CHRISTIAN VELPRY

Le secret de la pyramide

Diagrammes, tome 18 (1987), exp. nº 2, p. CV1-CV17
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1987__18__A2_0>

LE SECRET DE LA PYRAMIDE

Christian Velpry

De même que le rayon lumineux ou l'onde de gravitation se déforment à l'approche d'une masse, de même l'onde de la pensée peut se trouver infléchie ou arrêtée par certains objets exceptionnels rencontrés dans son champ.

Le calcul par lequel les Hellènes ont démontré la formule du volume de la pyramide - et qui fut la première application du principe infinitésimal - a, en inaugurant une nouvelle instrumentation des mathématiciens, déchargé d'une part de leur sens symbolique les pyramides construites par les Egyptiens, les "merveilles" de Gizah, et détourné les générations suivantes, jusqu'à nous, d'envisager de ces volumes quelque autre principe de calcul.

(Notons qu'un intervalle de temps considérable - quarante-cinq siècles ! - nous éloigne de la construction de la pyramide de Khufu (Chéops), qui est le premier monument relevant précisément du type géométrique appelé pyramide. L'invention du calcul infinitésimal, qu'on doive la rapporter à Eudoxe - selon Archimède - ou à Archimède lui-même, se situe au beau milieu de cet intervalle. Platon, à mi-parcours entre Chéops et nous ...)

—

Le calcul des volumes de la pyramide et du cône est le premier objet sorti de cet "atelier" que fut la longue et mouvementée discussion entre les Grecs sur la rigueur du discours géométrique de l'infini. La nouveauté produite paraissant un point de passage obligé, la question des calculs relatifs au

A.M.S. Sub. Class. : 01 A 15 , 51 M 25 , 00 A 25 , 51 M 20

volume de la pyramide chez les peuples plus anciens s'est trouvée, jusqu'à présent, suspendue. Pourtant, et bien qu'il n'y ait pas trace de véritable procédure infinitésimale en Mésopotamie, ni en Egypte, la formule du volume de la pyramide est attestée chez l'une et l'autre. L'attitude, simpliste et lâche, d'un grand nombre d'érudits (du XX$^{\text{ème}}$ siècle) devant l'interrogation posée par ces faits consiste à prétendre que la formule proviendrait de "calculs empiriques", sans chercher à documenter davantage la question. Il faudrait au moins se demander quels calculs empiriques furent faits, chercher quels fragments peuvent attester une quelconque étape de tels calculs.

Les choses s'aggravent encore, si l'on peut dire, avec la découverte - et à Babylone, et en Egypte - de calculs du volume de troncs de pyramide. Là, une différence apparaît entre les corpus babylonien et égyptien, qui fait comme un écho à la différence, visible, des deux architectures. En Mésopotamie, où il n'y a pas de pyramide (au sens géométrique) monumentale, les calculs du volume du tronc de pyramide ("nalbantu") sont des calculs approchés reposant sur une formule non exacte. En Egypte, au contraire, on trouve un calcul reposant sur une formule exacte (celle-là même la plus usuellement citée chez nous, appliquée au cas d'une pyramide tronquée de base carrée): on en a un seul exemple, celui du papyrus Golenischev - dit encore papyrus de Moscou.

Je ne prendrai pas la responsabilité de décider si la formule - horrifiquement fausse, d'un point de vue géométrique - des Babyloniens a été obtenue par une méthode empirique. La seule chose certaine, c'est qu'au rapport de son utilisation elle a pu, à bon droit, être jugée satisfaisante dans les cas où on l'appliquait. En effet, pour un tronc de pyramide à bases carrées, de côtés repectifs a et b, de hauteur h, le volume V est donné par la relation (exacte):

$$(1) \qquad V = \frac{1}{3} h \, (a^2 + ab + b^2) \; ;$$

la formule appliquée par les Babyloniens donne un volume approché V' défini par:

$$(1\text{bis}) \qquad V' = \frac{1}{2} h \, (a^2 + b^2) \; ;$$

pour un "nalbantu" pris suffisamment loin de la pointe, l'approximation est excellente:

$$\text{si} \quad \frac{3}{4} < \frac{b}{a} < 1 \quad , \text{alors} \quad 0 < \frac{V'-V}{V} < \frac{1}{72} \quad ,$$

$$\text{si} \quad \frac{9}{10} < \frac{b}{a} < 1 \quad , \text{alors} \quad 0 < \frac{V'-V}{V} < \frac{1}{500} \quad .$$

Je donne ces calculs pour faire sentir, précisément, que la formule (1), qui ne se signale ni par son évidence, ni par sa simplicité, est nécessairement difficile aussi à atteindre par voie empirique.

Cela nous amène à penser que les Egyptiens avaient dû élaborer un calcul exact - un calcul géométrique abstrait, au sens où nous l'entendons - de ce volume du tronc de pyramide; et un tel calcul repose sur la connaissance préalable de la formule exacte du volume de la pyramide elle-même. Cette hypothèse - ce n'est pour l'instant qu'une hypothèse - nous commande de rechercher dans le domaine égyptien la trace de tels calculs et de nous employer à les restituer. Cette recherche peut et doit, à mon avis, être menée par les deux bouts: il faut, d'une part, interroger les documents (en trouver de nouveaux et relire ceux déjà répertoriés), d'autre part se lancer dans ce que j'appellerais la recherche théorique a priori et qui consiste à prévoir - avant lecture de documents - les cheminements mathématiques qu'auraient pu suivre nos ancêtres égyptiens.

Avant de présenter mes calculs, je désire rendre hommage à W. W. Struve qui a publié en 1930, aux "*Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik*" (J. Springer, Berlin), sa très belle étude sur le papyrus de Moscou:

Mathematischer Papyrus des staatlichen
Museums der Schönen Künste in Moskau,

qui reprenait et amplifiait le travail, interrompu par la mort, de B. A. Turaev.

W. Struve nous indique que le document, provenant d'une tombe royale du Moyen-Empire, est la copie d'un original daté de 1900 av. J.-C. environ (la copie a été faite un siècle plus tard). Il y a tout lieu de croire, d'après son analyse, que l'original était la composition rédigée par un élève-scribe pour l'obtention de son (ou d'un) diplôme. Ceci permet de comprendre que l'application, faite au cas de valeurs numériques particulièrement simples, de la formule (1), ci-dessus, renvoie à la présence de ladite formule dans l'enseignement dispensé aux scribes en formation, à cette époque. S'agissait-il d'une étape déjà spécialisée de l'enseignement ? On ne sait. Le moins qu'on puisse dire, tout de même, c'est que cela donne un élément pour une évaluation minimale du niveau scientifique atteint par les chercheurs de ce temps. Signalons de plus que le hasard veut (mais est-ce un hasard ?) que dans le même document se trouve aussi un calcul de la surface de la demi-sphère ... Cette conjonction d'événements devrait ébranler les plus décidés contempteurs de la mathématique égyptienne (pharaonique).

Devons-nous désespérer de mettre jamais la main sur des documents livrant les travaux des meilleurs scientifiques de ce temps, et nous contenter des copies d'examens de leurs élèves ? ... W. Struve rappelle, dans son commentaire, la hauteur de vue, l'acuité de jugement de ces savants. Il remarque notamment que ce sont eux qui ont - les premiers, semble-t-il - mis en lumière la relation de dépendance de l'organisme humain par rapport au cerveau et le rôle prééminent de celui-ci. Il appelle ses lecteurs à faire des recherches en vue d'une plus juste évaluation de la science, et notamment de la mathématique, égyptienne.

Il faut reconnaître qu'il a été peu suivi; toute la faveur semble s'être attachée au papyrus Rhind dont le contenu, bien que nous apportant de précieuses informations, ne nous livre rien d'aussi estimable que les performances tri-dimensionnelles du Golenischev.

La question, toujours ouverte, est: comment les Egyptiens du Moyen-Empire s'y sont-ils pris pour calculer:

- le volume du tronc de pyramide,
- la surface de la (demi-)sphère ?

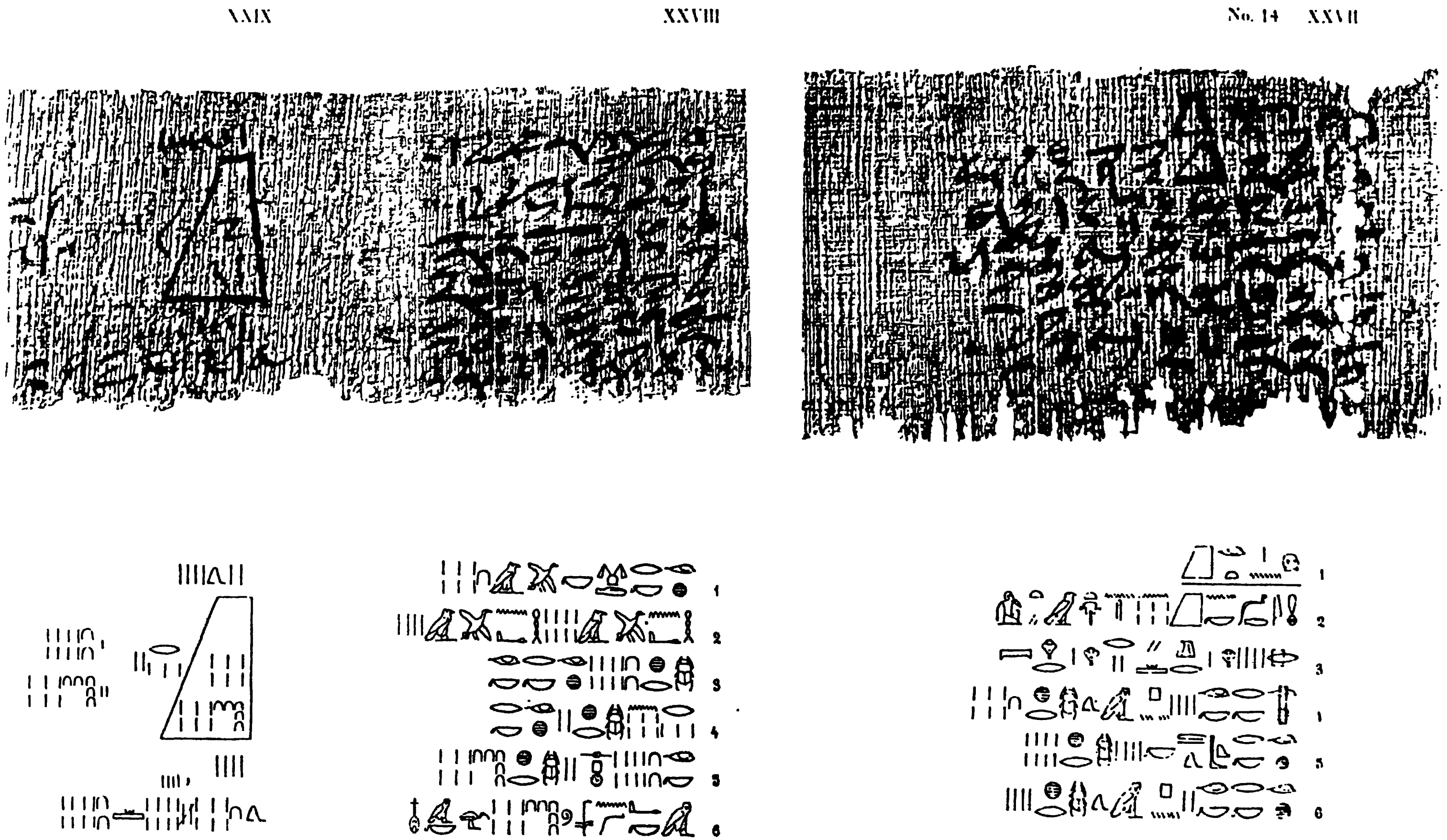
Struve doute que les formules aient pu être trouvées empiriquement.

(N. B. Dans les extraits de son ouvrage, donnés en photo pp. CV 6 et CV 7, on trouve la reproduction de la section du papyrus relative au tronc de pyramide (écriture hiératique), sa transcription en hiéroglyphes par Turaev, sa traduction en allemand par Struve. Notons le nom "mr" (vocalisation inconnue) par lequel les Egyptiens désignaient ce que les Grecs ont appelé "pyramide", reprenant un mot désignant primitivement chez eux un gâteau.)

Je dois dire que c'est avant d'avoir lu Struve que, me fiant à des hypothèses analogues aux siennes, j'ai établi les calculs ci-dessous. Ils s'inscrivent dans ce que j'ai appelé la recherche théorique a priori, et concernent le tronc de pyramide et la pyramide.

Je veux dire un mot des circonstances dans lesquelles je suis venu à les produire. J'avais, dans mon cours "Mathématiques de l'Antiquité" (en 1er Cycle, Université Paris VII), traité a minima de l'Egypte, soulignant que la documentation actuelle ne permettait vraisemblablement pas une juste évaluation de la science pharaonique. Or l'Egypte était très présente dans les mémoires que m'ont, à la fin, remis les étudiants. En particulier: Melle Dianata Batola avait inséré dans sa composition des photos des pyramides de Saqqarah, Dahchour, Gizah; M. Emilio Aparicio citait, lui, le papyrus de Moscou et la formule du tronc de pyramide; Melles Valérie Vestris, Dina el Biblawi, Laurence Marzin faisaient de même dans leur travail rédigé en commun. L'offrande des étudiants, qui semblait prolonger le geste difficilement lisible pour nous des anciens Egyptiens, la double instance, qui la constituait, de la figure et de la formule me firent venir quelques germes d'angoisse, quelques bizarres picotements à la cervelle. Un jour enfin, j'éclatai: « non!, ce n'est pas vrai ces racontars de l'égyptologie ordinaire. "Ils" ont calculé ! ». Je me jetai dans les calculs, avec la claire résolution de retrouver ceux que les Anciens avaient pu faire, et de balayer ainsi un domaine dans lequel puissent apparaître, tôt ou tard, des coïncidences avec les documents. J'ai repris - je les présente ci-dessous dans le même ordre - les calculs sur le tronc de pyramide, puis sur la pyramide.

Plus lointainement, le désir de reprendre le calcul du volume de la pyramide reposait en moi depuis l'âge de mes quinze ans: l'exposition par mon professeur d'alors de la méthode infinitésimale, la joie due à l'acquisition d'une voie de calcul nouvelle pour moi fut vite hypothéquée par cette question - alors



fac-similé

W. Struve, op. cit.: la section du papyrus de Moscou contenant le calcul du volume du tronc de pyramide (et sa transcription hiéroglyphique par B. Turaev).

Die Pyramidenstumpf-Volumen-Aufgabe. M 14 135

Aufg. Nr. 14. Kol. XXVII—XXIX.

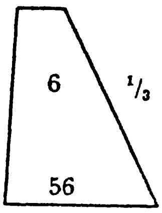
Kol. XXVII.

1. Form der Berechnung eines Pyramidenstumpfes[a],
2. wenn man dir nennt einen Pyramidenstumpf von[b] 6 (Ellen[c]) von der Höhe („Fläche“[d])
3. zu[e] 4 (Ellen) auf der Unterseite[f], zu[e] 2 auf der Oberseite[g].
4. Rechne du mit dieser[h] 4, quadriert (als Vorübergehendem[i]). Es entsteht 16.
5. Verdoppele[j] du 4. Es entsteht 16.
6. Rechne du mit dieser 2, quadriert (als Vorübergehendem[k]). Es entsteht 4.

Kol. XXVIII.

1. Addiere[l] du zusammen diese[m] 16
2. mit dieser[m] 8 und mit dieser[m] 4.
3. Es entsteht 28. Berechne du
4. $^1/_3$ von 6. Es entsteht 2. Rech-
5. ne du mit 28 2mal. Es entsteht 56.
6. Siehe: er ist[n] 56. Du hast richtig gefunden.

Kol. XXIX.



1.	2 quadriert 4				
2.				1	28
3.			2		
4.				2	56
5.					
6.	4	,[o]	4		
7.	quadriert 16	\ 2[p]	8	Summe 28.	

a) Turajeff ersetzt in seiner Edition der Aufgabe (Anc. Eg. 1917, S. 101) in der Übersetzung den Terminus durch das Piktogramm eines Trapezes, das im hieratischen Text statt des Wortes für Pyramidenstumpf steht[1]). Der ägyptische Name für den mathematischen Begriff „Pyramidenstumpf“ wird etwa *mr iw.tj tp-f*, „eine Pyramide, die nicht ihre Spitze hat“, heißen können. Das Wort *mr*, das in der ägyptischen Sprache seit uralter Zeit die Pyramide bezeichnete, wird auch das Wort sein, auf das das griechische πυραμίς zurückgeht. Freilich nehmen die meisten Ägyptologen seit Eisenlohr an, daß das griechische πυραμίς von dem Ter-

1) Das tut auch Tzinserling, l. c. S. 566.

fac-similé

W. Struve, op. cit.: traduction du texte de la page ci-contre.

N. B. Le nombre "16" en Kol. XXVII, ligne 5 est une erreur de Struve; il faut lire "8".

tenue secrète, je crois - de savoir s'il était vraiment indispensable de passer par une telle voie pour obtenir le résultat dont il s'agissait.

(Enfin le calcul !)

Soit à chercher des calculs (exacts) du volume du tronc de pyramide, en supposant connue la formule de celui de la pyramide. (Nous nous restreignons ici, comme les Egyptiens, au cas d'une pyramide à base carrée.)

Proposons d'abord, pour donner idée de la multiplicité des voies d'approche, une liste de formules. Soient V le volume, h la hauteur, a et b les côtés des bases d'un tronc de pyramide; parmi l'infinité de formules exprimant le rapport V/h (forme quadratique en a et b), retenons celles-ci:

(1) $$\frac{V}{h} = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)$$ (cf. p. 4),

(2) $$" = \frac{1}{3}(a^2 + (a+b)b) ,$$

(3) $$" = \frac{1}{3}\left(\frac{a^3-b^3}{a-b}\right),$$

(4) $$" = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 ,$$

(5) $$" = ab + \frac{1}{3}(a-b)^2 ,$$

(6) $$" = \frac{1}{3}((a+b)^2 - ab) ,$$

(7) $$" = a^2 - \left(\frac{2a+b}{3}\right)(a-b) ,$$

(8) $$" = \frac{1}{6}\left(a^2 + 4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + b^2\right) .$$

Ces formules expriment autant de nuances géométriques de la question. Passer de l'une à une autre n'avait rien d'insurmontable pour les Anciens (je veux dire avant l'invention du calcul symbolique; aussi bien ici, nous n'utiliserons le symbole que comme abréviation). Le calcul du papyrus de Moscou semble se rattacher à (1).
Je présente ici des approches directes de (2) et (4).

Calcul de (2).
Je considère la pyramide de base carrée (de côté a), à sommet sur l'axe, de hauteur k , et le tronc de pyramide obtenu en la coupant à hauteur h : la petite base est de côté b (fig. α).
Je considère également (même figure) le prisme droit de base carrée, de côté a , et de hauteur k et le petit prisme, qui lui est semblable, sur base de côté b , également. Le volume du tronc de pyramide, différence des volumes de la grande et de la petite pyramide, est égal au tiers de la différence des volumes du grand et du petit prisme. Examinant la figure des prismes, séparons la partie complémentaire du petit dans le grand en deux morceaux: celui compris entre les niveaux 0 et h a pour volume a^2h ; le morceau du haut, de volume $a^2L- b^2L$ est équivalent à un prisme de volume $(a+b)(a-b)L$: il s'y ramène par

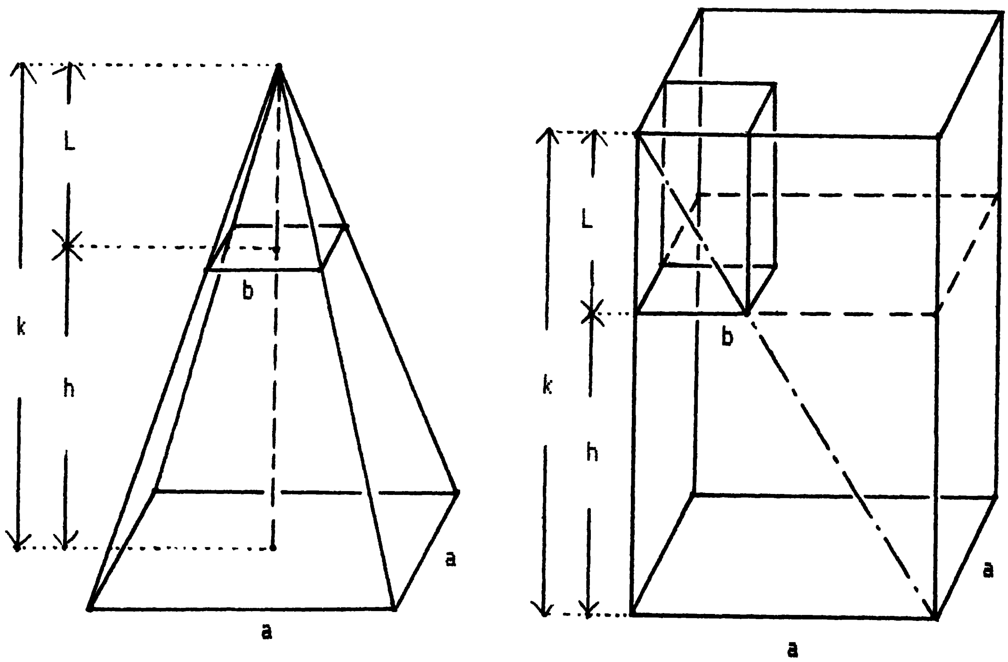


Figure α

un découpage-recollement qu'on peut suivre d'après sa trace sur la face supérieure (voir fig. β): il correspond au calcul classique de l'égalité $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$.
Ce nouveau prisme présente une face aux dimensions $(a-b)L$; un calcul de différences d'aires montre (fig. γ) que $\chi = \chi'$; c'est-à-dire $(a-b)L = bh$; ce dernier calcul se trouve dans la Géométrie d'Euclide (Elément 2) avec la même figure; il est d'une importance fondamentale car il transcrit en termes de similitude le résultat arithmétique "quatre nombres a , b , c , d sont en proportion si et seulement si $ad = bc$ ". On sait que les Egyptiens étaient des maîtres dans la question de la similitude, également dans celle de la mesure des aires: tout laisse penser qu'en la matière les Grecs ont été héritiers des Egyptiens; mais ceux-ci ont-ils su (et su utiliser ici) l'égalité entre χ et χ' ? C'est une question que nous laissons posée. Pour achever le calcul, rassemblons les morceaux: le volume total s'exprime par:

$$\frac{1}{3}\left(a^2h + (a+b)(a-b)L\right)$$

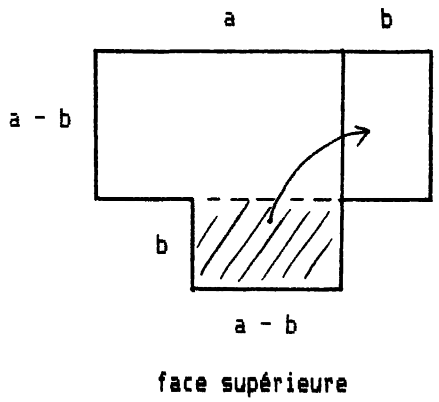


Figure β

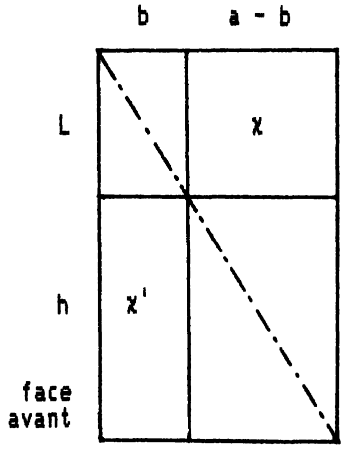


Figure γ

ou encore par:

$$\frac{1}{3}\left(a^2h + (a+b)bh\right) = \frac{1}{3}\left(a^2 + (a+b)b\right)h \text{ ,}$$

(Struve donne aussi cette formule avec des jalons de la présente démonstration).

Calcul de (4): cette formule est belle; symétrique (en a et b) et gaussienne. Elle permet de calculer le volume en ne faisant que trois multiplications (comme (2), (5) et (6) du reste).

Nous considérons un quart du tronc de pyramide, situé entre l'axe et l' arête, et contenant deux demi-faces (fig. 6). Nous en faisons une coupe à mi-hauteur (l'arête est coupée en son milieu M) et nous coupons encore par deux plans verticaux passant par M et parallèles chacun à l'une des directions des côtés des bases. On détache ainsi, dans la partie du bas, un prisme carré, deux prismes triangulaires T_1 et T_2 et une petite pyramide Δ (à une arête verticale). Faisons pivoter autour de leur arête haute (horizontale) chacun des prismes T_1 et T_2 ;faisant un demi-tour ils viennent se coller contre la partie supérieure pour donner un prisme carré (base $(a+b)/4$); à ceci près que l'opération est physiquement impossible car il y a un excédent; celui-ci, qui est l'intersection des figures des prismes T_1 et T_2 après pivotement, est égal à la pyramide Δ et est précisément le symétrique de Δ par rapport à M .

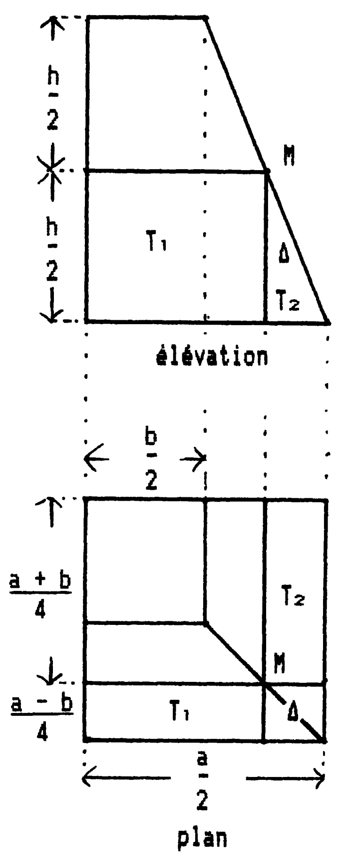


Figure 6

Comptons: le volume du quart du tronc de pyramide donné est égal au volume du prisme carré de même hauteur, de côté $(a+b)/4$, augmenté du double du volume de Δ . Si nous rassemblons les quatre petites pyramides homologues de Δ dans le tronc de pyramide donné (dont chaque quart a subi le même traitement), on obtient une petite pyramide centrée, de hauteur $h/2$, de côté $(a-b)/2$. Au total, nous trouvons pour volume du tronc de pyramide:

$$4\,h\left(\frac{a+b}{4}\right)^2 + 2\,\frac{1}{3}\,\frac{h}{2}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \quad ,$$

c'est-à-dire:

$$h\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 .$$

Cette seconde démonstration est plus simple, au plan théorique, que la première. Nous nous sommes appuyés, pour la produire, sur des figures qui ont assez peu de chances de se rencontrer dans le domaine égyptien. Toutefois les mathématiciens - et géomètres - de ce temps, s'ils étaient moins nombreux que leur actuelle descendance, avaient aussi plus de moyens à leur disposition: ils étaient architectes, avaient des tailleurs de pierre auprès d'eux, et ils fabriquaient quand ils le voulaient des figures en pierre, et en trois dimensions. Précisément le calcul que nous venons de faire pour obtenir la formule (4) est un calcul de tailleur de pierres (avec, notons-le tout de même, la subtilité de la soustraction: on enlève - on excise - la symétrique de Δ de la somme T_1+T_2).

Venons-en maintenant à la grande question: le calcul du volume de la pyramide.
Infinitésimal, donc, il est chez les Grecs. L'impossibilité éprouvée alors (et démontrée depuis) de découper la pyramide comme un puzzle (à bords plans) du parallélotope fondamental ne laissait la voie qu'à un calcul reposant sur une analyse plus puissante ou plus subtile. Les Grecs y sont parvenus par le procédé que l'on sait. S'agissant de démontrer l'existence - comme nous disons de nos jours - du volume de la pyramide, c'est-à-dire le prolongement à l'ensemble des pyramides de la fonctionnelle volume définie sur les parallélotopes, le recours à l'infinitésimal est difficilement évitable: si l'imposition de la mesure implique qu'on réduise en puzzle l'objet à mesurer et que, d'autre part, le puzzle ne puisse se réaliser en un nombre fini de pièces, le problème paraît irréductiblement infinitésimal.
Toutefois une remarque s'impose: quelque respect que méritent les démonstrations d'existence, on peut imaginer de calculer en s'en passant, ou du moins, comme ont fait les mathématiciens depuis que le monde existe, de ne pas en faire un préalable. Poser la question de l'existence d'un objet créé conceptuellement est toujours un acte après-coup; ça vient quelquefois longtemps après

les développements et l'enthousiasme, et la moisson des calculs. Entre l'art de leurs tailleurs de pierre et les prouesses des "tutoyeurs de l'infini", les mathématiciens égyptiens ont pu trouver une voie pour estimer le volume qui les intéressait.

Voici: reprenons la figure α, pyramide et prisme aux mêmes dimensions, et plaçons en parallèle la même figure agrandie (ou réduite) dans un certain rapport linéaire λ ; le volume du prisme est affecté dans le rapport λ^3 mais il y a une certaine évidence que les volumes de la petite pyramide, du petit prisme, de la grande pyramide, du grand prisme sont en proportion. C'est dire que le volume de la pyramide est affecté, dans l'agrandissement ou la réduction, dans le même rapport λ^3 .(On sent que, si cette propriété n'était pas vérifiée, les dilatation ou réduction créeraient une distorsion telle que le concept de volume de la pyramide y perdrait sa substance, sa réalité.) J'admets pour l'instant cette hypothèse que les Egyptiens se soient avisés que le volume de la pyramide variait comme le cube du rapport de similitude. Le calcul alors s'achève en trois coups de ciseaux: soit une pyramide à une arête droite (c'est le quart d'une pyramide à axe de symétrie) et le prisme droit associé (en pointillé dans la fig. ϵ); on coupe la pyramide en deux selon chaque direction parallèle aux faces du prisme; le découpage de la pyramide donne un petit prisme carré, semblable au grand, deux prismes triangulaires dont chacun est égal en volume à la moitié du petit prisme carré, et deux petites pyramides. Si Y et P sont les volumes respectifs de la grande pyramide et du grand prisme, y et p ceux des petites pyramides et du petit prisme carré, on a $y = Y/8$ et $p = P/8$; d'autres part, le découpage de la grande pyramide donne l'équation: $Y = 2y+2p$; il n'est pas difficile alors d'obtenir la relation attendue entre Y et P .

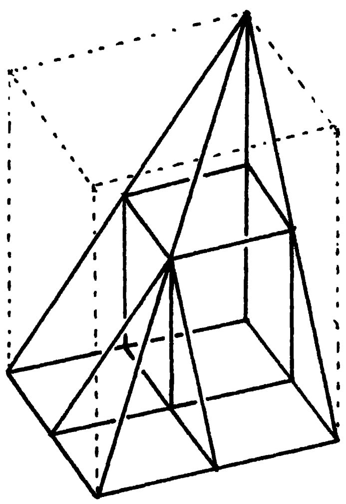


Figure ϵ

(Remarque: un procédé analogue, à très peu près, permet le calcul du volume du tétraèdre et, par là, celui de tout polyèdre. Soit un tétraèdre, c'est-à-dire une pyramide triangulaire, appliquons-lui un découpage analogue à celui défini plus haut (pour la pyramide carrée). On voit apparaître (fig. ϕ) trois tétraèdres de dimension moitié et un volume résiduel, lequel est complété en un parallélépipède par le tétraèdre dont trois arêtes sont en pointillé. Ce dernier est le symétrique de chacun des trois petits par rapport au centre de l'arête qu'il a en commun avec lui. Cette remarque conduit à une équation analogue à celle ci-dessus, d'où le résultat. Je pense qu'un tel procédé de calcul, accompagnant l'énoncé de la loi de variation cubique du volume, pourrait être utilisé dans les classes élémentaires où, à l'heure actuelle, la formule du volume de la pyramide est enseignée, mais sans démonstration.)

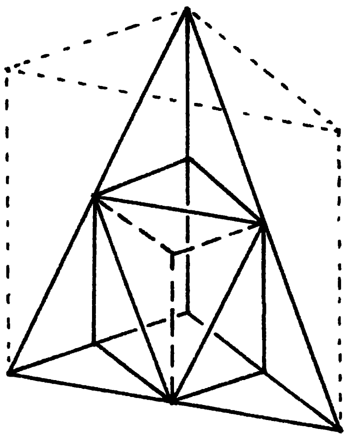


Figure ϕ

Remarque, hypothèse et conclusion.

Le calcul donné ci-dessus du volume de la pyramide carrée et l'hypothèse, sur laquelle il repose, liant les notions de volume et de similitude ont le mérite de s'écrire dans la langue des Egyptiens anciens; c'est évidemment une condition a priori nécessaire pour qu'ils aient pu être par eux produits. Sans preuve par le document, il convient de résister à la tentation de déclarer cette condition suffisante. Mais, en attendant que de telles preuves soient dégagées et pour inciter à les rechercher plus ardemment, qu'il me soit permis de plaider pour les hypothèses que je cherche à établir.

Je commence par une remarque géométrique: si, dans la construction de la figure ϵ, au lieu de couper chaque dimension en deux, je la coupe en n, dans le calcul subséquent les décomptes vont se trouver alourdis, mais l'équation obtenue sera équivalente; on parvient encore ainsi au résultat. Pour $n = 6$, la figure nous présente, si j'ose dire, un effet optique: avec un minimum de complaisance l'observateur voit la superposition d'une pyramide vraie (comme celle de Khufu) à une "pyramide à degrés" (du type de celle de Djôser, à Saqqarah). Cet effet visuel fournit une métaphore historique: la "pyramide" de Saqqarah* - si nous la supposons avoir été, dans son état neuf, un empilement de parallélépipèdes rectangles - ne posait aucune difficulté quant au calcul de son volume. Le "lissage" des faces, aboutissant à la forme pyramidale proprement dite - qui apparaît deux siècles plus tard à Gizah - pourrait être coextensif et contemporain du calcul du volume de tels solides.
Je formule cette hypothèse: Khemiun, architecte de Khufu, a, le premier, effectué, achevé le calcul du volume de la pyramide, par une voie qui est proche de celle dénoncée ci-dessus.

Arrêtons un moment, et contemplons. Je suis devant la pyramide. Elle me regarde, avant même que je ne la regarde. (Depuis quelques siècles qu'elle est là, elle en a vu d'autres ...). Mais la relation qui s'installe entre elle et moi ne s'inscrit pas seulement dans l'ordre du visuel: la vue s'arrête à la peau, à la superficie des choses; il y a, dans notre rapport, quelquechose de plus dense, de plus consistant; il y a sa masse, son volume. La force, la simplicité et l'exactitude de ses lignes, de ses plans, m'atteignent au niveau esthétique, mais aussi intellectuel. Fils des Grecs, je peux répondre: "démontrons!", et exposer théorie et calculs. Chez les Grecs, on le sait, tout était communiqué, discuté. Quand un "sage" avait établi quelque relation philosophique, géométrique, etc ... il en délivrait aussitôt démonstration à ses compères, de l'Ionie à la Sicile, et en réponse s'élevaient louanges, critiques, paraphrases,

---

* *Son architecte est le célèbre Imhotep.*

réfutations; grande fête chez Logos*. En Egypte ou Mésopotamie les moeurs sont différentes: un calcul obtenu est transmis, étudié à l'intérieur de l'institution (école de scribes, collège de scribes spécialisés); rien n'appelle à la controverse publique, il n'y a pas de "monstration". Il n'y a pas publication de formules ou calculs; et qui - en ce qui concerne notre problème de pyramide - aurait pu les comprendre, en dehors des quelques architectes royaux ? Mais la "démonstration" est, si l'on peut dire, délivrée en acte par la construction de l'énorme et imposante pyramide. La communication est alors mystique, ce qui ne veut pas nécessairement dire religieuse.
Regardons la pyramide en cours de construction; le progrès que constitue le passage du type "Saqqarah" au type "Gizah", c'est sur la surface qu'il se négocie**. A un étage donné, au milieu d'une face, la mise en place des blocs prismatiques triangulaires se fait sans perte; celle-ci n'apparaît que lors de la constitution des arêtes, chapelets de petites pyramides; d'un bloc dimensionné à leur taille, et qui pèse comme trois d'entre elles, on n'en peut tirer que deux. S'il y en a n sur chaque arête, la perte à chaque étage est $1/n^3$ du volume total, soit finalement une perte totale en $1/n^2$. Tel est le calcul de l'architecte. (Laissons volontairement de côté la question du découpage réel des pierres; on ne peut espérer en trouver de pyramidales, les pointes fragiliseraient trop le monument.) Quelques siècles plus tard, MM. Eudoxe et Archimède n'auront plus qu'à remarquer "quel que soit n ..., donc dans le volume de tout grain de sable ...": les mathématiques commenceront alors à échapper à l'architecte.

Revenons à Khufu, dont la réputation d'impiété est établie; il a bien pu vouloir faire ériger, consciemment, au lieu de

---

** Exception historique à noter; l'absence (ou quasi-absence) de discussion antérieure ou contemporaine des postulats et définitions de la géométrie d'Euclide.*

*** Tant mieux, ça nous permet de ne prêter aucune attention à ce qui se trame dans les zones centrales; et qui tant intéresse prêtres, rois ... et voleurs.*

hiérophanies, un monument pour la science. Les deux points dont on a, à ce jour, le moins expliqué le pourquoi et le comment sont précisément la question du volume de la pyramide et celle de son orientation. Ces deux mystères ont été posés, établis, fixés en pleine lumière. Il nous reste peut-être encore pas mal de travail pour parvenir à en rendre raison. J'espère trouver - avec l'aide de ceux qui savent les déchiffrer - des documents me renvoyant un écho, une réponse ("das ist Papagenos Ton"), et qui permettraient d'utiliser quelques-uns des calculs, de discuter les hypothèses proposées.

En attendant, tout de même - et de si loin - ô Khemiun, ô Khufu, je vous salue.

Paris
Juin-Novembre 1987

UNIVERSITE PARIS 7

U.F.R. DE MATHEMATIQUES
TOURS 45-55-5ème ETAGE

2 PLACE JUSSIEU
75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE