C. LAIR

Diagrammes structurés de modèles

Diagrammes, tome 18 (1987), exp. n° 3, p. L1-L30
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1987__18__A3_0>

DIAGRAMMES STRUCTURES DE MODELES

C. Lair

Introduction

En (A.C.C.A.), Makkai et Paré énoncent les trois résultats suivants:
- la catégorie des *familles* (i. e. des diagrammes discrets) de modèles d'une esquisse donnée est encore une catégorie de modèles,
- la catégorie des *diagrammes* (i. e. des diagrammes quelconques) de modèles d'une esquisse donnée est encore une catégorie de modèles,
- la catégorie des *modèles* d'une esquisse donnée $\mathbb{E}''$ (i. e. des diagrammes structurés par la structure d'esquisse et d'indexation fixe $\mathbb{E}''$) dans la catégorie des modèles d'une autre esquisse donnée $\mathbb{E}'$ est encore une catégorie de modèles, pourvu que les limites et les colimites, dans la catégorie des modèles de $\mathbb{E}'$, soient elles-mêmes esquissables.

Nous proposons ici une démonstration *syntaxique et commune* de deux résultats généraux, dont les trois précédents sont des cas particuliers. Ces deux résultats généraux sont établis syntaxiquement, i. e. en construisant explicitement les esquisses appropriées. De plus, les constructions utilisées sont totalement élémentaires: elles reposent essentiellement sur le calcul de lax-limites inductives particulières dans la 2-catégorie *Esq* des esquisses. Elles figurent, pour la plupart, dans nombre de travaux antérieurs (parfois très anciens - voir par exemple (E.G.C.E.)) concernant la Théorie des Esquisses.

A.M.S. Sub. Class. : 18 A 99 , 18 B 99 , 18 C 99 , 18 D 99

Comme il semble que ces travaux soient ou paraissent peu disponibles, il nous a paru utile de les synthétiser ici, sous une forme brève et homogène.

1. Esquisses et modèles.

On dit que $\mathbb{E} = (\mathrm{supp}(\mathbb{E}),P,Q)$ est une *esquisse* [voir la Note 1] si, et seulement si:
- supp($\mathbb{E}$) est une catégorie, appelée *support* de $\mathbb{E}$,
- P est une classe de cônes projectifs de supp($\mathbb{E}$) [voir la Note 2], dits *distingués* dans $\mathbb{E}$,
- Q est une classe de cônes inductifs de supp($\mathbb{E}$) [voir la Note 2], également dits *distingués* dans $\mathbb{E}$,

(voir la figure 1, dans l'Atlas des Figures).

Dans ces conditions, on dit que $\mathbb{E}$ est *petite* (resp. *grosse*) si, et seulement si:
- supp($\mathbb{E}$) est une catégorie petite (resp. grosse) [voir la Note 3],
- P est un ensemble petit (resp. gros) et tout élément de P est un cône projectif d'indexation petite (resp. grosse) [voir la Note 3],
- Q est un ensemble petit (resp. gros) et tout élément de Q est un cône inductif d'indexation petite (resp. grosse) [voir la Note 3].

[Note 1. Nous utilisons ici le mot "esquisse" dans une acception un peu plus particulière que celle, originelle, figurant en (E.T.S.A.) ou (C.Q.C.E.) par exemple. Plus précisément, nous supposons, dans le seul but de procéder à un exposé aussi court que possible, que le support d'une esquisse est une catégorie et non pas un *graphe compositif*, i. e. un "système de générateurs et relations" pour une catégorie. Bien entendu, on peut (en perdant en rapidité d'exposition, mais en gagnant quant à l'effectivité pratique) traduire facilement toutes les considérations qui vont suivre dans ce cadre plus général; nous laissons ce soin au lecteur.]

[Note 2. Si $\mathbf{I}$ est une catégorie, on note $\mathbf{I}^+$ (resp. $\mathbf{I}^-$) la catégorie obtenue en rajoutant à $\mathbf{I}$ un objet final $Z(\mathbf{I})$

(resp. un objet initial $A(\mathbf{I})$). Ainsi, pour tout objet I de $\mathbf{I}$, on dispose d'une unique flèche $z(I):I \to Z(\mathbf{I})$ (resp. $a(I):A(\mathbf{I}) \to I$) de $\mathbf{I}^+$ (resp. de $\mathbf{I}^-$).

Si $F:\mathbf{I} \to \mathbf{I}'$ est un foncteur, on note $F^+:\mathbf{I}^+ \to \mathbf{I}'^+$ (resp. $F^-:\mathbf{I}^- \to \mathbf{I}'^-$) son unique prolongement qui commute aux éléments finals (resp. initiaux) ainsi rajoutés.

Si $\mathbf{X}$ et $\mathbf{I}$ sont deux catégories, on dit qu'un foncteur $q:\mathbf{I}^+ \to \mathbf{X}$ (resp. $p:\mathbf{I}^- \to \mathbf{X}$) est un *cône inductif* (resp. *projectif*) de $\mathbf{X}$, d'*indexation* $\mathbf{I}$.
Souvent, on note simplement (mais abusivement):

$$q = (q(z(I)):q(I) \to q(Z(\mathbf{I})))_{I \in \mathbf{I}}$$

$$(\text{resp. } p = (p(a(I)):p(A(I)) \to p(I))_{I \in \mathbf{I}}).]$$

[Note 3. On raisonne dans un bon modèle de la théorie des ensembles avec axiome des univers (voir, par exemple, (T.H.E.N.)). En particulier, on suppose que $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ sont deux univers fixés une fois pour toutes et tels que:
- $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{V}$ et $\mathcal{U}$ est inclus dans $\mathcal{V}$.

Si $\mathcal{W}$ est un univers, on dit qu'un ensemble E est *$\mathcal{W}$-petit* si, et seulement si:
- E est (en bijection avec un) élément de $\mathcal{W}$.

En particulier, un ensemble $\mathcal{U}$-petit sera simplement dit *petit* et un ensemble $\mathcal{V}$-petit pourra être dit *gros*. Alors, on note *Ens* (resp. *ENS*) la catégorie dont les objets sont les ensembles petits (resp. gros) et dont les flèches sont les applications entre ces ensembles.

De même, si $\mathcal{W}$ est un univers, on dit qu'une catégorie $\mathbf{X}$ est *$\mathcal{W}$-petite* si, et seulement si:
- la collection $Ob(\mathbf{X})$ des objets de $\mathbf{X}$ est un ensemble $\mathcal{W}$-petit,
- la collection $Fl(\mathbf{X})$ des flèches de $\mathbf{X}$ est un ensemble $\mathcal{W}$-petit.

Pareillement, on dit qu'une catégorie $\mathbf{X}$ est *localement* $\mathcal{W}$-petite si, et seulement si:
- pour tous objets X et X' de $\mathbf{X}$, la collection $Hom_{\mathbf{X}}(X,X')$ des flèches $x:X \to X'$ de $\mathbf{X}$ est un ensemble $\mathcal{W}$-petit.

En particulier, une catégorie $\mathcal{U}$-petite sera simplement dite *petite*, une catégorie localement $\mathcal{U}$-petite sera simplement dite *localement petite*, une catégorie $\mathcal{V}$-petite pourra être dite *grosse* (par rapport à $\mathcal{U}$) et une catégorie localement $\mathcal{V}$-petite pourra être dite *localement grosse*. Alors, on note *Cat* (resp. *CAT*) la catégorie (ou, si besoin est, la 2-catégorie) dont les objets sont les catégories petites (resp. grosses) et dont les flèches sont les foncteurs entre ces catégories (et dont les 2-flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs).]

Si $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont deux esquisses, on dit que $H = (\mathbb{E},\mathrm{supp}(H),\mathbb{E}')$ est un *homomorphisme* de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}'$ et l'on note $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ si, et seulement si:
- $\mathrm{supp}(H):\mathrm{supp}(\mathbb{E}) \to \mathrm{supp}(\mathbb{E}')$ est un foncteur, appelé *support* de H ,
- l'image par H (i. e. par $\mathrm{supp}(H)$) de tout cône projectif distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône projectif distingué dans $\mathbb{E}'$,
- l'image par H (i. e. par $\mathrm{supp}(H)$) de tout cône inductif distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône inductif distingué dans $\mathbb{E}'$.

Alors, on définit facilement l'homomorphisme *composé* de deux homomorphismes consécutifs entre esquisses.

Si $H,H':\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ sont deux homomorphismes d'esquisses, on dit que $h = (H,\mathrm{supp}(h),H')$ est une transformation naturelle de H vers H' et l'on note $h: H \Rightarrow H' : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ si, et seulement si:
- $\mathrm{supp}(h): \mathrm{supp}(H) \Rightarrow \mathrm{supp}(H') : \mathrm{supp}(\mathbb{E}) \to \mathrm{supp}(\mathbb{E}')$ est une transformation naturelle.

Alors, on définit aisément la *composée* de deux transformations naturelles consécutives entre homomorphismes d'esquisses, ainsi que la *composée* d'une telle transformation naturelle avec un homomorphisme entre esquisses.

Dans ces conditions, on note *Esq* (resp. *ESQ*) la catégorie (ou, si besoin est, la 2-catégorie) dont les objets sont les esquisses petites (resp. grosses) et dont les flèches sont les homomorphismes entre ces esquisses (et dont les 2-flèches sont les transformations naturelles entre ces homomorphismes).

Si $\mathbb{E}$ est une esquisse et si $\mathbb{C}$ est une catégorie, on dit que $M = (\mathbb{E},\mathrm{ssj}(M),\mathbb{C})$ est un *modèle* de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$ et l'on note $M:\mathbb{E} \to \mathbb{C}$ si, et seulement si:
- $\mathrm{ssj}(M):\mathrm{supp}(\mathbb{E}) \to \mathbb{C}$ est un foncteur, dit *sous-jacent* à M ,
- l'image par M (i. e. par $\mathrm{ssj}(M)$) de tout cône projectif distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône limite projective de $\mathbb{C}$,
- l'image par M (i. e. par $\mathrm{ssj}(M)$) de tout cône inductif distingué dans $\mathbb{E}$ est un cône limite inductive de $\mathbb{C}$.

Alors, on définit facilement le modèle *composé* d'un homomorphisme, d'une esquisse vers une autre, par un modèle de cette autre esquisse dans une catégorie.

Si $M,M':\mathbb{E} \to \mathbb{C}$ sont deux modèles de l'esquisse $\mathbb{E}$ dans la catégorie $\mathbb{C}$, on dit que $m = (M,ssj(m),M')$ est un *homomorphisme* du modèle M vers le modèle M' et l'on note:

$$m : M \Rightarrow M' : \mathbb{E} \to \mathbb{C} ,$$

si, et seulement si:

- $ssj(m):ssj(M)\Rightarrow ssj(M'):supp(\mathbb{E})\to\mathbb{C}$ est une transformation naturelle, dite *sous-jacente* à m .

Alors, on définit facilement l'homomorphisme de modèles *composé* de deux homomorphismes consécutifs entre modèles d'une esquisse dans une catégorie.
De même, on définit sans difficulté l'homomorphisme de modèles *composé* d'un homomorphisme, d'une esquisse vers une autre, par un homomorphisme entre modèles de cette autre esquisse vers une catégorie.

Si $\mathbb{E}$ est une esquisse et $\mathbb{C}$ est une catégorie, on note $Mod(\mathbb{E},\mathbb{C})$ la catégorie dont les objets sont les modèles de $\mathbb{E}$ dans $\mathbb{C}$ et dont les flèches sont les homomorphismes entre ces modèles. Ainsi, $Mod(\mathbb{E},\mathbb{C})$ s'identifie à une sous-catégorie pleine de la catégorie $\mathbb{C}^{supp(\mathbb{E})}$.
En particulier, on note $Mod(\mathbb{E}) = Mod(\mathbb{E},\mathit{Ens})$ et $MOD(\mathbb{E}) = Mod(\mathbb{E},\mathit{ENS})$.

Si $H:\mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est un homomorphisme d'esquisses et si $\mathbb{C}$ est une catégorie, on note $Mod(H,\mathbb{C}):Mod(\mathbb{E}',\mathbb{C}) \to Mod(\mathbb{E},\mathbb{C})$ le foncteur "composition des modèles de $\mathbb{E}'$ dans $\mathbb{C}$ par H " qui en résulte. Ainsi, $Mod(H,\mathbb{C})$ s'identifie à une restriction de

$$\mathbb{C}^{supp(H)}:\mathbb{C}^{supp(\mathbb{E}')} \to \mathbb{C}^{supp(\mathbb{E})} .$$

En particulier, on note $Mod(H) = Mod(H,\mathit{Ens})$ et $MOD(H) = Mod(H,\mathit{ENS})$.

On dit qu'une esquisse $\mathbb{E}$ est *triviale* si, et seulement si:

- aucun cône projectif n'est distingué dans $\mathbb{E}$,
- aucun cône inductif n'est distingué dans $\mathbb{E}$.

Ainsi, à toute catégorie $\mathbb{D}$ est associée une esquisse triviale $triv(\mathbb{D}) = (\mathbb{D},\emptyset,\emptyset)$: dans la suite nous identifierons toute esquisse triviale à son support.

Soit $\mathbb{E}$ une esquisse triviale de support $\mathbb{D}$ et $\mathbb{E}'$ une autre esquisse.

Si $H : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est un homomorphisme, nous identifierons H à son support et nous noterons également:

$$\mathrm{supp}(H) : \mathbb{D} \to \mathbb{E}' \ .$$

De même, si $h : H \to H' : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ est une transformation naturelle (entre homomorphismes), nous l'identifierons à son support et noterons:

$$\mathrm{supp}(h) : \mathrm{supp}(H) \Rightarrow \mathrm{supp}(H') : \mathbb{D} \to \mathbb{E}' \ .$$

Si $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ sont deux collections de catégories, on dit que $\mathbb{E}$ est une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-*esquisse* si, et seulement si:
- l'indexation de tout cône projectif distingué dans $\mathbb{E}$ est élément de $\mathcal{I}$,
- l'indexation de tout cône inductif distingué dans $\mathbb{E}$ est élément de $\mathcal{J}$.

Alors, à toute catégorie $\mathbb{C}$ est associée une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse $\mathrm{cano}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\mathbb{C})$, lorsqu'on distingue tous les cônes limites projectives de $\mathbb{C}$ dont les indexations appartiennent à $\mathcal{I}$ et tous les cônes limites inductives de $\mathbb{C}$ dont les indexations appartiennent à $\mathcal{J}$.

Enfin, on note $\mathit{Esq}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ (resp. $\mathit{ESQ}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$) la sous-catégorie pleine de *Esq* (resp. de *ESQ*) dont les objets sont les $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisses petites (resp. grosses).

2. Constructions d'esquisses.

Si $\mathbb{E} = (\mathrm{Supp}(\mathbb{E}),P,Q)$ est une esquisse petite, on pose:

$$P_+ = \{ \ (\mathbf{I}^+)^- \simeq (\mathbf{I}^-)^+ \xrightarrow[p^+]{} \mathrm{supp}(\mathbb{E})^+ \ / \ p \in P \ \}$$

et

$$\mathbb{E}_+ = (\mathrm{Supp}(\mathbb{E})^+, P_+, Q)$$

(ceci permet donc de définir un foncteur $(-)_+ : \mathit{Esq} \to \mathit{Esq}$).

Alors, on dispose de l'homomorphisme:

$$\beta_{\mathbb{E}} : \mathbf{1} \to \mathbb{E}_+ \ ,$$

sélectionnant l'objet $Z(\mathbb{E}) = Z(\mathrm{supp}(\mathbb{E}))$.

De même, pour tout objet E de $\mathbb{E}$, on dispose de l'homomorphisme:

$$\alpha_E : \mathbf{1} \to \mathbb{E}_+ ,$$

sélectionnant l'objet E . On dispose donc de la transformation naturelle:

$$\gamma_E : \alpha_E \Rightarrow \beta_{\mathbb{E}} \ : \ \mathbf{1} \to \mathbb{E}_+ ,$$

sélectionnant $z(\mathbb{E}) = z(\mathrm{supp}(\mathbb{E})) : E \to Z(\mathbb{E})$ (voir la figure 2).

Soit $\mathbb{E}$ une esquisse petite.

Si $\pi = (\pi_X : H \Rightarrow H_X : \mathbf{1} \to \mathbb{E})_{X \in \mathbb{X}}$ est un cône projectif petit de transformations naturelles (dans *Esq*), on dit que π est *accepté par* $\mathbb{E}$ si, et seulement si:

- le cône projectif $\pi(0) = (\pi_X(0) : H(0) \to H_X(0))_{X \in \mathbb{X}}$ est un cône projectif distingué dans $\mathbb{E}$.

Soit Ψ une famille de cônes projectifs petits (de transformations naturelles de *Esq*) tels que π (et non nécessairement acceptés par $\mathbb{E}$). On note $\mathbb{E}_\Psi$ la plus petite sur-structure d'esquisse sur $\mathbb{E}$ (i. e. ayant même support $\mathbb{D}$ que $\mathbb{E}$) telle que (voir la figure 3):

- $j_\Psi = (\mathbb{E}, \mathrm{id}(\mathbb{D}), \mathbb{E}_\Psi) : \mathbb{E} \to \mathbb{E}_\Psi$ est un homomorphisme,
- pour tout élément π de Ψ , $j_\Psi . \pi$ est accepté par $\mathbb{E}_\Psi$.

Si $\mathbb{B}$ est une catégorie petite et $\theta : \mathbb{B}^{op} \to$ *Esq* est un foncteur, on note $\mathbb{B} \times \theta$ l'esquisse lax-limite inductive de θ dans la 2-catégorie *Esq* . Autrement dit, $\mathbb{B} \times \theta$ est le sommet d'un 2-cône inductif universel de *Esq* tel que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{B}\times\theta & \\
\ldots\ \theta(B) \arrow[ur, "N_\theta(B)"] & \arrow[u, phantom, "\overset{n_\theta(b)}{\Longrightarrow}"] & \theta(B')\ \ldots \arrow[ul, "N_\theta(B')"'] \arrow[ll, "\theta(b)"]
\end{tikzcd}$$

où $b : B \to B'$ varie dans $\mathbb{B}$

Il est facile de construire $\mathbb{B} \times \theta$ en procédant comme suit:

- on considère tout d'abord la catégorie $L(\theta)$, lax-limite inductive dans *Cat* du foncteur $\mathrm{supp}.\theta : \mathbb{B}^{op} \to$ *Cat* ,
- on dispose ainsi d'un 2-cône inductif universel de *Cat* tel que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
 & L(\theta) & \\
 & \arrow[r, phantom, "\overset{\Longrightarrow}{f_\theta(b)}"] & \\
\dots\ \mathrm{supp}.\theta(B) \arrow[uur, "F_\theta(B)"] & & \mathrm{supp}.\theta(B')\ \dots \arrow[uul, "F_\theta(B')"'] \arrow[ll, "\mathrm{supp}.\theta(b)"]
\end{tikzcd}$$

où $b:B \to B'$ varie dans $\mathbb{B}$

- alors, $\mathbb{B}\times\theta$ désigne la plus petite structure d'esquisse sur $L(\theta)$ telle que, pour tout objet B de $\mathbb{B}$, $N_\theta(B):\theta(B) \to \mathbb{B}\times\theta$ est un homomorphisme de support $F_\theta(B)$ (voir la figure 4).

En particulier, si $\mathbb{E}$ est une esquisse petite, si $\mathbb{B}$ est une catégorie petite et si $\theta = \mathrm{cst}(\mathbb{E}):\mathbb{B}^{op} \to$ *Esq* est le foncteur constant sur $\mathbb{E}$, on note $\mathbb{B}\times\theta = \mathbb{B}\times\mathbb{E}$. Ainsi, on a:

$$\mathrm{supp}(\mathbb{B}\times\mathbb{E}) = \mathbb{B}\times\mathrm{supp}(\mathbb{E}) .$$

De même, si $\mathbb{B}$ est une catégorie petite et si $\theta:\mathbb{B}^{op} \to$ *Esq* est un foncteur, on pose $\theta_+ = (-)_+.\theta$.
On dispose alors d'une transformation naturelle canonique $\beta:\mathrm{cst}(\mathbb{1}) \Rightarrow \theta_+ : \mathbb{B}^{op} \to$ *Esq* telle que:
- pour tout objet B de $\mathbb{B}$, on a $\beta_B = \beta_{\theta\langle B\rangle}:\mathbb{1} \to \theta_+(B)$.
On en déduit un homomorphisme $\mathbb{B}\times\beta$: $(\mathbb{B}\times\mathbb{1} = \mathbb{B}) \to \mathbb{B}\times\theta_+$.
De plus, pour toute flèche $b:B \to B'$ de $\mathbb{B}$ et tout objet E' de $\theta(B')$, on dispose du cône projectif petit $\pi_{b,E'}$ de transformations naturelles (de *Esq*):

$$\begin{tikzcd}
 & N_{\theta_+}(B).\alpha_{\theta\langle b\rangle\langle E'\rangle} = N_{\theta_+}(B).\theta_+(b).\alpha_{E'} \arrow[dl, "N_{\theta_+}(B).\gamma_{\theta\langle b\rangle\langle E'\rangle}"'] & \\
\begin{array}{c} N_{\theta_+}(B).\beta_{\theta\langle B\rangle} \\ = \\ N_{\theta_+}(B).\theta_+(b).\beta_{\theta\langle B'\rangle} \end{array} & & N_{\theta_+}(B').\alpha_{E'} \arrow[ul, "n_{\theta_+}(b).\alpha_{E'}"'] \arrow[dl, "N_{\theta_+}(B').\gamma_{E'}"] \\
 & N_{\theta_+}(B').\beta_{\theta\langle B'\rangle} \arrow[ul, "n_{\theta_+}(b).\beta_{\theta\langle B'\rangle}"] &
\end{tikzcd}$$

Alors, si l'on note $\psi = (\pi_{b,E'})_{b\in F1(\mathbb{B}),E'\in Ob(\theta(codom(b)))}$, on pose (voir la figure 5):

$$\mathbb{B}@\theta = (\mathbb{B}\times\theta_{+})_{\psi} \ .$$

Dans ces conditions, on dispose d'un homomorphisme canonique:

$$\mathbb{B}@\beta = j_{\psi}.\mathbb{B}\times\theta_{+} : \mathbb{B} \to \mathbb{B}@\theta \ .$$

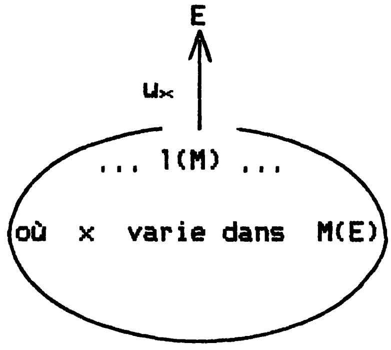
Soit $\mathbb{E}$ une esquisse petite et $M:\mathbb{E} \to$ *Ens* un modèle de $\mathbb{E}$.

On note $\mathbb{E}(M)$ la plus petite esquisse vérifiant les conditions suivantes (voir la figure 6):

- $\mathbb{E}(M)$ contient $\mathbb{E}$ (alors, on note $i_{\mathbb{E}}(M):\mathbb{E} \to \mathbb{E}(M)$ l'homomorphisme injection canonique),
- $1(M)$ est un objet (supplémentaire) de $\mathbb{E}(M)$,
- pour tout objet E de $\mathbb{E}$ et tout élément x de $M(E)$, $u_x:1(M) \to E$ est une flèche de $\mathbb{E}(M)$,
- pour toute flèche $e:E \to E'$ de $\mathbb{E}$ et tout élément x de $M(E)$, le diagramme ci-dessous commute dans $\mathbb{E}(M)$:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "e"] & & E' \\
& 1(M) \arrow[ul, "u_x"] \arrow[ur, "u_{M(e)(x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

- $1(M)$ est sommet d'un cône projectif distingué dans $\mathbb{E}(M)$ et d'indexation la catégorie vide (autrement dit, tout modèle transformera $1(M)$ en un objet final),
- pour tout objet E de $\mathbb{E}$, le cône inductif ci-dessous, d'indexation la catégorie discrète (i. e. l'ensemble) $M(E)$, est distingué dans $\mathbb{E}(M)$:



Dans ces conditions, il est facile de vérifier que la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}(M))$ est équivalente à la sous-catégorie de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ dont le seul objet est M et dont la seule flèche est $id(M)$.

3. Syntaxes et structures.

Si $\mathbb{C}$ est une catégorie, on dit que $\mathbb{S} = (\mathbb{B},K,J,\mathbb{E})$ est une $\mathbb{C}$-*syntaxe* [voir la Note 4] si, et seulement si:
- $\mathbb{B}$ est une catégorie,
- $\mathbb{E}$ est une esquisse,
- $K:\mathbb{B} \to \mathbb{C}^{op}$ est un foncteur,
- $J: \mathbb{B} \to \mathbb{E}$ est un homomorphisme.

Dans ces conditions, on dit que $\mathbb{S}$ est *petite* si, et seulement si:
- $\mathbb{B}$ est une catégorie petite,
- $\mathbb{E}$ est une esquisse petite.

[Note 4. La notion de $\mathbb{C}$-syntaxe, introduite ici, généralise au cas "non nécessairement algébrique" celle de *syntaxe d'algèbres* introduite en (T.A.E.P.), reprise en (A.M.E.N.).]

Soit $\mathbb{C}$ une catégorie localement petite (resp. localement grosse) et $\mathbb{S}$ une $\mathbb{C}$-syntaxe.

On dit que (C,Δ) (ou Δ) est une $\mathbb{S}$-*structure* (sur C) si, et seulement si:
- C est un objet de $\mathbb{C}$,
- $\Delta: \mathbb{E} \to$ *Ens* (resp. $\Delta: \mathbb{E} \to$ *ENS*) est un modèle de $\mathbb{E}$,
- le diagramme de foncteurs ci-dessous est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{B} \arrow[dl, "K"'] \arrow[dr, "J"] & \\
\mathbb{C}^{op} \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,C)"'] & & \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \arrow[dl, "\mathrm{ssj}(\Delta)"] \\
 & \mathit{Ens} &
\end{tikzcd}$$

(resp.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{B} \arrow[dl, "K"'] \arrow[dr, "J"] & \\
\mathbb{C}^{op} \arrow[dr, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,C)"'] & & \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \arrow[dl, "\mathrm{ssj}(\Delta)"] \\
& \mathit{ENS} &
\end{tikzcd}$$

)

Si $\mathbb{C}$ est une catégorie localement petite (resp. localement grosse), si $\mathbb{S}$ est une $\mathbb{C}$-syntaxe et si (C,Δ) et (C',Δ') sont deux $\mathbb{S}$-structures, on dit que (c,δ) est un *homomorphisme* de (C,Δ) vers (C',Δ') et l'on note $(c,\delta):(C,\Delta) \to (C',\Delta')$ si, et seulement si:

- $c:C \to C'$ est une flèche de $\mathbb{C}$,
- $\delta:\Delta \Rightarrow \Delta':\mathbb{E} \to \mathit{Ens}$ (resp. $\delta:\Delta \Rightarrow \Delta':\mathbb{E} \to \mathit{ENS}$) est un homomorphisme de modèles,
- le 2-diagramme ci-dessous commute:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{B} \arrow[dl, "K"'] \arrow[dr, "J"] & \\
\mathbb{C}^{op} \arrow[dr, bend right=60, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,C)"'] \arrow[dr, bend left=20, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,C')"] \arrow[dr, phantom, "\xRightarrow[\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,c)]{}"] & & \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \arrow[dl, bend right=20, "\Delta"'] \arrow[dl, bend left=60, "\Delta'"] \arrow[dl, phantom, "\xRightarrow[\delta]{}"] \\
& \mathit{Ens} &
\end{tikzcd}$$

(resp.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{B} \arrow[dl, "K"'] \arrow[dr, "J"] & \\
\mathbb{C}^{op} \arrow[dr, bend right=60, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,C)"'{name=A}] \arrow[dr, bend left, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,C')"{name=B}] & & \mathrm{Supp}(\mathbb{E}) \arrow[dl, bend right, "\Delta"'{name=D}] \arrow[dl, bend left=60, "\Delta'"{name=E}] \\
& \mathit{ENS} &
\arrow[Rightarrow, from=A, to=B, "\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(-,c)"']
\arrow[Rightarrow, from=D, to=E, "\delta"']
\end{tikzcd}$$

)

Alors, on définit sans difficulté l'homomorphisme *composé* de deux homomorphismes consécutifs entre $\mathbb{S}$-structures.

Dans ces conditions, on note $\mathbb{S}$-struct la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{S}$-structures et dont les flèches sont ces homomorphismes entre $\mathbb{S}$-structures.

4. Constructions de syntaxes.

Soit $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ un foncteur plein et fidèle d'une catégorie localement petite $\mathbb{C}$ vers une catégorie localement grosse $\mathbb{C}'$.

Si $\mathbb{S} = (\mathbb{B}, K, J, \mathbb{E})$ est une $\mathbb{C}$-syntaxe, elle s'identifie à une $\mathbb{C}'$-syntaxe $\mathbb{S}_j = (\mathbb{B}, j^{op}.K, J, \mathbb{E})$.
Alors, $\mathbb{S}$-struct s'identifie aussi à une sous catégorie pleine de la catégorie $\mathbb{S}_j$-struct . Aussi, nous poserons, s'il n'y a pas risque d'ambiguïté (sur j) $\mathbb{S}_j$-struct = $\mathbb{S}$-STRUCT et nous dirons que les objets de $\mathbb{S}$-struct (resp. $\mathbb{S}$-STRUCT) sont des $\mathbb{S}$-structures *petites* (resp. *grosses*) .

Soit $\mathbb{E}_o$ une esquisse projective petite.

A tout objet E de $\mathbb{E}_o$ est associé le foncteur *évaluation en* E :

$$ev_E : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o) \to \mathit{Ens} \ .$$

Alors, on sait que [voir la Note 5]:

- le foncteur $ev_E : \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o) \to \mathit{Ens}$ admet un adjoint à gauche $G_E : \mathit{Ens} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)$.

Ainsi, on dispose du foncteur *évaluation*:

$$ev : \mathrm{supp}(\mathbb{E}_o) \to \mathit{Ens}^{\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)} \ ,$$
$$E \mapsto ev_E$$

et par conséquent d'un foncteur:

$$G : \mathrm{supp}(\mathbb{E}_o) \to (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)^{\mathit{Ens}})^{op}$$
$$E \mapsto G_E$$

Il en résulte un foncteur canonique, dit *de Yoneda*, [voir la Note 5]:

$$Y_{\mathbb{E}_o} : \mathrm{supp}(\mathbb{E}_o) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)^{op}$$
$$E \mapsto G_E(1)$$

On en déduit que

$$\mathbb{S}_{\mathbb{E}_o} = (\mathrm{supp}(\mathbb{E}_o), Y_{\mathbb{E}_o}, \mathrm{id}(\mathrm{supp}(\mathbb{E}_o)) : \mathrm{supp}(\mathbb{E}_o) \to \mathbb{E}_o \ , \mathbb{E}_o)$$

est une $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)$-syntaxe petite *canoniquement associée à* $\mathbb{E}_o$.

Alors, on a [voir la Note 5]:

- les catégories $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)$ et $\mathbb{S}_{\mathbb{E}_o}$-struct sont isomorphes.

Dans ces conditions, nous dirons qu'une $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)$-syntaxe $\mathbb{S} = (\mathbb{B}, K, J, \mathbb{E})$ est une $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)$-*sur-syntaxe* si, et seulement si:

- on dispose d'un diagramme commutatif (supposé donné sans ambiguïté) tel que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{E} & \mathbb{B} \arrow[l, "J"'] \arrow[r, "K"] & \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)^{op} \\
\mathbb{E}_o \arrow[u] & \mathrm{supp}(\mathbb{E}_o) \arrow[l] \arrow[u] \arrow[ur, "Y_{\mathbb{E}_o}"'] &
\end{tikzcd}$$

[Note 5. Il est facile de vérifier les différentes affirmations qui précèdent (voir, par exemple, (C.Q.C.E.)), notamment que le foncteur

$$Y_{\mathbb{E}_o} : \mathrm{supp}(\mathbb{E}_o) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)^{op}$$

est co-dense, et, de plus, qu'il définit un modèle (dit *canonique*) de $\mathbb{E}_o$ dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_o)^{op}$.]

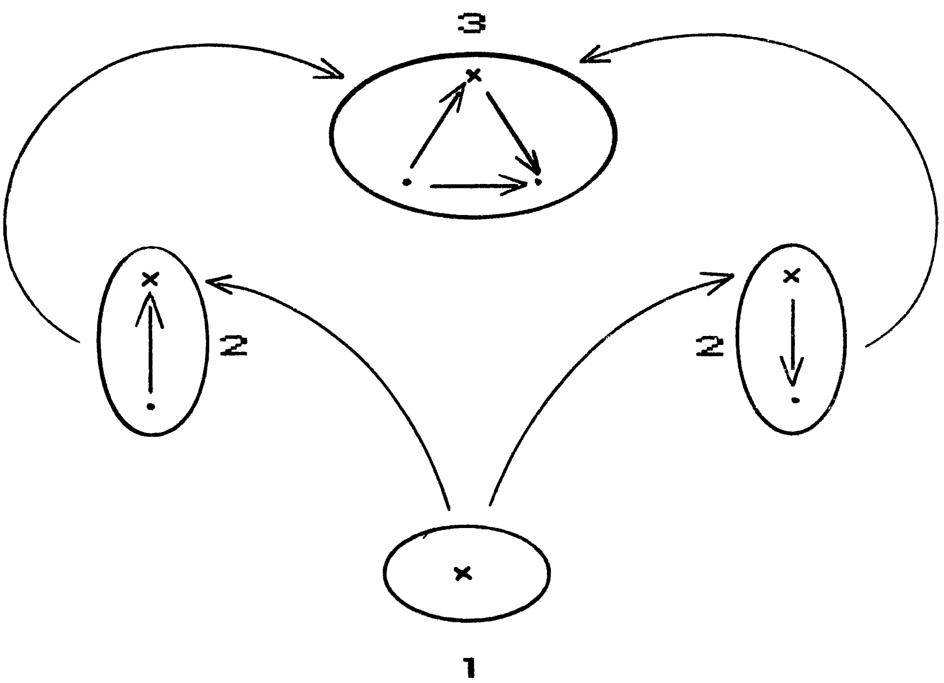
5. Diagrammes structurés de modèles.

Soit $\mathbb{S} = (\mathbb{B}, K, J, \mathbb{E})$ une *Cat*-sur-syntaxe petite [voir la Note 6] et $\mathbb{E}'$ une esquisse petite.

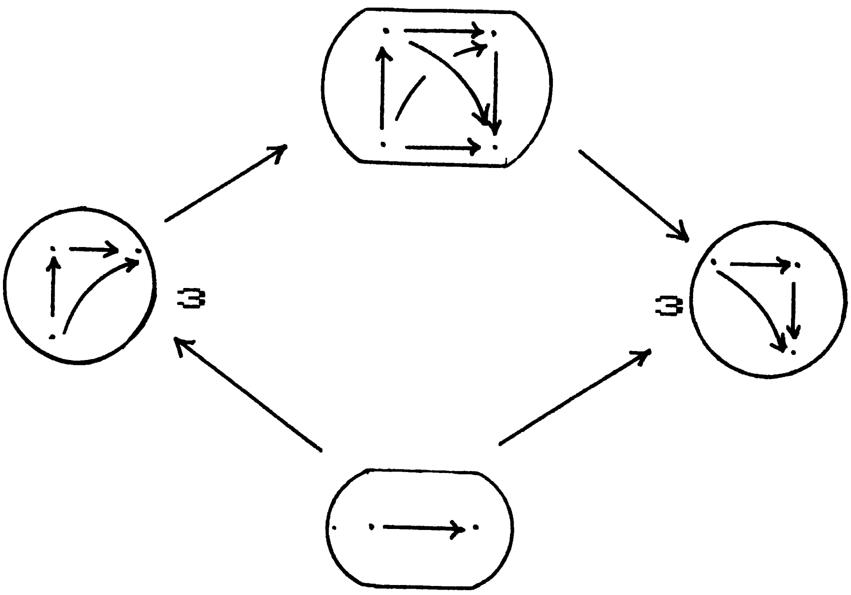
On dit que $(\mathbb{X}, \Delta, F)$ est un *diagramme petit de modèles de* $\mathbb{E}'$ *, structuré par* $\mathbb{S}$, ou encore un $\mathbb{S}$*-diagramme petit de modèles de* $\mathbb{E}'$, si, et seulement si:

- $\mathbb{X}$ est une catégorie petite,
- $(\mathbb{X}, \Delta)$ est une $\mathbb{S}$-structure,
- $(\mathbb{X}, F)$ est un diagramme de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}')$, i. e. $F : \mathbb{X} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}')$ est un foncteur.

[Note 6. Notons $\mathbb{D}_{cat}$ la catégorie duale de la sous-catégorie pleine (évidemment petite) de *Cat* dont les objets sont les petites catégories (associées aux ordres canoniques) $\mathbf{1}$, $\mathbf{2}$, $\mathbf{3}$, $\mathbf{4}$. En particulier $\mathbb{D}_{cat}$ contient une flèche $i_{cat} : \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ "duale" de l'unique foncteur $\mathbf{2} \to \mathbf{1}$.
Alors, on désigne par P_{cat} l'ensemble ayant pour élément les deux cônes projectifs de $\mathbb{D}_{cat}$, duaux des cônes sommes fibrées de *Cat* représentés ci-dessous:



4



2

On pose enfin $\mathbb{E}_{cat} = (\mathbb{D}_{cat}, P_{cat}, \emptyset)$.

Dans ces conditions, il est clair que les catégories Mod($\mathbb{E}_{cat}$) (resp. MOD($\mathbb{E}_{cat}$)) et *Cat* (resp. *CAT*) sont équivalentes.

On peut donc légitimement considérer, en vertu des constructions du §4, des *Cat-sur*-syntaxes.]

Soit $\mathbb{S}$ une *Cat*-sur-syntaxe petite et $\mathbb{E}'$ une esquisse petite.

Si $(\mathbb{X},\Delta,F)$ et $(\mathbb{X}',\Delta',F')$ sont deux $\mathbb{S}$-diagrammes petits de modèles de $\mathbb{E}'$, on dit que (U,δ,n) est un *homomorphisme* de $(\mathbb{X},\Delta,F)$ vers $(\mathbb{X}',\Delta',F')$ et l'on note $(U,\delta,n):(\mathbb{X},\Delta,F) \to (\mathbb{X}',\Delta',F')$ si, et seulement si:

- $(U,\delta):(\mathbb{X},\Delta) \to (\mathbb{X}',\Delta')$ est un homomorphisme de $\mathbb{S}$-structures,
- $n:F \Rightarrow F'.G : \mathbb{X} \to \mathrm{Mod}(\mathbb{E}')$ est une transformation naturelle.

On définit facilement le *composé* de deux homomorphismes consécutifs entre deux $\mathbb{S}$-diagrammes petits de modèles de $\mathbb{E}'$.

Alors, on note $\mathbb{S}$-diag(Mod($\mathbb{E}'$)) la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{S}$-diagrammes petits de modèles de $\mathbb{E}'$ et dont les flèches sont ces homomorphismes.

Soit $\mathbb{S} = (\mathbb{B},K,J,\mathbb{E})$ une *Cat*-sur-syntaxe petite et $\mathbb{E}'$ une esquisse petite.

Nous désignons par $\theta:\mathbb{B}^{op} \to Esq$ le foncteur tel que:
- pour tout objet B de $\mathbb{B}$, on a:

$$\theta(B) = K(B) \times \mathbb{E}' ,$$

- pour toute flèche $b:B \to B'$ de $\mathbb{B}$, on a:

$$\theta(b) = K(b) \times id(\mathbb{E}') .$$

On considère alors la somme fibrée $\mathbb{S}@\mathbb{E}'$ dans *Esq* représentée ci-dessous (voir la figure 7):

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{S}@\mathbb{E}' & \\
\mathbb{B}@\theta \arrow[ur, "H'"] & & \mathbb{E} \arrow[ul, "H"'] \\
 & \mathbb{B} \arrow[ul, "\mathbb{B}@B"] \arrow[ur, "J"'] &
\end{tikzcd}$$

Dans ces conditions, il est immédiat (les "changements de base" commutant aux limites inductives et les sommes commutant aux limites projectives connexes dans *Ens*) d'établir que:

Proposition 1. *Si* $\mathbb{S}$ *est une Cat-sur-syntaxe petite et si* $\mathbb{E}'$ *est une esquisse petite, alors les catégories* $\mathbb{S}$-diag(Mod($\mathbb{E}'$)) *et* Mod($\mathbb{S}@\mathbb{E}'$) *sont équivalentes. Autrement dit, la catégorie des diagrammes petits de modèles d'une esquisse petite donnée, structurés par une Cat-sur-syntaxe petite donnée, est encore une catégorie de modèles.*

6. Diagrammes fortement structurés de modèles.

Soit $\mathbb{S} = (\mathbb{B},K,J,\mathbb{E})$ une *Cat*-sur-syntaxe petite (elle s'identifie donc à une *CAT*-sur-syntaxe), $\mathbb{E}'$ une esquisse petite et (Mod($\mathbb{E}'$),Σ) une $\mathbb{S}$-structure grosse sur (l'objet de *CAT*) Mod($\mathbb{E}'$) .

On dit que $(\mathbb{X},\Delta,F,\sigma)$ est un *diagramme petit de modèles de* $\mathbb{E}'$, *fortement structuré par* $\mathbb{S}$ *relativement à* Σ , ou encore un $\mathbb{S}$*-diagramme petit* et Σ*-fort* de modèles de $\mathbb{E}'$ si, et seulement si:
- $(\mathbb{X},\Delta,F)$ est un $\mathbb{S}$-diagramme petit de modèles de $\mathbb{E}'$,
- $(F,\sigma):(\mathbb{X},\Delta) \to (\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'),\Sigma)$ est un homomorphisme de $\mathbb{S}$-structures grosses.

Si $(\mathbb{X},\Delta,F,\sigma)$ et $(\mathbb{X}',\Delta',F',\sigma')$ sont deux $\mathbb{S}$-diagrammes petits et Σ-forts de modèles de $\mathbb{E}'$, on dit que (U,δ,n) est un *homomorphisme* de $(\mathbb{X},\Delta,F,\sigma)$ vers $(\mathbb{X}',\Delta',F',\sigma')$ et l'on note $(U,\delta,n):(\mathbb{X},\Delta,F,\sigma) \to (\mathbb{X}',\Delta',F',\sigma')$ si, et seulement si:
- $(U,\delta,n):(\mathbb{X},\Delta,F) \to (\mathbb{X}',\Delta',F')$ est un homomorphisme de $\mathbb{S}$-diagrammes petits.

On définit facilement le *composé* de deux tels homomorphismes consécutifs.

Alors, on désigne par $\mathbb{S}\text{-diag}(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'),\Sigma)$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbb{S}$-diagrammes petits et Σ-forts de modèles de $\mathbb{E}'$ et dont les flèches sont ces homomorphismes.

Soit $\mathbb{S} = (\mathbb{B},K,J,\mathbb{D})$ une *Cat*-sur-syntaxe petite, $\mathbb{E}'$ une esquisse petite et $(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'),\Sigma)$ une $\mathbb{S}$-structure grosse.

On dit que $(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'),\Sigma)$ est *détectable* [voir la Note 7] si, et seulement si:
- le foncteur (canoniquement associé à $\mathbb{S}$)

$$\theta:\mathbb{B}^{op} \to \mathit{Esq}$$
$$B \to K(B)\times\mathbb{E}'$$

admet un prolongement

$$\theta':\mathbb{D}^{op} \to \mathit{Esq}$$

le long de

$$J^{op}:\mathbb{B}^{op} \to \mathbb{D}^{op}$$

de sorte que:

$$\Sigma = \mathrm{Hom}_{\mathit{ESQ}}(\theta'(-),\mathit{Ens}):\ \mathbb{D} \to \mathit{ENS}\ .$$

Alors, s'il en est ainsi, on peut construire $\mathbb{D}@\theta'$, puis la somme fibrée $\mathbb{S}@_\Sigma\mathbb{E}'$ dans *Esq* représentée ci-dessous:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{S}@_\Sigma\mathbb{E}' & \\
\mathbb{D}@\theta' \arrow[ur, "H'_\Sigma"] & & \mathbb{E} \arrow[ul, "H_\Sigma"'] \\
& \mathbb{D} \arrow[ul, "\mathbb{D}@\beta'"] \arrow[ur, "(\mathbb{D},id(\mathbb{D}),\mathbb{E})"'] &
\end{tikzcd}$$

Dans ces conditions, il est facile de vérifier que:

Proposition 2. *Si* $\mathbb{S}$ *est une Cat-*sur-syntaxe petite, si $\mathbb{E}'$ *est une esquisse petite et si* Mod($\mathbb{E}'$) *est munie d'une* $\mathbb{S}$-*structure grosse détectable* Σ , *alors les catégories* Mod($\mathbb{S}@_\Sigma\mathbb{E}'$) *et* $\mathbb{S}$-diag(Mod($\mathbb{E}'$),Σ) *sont équivalentes. Autrement dit, la catégorie des diagrammes petits et forts de modèles de* $\mathbb{E}'$ *structurés par* $\mathbb{S}$ *, est encore une catégorie de modèles, pourvu que la catégorie des modèles de* $\mathbb{E}'$ *soit munie d'une* $\mathbb{S}$*-structure détectable.*

[Note 7. Nous reprenons ici, en lui donnant le sens général qui l'éclaire, le mot *détectable* introduit en (A.C.C.A.) dans un cas particulier que nous examinons au §8.]

7. Diagrammes structurés fixés de modèles.

Soit $\mathbb{S}$ = ($\mathbb{B}$,K,J,$\mathbb{E}$) une *Cat*-sur-syntaxe petite, $\mathbb{E}'$ une esquisse petite et σ = ($\mathbb{X}$,Δ) une $\mathbb{S}$-structure petite fixée.

On dit que tout $\mathbb{S}$-diagramme petit de modèles de $\mathbb{E}'$ de la forme ($\mathbb{X}$,Δ,F) est un $\mathbb{S}$-diagramme petit de modèles de $\mathbb{E}'$, *fixé par* (ou *d'indexation fixe*) σ .
Dans ces conditions, on note $\mathbb{S}$-diag$_\sigma$(Mod($\mathbb{E}'$)) la sous-catégorie pleine de $\mathbb{S}$-diag(Mod($\mathbb{E}'$)) dont les objets sont les $\mathbb{S}$-diagrammes petits de modèles de $\mathbb{E}'$, fixés par σ .

De même, si Σ est une $\mathbb{S}$-structure grosse sur Mod($\mathbb{E}'$) , on définit les $\mathbb{S}$-diagrammes petits de modèles de $\mathbb{E}'$, Σ-*forts* et *fixés par* σ . Alors, on note $\mathbb{S}$-diag$_\sigma$(Mod($\mathbb{E}'$),Σ) la sous-catégorie pleine de $\mathbb{S}$-diag(Mod($\mathbb{E}'$),Σ) dont les objets sont ces $\mathbb{S}$-diagrammes.

Soit $\mathbb{S}$ = ($\mathbb{B}$,K,J,$\mathbb{E}$) une *Cat*-sur-syntaxe petite, $\mathbb{E}'$ une esquisse petite, Σ une $\mathbb{S}$-structure grosse détectable sur Mod($\mathbb{E}'$) et σ = ($\mathbb{X}$,Δ) une $\mathbb{S}$-structure petite fixée.

On peut donc construire les sommes fibrées dans *Esq* représentées par les diagrammes ci-dessous (voir figure 8):

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}(\sigma)@\mathbb{E}' & \\ \mathbb{S}@\mathbb{E}' \arrow[ur] & & \mathbb{E}(\Delta) \arrow[ul] \\ & \mathbb{E} \arrow[ul, "H"] \arrow[ur, "\text{canonique}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}(\sigma)@_{\Sigma}\mathbb{E}' & \\ \mathbb{S}@_{\Sigma}\mathbb{E}' \arrow[ur] & & \mathbb{E}(\Delta) \arrow[ul] \\ & \mathbb{E} \arrow[ul, "H_{\Sigma}"] \arrow[ur, "i_{\mathbb{E}}(\Delta)"'] & \end{tikzcd}$$

Alors, il est facile de vérifier que:

Proposition 3. *Si* $\mathbb{S}$ *est une* *Cat*-sur-syntaxe petite, si $\sigma = (\mathbb{X},\Delta)$ *est une* $\mathbb{S}$*-structure petite fixée et si* $\mathbb{E}'$ *est une esquisse petite, alors les catégories* $\mathbb{S}$-diag$_{\sigma}$(Mod($\mathbb{E}'$)) *et* Mod($\mathbb{S}(\sigma)@\mathbb{E}'$) *sont équivalentes. Autrement dit, la catégorie des diagrammes petits de modèles d'une esquisse petite donnée, structurés par une Cat-sur-syntaxe petite donnée et fixés par une structure petite donnée, est encore une catégorie de modèles.*

Proposition 4. *Si* $\mathbb{S}$ *est une Cat-sur-syntaxe petite, si* $\sigma = (\mathbb{X},\Delta)$ *est une* $\mathbb{S}$*-structure petite fixée, si* $\mathbb{E}'$ *est une esquisse petite et si* Mod($\mathbb{E}'$) *est munie d'une* $\mathbb{S}$*-structure grosse détectable* Σ *, alors les catégories* Mod($\mathbb{S}(\sigma)@_{\Sigma}\mathbb{E}'$) *et* $\mathbb{S}$-diag$_{\sigma}$(Mod($\mathbb{E}'$),Σ) *sont équivalentes. Autrement dit, la catégorie des diagrammes petits et forts, relativement à une structure détectable, de modèles d'une esquisse petite donnée,* *structurés par une Cat-sur-syntaxe petite donnée et fixés par une structure petite donnée, est encore une catégorie de modèles.*

8. Exemples et applications.

Si $\mathbb{S} = \mathbb{S}_{cat} = (\mathbb{D}_{cat}, K_{cat}, id(\mathbb{D}_{cat}), \mathbb{D}_{cat})$ (où $K_{cat}: \mathbb{D}_{cat} \to Cat^{op}$ est le plongement canonique) et si $\mathbb{E}'$ est une esquisse petite, il est clair que les $\mathbb{S}$-diagrammes petits de modèles de $\mathbb{E}'$ sont exactement les petits diagrammes (au sens usuel) de modèles de $\mathbb{E}'$. En vertu de la proposition 1, il en résulte que:
- la catégorie des diagrammes petits de modèles d'une esquisse petite donnée est encore une catégorie de modèles [voir la Note 8].

[Note 8. Ainsi, nous retrouvons, au moyen de considérations purement syntaxiques (i. e. en construisant systématiquement les esquisses appropriées), le résultat établi,en utilisant une caractérisation des catégories de modèles d'esquisses, en (A.C.C.A.).]

Désignons maintenant par $\mathbb{S} = (\mathbb{D}_{cat}, K_{cat}, J, \mathbb{D})$ la *Cat*-sur-syntaxe (évidemment petite) telle que:
- $J: \mathbb{D}_{cat} \to \mathbb{D}$ est l'injection canonique de $\mathbb{D}_{cat}$ dans la plus petite sur-catégorie $\mathbb{D}$ où la flèche $i_{cat}: \mathbf{1} \to \mathbf{2}$ de $\mathbb{B}$ est inversible [voir la Note 6].

Clairement, les $\mathbb{S}$-diagrammes petits de modèles d'une esquisse petite fixée $\mathbb{E}'$ sont exactement les petites catégories discrètes, i. e. les petites familles (au sens usuel), de modèles de $\mathbb{E}'$. Ainsi, en vertu de la proposition 1, on a:
- la catégorie des petites familles de modèles d'une esquisse petite donnée est encore une catégorie de modèles [voir la Note 9].

[Note 9. Nous retrouvons donc comme application de considérations purement syntaxiques *générales* ce qui est établi, mais *seulement* dans ce cas *particulier*, en (A.C.C.A.). Notons que l'esquisse (des petites familles de modèles de $\mathbb{E}'$) utilisée en (A.C.C.A.)

est manifestement équivalente à celle que l'application des constructions générales présentées plus haut fournit automatiquement dans le cas particulier considéré ici.]

Soit $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ deux ensembles petits de petites catégories. On sait construire explicitement [voir la Note 10] une *Cat*-sur-syntaxe petite $\mathbb{S}$ telle que les $\mathbb{S}$-structures petites soient exactement les $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisses petites (i. e. telle que les catégories $\mathbb{S}$-struct et $Esq_{\mathcal{I},\mathcal{J}}$ soient équivalentes).

Alors, les $\mathbb{S}$-diagrammes petits de modèles d'une esquisse petite donnée $\mathbb{E}'$ sont exactement les diagrammes petits (au sens usuel) de modèles de $\mathbb{E}'$, indéxés par le support d'une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse petite variable.

Si la $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse grosse $\mathrm{cano}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}')) = \Sigma$ est une $\mathbb{S}$-structure détectable (au sens du §5 [voir la Note 11]), alors les $\mathbb{S}$-diagrammes petits et Σ-forts de modèles d'une esquisse petite $\mathbb{E}'$ sont exactement les diagrammes petits (au sens usuel) de modèles de $\mathbb{E}'$ qui sont indexés par une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse petite variable et qui sont supports de modèles de cette $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}')$.
En particulier, si σ est une $\mathbb{S}$-structure petite fixée (qui s'identifie donc à une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse petite $\mathbb{E}_\sigma = \mathbb{E}''$), les catégories $\mathbb{S}\text{-diag}_\sigma(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'))$ et $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}_\sigma,\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'))$ sont clairement équivalentes. Par conséquent, en vertu de la proposition 4, on a:
- la catégorie des modèles d'une $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse petite fixée dans une catégorie de modèles d'une esquisse petite fixée $\mathbb{E}'$ est encore une catégorie de modèles, pourvu que les $\mathcal{I}$-limites projectives et les $\mathcal{J}$-limites inductives soient détectables dans $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}')$ [voir la Note 12].

[Note 10. On pourra trouver tant en (C.T.F.A.) qu'en (A.M.E.N.) l'essentiel des considérations (syntaxiques) établissant que la structure de $(\mathcal{I},\mathcal{J})$-esquisse petite est ... esquissable, à l'aide d'une esquisse petite où ne sont distingués que des cônes ... *projectifs*! A titre de pur exercice d'écriture, il est facile d'en déduire immédiatement que la structure de "catégorie munie d'un choix de $\mathcal{I}$-limites projectives et d'un choix de $\mathcal{J}$-limites inductives" est également projectivement esquissable, de même que celle de "catégorie cartésienne fermée" ou de "topos" etc...]

[Note 11. Il est immédiat de vérifier que $\mathrm{cano}_{\mathcal{I},\mathcal{J}}(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}'))$ est une $\mathbb{S}$-structure (grosse) détectable au sens général du §5 si, et seulement si, les $\mathcal{I}$-limites projectives et les $\mathcal{J}$-limites inductives de $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}')$ sont détectables au sens particulier de (A.C.C.A.).]

[Note 12. Nous retrouvons donc comme application de considérations purement syntaxiques générales ce qui est établi en (A.C.C.A.).]

Nous laissons au lecteur le soin de multiplier et raffiner à l'infini les exemples (diagrammes cartésiens fermés de modèles, topos de modèles ... - voir la note 10) autres que ceux qui font ici l'objet d'un traitement explicite (pour le comparer à celui appliqué en (A.C.C.A.)).

Atlas des Figures

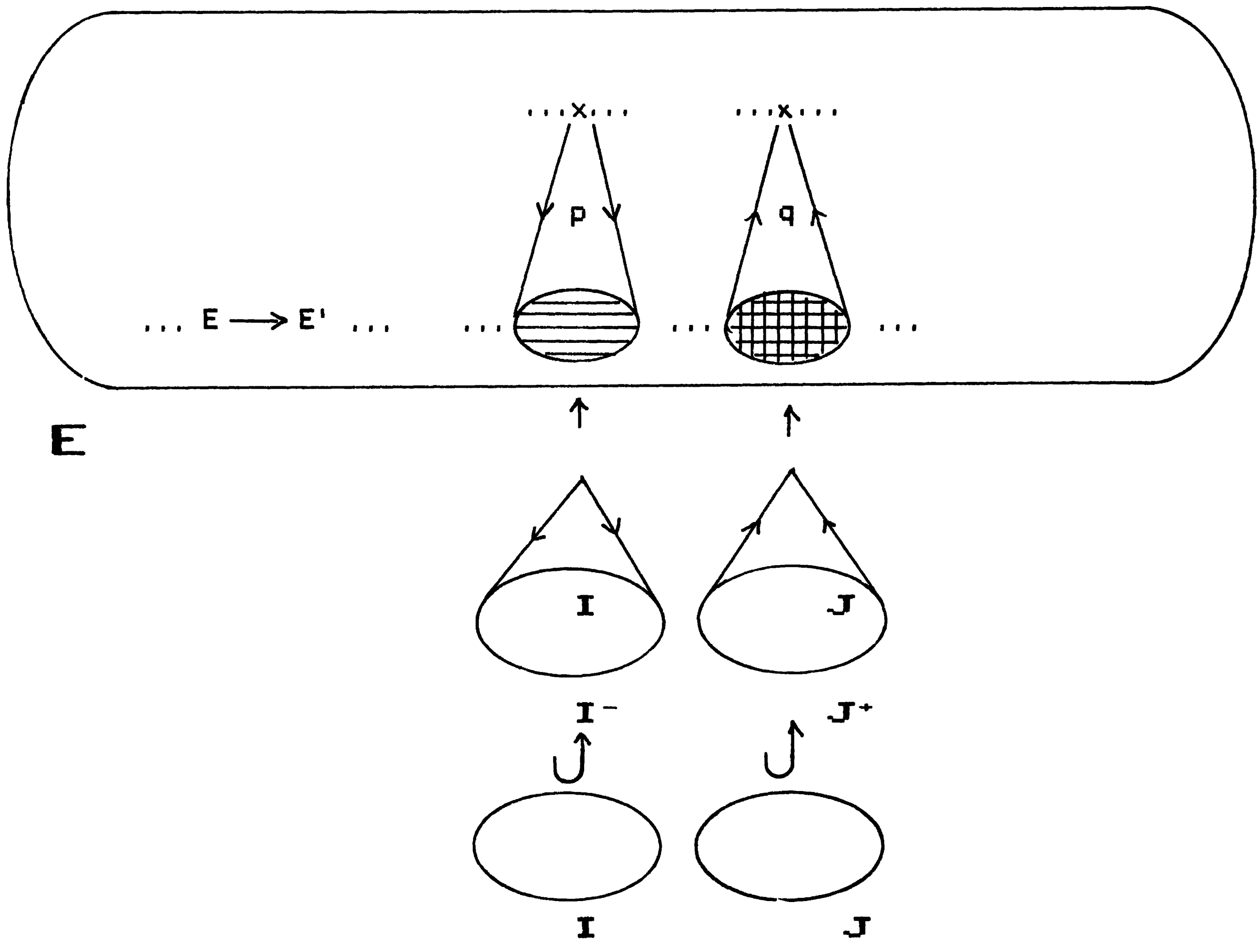


Figure 1

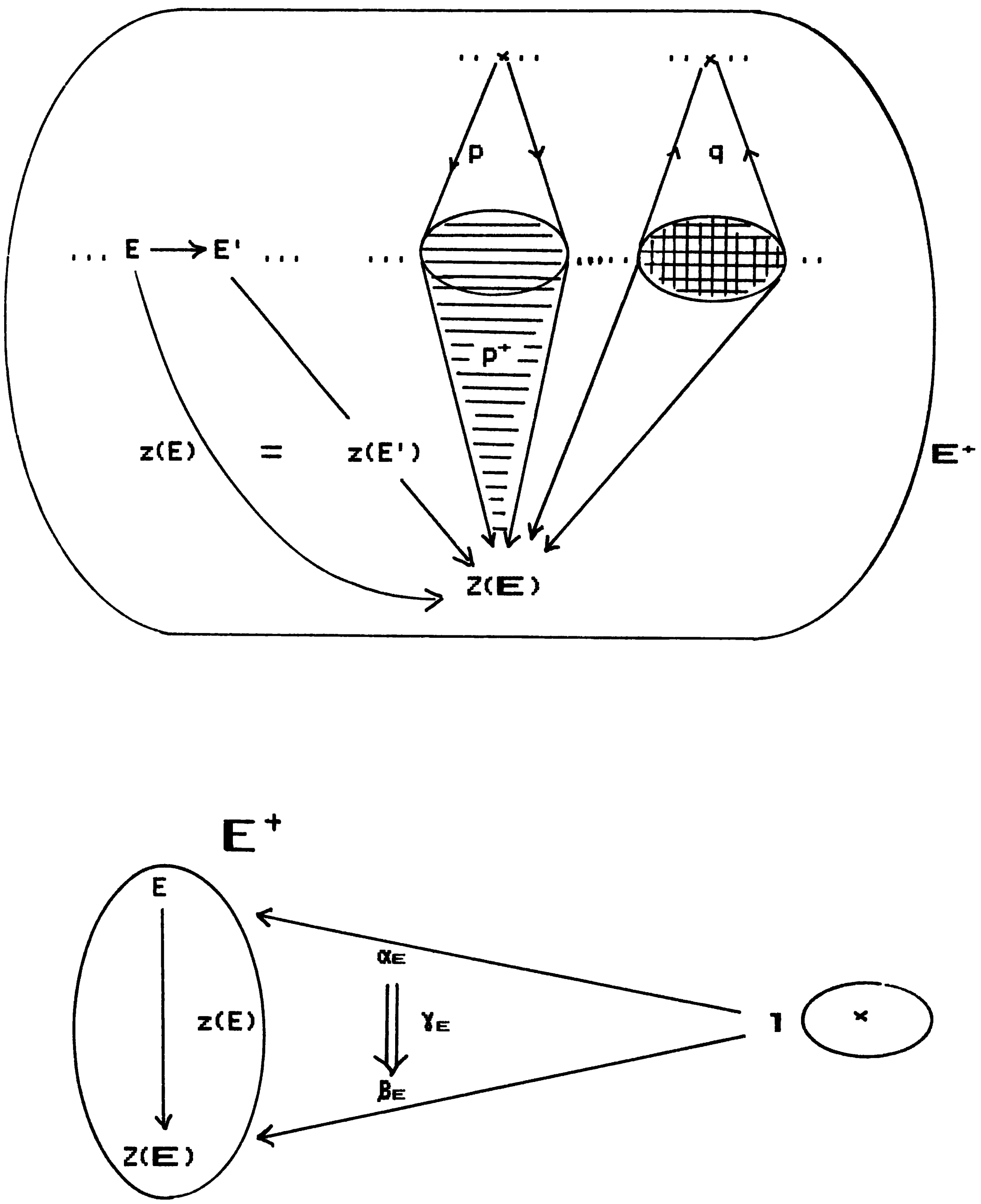


Figure 2

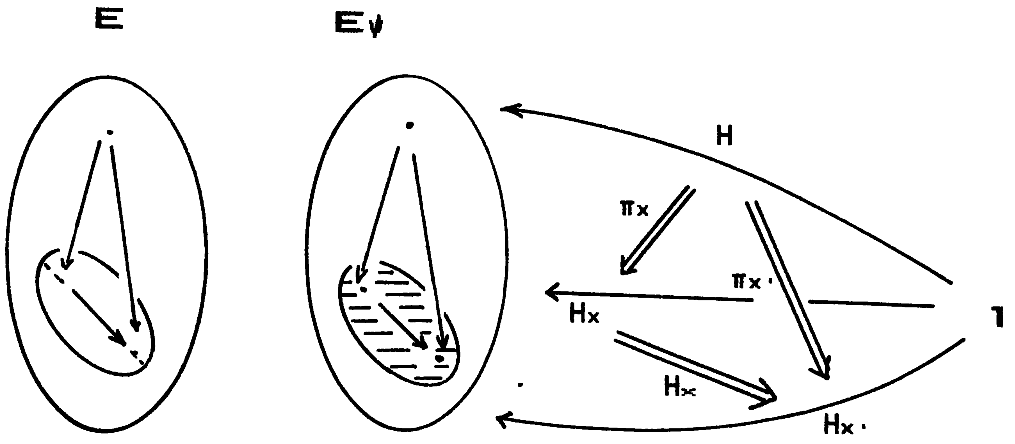


Figure 3

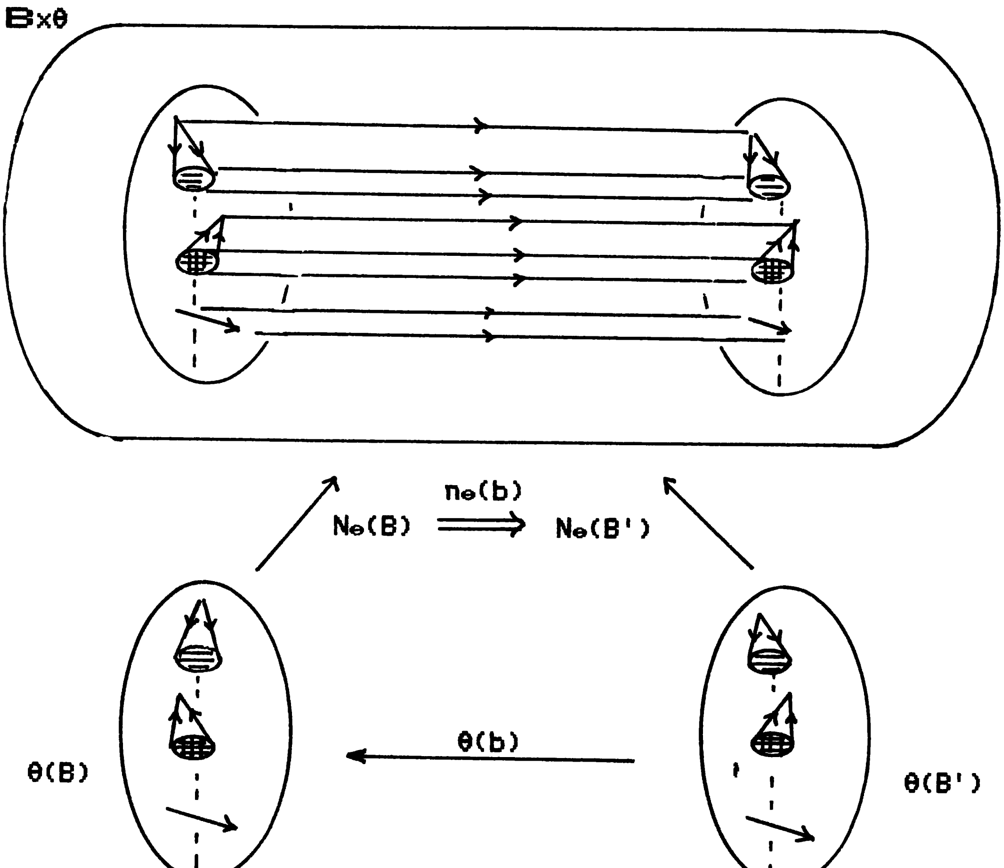


Figure 4

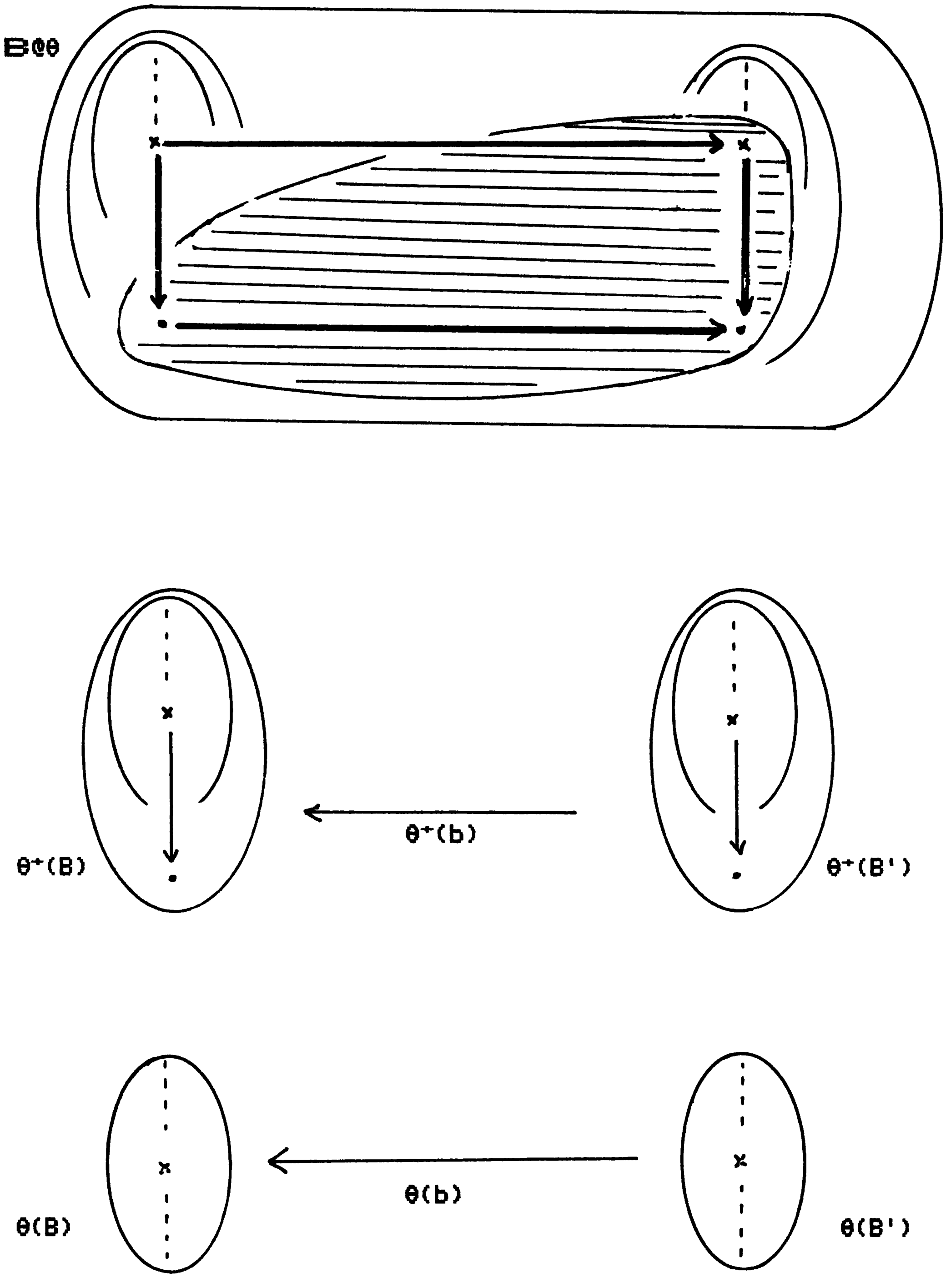


Figure 5

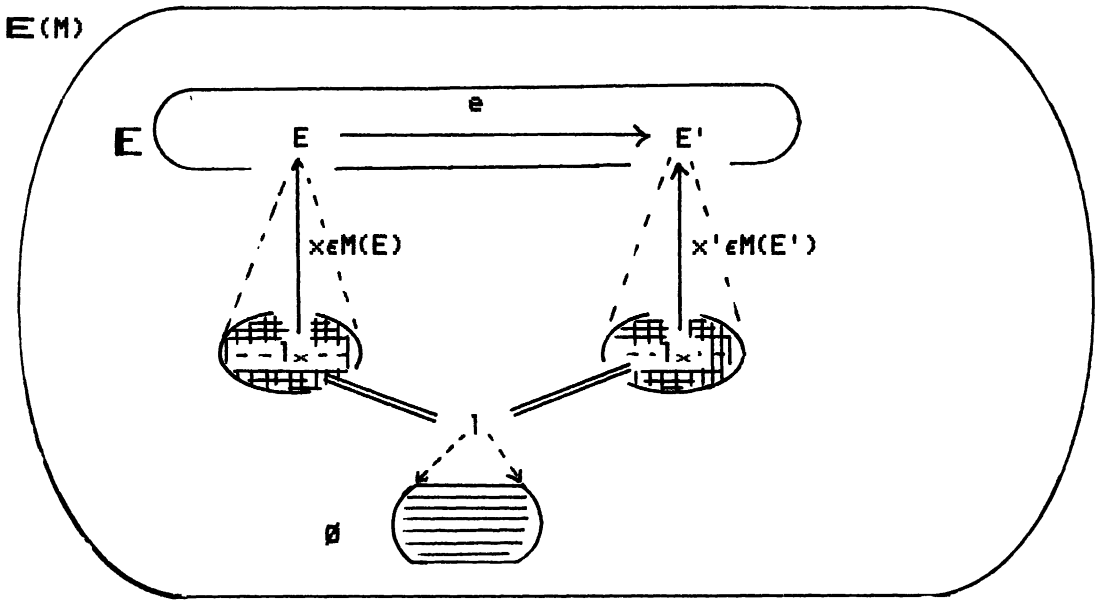


Figure 6

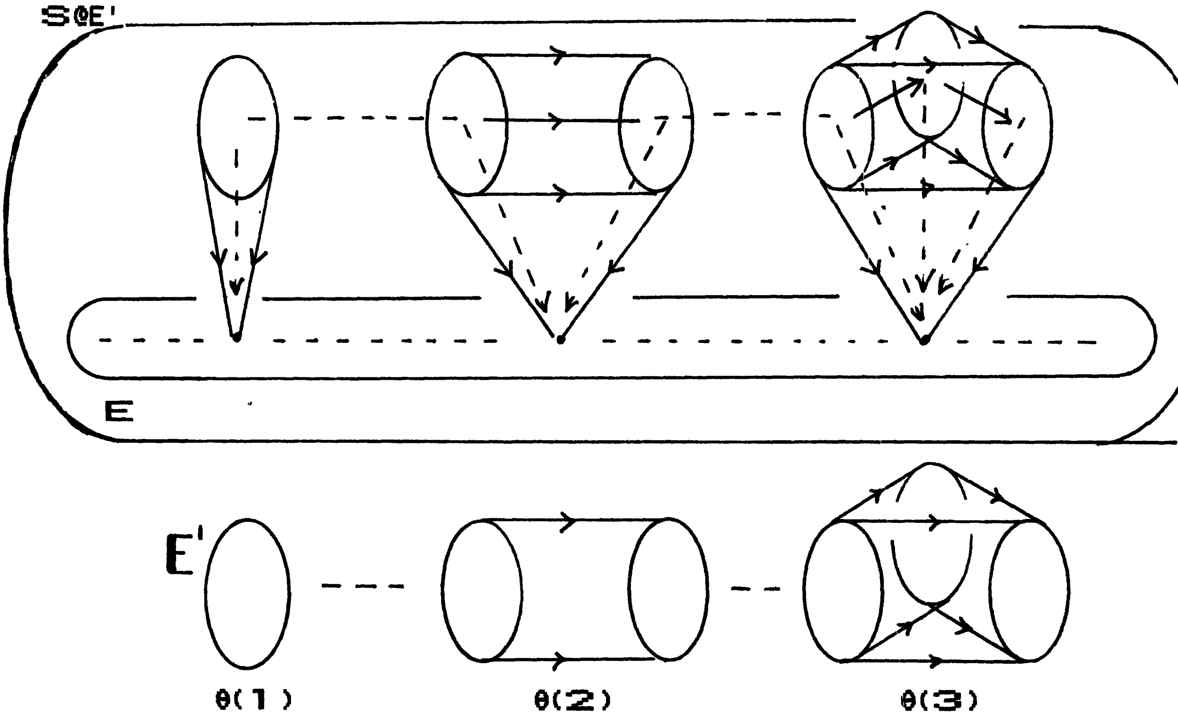


Figure 7

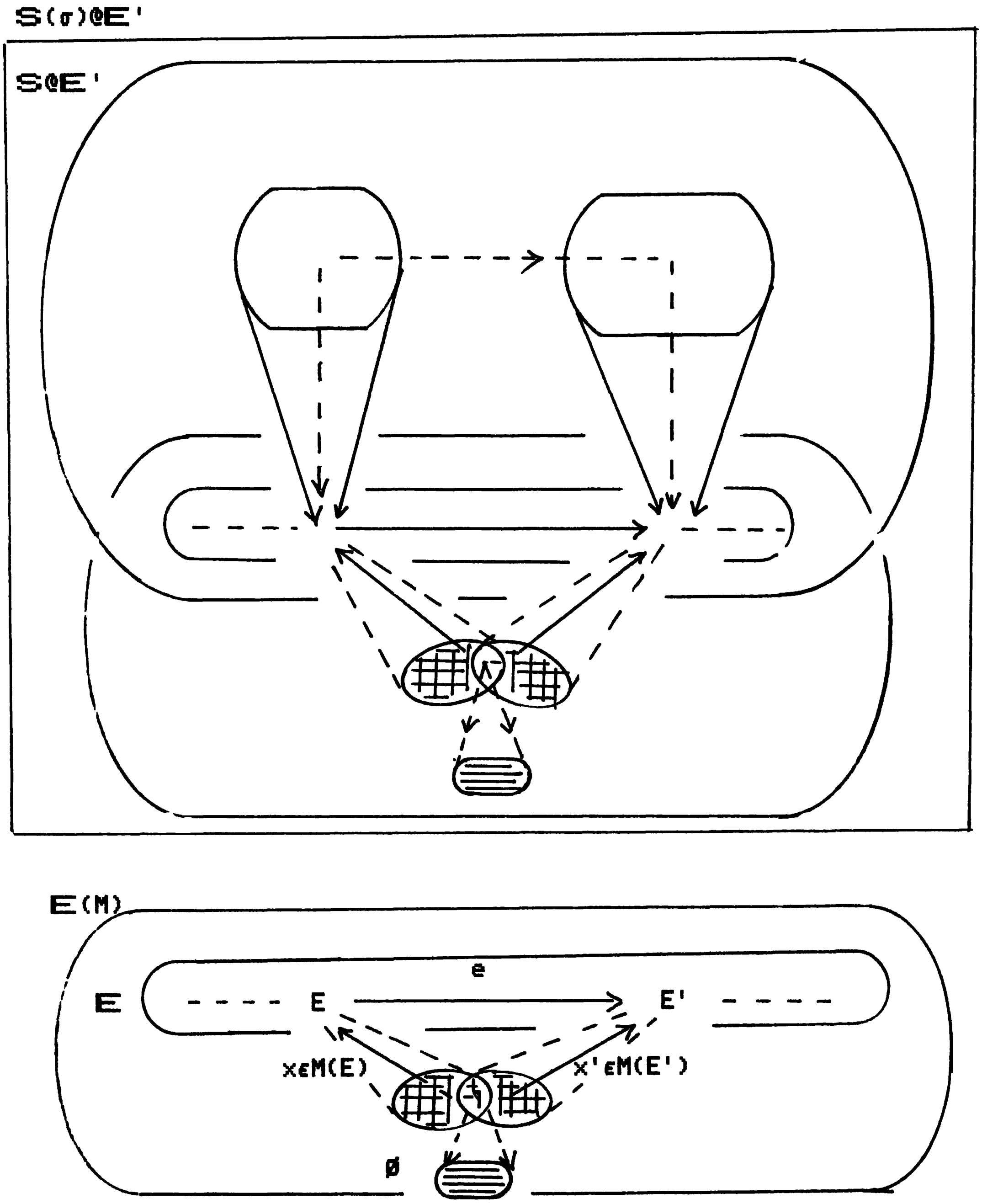


Figure 8

Bibliographie

(A.C.C.A.) M. Makkai et R. Paré:

Accessible categories: the foundations of categorical model theory, Rep. from the Dept. of Math. and Stat., McGill Univ., Montréal, 1987.

(A.M.E.N.) L. Coppey et C. Lair:

Algébricité, monadicité et non algébricité, Diagrammes 13, Paris, 1985.

(C.Q.C.E.) C. Lair:

Catégories qualifiables et catégories esquissables, Diagrammes 17, Paris, 1987.

(C.T.F.A.) C. Lair:

Conditions syntaxiques de triplabilité d'un foncteur algébrique esquissé, Diagrammes 1, Paris, 1979.

(E.G.C.E.) C. Lair:

Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Math. 23, Paris, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann:

Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iasi, XIV, 1968.

(T.A.E.P.) L. Coppey:

Théories algébriques et extensions de préfaisceaux et Compléments, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. XIII,1 et XIII,4 , Paris, 1972.

(T.H.E.N.) A. Bastiani:

Théorie des ensembles, C. D. U. , Paris, 1970.

UNIVERSITE PARIS 7

U.F.R. DE MATHEMATIQUES

TOURS 45-55-5ème EAGE

2 PLACE JUSSIEU

75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE