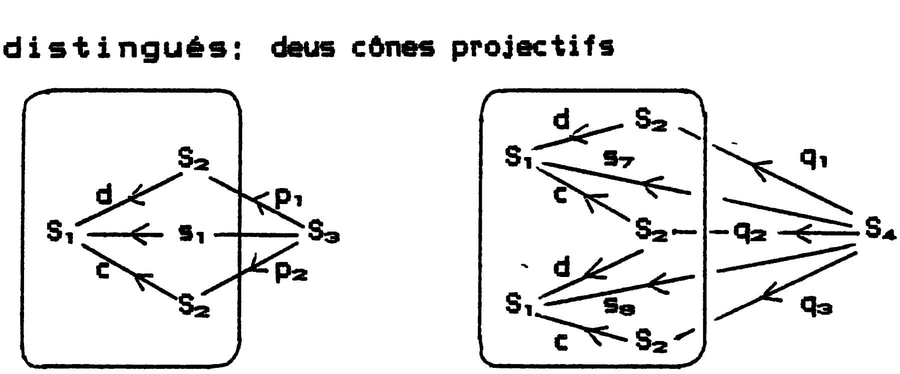
$p_1.j_1 = i.d = s_d$ $\qquad$ $p_1.j_2 = Id_{S2}$ $\qquad$ $p_1.\theta_1 = q_1$ $\qquad$ $p_1.\theta_2 = q_2$
$p_2.j_1 = Id_{S2}$ $\qquad$ $p_2.j_2 = i.c = s_c$ $\qquad$ $p_2.\theta_1 = q_2$ $\qquad$ $p_2.\theta_2 = q_3$

$p_1.k_1 = k.\theta_1 = s_2$ $\qquad$ $p_1.k_2 = q_1$
$p_2.k_1 = q_3$ $\qquad$ $p_2.k_2 = k.\theta_2 = s_3$

$c.k = c.p_1 = s_4$ $\qquad$ $k.j_1 = k.j_2 = Id_{S2}$
$d.k = d.p_2 = s_5$ $\qquad$ $k.k_1 = k.k_2 = s_6$

$d.q_1 = c.q_2 = s_7$
$d.q_1 = c.q_3 = s_8$

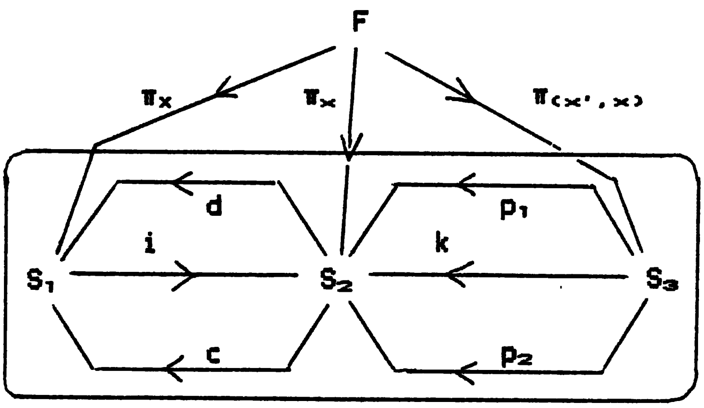
Cônes distingués: deus cônes projectifs



3.20 Esquisse des catégories à I-limites projectives choisies.

On constitue une telle esquisse $\mathbb{E}_I$, en agrandissant l'esquisse de catégories $\mathbb{E}$ de manière convenable, ce que nous faisons en plusieurs petites étapes.

(i) A un graphe multiplicatif X on fait correspondre un cône projectif naturel, dont la base est à valeurs dans le graphe multiplicatif sous-jacent à $\mathbb{E}$ et dont le sommet $S^X = F$ est un nouvel objet. En voici une description succinte (en particulier, on ne (re)définit pas le graphe multiplicatif $\S\S(X)$ d'indexation de la base de ce cône - cf. leçon 3):



et quels que soient :

$$X \in Ob(X)\ , \quad x: X \to X' \in Fl(X)\ , \quad (x',x) \in Fl(X) * Fl(X)$$

on dispose des équations suivantes:

$$i.\pi_X = \pi_{IdX} \qquad p_1.\pi_{<x',x>} = \pi_x$$
$$d.\pi_x = \pi_X \qquad p_2.\pi_{<x',x>} = \pi_{x'}$$
$$c.\pi_x = \pi_{X'} \qquad k.\pi_{<x',x>} = x'.x\ .$$

On peut alors agrandir l'esquisse $\mathbb{E}$ en lui adjoignant ce cône comme cône projectif distingué. On obtient une esquisse $\mathbb{E}_X$ dont la catégorie des réalisations est équivalente à la catégorie des catégories, et, pour une réalisation R dont la restriction à $\mathbb{E}$ définit la catégorie C, alors $R(F)$ "est" l'ensemble des foncteurs de X vers C, d'où la notation adoptée.

(ii) A un foncteur $f : X \to X'$ entre graphes multiplicatifs, on fait correspondre l'esquisse $\mathbb{E}_f$ obtenue en adjoignant à $\mathbb{E}$ deux cônes projectifs de sommets $S^X = F$ et $S^{X'} = F'$, comme indiqué en (i), une flèche $f^* : F' \to F$, et les équations suivantes:

$$\pi_X . f^* = \pi_{f(X)} \qquad \pi_x . f^* = \pi_{f(x)} \qquad \pi_{(x',x)} . f^* = \pi_{(f(x'),f(x))}$$

Pour une réalisation R de $\mathbb{E}_f$, de catégorie sous-jacente C , $R(f^*)$ est l'application qui à un foncteur $\varphi : X' \to C$ fait correspondre le foncteur composé $\varphi . f : X \to C$.

(iii) A un graphe multiplicatif K on associe son "joint" avec I, noté I_K qui est défini ainsi:

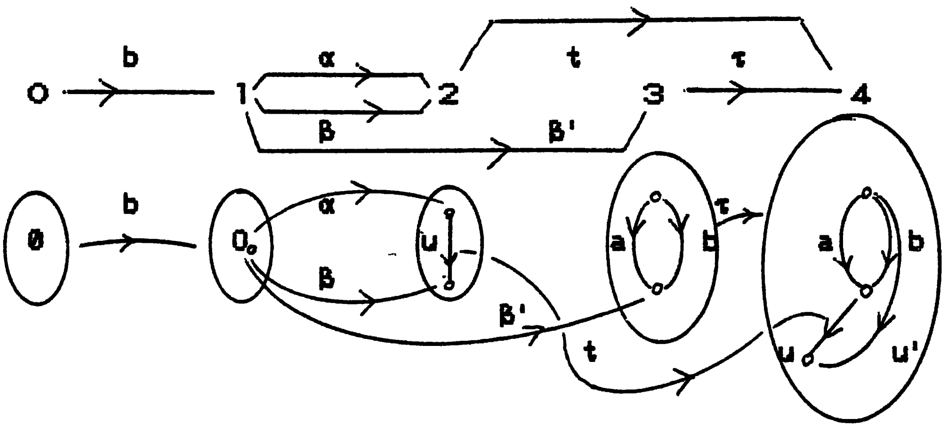
il contient deux sous-graphes multiplicatifs (supposés disjoints) isomorphes à I et K et auxquels on les identifie. En plus, il y a, pour tout couple $(I,K) \in \mathrm{Ob}(I) \times \mathrm{Ob}(K)$,une flèche λ_{KI} de source K et de but I , et on dispose des équations supplémentaires suivantes:

$j.\lambda_{KI} = \lambda_{KI'}$, pour tout $K \in \mathrm{Ob}(K)$ et tout $j: I \to I' \in \mathrm{Fl}(I)$
$\lambda_{K'I}.\chi = \lambda_{KI}$, pour tout $I \in \mathrm{Ob}(I)$ et tout $\chi: K \to K' \in \mathrm{Fl}(K)$

(iv) A un foncteur $f: K \to K'$ on associe le foncteur naturel de I_K vers $I_{K'}$,encore noté f, défini par:

$f(j) = j$, pour $j \in \mathrm{Fl}(I)$,
$f(\chi) = f(\chi)$ (sic !), pour $\chi \in \mathrm{Fl}(K)$,
$f(\lambda_{KI}) = \lambda_{f(K)I}$, pour $I \in \mathrm{Ob}(I)$ et $K \in \mathrm{Ob}(K)$.

(v) Considérons alors les 5 graphes multiplicatifs et foncteurs entre eux suivants:



b, τ et t sont des foncteurs "injections canoniques".
$\beta(0)$ = codomaine(u) ; $\alpha(0)$ = domaine(u) ; $\beta'(0)$ = codomaine(u).

Utilisant les constructions (iii) et (iv) précédentes, on obtient alors:
- les 5 graphes multiplicatifs I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, joints respectifs de I avec les graphes multiplicatifs $\mathbf{0}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$,
- les foncteurs entre ces graphes multiplicatifs, toujours notés par les mêmes symboles b, α, β, β', t, τ.

(vi) Utilisant les constructions (i) et (ii) précédentes, où l'on donne à X les valeurs I_0, I_1, I_2, I_3, I_4, et à f les valeurs b, α, β, β', t, τ, on peut agrandir l'esquisse de catégories $\mathbb{E}$ en une esquisse $\mathbb{E}_A$, en lui ajoutant:
- les 5 objets F_0, F_1, F_2, F_3, F_4 associés respectivement à I_0, I_1, I_2, I_3, I_4,
- les 5 cônes projectifs (distingués) définis dans la construction (i),
- les flèches (et équations convenables) déduites des foncteurs b, α, β, β', t, τ, soit b^*, α^*, β^*, β'^*, t^*, τ^*.

Pour constituer $\mathbb{E}_I$, il suffit d'ajouter à $\mathbb{E}_A$ les 3 flèches:

$$L: F_0 \to F_1 \qquad C: F_1 \to F_2 \qquad U: F_3 \to F_4$$

et les 6 équations suivantes:

$$b^*.L = Id_{F_0} \qquad \pi_u{}^2.C.L = i.\pi_0{}^1.L$$
$$L.b^* = \beta^*.C \qquad C.\beta'^* = t^*.U$$
$$\alpha^*.C = Id_{F_1} \qquad \tau^*.U = Id_{F_3}$$

qui expriment que:

L est le "choix de limite" formel,
C est le "choix de comparaison vers la limite (ou crochet)" formel,
U est une loi formelle qui, compte tenu des équations, assure l'unicité du crochet.

L'esquisse $\mathbb{E}^J$ de catégorie à choix de J-limites inductives se décrit de façon tout à fait analogue. C'est une esquisse projective.

En faisant varier I dans un ensemble $\mathcal{I}$ de graphes multiplicatifs d'indexations et J dans un ensemble $\mathcal{J}$ de graphes multiplicatifs d'indexations , on constitue aisément l'esquisse des catégories à choix de limites projectives indexées par les objets éléments de $\mathcal{I}$ et à choix de limites inductives indexées par les objets éléments de $\mathcal{J}$. Ce sont les ($\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$)-*types stricts*. Ils sont donc projectivement esquissables.

A l'opposé, la structure de catégorie à limites (non choisies) n'est pas esquissable projectivement, comme nous le montrerons dans une autre leçon. Par contre, elle est esquissable de manière mixte. Donnons juste une indication à cet effet, en laissant les détails en exercice (il s'agit effectivement maintenant d'un exercice !):

- clairement, on définit l'objet CL_I des "I-cônes limites" (par exemple projectives !) formelles,
- on spécifie alors l'existence (formelle) de I-limites projectives en distinguant comme épimorphisme (formel) la flèche naturelle qui va de CL_I vers F_o : c'est le seul cône inductif distingué.

C'est en procédant de la sorte qu'on peut obtenir l'esquisse des ($\mathcal{I}$, $\mathcal{J}$)-*types vagues*.

Notons enfin la possibilité d'esquisser des types plus particuliers, en imposant aux diverses limites (ou limites choisies) certaines contraintes éventuelles, par exemple des conditions de commutation ...