C. LAIR

Trames et sémantiques catégoriques des systèmes de trames

Diagrammes, tome 18 (1987), exp. nº 1, p. CL1-CL47
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1987__18__A1_0>

DIAGRAMMES VOLUME 18 , 1987

TRAMES

ET

SEMANTIQUES CATEGORIQUES

DES

SYSTEMES DE TRAMES

C. Lair

Introduction

On sait qu'une esquisse (voir (E.T.S.A.)) est une *présentation diagrammatique* (ou *catégorique*, ou *graphico-équationnelle*) d'un genre de structures donné. Précisément, les modèles (ou réalisations) d'esquisses sont exactement les modèles de théories du premier ordre.

Nous introduisons ici la notion de *trame*, plus générale que celle d'esquisse: une trame est encore une présentation diagrammatique d'un genre de structures donné, mais cette fois *d'ordre supérieur*. Nous prouvons cependant que la structure de trame, tout comme celle d'esquisse, est encore projectivement esquissable, i. e. est essentiellement algébrique.

On sait que les catégories cartésiennes fermées ou les topos (ou d'autres catégories munies d'une structure supplémentaire d'un certain genre) peuvent être considérées comme des modèles catégoriques convenables pour *faire de la logique catégorique du premier ordre*. Ce sont, en fait, des structures essentiellement algébriques, puisque modèles d'une esquisse projective

---

A.M.S. Sub. Class. : 18 D 99 , 18 D 35 , 18 C 99 , 18 A 40

particulière (qui est sur-esquisse de l'esquisse de catégorie), et les "propriétés logiques" de ces catégories sur-structurées particulières sont, en réalité, étroitement liées à la seule nature universelle (ou co-universelle) des *constructions de types* (i. e. d'objets) que le genre de sur-structure considéré permet.

Nous introduisons ici la notion de *sémantique catégorique d'un système de trames donné*; ce sont exactement les catégories munies de constructeurs de types universels et/ou co-universels, mais cette fois *d'ordre supérieur*. Ainsi, par exemple, les catégories où l'on peut faire de la logique d'ordre supérieur (par exemple du λ-calcul du deuxième ordre) sont exactement les sémantiques catégoriques d'un certain système de trames.

Nous prouvons, surtout, que ce genre de catégories sur-structurées est encore projectivement esquissable, i. e. qu'il s'agit encore de structures essentiellement algébriques (dont beaucoup s'évertuent à chercher, dans la pratique particulière, des "présentations équationnelles" ... que les présentes considérations fournissent donc automatiquement).

Nous avons agrémenté le texte de nombreux exemples (qui concernent des situations assez familières, mais qui ne sont pas si élémentaires qu'ils peuvent parfois le paraître). Ceci nous a conduit à utiliser de nombreux diagrammes que, pour des raisons purement matérielles, nous avons dû regrouper, en fin de texte, dans un "Atlas des Diagrammes" que le lecteur sera donc malheureusement contraint de consulter assez fréquemment.

Nous avons également émaillé cet exposé de quelques "Notes", parfois plus informelles, dont nous espérons qu'elles aideront le lecteur à prendre quelque recul vis à vis de la seule présentation technique, toujours un peu rébarbative.

———

1. Trames.

On définit les trames et les homomorphismes de trames, par récurrence, comme suit:

- on dit que $T = (\mathrm{supp}(T), \emptyset, \emptyset)$ est une *trame d'ordre* 0 si, et seulement si, $\mathrm{supp}(T)$ est un graphe compositif (voir (C.Q.C.E.) et/ou la Note 1), appelé *support* de T ,
- si T et T' sont deux trames d'ordre 0 , on dit que $h = (T, \mathrm{supp}(h), T')$ est un *homomorphisme* de T vers T' (et l'on note, alors, $h: T \to T'$) si, et seulement si, $\mathrm{supp}(h): \mathrm{supp}(T) \to \mathrm{supp}(T')$ est un foncteur, appelé *support* de l'homomorphisme h ,
- si $n>0$ est un entier, on dit que $T = (\mathrm{supp}(T), H^-(T), H^+(T))$ est une *trame d'ordre* $\leq n$ si, et seulement si:
  + $\mathrm{supp}(T)$ est un graphe compositif, appelé *support* de T ,
  + $H^-(T)$ est une classe de *prolongements dans* $\mathrm{supp}(T)$ (voir la Note 2) , i. e. de triplets $p = (F_{gp}, h_p, F_{dp})$ vérifiant:
    * $h_p: T_{gp} \to T_{dp}$ est un homomorphisme de trames d'ordres $\leq n-1$,
    * $F_{gp}: \mathrm{supp}(T_{gp}) \to \mathrm{supp}(T)$ est un foncteur,
    * $F_{dp}: \mathrm{supp}(T_{dp}) \to \mathrm{supp}(T)$ est un foncteur,
    * F_{dp} est un *prolongement de* F_{gp} *le long de* $\mathrm{supp}(h_p)$, i. e. $F_{dp}.\mathrm{supp}(h_p) = F_{gp}$,

  (et, alors, on représente chaque élément p de $H^-(T)$ par le *triangle commutatif* suivant:

$$\begin{tikzcd}
T_{gp} \arrow[rr, "h_p"] \arrow[dr, "F_{gp}"'] & \arrow[d, phantom, "\begin{smallmatrix} p \\ - \end{smallmatrix}"] & T_{dp} \arrow[dl, "F_{dp}"] \\
& \mathrm{supp}(T) &
\end{tikzcd}$$

+ $H^+(T)$ est une (autre) classe de prolongements (voir la Note 2) dans supp(T) (et, alors, on représente chaque élément q de $H^+(T)$ par le *triangle commutatif* suivant:

$$\begin{tikzcd} T_{gq} \arrow[rr, "h_q"] \arrow[dr, "F_{gq}"'] & \arrow[d, phantom, "\begin{matrix} q \\ + \end{matrix}"] & T_{dq} \arrow[dl, "F_{dq}"] \\ & \mathrm{supp}(T) & \end{tikzcd}$$

),

- si $n>0$ est un entier et si T et T' sont deux trames d'odres $\leq n$, on dit que $h = (T,\mathrm{supp}(h),T')$ est un ***homomorphisme de trames d'ordres*** $\leq n$ (et l'on note $h:T \to T'$) si, et seulement si:

+ $\mathrm{supp}(h):\mathrm{supp}(T) \to \mathrm{supp}(T')$ est un foncteur, appelé *support* de h ,

+ si p est élément de $H^-(T)$, alors $h.p = (\mathrm{supp}(h).F_{gp},h_p,\mathrm{supp}(h).F_{dp})$ appartient à $H^-(T')$,

+ si q est élément de $H^+(T)$, alors $h.q$ appartient à $H^+(T')$.

On laisse au lecteur le soin de définir les trames *petites*, si l'on raisonne dans une théorie des ensembles et des classes, ou encore les trames *U-petites*, si l'on raisonne dans une théorie des ensembles avec axiome des univers et si U est un tel univers.

[Note 1. Rappelons qu'un *graphe compositif* est un graphe orienté dans lequel on sait composer certains (seulement) couples (f',f) , appelés *composables*, de flèches consécutives (i. e. telles que $\mathrm{dom}(f') = \mathrm{codom}(f)$) et ce de sorte que:
- pour toute flèche f , les couples $(f,\mathrm{id}(\mathrm{dom}(f)))$ et $(\mathrm{id}(\mathrm{codom}(f)),f)$, dits *triviaux*, sont composables et de composé f ,
- pour tout couple composable (f',f) , on a $\mathrm{dom}(f'.f) = \mathrm{dom}(f)$ et $\mathrm{codom}(f'.f) = \mathrm{codom}(f')$.
On peut, ainsi, considérer qu'un graphe compositif est un système de générateurs (les flèches) et de relations (données par la composition) pour une catégorie.]

[Note 2. On pourrait remplacer, dans la définition précédente, la donnée de prolongements tels que p (resp. tels que q) par la donnée d'extensions projectives (resp. inductives). On ne gagnerait pas en généralité, bien au contraire; en effet, dès lors qu'on dispose de lax-limites inductives convenables (et c'est bien le cas ici) toute extension projective (resp. inductive) est équivalente à la donnée d'un prolongement (particulier) ... mais la réciproque est évidemment fausse !]

Les modèles d'une trame quelconque dans une catégorie donnée C et les morphismes entre ces modèles sont définis, par récurrence, comme suit:
- si T est une trame d'ordre 0, on dit que $M = (T, ssj(M), C)$ est un *modèle* de T dans C (et l'on note $M:T \to C$) si, et seulement si, $ssj(M):supp(T) \to C$ est un foncteur, dit *sous-jacent* à M,
- si T est une trame d'ordre 0 et si M et N sont deux modèles de T dans C, on dit que $m = (M, ssj(m), N)$ est un *morphisme* de M vers N (et l'on note $m:M \Rightarrow N$, ou encore $m:M \Rightarrow N : T \to C$) si, et seulement si, $ssj(m):ssj(M) \Rightarrow ssj(N)$ est une transformation naturelle, dite *sous-jacente* à m,
- si $n>0$ et si T est une trame d'ordre $\leq n$, on dit que $M = (T, ssj(M), C)$ est un *modèle* de T dans C (et l'on note $M:T \to C$) si, et seulement si:
  + $ssj(M):supp(T) \to C$ est un foncteur, dit *sous-jacent* à M,
  + pour tout p appartenant à $H^-(T)$, on a:
    * $M_{gp} = M.F_{gp} = (T_{gp}, ssj(M).F_{gp}, C)$ est un modèle de (la trame d'ordre $\leq n-1$) T_{gp} dans C,
    * $M_{dp} = M.F_{dp} = (T_{dp}, ssj(M).F_{dp}, C)$ est un modèle de (la trame d'ordre $\leq n-1$) T_{dp} dans C,
    * M_{dp} est un *prolongement co-universel* (voir la Note 3) *de* M_{gp} *le long de* h_p, i. e. est tel que, pour tout autre modèle N de T_{dp} dans C vérifiant $N.h_p = (T_{gp}, ssj(N).supp(h_p), C) = M_{gp}$, alors il existe un unique (voir la Note 3) morphisme de modèles (de trames d'ordres $\leq n-1$) $m = (N, ssj(m), M_{dp})$ qui vérifie l'égalité $ssj(m).supp(h_p) = id(ssj(M_{gp}))$,
  + pour tout q appartenant à $H^+(T)$, on a:
    * M_{gq} est un modèle de (la trame d'ordre $\leq n-1$) T_{gq} dans C,
    * M_{dq} est un modèle de (la trame d'ordre $\leq n-1$) T_{dq} dans C,
    * M_{dq} est un *prolongement universel* (voir la Note 3) *de* M_{gq} *le long de* h_q, i. e. est tel que, pour tout autre modèle N de T_{dq} dans C vérifiant $N.h_q = M_{gq}$, alors il existe un unique (voir la Note 3) morphisme de modèles (de trames d'ordres $\leq n-1$) $m = (M_{dq}, ssj(m), N)$ qui vérifie l'égalité $ssj(m).supp(h_q) = id(ssj(M_{gq}))$,

- si $n>0$, si T est une trame d'ordre $\leq n$ et si M et N sont deux modèles de T dans C , on dit que $m = (M, ssj(m), N)$ est un *morphisme* de M vers N (et l'on note $m : M \Rightarrow N$) si, et seulement si, $ssj(m) : ssj(M) \Rightarrow ssj(N)$ est une transformation naturelle, dite *sous-jacente* à m .

[Note 3. Plutôt que d'imposer, dans la définition précédente, que les M_{dp} (resp. les M_{dq}) soient des prolongements co-universels (resp. universels), on pourrait seulement imposer que ce soient des prolongements *quasi*-co-universels (resp. *quasi*-universels), i. e. n'imposer que l'existence (et non l'unicité) d'au moins un (et pas d'un seul) morphisme de modèles m . Dans ce cas, on pourrait alors parler de *modèles faibles*.]

Si C est une catégorie et si T est une trame, on note $Mod(T,C)$ la catégorie dont les objets sont les modèles de T dans C et dont les flèches sont les morphismes (dont on définit facilement la composition) entre ces modèles.

Si $h : T \to T'$ est un homomorphisme de trames et si C est une catégorie, il leur est clairement associé un foncteur "composition par h ":

$$\begin{aligned} Mod(h,C) : Mod(T',C) &\to Mod(T,C) \\ M' &\mapsto M'.h = (T, ssj(M').supp(h), C) \\ (m' : M' \Rightarrow N') &\mapsto m'.h = (M'.h, ssj(m').supp(h), N'.h) \end{aligned}$$

De même, si $U : C \to C'$ est un foncteur et si T est une trame, il leur est évidemment associé un foncteur "composition par U ":

$$\begin{aligned} Mod(T,U) : Mod(T,C) &\to Mod(T,C') \\ M &\mapsto U.M = (T, U.ssj(M), C') \\ (m : M \Rightarrow N) &\mapsto U.m = (U.M, U.ssj(m), U.N) \ . \end{aligned}$$

Si C est une catégorie et si T est une trame, on dispose, bien entendu, d'un foncteur (évidemment plein, fidèle et injectif sur les objets) "donnée sous-jacente":

$$\begin{aligned} ssj(T,C) : Mod(T,C) &\to C^{supp(T)} \\ M &\mapsto ssj(M) \\ m &\mapsto ssj(M) \ . \end{aligned}$$

---

2. Exemples de trames.

Les graphes compositifs s'identifient exactement aux trames d'ordre 0.

Précisément, si G est un graphe compositif, il s'identifie à la trame (d'ordre 0) $T(G) = (G,\emptyset,\emptyset)$ de sorte que, pour toute catégorie C , la catégorie $Mod(T(G),C)$ est la *catégorie des diagrammes de* C *indéxés par* G , i. e. est isomorphe à la catégorie C^G .

Dans la suite (voir l'Atlas des Diagrammes), on représentera un graphe compositif par un graphe orienté (où les identités ne sont pas nécessairement figurées) accompagné d'une liste d'équations (définissant la composabilité et la composition des couples non triviaux de flèches composables). On pourra, également, le représenter par un graphe orienté muni de "triangles commutatifs".

Ainsi, par exemple, si $\mathbf{1}$ désigne le graphe compositif ayant 0 pour seul objet et $id(0)$ pour seule flèche, la trame $T(\mathbf{1})$ est représentée par le diagramme 1 (voir l'Atlas des Diagrammes). Clairement, pour toute catégorie C , la catégorie $Mod(T(\mathbf{1}),C)$ est la *catégorie des objets de* C , i. e. est isomorphe à C .

De même, le diagramme 2 (resp. le diagramme 3 ou le diagramme 4) représente la trame $T(\mathbf{2})$ (resp. $T(\mathbf{3})$). Clairement, pour toute catégorie C , la catégorie $Mod(T(\mathbf{2}),C)$ (resp. $Mod(T(\mathbf{3}),C)$) est la *catégorie des flèches* (resp. *des triangles commutatifs*) *de* C , i. e. est isomorphe à la catégorie dont les objets sont les flèches (resp. les triangles commutatifs) de C et dont les flèches sont les carrés (resp. les prismes à bases triangulaires) commutatifs de C .

Si G est un graphe compositif, désignons par G^- (resp. G^+) le graphe compositif obtenu en ajoutant successivement à G :

- un *objet initial* 0_G (resp. un objet *final* 1_G),
- pour tout objet S de G , une flèche $\pi_S : 0_G \to S$ (resp. $\sigma_S : S \to 1_G$) de sorte que:

+ pour toute flèche $s:S \to S'$ de G, le composé $s.\pi_S$ (resp. $\sigma_{S'}.s$) est défini dans G^- (resp. dans G^+) et égal à $\pi_{S'}$ (resp. à σ_S).

Alors, pour toute catégorie C, la catégorie $Mod(T(G^-),C)$ (resp. $Mod(T(G^+),C)$) est la *catégorie des cônes projectifs* (resp. *des cônes inductifs*) *d'indexation* G *de* C.

Les esquisses (voir (C.Q.C.E.) et/ou la Note 4) s'identifient exactement aux trames T d'ordre ≤ 1 (dites *associées*), telles que:

- pour tout p appartenant à $H^-(T)$, l'homomorphisme de trames (d'ordre 0) $h_p:T_{gp} \to T_{dp}$ s'identifie à un foncteur plongement canonique de la forme $G_p \to G_p^-$ (où G_p est un graphe compositif),
- pour tout q appartenant à $H^+(T)$, l'homomorphisme de trames (d'ordre 0) $h_q:T_{gq} \to T_{dq}$ s'identifie à un foncteur plongement canonique $G_q \to G_q^+$ (où G_q est un graphe compositif).

Par exemple, si G est un graphe compositif, la trame $T^-(G)$ (resp. $T^+(G)$), de support G^- (resp. G^+), représentée par le diagramme 5 (resp. le diagramme 6), est une trame d'ordre 1, associée à une esquisse, telle que, pour toute catégorie C, la catégorie $Mod(T^-(G),C)$ (resp. $Mod(T^+(G),C)$) est la *catégorie des cônes limites projectives* (resp. *inductives*) *d'indexation* G *de* C.

Dans la suite, si T est une trame (dont l'ordre est nécessairement ≥ 1) et si le triangle commutatif p (resp. q), représenté dans le diagramme 7 (resp. le diagramme 8), est élément de $H^-(T)$ (resp. $H^+(T)$), on notera plus simplement:

$$F_{dp}(0_G) = F_{dp}(1) \times F_{dp}(2)$$

(resp. $F_{dq}(1_G) = F_{dq}(1)+F_{dq}(2)$),

en omettant d'indiquer ce triangle et même les projections (resp. les co-projections) qui, le plus souvent, seront notées p_1, p_2 (resp. c_1, c_2) ou p'_1 ... (resp. c'_1 ...).

Des considérations analogues valent également, si G est un graphe discret ayant plus de deux objets.

De même, si T est une trame (dont l'ordre est nécessairement ≥ 1) et si le triangle commutatif p (resp. q), représenté par le diagramme 9 (resp. le diagramme 10), est élément de $H^-(T)$ (resp. $H^+(T)$), on note simplement:

$$F_{dp}(0_\emptyset) = 1°$$

(resp. $F_{dq}(1_\emptyset) = 0.1$),

en omettant de mentionner explicitement p (resp. q).

Pareillement, si T est une trame (dont l'ordre est nécessairement $\geqslant 1$) et si le triangle commutatif p (resp. q), représenté par le diagramme 11 (resp. le diagramme 12), est élément de $H^-(T)$ (resp. $H^+(T)$), on note plus simplement:

$$F_{dp}(0_G) = F_{dp}(1) \times_{F_{dp}(o)} F_{dp}(2)$$

(resp. $F_{dq}(1_G) = F_{dq}(1) +_{F_{dq}(o)} F_{dq}(2)$),

en omettant non seulement d'indiquer ce triangle et les projections (resp. les co-projections), mais en omettant aussi d'indiquer les valeurs $F_{dp}(f_1)$ et $F_{dp}(f_2)$ (resp. $F_{dq}(f'_1)$ et $F_{dq}(f'_2)$) qui, le plus souvent, seront sans ambiguïté.

De plus, si ces valeurs sont égales à une même flèche $s:S' \to S$ (resp. $s:S \to S'$) et si les projections (resp les co-projections) sont égales à $id(S')$, alors, pour toute catégorie C et tout modèle $M:T \to C$, la flèche $M(F_{dp}(s))$ est un mono (resp. un épi) de C . Dans ce cas, on représente toutes ces conditions, en écrivant seulement:

$$s:S' \rightarrowtail S$$

(resp. $s:S \twoheadrightarrow S'$).

Le diagramme 13 (où sont utilisées certaines des conventions "graphiques" précédentes) représente une trame T_{mon} , d'ordre 1 , associée à une esquisse.

Clairement, pour toute catégorie C , la catégorie $Mod(T,C)$ est équivalente à la *catégorie des monoïdes internes à* C .

Le diagramme 14 représente une trame $T_{grphcmp}$, d'ordre 1 , associée à une esquisse.

Clairement, pour toute catégorie C , la catégorie $Mod(T_{grphcmp},C)$ est équivalente à la *catégorie des graphes compositifs internes à* C .

[Note 4. Rappelons qu'une *esquisse* est un graphe compositif dans lequel on a distingué certains cônes projectifs et certains cônes inductifs. Plus particulièrement, si ne sont distingués que des cônes projectifs, on dit qu'il s'agit d'une esquisse *projective*.
Rappelons (voir (L.C.R.F.) et (A.C.C.A.)) que les esquisses projectives décrivent (i. e. ont pour modèles) exactement les structures essentiellement algébriques. Tandis que les esquisses quelconques décrivent exactement les modèles des théories du premier ordre.]

Si T est une trame (nécessairement d'ordre $\geqslant 1$ et, si elle est d'ordre 1 , nécessairement non associée à une esquisse) et si le triangle commutatif p (resp. q), représenté par le diagramme 15 (resp. le diagramme 16), est élément de $H^-(T)$ (resp. $H^+(T)$), alors, pour toute catégorie C et pour tout modèle $M:T \to C$, on a:

$$M(F_{dp}(0')) = M(F_{dp}(0))^2 = M(F_{dp}(0)) \times M(F_{dp}(0))$$
(resp. $M(F_{dq}(1')) = 2.M(F_{dq}(0)) = M(F_{dq}(0))+M(F_{dq}(0))$).
Dans ce cas, on note donc plus simplement:
$$F_{dp}(0') = F_{dp}(0)^2$$
(resp. $F_{dq}(1') = 2.F_{dq}(0)$),
en omettant d'indiquer ce triangle et les projections (resp. les co-projections) qui le plus souvent seront sans ambiguïté.

Bien entendu, des considérations analogues valent encore si G est un graphe discret ayant plus de deux objets.

En utilisant la convention précédente (et les modifications de présentation qu'elle suggère), il est facile de modifier la trame T_{mon} précédente (par exemple) en une trame T'_{mon} d'ordre 1, non associée à une esquisse, mais telle que, pour toute catégorie C, les catégories $Mod(T'_{mon},C)$ et $Mod(T_{mon},C)$ sont isomorphes.

Si T est une trame (d'ordre nécessairement ≥ 2) et si le triangle commutatif r, représenté par le diagramme 17 (resp. le diagramme 18), est élément de $H^-(T)$ (resp. $H^+(T)$), alors, pour tout modèle $M:T \to Ens$, on a (voir la Note 5):
- $M(F_{dr}(S_1))$ est l'ensemble des $x \in M(F_{dr}(X))$ satisfaisant une certaine formule θ_1 ("à une variable libre"),
- $M(F_{dr}(S_2))$ est l'ensemble des $x \in M(F_{dr}(X))$ satisfaisant une certaine formule θ_2 ("à une variable libre"),
- $M(F_{dr}(S'))$ est l'ensemble des $x \in M(F_{dr}(X))$ satisfaisant la formule $\theta_1 \wedge \theta_2$ (resp. $\theta_1 \vee \theta_2$).

Pareillement, si T est une trame (d'ordre nécéssairement ≥ 2) et si le triangle commutatif r, représenté par le diagramme 19 (resp. le diagramme 20), est élément de $H^+(T)$ (resp. $H^-(T)$), alors, pour tout modèle $M:T \to Ens$, on a (voir la Note 5):
- $M(F_{dr}(S'))$ est l'ensemble des $(x,y) \in M(F_{dr}(X)) \times M(F_{dr}(Y))$ satisfaisant une certaine formule θ ("à deux variables libres"),
- $M(F_{dr}(S''))$ est l'ensemble des $x \in M(F_{dr}(X))$ satisfaisant la formule $\exists y\ \theta$ (resp. $\forall y\ \theta$).

De même, si T est une trame (d'ordre nécessairement ≥ 2) et si le triangle commutatif q, représenté par le diagramme 21, est élément de $H^-(T)$, alors, pour tout modèle $M:T \to Ens$, on a (voir la Note 5):
- $M(F_{dq}(S'))$ est l'ensemble des $x \in M(F_{dq}(X))$ satisfaisant une certaine formule θ,

- $M(F_{dq}(S"))$ est l'ensemble des $x \in M(F_{dq}(X))$ satisfaisant $\neg\theta$.

[Note 5. Les considérations précédentes valent encore pour des modèles à valeurs non pas dans Ens mais dans une autre catégorie C, par exemple un topos. Il est également loisible de les adapter non pas seulement à des monos mais à des flèches quelconques.
Elles présentent les différentes constructions logiques usuelles indépendamment les unes des autres (et ne suppose, a priori, aucun caractère booléen ... ou même intuitionniste à la "logique" ainsi mise en cause.]

Si T est une trame (d'ordre nécessairement ≥ 2) et si le triangle commutatif r, représenté par le diagramme 22 (resp. le diagramme 23), est élément de $H^+(T)$ (resp. $H^-(T)$) alors, pour toute catégorie C et pour tout modèle $M:T \to C$, on a:
- $M(F_{dr}(s'))$ est une image (resp. une co-image) de $M(F_{dr}(s))$.
Dans ce cas, on note donc plus simplement:

$$F_{dr}(s') = im(s)$$

(resp. $$F_{dr}(s') = coim(s)$$).

Si T est une trame (d'ordre nécessairement ≥ 2) et si le triangle commutatif p, représenté par le diagramme 24, est élément de $H^-(T)$, alors, pour toute catégorie C possédant les produits finis (ou, pour simplifier, cartésienne fermée), si $M:T \to C$ est un modèle, on vérifie facilement que, naturellement en tout objet Z' de C, on a:
- $Hom_C(Z' \times M(F_{dp}(Y)), M(F_{dp}(X)) \simeq Hom_C(Z', M(F_{dp}(Z)))$,
autrement dit, $M(F_{dp}(Z))$ est un *objet de* C, *exponentielle de* $M(F_{dp}(X))$ *par* $M(F_{dp}(Y))$.
En conséquence, on note plus simplement:

$$F_{dp}(Z) = F_{dp}(X)^{F_{dp}(Y)}$$

et

$$F_{dp}(a) = app_{F_{dp}(X), F_{dp}(Y)} .$$

Si T est une trame (d'ordre nécessairement ≥ 2) et si le triangle commutatif p, représenté par le diagramme 25, est élément de $H^-(T)$, alors, pour toute catégorie C possédant les produits fibrés finis (ou, pour simplifier, localement cartésienne fermée), si $M:T \to C$ est un modèle, on vérifie facilement que:
- $M(F_{dp}(z))$ est un objet de $C/M(F_{dp}(S))$, *exponentielle* (*locale*) de $M(F_{dp}(x))$ par $M(F_{dp}(y))$.

Si T est une trame (d'ordre nécessairement ≥ 2) et si le triangle commutatif q, représenté par le diagramme 26, est élément de $H^+(T)$, alors, pour toute catégorie C et tout modèle $M:T \to C$, on vérifie évidemment que:

- M(S) est un *objet des entiers naturels interne à* C .

Si T est une trame (d'ordre nécessairement $\geqslant 3$) et si le triangle commutatif p , représenté par le diagramme 27 , est élément de $H^{-}(T)$, alors, pour toute catégorie C possédant les produits fibrés (finis) et tout modèle $M:T \to C$, l'objet $M(F_{dp}(\Omega))$ de C est un *objet classifiant des sous-objets* de $M(F_{dp}(Y))$ et $M(F_{dp}(Z))$.

3. Systèmes de trames.

On dit que $\Sigma = (\Sigma^-,\Sigma^+)$ est un *système de trames* si, et seulement si:
- Σ^- est une classe d'homomorphismes entre trames,
- Σ^+ est une (autre) classe d'homomorphismes entre trames.

On laisse au lecteur le soin de définir les *petits* systèmes de trames (pour lesquels "tout est petit"), si l'on raisonne dans une théorie des ensembles et des classes, ou encore les systèmes de trames *U-petits* (pour lesquels "tout est *U*-petit"), si l'on raisonne dans une théorie des ensembles avec axiome des univers et si U est un univers donné.

Si Σ et Σ' sont deux systèmes de trames, on dit que Σ' est *plus fin* que Σ (et l'on note $\Sigma \leq \Sigma'$) si, et seulement si:
- Σ^- est une partie de Σ'^- ,
- Σ^+ est une partie de Σ'^+ .

Si $(\Sigma_i)_{i\in I}$ est une famille de systèmes de trames, on note $\bigcup_{i\in I} \Sigma_i = (\bigcup_{i\in I} \Sigma_i^-,\bigcup_{i\in I} \Sigma_i^+)$ le système de trames *réunion* de la famille de ces sytèmes de trames, i. e. le moins fin des sytèmes de trames plus fins que tous les Σ_i , quand i varie dans I .

On dit qu'un système de trames Σ est *héréditaire* si, et seulement si:
- pour tout homomorphisme $h:T \to T'$ appartenant à $\Sigma^-\cup\Sigma^+$ et pour tout r appartenant à $H^-(T')$ (resp. à $H^+(T')$), alors $h_r:T_{gr} \to T_{dr}$ est élément de Σ^- (resp. de Σ^+).

Clairement, tout système de trames Σ engendre un système héréditaire de trames $[\Sigma]$, qui est le moins fin parmi tous les sytèmes héréditaires de trames plus fins que Σ .

On dit que $\Delta = (C,a,b) = (C,(a_h)_{h\in\Sigma^-},(b_h)_{h\in\Sigma^+})$ est une *sémantique catégorique* pour le système de trames $\Sigma = (\Sigma^-,\Sigma^+)$ si, et seulement si:
- C est une catégorie,

- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^-, l'opérateur a_h associe à tout modèle $M:T \to C$ un (voir la Note 6) modèle $a_h(M):T' \to C$ prolongeant co-universellement (voir la Note 6) M, i. e. tel que:
    + pour tout autre modèle $M':T' \to C$ vérifiant $M'.h = M$, il existe un unique (voir la Note 6) morphisme $m':M' \to a_h(M)$ vérifiant $m'.h = id(M)$,
- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^+, l'opérateur b_h associe à tout modèle $M:T \to C$ un (voir la Note 6) modèle $b_h(M):T' \to C$ prolongeant universellement (voir la Note 6) M, i. e. tel que:
    + pour tout autre modèle $M':T' \to C$ vérifiant $M'.h = M$, il existe un unique (voir la Note 6) morphisme $m':b_h(M) \to M'$ vérifiant $m'.h = id(M)$.

On laisse au lecteur le soin de définir les sémantiques catégoriques *petites*, si l'on raisonne dans une théorie des ensembles et des classes, ou encore les sémantiques catégoriques *U-petites*, si l'on raisonne dans une théorie des ensembles avec axiome des univers et si U est un univers donné.

[Note 6. Dans la définition précédente, on peut remplacer partout "modèle" par "modèle faible" (revoir la Note 2); ainsi, pourrait-on parler de sémantique catégorique *modèles-faible* pour le système de trames Σ.
De même, on pourrait ne prendre que des opérateurs a_h (resp. b_h) choisissant des prolongements quasi-co-universels (resp. quasi-universels); ainsi, pourrait-on parler de sémantique catégorique *universelle-faible*, voire de sémantique catégorique modèles-faible *et* universelle-faible, pour Σ.
Pareillement, les opérateurs a_h (resp. b_h) pourraient ne pas choisir *un* modèle, ou modèle faible, prolongement universel (resp. prolongement co-universel) ou quasi-co-universel (resp. quasi-universel), mais seulement une *classe* de tels prolongements (autrement dit, ne pas être fonctionnels); on pourrait, alors, parler de sémantique catégorique *multivoque*.
  Si Σ est un petit système héréditaire de trames, on peut renforcer la notion de sémantique catégorique pour Σ en celle de sémantique catégorique *héréditaire* pour Σ, en imposant dans la définition précédente que:
- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^-, pour tout p appartenant à $H^-(T')$ et pour tout modèle $M:T \to C$, on a $a_h(M).F_{dp} = a_{hp}(M.F_{gp})$,
- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^-, pour tout q appartenant à $H^+(T')$ et pour tout modèle $M:T \to C$, on a $a_h(M).F_{dq} = b_{hq}(M.F_{gq})$,
- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^+, pour tout p appartenant à $H^-(T')$ et pour tout modèle $M:T \to C$, on a $b_h(M).F_{dp} = a_{hp}(M.F_{gp})$,
- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^+, pour tout q appartenant à $H^+(T')$ et pour tout modèle $M:T \to C$, on a $b_h(M).F_{dq} = b_{hq}(M.F_{gq})$.
  Enfin, nous laissons au lecteur le soin de définir les sémantiques catégoriques éventuellement héréditaires et/ou modèles-faibles et/ou universelles-faibles.]

Si Δ et Δ' sont deux sémantiques catégoriques du même système de trames Σ, on dit que $\delta = (\Delta,U,\Delta')$ est une

sémantique fonctorielle pour Σ , de Δ vers Δ' (et l'on note $\delta:\Delta \to \Delta'$) si, et seulement si:
- $U:C \to C'$ est un foncteur,
- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^- et pour tout modèle $M:T \to C$, on a $a'_h(U.M) = U.a_h(M)$,
- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^+ et pour tout modèle $M:T \to C$, on a $b'_h(U.M) = U.b_h(M)$.

Si $\Sigma \leqslant \Sigma'$ sont deux systèmes de trames, nous laissons au lecteur le soin de définir la sémantique catégorique pour Σ *sous-jacente* à une sémantique catégorique pour Σ' .De même, nous laissons au lecteur le soin de définir la sémantique fonctorielle pour Σ *sous-jacente* à une sémantique fonctorielle pour Σ' .

---

4. Exemples de systèmes de trames.

Si $F:G \to G'$ est un foncteur entre deux catégories (ou même entre deux graphes compositifs), on considère les deux lax-limites inductives représentées par les deux 2-diagrammes ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "l^-(F,G)"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Leftarrow\, l^-(F)"] & G' \arrow[dl, "l^-(F,G')"] \\ & L^-(F) & \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "l^+(F,G)"'] & {} \arrow[d, phantom, "\Rightarrow\, l^+(F)"] & G' \arrow[dl, "l^-(F,G')"] \\ & L^+(F) & \end{tikzcd}$$

Clairement, si C est une catégorie et si $M:G \to C$ est un foncteur (i. e. est un modèle de $T(G)$ dans C), un foncteur $N:G' \to C$, qui est extension de Kan projective (resp. inductive) de M le long de F , définit un et un seul foncteur $M':L^-(F) \to C$ (resp. $M':L^+(F) \to C$) , qui est un prolongement co-universel (resp. universel) de M le long de $l^-(F,G)$ (resp. le long de $l^+(F,G)$), tel que:

$$M'.l^-(F,G') = N$$

(resp $\quad M'.l^-(F,G') = N \quad$),

et réciproquement.

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}^-,\mathcal{F}^+)$ un couple de deux familles de foncteurs entre catégories (ou même entre graphes compositifs). Alors, on

dispose d'un système de trames *canoniquement associé* $\Sigma(\mathcal{F})$, si l'on pose:
- $\Sigma(\mathcal{F})^- = \{ 1^-(F,G);G \to L^-(F) \mid F\in\mathcal{F}^- \}$,
- $\Sigma(\mathcal{F})^+ = \{ 1^+(F,G);G \to L^+(F) \mid F\in\mathcal{F}^+ \}$.

Dans ces conditions, les sémantiques catégoriques de $\Sigma(\mathcal{F})$ sont exactement les catégories munies d'un choix de foncteurs extensions de Kan projectives, le long des foncteurs $F\in\mathcal{F}^-$, et d'un choix de foncteurs extensions de Kan inductives, le long des foncteurs $F\in\mathcal{F}^+$, (ce qui suppose déjà l'existence de ces extensions).

En particulier, soit $\mathcal{G} = (\mathcal{G}^-,\mathcal{G}^+)$ un couple de deux familles de catégories (ou de graphes compositifs). Il en résulte un couple de familles de foncteurs $\mathcal{F}(\mathcal{G})$ *canoniquement associée*, si l'on pose:
- $\mathcal{F}(\mathcal{G})^- = \{ G \hookrightarrow G^- \mid G\in\mathcal{G}^- \}$,
- $\mathcal{F}(\mathcal{G})^+ = \{ G \hookrightarrow G^+ \mid G\in\mathcal{G}^+ \}$,

et, par conséquent, un système de trames $\Sigma(\mathcal{G}) = \Sigma(\mathcal{F}(\mathcal{G}))$ *canoniquement associé*.

Dans ces conditions, les sémantiques catégoriques de $\Sigma(\mathcal{G})$ sont exactement les catégories munies, pour tout $G\in\mathcal{G}^-$, d'un choix de limites projectives d'indexation G et, pour tout $G\in\mathcal{G}^+$, d'un choix de limites inductives d'indexation G (ce qui suppose déjà l'existence de ces limites).

Des considérations générales analogues aux précédentes sont encore valables, si l'on considère non plus des catégories (ou des graphes compositifs) mais des esquisses.

Ainsi, à tout couple $h = (h^-,h^+)$ de deux familles d'homomorphismes entre esquisses est *canoniquement associé* un système de trames $\Sigma(h)$ de sorte que les sémantiques catégoriques de $\Sigma(h)$ sont exactement les catégories C munies d'un choix de modèles extensions projectives (ou co-libres, ou co-universelles) de modèles, le long des homomorphismes $h\in h^-$, et d'un choix de modèles extensions inductives (ou universelles ou libres) de modèles, le long des homomorphismes $h\in h^+$, (ce qui suppose déjà que ces extensions existent).

En particulier, si $h^- = \emptyset$ et si h^+ n'est constituée que d'homomorphismes entre esquisses *purement projectives* (i. e. décrivant des structures essentiellement algébriques), on sait (en vertu du "théorème du faisceau associé" - voir (C.Q.C.E.)) que Ens est (i. e. est sous-jacente à) une (i. e. au moins une) sémantique catégorique de $\Sigma(h)$; ce n'est plus le cas, en général, si $h^- \neq \emptyset$ ou si h^+ n'est pas constituée que d'homomorphismes entre esquisses purement projectives.

Par exemple, si $h = (\emptyset, \{S^\wedge : T(1) \to T_{mon}\})$ (où $S^\wedge(0) = S$ - voir le diagramme 13), les sémantiques catégoriques de $\Sigma(h)$ sont exactement les catégories C munies d'une opération qui associe à tout objet X de C un (parmi tous les possibles) monoïde interne à C , librement engendré par X (ce qui suppose déjà qu'il en existe au moins un). Plus précisément encore, les sémantiques catégoriques du système de trames $[\Sigma(h)]$ (héréditaire, engendré par $\Sigma(h)$) sont exactement les catégories munies d'un tel choix et, de plus, d'un choix d'objet final et de produits pour les couples et les triplets d'objets.

De même, si $h = (\emptyset, \{S^\wedge : T(1) \to T_{grphcmp}\})$ (où $S^\wedge(0) = S$ - voir le diagramme 14), les sémantiques catégoriques de $\Sigma(h)$ sont exactement les catégories C munies d'une opération qui associe à tout objet X de C un (parmi tous les possibles) graphe compositif interne à C , librement engendré par X (ce qui suppose déjà qu'il en existe au moins un). Plus précisément encore, les sémantiques catégoriques du système de trames $[\Sigma(h)]$ (héréditaire, engendré par $\Sigma(h)$) sont exactement les catégories munies d'un tel choix et, de plus, d'un choix de produits fibrés pour les couples de flèches de même but.

Reprenons le diagramme 15 (resp. le diagramme 16) et posons $\Sigma = (\{h_{puiss2}\}, \emptyset)$ (resp. $\Sigma = (\emptyset, \{h_{mult2}\})$.
Clairement, Σ est un sytème héréditaire de trames et les sémantiques catégoriques de Σ sont exactement les catégories munies d'une opération *élévation à la puissance* 2 (resp. *multiplication par* 2) de ses objets.

Bien entendu, on peut généraliser ces considérations pour des puissances ou/et des multiples quelconques d'objets.

Considérons le diagramme 17 (resp. le diagramme 18) et posons $\Sigma = (\{h_{et}\}, \emptyset)$ (resp. $\Sigma = (\emptyset, \{h_{ou}\})$).
Clairement, les sémantiques catégoriques de Σ sont exactement les catégories munies d'une opération *conjonction* (resp. *disjonction*) des couples de sous-objets d'un objet.
Plus précisément encore, les sémantiques catégoriques du système de trames $[\Sigma]$ (héréditaire, engendré par Σ) sont exactement les catégories munies d'une telle opération de conjonction (resp.

de disjonction) et d'un choix de produits fibrés pour les couples de flèches de même but (voir la Note 7).

De même, considérons le diagramme 19 (resp. le diagramme 20) et posons $\Sigma = (\emptyset, \{h_{exist}\})$ (resp. $\Sigma = (\{h_{univ}\}, \emptyset)$).
Clairement, les sémantiques catégoriques de Σ sont exactement les catégories munies d'une opération *quantification existentielle* (resp. *quantification universelle*) des sous-objets des produits de deux objets.
Plus précisément, les sémantiques catégoriques de $[\Sigma]$ sont exactement les catégories munies d'une telle quantification, d'un choix de produits des couples d'objets et d'un choix de produits fibrés des couples de flèches de même but (voir la Note 7).

Enfin, reprenons le diagramme 21 et posons $\Sigma = (\{h_{neg}\}, \emptyset)$.
Clairement, les sémantiques de Σ sont exactement les catégories munies d'une opération *complémentation* (non nécessairement booléenne) des sous-objets.
Alors, les sémantiques catégoriques de $[\Sigma]$ sont exactement les catégories munies d'une telle complémentation et d'un choix de produits fibrés pour les couples de flèches de même but (voir la Note 7).

[Note 7. Une sémantique catégorique du sytème de trames

$$[\Sigma] = [(\{h_{et}, h_{univ}, h_{neg}\}, \{h_{ou}, h_{exist}\})]$$

est une catégorie ou l'on peut effectuer toutes les constructions logiques usuelles.
Définies indépendamment les unes des autres (revoir la Note 5), leur dépendance éventuelle est une propriété ("logique") de la seule sémantique considérée, i. e. de la catégorie sous-jacente. Pour exprimer que telle ou telle dépendance logique est par avance exigée, i. e. pour exprimer tel ou tel *genre* de logique (booléenne, intuitionniste, ou autre ...), il suffit de renforcer Σ , c'est-à-dire de considérer un système de trames plus fin ... que nous laissons au lecteur le soin de décrire dans les exemples qui s'imposent.]

Reprenons le diagramme 22 (resp. le diagramme 23) et posons $\Sigma = (\emptyset, \{h_{im}\})$ (resp. $\Sigma = (\{h_{coim}\}, \emptyset)$).
Dans ces conditions, les sémantiques catégoriques de Σ sont exactement les catégories munies d'une opération associant à chaque flèche une image (resp. une co-image).
Les sémantiques catégoriques de $[\Sigma]$ sont exactement les catégories munies d'un tel choix d'images (resp. de co-images) et d'un choix de produits fibrés (resp. de sommes fibrées) pour les couples de flèches de même but (resp. de même source).

Considérons le diagramme 24 (resp. le diagramme 25) et posons $\Sigma = (\{h_{expo}, h_{final}\}, \emptyset)$ (resp. $\Sigma = (\{h_{locexpo}\}, \emptyset)$).
Alors, les sémantiques catégoriques de $[\Sigma]$ sont exactement les catégories cartésiennes fermées (resp. localement cartésiennes fermées), munies d'un choix d'objet final, d'un choix de produits (resp. de produits fibrés) et d'un choix d'exponentielles (resp. d'exponentielles locales) pour les couples d'objets (resp. pour les couples de flèches de même but).

Ainsi, les sémantiques catégoriques de $\Sigma_{cartf} = [\Sigma]$ (resp. $\Sigma_{locartf} = [\Sigma]$) sont exactement les sémantiques catégoriques du λ-calcul typé (resp. de la théorie des types de Martin-Löf), voir (H.O.C.L.) (resp. voir (A.I.T.T.)).

Reprenons le diagramme 26 et posons $\Sigma = (\emptyset, \{h_{nno}\})$.
Les sémantiques catégoriques de $[\Sigma]$ sont exactement les catégories où l'on a choisi un objet final et un objet des entiers naturels.

Considérons le diagramme 27 et posons $\Sigma = (\{h_{ssobj}\}, \emptyset)$.
Les sémantiques catégoriques de Σ sont exactement les catégories munies d'un objet classifiant les sous-objets.Plus précisément encore, si $\Sigma' = \Sigma_{cartf} \cup \Sigma$, alors les sémantiques catégoriques (héréditaires) du système héréditaire de trames $\Sigma_{top} = [\Sigma']$ sont exactement les topos, où l'objet classifiant les sous-objets est choisi, de même que l'élément final, les produits des couples de deux objets et les produits fibrés des couples de deux flèches de même but.

On peut construire (voir (S.C.D.T.)) un système de trames $\Sigma_{\lambda-ord2}$ tel que ses sémantiques catégoriques sont exactement les "sémantiques catégoriques du λ-calcul typé du deuxième ordre" (voir (I.F.E.C.) et la Note 8).

Par exemple, à l'expression (qui "construit un type particulier"):

$$N = \forall X\ ((X \to X) \to (X \to X)) ,$$

on associe l'homomorphisme de trames h_{nno} (voir le diagramme 26).

De même, à l'expression (qui construit, tout autant, un autre type particulier):

$$\mathrm{Bool} = \forall X\ (X \to (X \to X)) ,$$

on associe l'homomorphisme de trames que l'on a représenté dans le diagramme 28.

Moins simplement, à l'expression (qui construit, à partir du type "paramètre" Y, où X est supposé ne pas figurer, un nouveau type, "dépendant de Y"):

$$\mathrm{List}(Y) = \forall X\ (X \to ((X \to (Y \to X)) \to X))\ ,$$

on associe l'homomorphisme de trames que l'on a représenté dans le diagramme 29.

A l'expression (qui construit aussi, à partir d'un type paramètre Y, où X est supposé ne pas figurer, un nouveau type, dépendant de Y):

$$\mathrm{Non}(Y) = \forall X\ (Y \to X)\ ,$$

on associe les deux homomorphismes de trames que l'on a représentés dans le diagramme 30.

De même, à l'expression (qui construit un nouveau type):

$$a = \forall Y\ (Y \to (\mathrm{List}(Y) \to Y))\ ,$$

on associe les deux homomorphismes de trames que l'on a représentés dans le diagramme 31.

Plus généralement, à toute expression e on peut associer (en "décodant" cette expression) un système de trames

$$\Sigma_e = (\emptyset, \{h_e, h'_e\}).$$

Si l'on désigne par E l'ensemble des expressions du λ-calcul typé du deuxième ordre et si l'on pose:

$$\Sigma_{\lambda\text{-ord2}} = \Sigma_{\mathrm{cartf}} \cup (\cup_{e \in E} \Sigma_e)\ ,$$

alors les sémantiques catégoriques (héréditaires - revoir la Note 6) de $[\Sigma_{\lambda\text{-ord2}}]$ sont exactement les catégories cartésiennes fermées (avec choix convenables, comme précédemment) où toutes les expressions e "construisent" effectivement des "types libres" (choisis): on peut donc légitimement les appeler des ***sémantiques catégoriques du λ-calcul du deuxième ordre*** (voir la Note 8).

Si E' est une partie de E et si Σ est un sytème de trames moins fin que $\Sigma_{E'} = \Sigma_{\mathrm{cartf}} \cup (\cup_{e \in E'} \Sigma_e)$, une sémantique catégorique (héréditaire) de Σ (ou de $[\Sigma]$) est donc une catégorie qui n'admet que *certains* des constructeurs de types du λ-calcul du deuxième ordre.

Par exemple, Ens est clairement (sous-jacente à) une sémantique catégorique de $[\Sigma_{E'}]$, si l'on pose:

$$E' = \{N, \mathrm{Bool}, \mathrm{List}(Y)\}\ ,$$

Par contre, Ens n'est certainement pas (sous-jacente à) une sémantique catégorique de $\Sigma_{E''}$ (et encore moins de $[\Sigma_{E''}]$) , si l'on pose:

$$E'' = \{N, \mathrm{Bool}, \mathrm{List}(Y), \mathrm{Non}(Y), a\}\ ,$$

(on notera que si $M : T_a \to Ens$ est un modèle, il ne possède pas de prolongement universel le long de h_a, mais un "diagramme localement universel" de prolongements - au sens de (C.Q.C.E.) par exemple).

[Note 8. Plus précisément encore, les sémantiques catégoriques (héréditaires) modèles-faibles et universelles-faibles de $[\Sigma_{\lambda\text{-}ord2}]$ pourraient légitimement s'appeler des sémantiques catégoriques du sytème F originel (voir (I.F.E.C.)).]

5. Esquissabilité des trames.

Si Σ est un système de trames, on dit qu'une trame T est une *Σ-trame* si, et seulement si:
- pour tout élément p de $H^-(T)$, l'homomorphisme h_p est élément de Σ^-,
- pour tout élément q de $H^+(T)$, l'homomorphisme h_q est élément de Σ^+.

Clairement, si $\Sigma \leq \Sigma'$ sont deux petits systèmes de trames, toute Σ-trame est une Σ'-trame et à toute Σ'-trame est associée une Σ-trame *sous-jacente* (que nous laissons au lecteur le soin de définir).

Si Σ est un petit système de trames (petites), on note Σ-tram la catégorie dont les objets sont les Σ-trames petites et dont les flèches sont les homomorphismes entre ces trames.

Dans ces conditions, on a (voir la Note 9):

Proposition 1. *Si Σ est un petit système de trames, la catégorie Σ-tram est projectivement esquissable. Précisément, il existe une esquisse projective petite $E_{\Sigma\text{-tram}}$ telle que les catégories $\mathrm{Mod}(E_{\Sigma\text{-tram}},\mathrm{Ens})$ et Σ-tram sont équivalentes.*

Preuve. Soit T une Σ-trame petite.

Notons $SP(\Sigma)$ l'ensemble des supports σ des trames qui sont co-domaines d'au moins un $h \in \Sigma^- \cup \Sigma^+$.

De même, pour tout $h \in \Sigma^-$ (resp. $h \in \Sigma^+$), notons:
- $H^-_h(T) = \{ p \,/\, p \in H^-(T)$ et $h_p = h \}$,

(resp. $H^+_h(T) = \{ q \,/\, q \in H^+(T)$ et $h_q = h \}$),
- $H^-_{dh}(T) = \{ F_{dp} \,/\, p \in H^-_h(T) \}$,

(resp. $H^+_{dh}(T) = \{ F_{dq} \,/\, q \in H^+_h(T) \}$).

Clairement, pour connaitre T, il suffit de connaitre:
- le graphe compositif G, support de T,
- pour tout $h \in \Sigma^-$, la partie $H^-_{dh}(T)$ de $\mathrm{Hom}(\sigma,G)$ (si σ désigne le support du co-domaine de h),

- pour tout $h \in \Sigma^+$, la partie $H^+_{dh}(T)$ de $Hom(\sigma, G)$ (si σ désigne le support du co-domaine de h).

On obtient donc une esquisse projective petite $E_{\Sigma-tram}$ des Σ-trames en complétant l'esquisse (i. e. la trame d'ordre 1) $T_{grphcmp}$ (voir le diagramme 14) comme suit:
- pour tout $\sigma \in SP(\Sigma)$, on ajoute à $T_{grphcmp}$ le cône projectif distingué représenté par le diagramme 32 (ainsi, tout modèle transformera son sommet S_σ en l'ensemble $Hom(\sigma, G)$, si G désigne le graphe compositif auquel s'identifie la restriction de ce modèle à $T_{grphcmp}$),
- pour chaque $h \in \Sigma^-$, on rajoute une flèche (et un cône projectif distingué) $S^-_h \rightarrowtail S_\sigma$ (si l'on désigne par σ le support du co-domaine de h) ,
- pour chaque $h \in \Sigma^+$, on rajoute une flèche (et un cône projectif distingué) $S^+_h \rightarrowtail S_h$ (si l'on désigne par σ le support du co-domaine de h) . *Fin de la preuve.*

Les propriétés générales des catégories projectivement esquissables (voir (C.Q.C.E.)) nous permettent, en conséquence, d'énoncer (voir la Note 10):

Corollaire 1. *Si* Σ *est un petit système de trames, la catégorie* Σ-tram *est localement présentable (au sens de* (L.P.L.G.)*), en particulier elle est complète et co-complète.*

[Note 9. La "structure" de trame est, comme signalé au §2, plus générale que la structure d'esquisse. Il n'en demeure pas moins qu'il s'agit d'une structure ... esquissable et même projectivement esquissable (tout comme la structure, plus particulière, d'esquisse - voir (L.D.T.E.)). Ainsi, la proposition 1 stipule que la structure de trame est essentiellement algébrique.]

[Note 10. On sait (voir (P.T.G.M.) que la catégorie Grphcmp des petits graphes compositifs est munie de diverses structures monoïdales fermées (dont une cartésienne fermée), que nous continuerons ici à noter Grphcmp (pour plus de commodité) . Alors, on montre facilement (en s'inspirant des méthodes utilisées en (E.G.C.E.)) que Σ-tram est *enrichie* par l'une quelconque de ces structures monoïdales fermées (en particulier, elle possède des "2-flèches") et que chacune de ces Grphcmp-catégories est représentable et co-représentable (en un sens facile à définir; si l'on supposait, plus particulièrement, que les supports des Σ-trames petites étaient des catégories petites, alors la catégorie de ces Σ-trames petites serait une 2-catégorie représentable et co-représentable au sens usuel).
Mieux, il est facile de prouver (en reprenant les méthodes de (P.T.G.M.) et (E.G.C.E.)) que Σ-tram , elle-même, est munie de diverses structures monoïdales fermées (dont une cartésienne fermée).]

5. ESQUISSABILITE DES TRAMES.

Si $\Sigma\leqslant\Sigma'$ sont deux petits systèmes de trames, on note $U_{\Sigma'>\Sigma}:\Sigma'\text{-tram}\to\Sigma\text{-tram}$ le foncteur "Σ-trame sous-jacente" et $V_{\Sigma<\Sigma'}:\Sigma\text{-tram}\to\Sigma'\text{-tram}$ le foncteur injection canonique.

Dans ces conditions, on a:

Proposition 2. Si $\Sigma\leqslant\Sigma'$ *sont deux petits systèmes de trames, le foncteur* $U_{\Sigma'>\Sigma}:\Sigma'\text{-tram}\to\Sigma\text{-tram}$ *est projectivement esquissable. Précisément, il existe un homomorphisme entre esquisses projectives petites*

$$h_{\Sigma<\Sigma'}:E_{\Sigma\text{-tram}}\to E_{\Sigma'\text{-tram}}$$

tel que le foncteur

$$\mathrm{Mod}(h_{\Sigma<\Sigma'},\mathrm{Ens}):\mathrm{Mod}(E_{\Sigma'\text{-tram}},\mathrm{Ens})\to\mathrm{Mod}(E_{\Sigma\text{-tram}},\mathrm{Ens})$$

est "équivalent" au foncteur

$$U_{\Sigma'>\Sigma}:\Sigma'\text{-tram}\to\Sigma\text{-tram}\ .$$

Preuve. Reprenant la preuve de la proposition 1 précédente, on constate que, par construction, $E_{\Sigma'\text{-tram}}$ contient $E_{\Sigma\text{-tram}}$. Alors, il suffit de prendre pour $h_{\Sigma<\Sigma'}$ l'homomorphisme injection canonique. *Fin de la preuve.*

Les propriétés générales des foncteurs projectivement esquissables (voir (C.Q.C.E.)) nous permettent, en conséquence, d'énoncer (notamment):

Corollaire 2. Si $\Sigma\leqslant\Sigma'$ *sont deux petits systèmes de trames, le foncteur "Σ-trame sous-jacente"* $U_{\Sigma'>\Sigma}:\Sigma'\text{-tram}\to\Sigma\text{-tram}$ *commute aux limites projectives, commute aux limites inductives suffisamment filtrantes et possède un adjoint à gauche (qui est le foncteur injection canonique* $V_{\Sigma<\Sigma'}:\Sigma\text{-tram}\to\Sigma'\text{-tram}$ *).*

6. Esquissabilité des sémantiques catégoriques des systèmes de trames.

Si Σ est un petit système de trames, on note Σ-sem la catégorie dont les objets sont les petites sémantiques catégoriques pour Σ et dont les flèches sont les sémantiques fonctorielles entre ces petites sémantiques catégoriques.

Dans ces conditions, on a (voir Note 11):

Proposition 3. *Si* Σ *est un petit sytème héréditaire de trames, la catégorie* Σ-sem *est projectivement esquissable. Précisément, il existe une esquisse projective petite* $E_{\Sigma-sem}$ *telle que les catégories* $Mod(E_{\Sigma-sem},Ens)$ *et* Σ-sem *sont équivalentes.*

Preuve. Pour tout entier n , notons:
- Σ^{-}_{n} l'ensemble des $h:T \to T'$ appartenant à Σ^{-} tels que T et T' sont d'ordres $\leq n$,
- Σ^{+}_{n} l'ensemble des $h:T \to T'$ appartenant à Σ^{+} tels que T et T' sont d'ordres $\leq n$,
- $\Sigma_{n} = (\Sigma^{-}_{n},\Sigma^{+}_{n})$,

ainsi, Σ_{n} est encore un petit système héréditaire de trames.

L'esquisse $E_{\Sigma-sem}$ est obtenue comme réunion de la famille (croissante pour l'inclusion) $(E_{\Sigma n-sem})_{n\in N}$ des esquisses projectives petites des Σ_{n}-sémantiques catégoriques: cette famille est construite par récurence en procédant comme suit.

a) L'esquisse $E_{\Sigma o-sem}$ est l'esquisse des catégories munies de choix de prolongements co-universels et universels le long de certains foncteurs: une telle esquisse est construite comme en (T.F.A.E.), (C.P.C.A.) ou (A.M.E.N.) (à ceci près qu'elle l'était pour des prolongements associés à des extensions de Kan - ce qui ne nuit en rien à la généralité).

b) Si $n>0$ est un entier, supposons construite $E_{\Sigma n-sem}$ de sorte que:
- pour tout $h:T \to T'$ appartenant à Σ^{-}_{n} , on dispose du sous-graphe compositif de $E_{\Sigma n-sem}$ représenté dans le diagramme 33, de sorte que, pour tout modèle $M:E_{\Sigma n-sem} \to Ens$ (qui s'identifie à une petite sémantique catégorique (C,a,b) de Σ_{n}), on a:

+ $M(S_\sigma)$ s'identifie à l'ensemble des foncteurs de $\sigma = supp(T)$ vers C ,
+ $M(S_{\sigma'})$ s'identifie à l'ensemble des foncteurs de $\sigma' = supp(T')$ vers C ,
+ $M(s_\tau)$ s'identifie à l'application composition par $\tau = supp(h^`$,
+ $M(X_T)$ s'identifie à l'ensemble des modèles de T dans la catégorie C ,
+ $M(X_{T'})$ s'identifie à l'ensemble des modèles de T' dans la catégorie C ,
+ $M(x_h)$ s'identifie à l'application composition par h ,
+ $M(j_T)$ s'identifie à l'application foncteur sous-jacent,
+ $M(j_{T'})$ s'identifie à l'application foncteur sous-jacent,
+ $M(\alpha_h)$ s'identifie à l'opérateur a_h ,

- pour tout $h{:}T \to T'$ appartenant à $\Sigma^+{}_n$, on dispose du sous-graphe compositif de $E_{\Sigma n-sem}$ représenté dans le diagramme 34, de sorte que, pour tout modèle $M{:}E_{\Sigma n-sem} \to Ens$ (qui s'identifie à une petite sémantique catégorique (C,a,b) de Σ_n), on a:

+ $M(S_\sigma)$ s'identifie à l'ensemble des foncteurs de $\sigma = supp(T)$ vers C ,
+ $M(S_{\sigma'})$ s'identifie à l'ensemble des foncteurs de $\sigma' = supp(T')$ vers C ,
+ $M(s_\tau)$ s'identifie à l'application composition par $\tau = supp(h)$,
+ $M(X_T)$ s'identifie à l'ensemble des modèles de T dans la catégorie C ,
+ $M(X_{T'})$ s'identifie à l'ensemble des modèles de T' dans la catégorie C ,
+ $M(x_h)$ s'identifie à l'application composition par h ,
+ $M(j_T)$ s'identifie à l'application foncteur sous-jacent,
+ $M(j_{T'})$ s'identifie à l'application foncteur sous-jacent,
+ $M(\beta_h)$ s'identifie à l'opérateur b_h ,

(pour $n = 0$, on dispose bien de tels sous-graphes compositifs de $E_{\Sigma o-sem}$, où, de plus, $j_T = id(S_\sigma)$ et $j_{T'} = id(S_{\sigma'})$).

c) Alors, si $h^{\wedge}{:}T^{\wedge} \to T'^{\wedge}$ est un homomorphisme de trames appartenant à $\Sigma^-{}_{n+1}$ et n'appartenant pas à $\Sigma^-{}_n$, un modèle $M^{\wedge}{:}T^{\wedge} \to C$, de $T^{\wedge}$ dans une telle catégorie (sous-jacente) C , est entièrement défini par la famille de données et les conditions les reliant suivantes:

- un foncteur $F{:}supp(T^{\wedge}) \to C$,
- pour tout $p \in H^-(T^{\wedge})$ (pour lequel on a donc $h_p \in \Sigma^-{}_n$, puisque Σ est héréditaire), un modèle $M_{gp}{:}T_{gp} \to C$, un modèle $M_{dp}{:}T'_{dp} \to C$ et un (nécessairement unique) isomorphisme

$m:M_{dp} \to a_{hp}(M_{gp})$ (i. e. une certaine famille de flèches inversibles de C) tels que:

+ $F.F_{gp} = ssj(M_{gp})$,
+ $F.F_{dp} = ssj(M_{dp})$,
+ $M_{dp}.h_p = M_{gp}$.

Autrement dit, l'ensemble des modèles de $T^\wedge$ dans C est une certaine limite projective d'applications "canoniques" entre:

- l'ensemble des foncteurs de $supp(T_{gp})$ vers C ,
- l'ensemble des foncteurs de $supp(T_{dp})$ vers C ,
- l'ensemble des modèles de T_{gp} vers C ,
- l'ensemble des modèles de T_{dp} vers C ,
- l'ensemble des flèches (inversibles) de C ,

ensembles et applications "canoniques" tous et toutes déjà "esquissés" par des objets de $E_{\Sigma n-sem}$.

d) On peut donc (comme dans la preuve de la proposition 1 du §5) compléter $E_{\Sigma n-sem}$ en une $E_{\Sigma n-sem,supp(T^\wedge)}$ (on pourra se reporter au diagramme 35), en ajoutant à $E_{\Sigma n-sem}$ un cône projectif distingué de sommet un objet supplémentaire $S_{\sigma^\wedge}$ et de base dans $E_{\Sigma n-sem}$. De sorte que $S_{\sigma^\wedge}$ "esquisse" l'ensemble des foncteurs de $\sigma^\wedge = supp(T^\wedge)$ vers C .

Alors, on peut de nouveau compléter $E_{\Sigma n-sem,supp(T^\wedge)}$ en une $E_{\Sigma n-sem,T^\wedge}$ (voir le diagramme 35), en ajoutant à $E_{\Sigma n-sem,supp(T^\wedge)}$:

- un cône projectif distingué de sommet un objet supplémentaire $X_{T^\wedge}$ et de base dans $E_{\Sigma n-sem,supp(T^\wedge)}$,
- une flèche (et un cône projectif distingué) supplémentaire(s) $j_{T^\wedge}:X_{T^\wedge} \rightarrowtail S_{\sigma^\wedge}$ (et des équations en la composant avec les projections convenables),

de sorte que $X_{T^\wedge}$ esquisse l'ensemble des modèles de $T^\wedge$ dans C et $j_{T^\wedge}$ esquisse l'application foncteur sous-jacent.

e) Maintenant, après avoir procédé de la même manière pour $T'^\wedge$, on complète $E_{\Sigma n-sem,T^\wedge} \cup E_{\Sigma n-sem,T'^\wedge}$ en une $E_{\Sigma n-sem,h^\wedge}$ (voir le diagramme 36) en lui ajoutant deux flèches (et des équations convenables):

$$s_{\tau^\wedge}:S_{\sigma'^\wedge} \to S_{\sigma^\wedge}$$

et

$$x_{h^\wedge}:X_{T'^\wedge} \to X_{T^\wedge} ,$$

esquissant respectivement l'application composition par $\tau^\wedge = supp(h^\wedge)$ et l'application composition par $h^\wedge$.

f) Pour exprimer qu'on dispose d'un opérateur choix de prolongements $a_{h^\wedge}$, il suffit alors de compléter $E_{\Sigma n-sem,h^\wedge}$ en une $E_{\Sigma n-sem,h^\wedge,a}$ (voir le diagramme 36), en lui rajoutant une flèche:

$$\alpha_{h^\frown} : X_{T^\frown} \to X_{T'^\frown}$$

et l'équation:

$$x_{h^\frown} . \alpha_{h^\frown} = id(X_{T^\frown}) \ ,$$

g) Alors, pour exprimer que ce choix donne des prolongements co-universels, on complète $E_{\Sigma n\text{-sem},h^\frown,a}$ en une $E_{\Sigma n\text{-sem},h^\frown,a,co\text{-}u}$ en procédant exactement comme en (T.F.A.E.) ou (A.M.E.N.).
h) Il est clair qu'on peut procéder de manière tout à fait analogue pour un $h^\frown \epsilon \Sigma^+_{n+1}$ qui n'appartient pas à Σ^+_n , i. e. obtenir une certaine $E_{\Sigma n\text{-sem},h^\frown,b,u}$.
i) Dans ces conditions, la réunion $E_{\Sigma n+1\text{-sem}}$ de ces $E_{\Sigma n\text{-sem},h^\frown,a,co\text{-}u}$ et de ces $E_{\Sigma n\text{-sem},h^\frown,b,u}$ (quand h varie) est l'esquisse recherchée. *Fin de la preuve.*

Les propriétés générales des catégories projectivement esquissables (voir (C.Q.C.E.)) nous permettent, en conséquence, d'énoncer (notamment):

Corollaire 3. Si Σ *est un petit système héréditaire de trames, alors la catégorie* Σ-sem *est localement présentable (au sens de* (L.P.L.G.)*), en particulier elle est complète et co-complète.*

[Note 11. Nous avons déjà signalé que la structure de trame est plus générale que la structure d'esquisse. Si l'on préfère, on peut dire aussi que, *du point de vue des modèles*, les trames décrivent *plus* de structures (ou de modèles) que les esquisses.
Par contre, la proposition 3 énonce que, *du point de vue des sémantiques catégoriques*, les systèmes héréditaires de trames sont plus particuliers que les sur-esquisses de l'esquisse de catégorie. Autrement dit, les systèmes héréditaires de trames décrivent *moins* de catégories munies de sur-structures que les sur-esquisses de l'esquisse de catégorie; précisément, ils décrivent des catégories munies de sur-structures pour lesquelles les données supplémentaires fournissent *toutes* des solutions de problèmes *co-universels et/ou universels*. C'est évidemment leur intérêt.
Il convient de préciser que, si Σ n'est plus héréditaire, alors Σ-sem n'est plus nécessairement projectivement esquissable. Par contre, on peut montrer qu'elle est "tramable", i. e. qu'il existe une trame petite $T_{\Sigma\text{-sem}}$ (en général d'ordre ≥ 2) telle que les catégories $Mod(T_{\Sigma\text{-sem}}, Ens)$ et Σ-sem sont équivalentes.
Enfin, on peut aussi montrer que (revoir la Note 6):
- la catégorie des petites sémantiques catégoriques héréditaires pour un petit système héréditaire de trames Σ est encore projectivement esquissable (il suffit d'ajouter à l'esquisse construite précédemment des équations convenables),
- la catégorie des petites sémantiques catégoriques universelles-faibles pour un petit système héréditaire de trames Σ est encore (non projectivement) esquissable,
- la catégorie des petites sémantiques catégoriques modèles-faibles pour un petit système (héréditaire ou non) de trames est tramable,
- la catégorie des petites sémantiques catégoriques modèles-faibles et universelles-faibles pour un petit système de trames Σ est tramable,
etc ... .]

Si $\Sigma \leqslant \Sigma'$ sont deux petits sytèmes de trames, on note $P_{\Sigma' > \Sigma} : \Sigma'\text{-sem} \to \Sigma\text{-sem}$ le foncteur "sémantique pour Σ sous-jacente".

Dans ces conditions, on a:

Proposition 4. Si $\Sigma \leqslant \Sigma'$ *sont deux petits systèmes héréditaires de trames, le foncteur* $P_{\Sigma' > \Sigma} : \Sigma'\text{-sem} \to \Sigma\text{-sem}$ *est projectivement esquissable. Précisément, il existe un homomorphisme entre esquisses projectives petites*

$$k_{\Sigma < \Sigma'} : E_{\Sigma\text{-sem}} \to E_{\Sigma'\text{-sem}}$$

tel que le foncteur

$$P_{\Sigma' > \Sigma} : \Sigma'\text{-sem} \to \Sigma\text{-sem}$$

est "équivalent" au foncteur

$$\mathrm{Mod}(k_{\Sigma < \Sigma'}, \mathrm{Ens}) : \mathrm{Mod}(E_{\Sigma'\text{-sem}}, \mathrm{Ens}) \to \mathrm{Mod}(E_{\Sigma\text{-sem}}, \mathrm{Ens}) \ .$$

Preuve. Reprenant la preuve de la proposition 3 , il est clair que $E_{\Sigma'\text{-sem}}$ contient, par construction, $E_{\Sigma\text{-sem}}$. Il suffit alors de prendre pour $k_{\Sigma < \Sigma'}$ l'homomorphisme injection canonique. *Fin de la preuve.*

Les propriétés générales des foncteurs projectivement esquissables (voir (C.Q.C.E.)) nous permettent, en conséquence, d'énoncer (voir la Note 12):

Corollaire 4. Si $\Sigma \leqslant \Sigma'$ *sont deux petits systèmes héréditaires de trames, le foncteur "sémantique pour* Σ *sous-jacente"* $P_{\Sigma' > \Sigma} : \Sigma'\text{-sem} \to \Sigma\text{-sem}$ *commute aux limites projectives, commute aux limites inductives "suffisamment" filtrantes et possède un adjoint à gauche.*

[Note 12. En particulier, si $\Sigma(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset)$ est le système (évidemment héréditaire et petit) vide de trames, tout autre système de trames Σ est plus fin. Ainsi, si Σ est héréditaire, le foncteur "catégorie sous-jacente"

$$P_\Sigma = P_{\Sigma, \Sigma(\emptyset)} ; \Sigma\text{-sem} \to \Sigma(\emptyset)\text{-sem} = \mathrm{Cat}$$

admet un adjoint à gauche. Par conséquent, toute petite catégorie engendre librement une sémantique catégorique pour Σ .]

Atlas des Diagrammes

T(1)

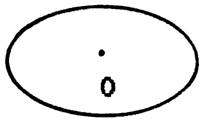


Diagramme 1

T(2)

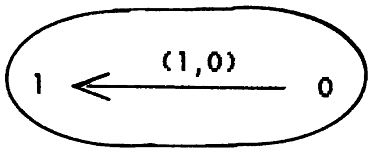


Diagramme 2

T(3)

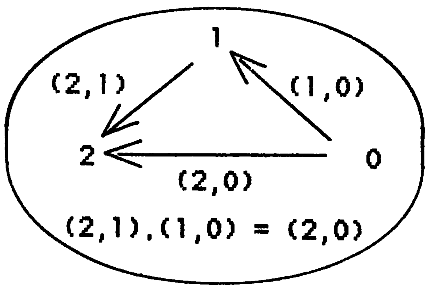


Diagramme 3

T(3)

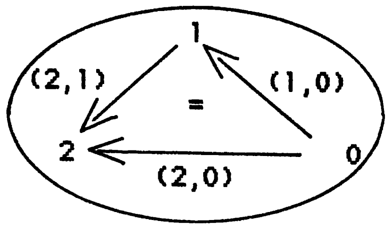


Diagramme 4

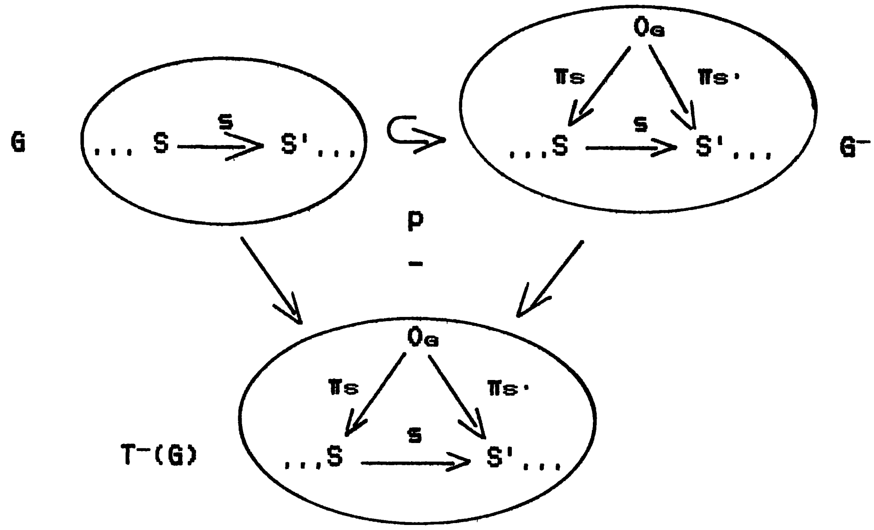


Diagramme 5

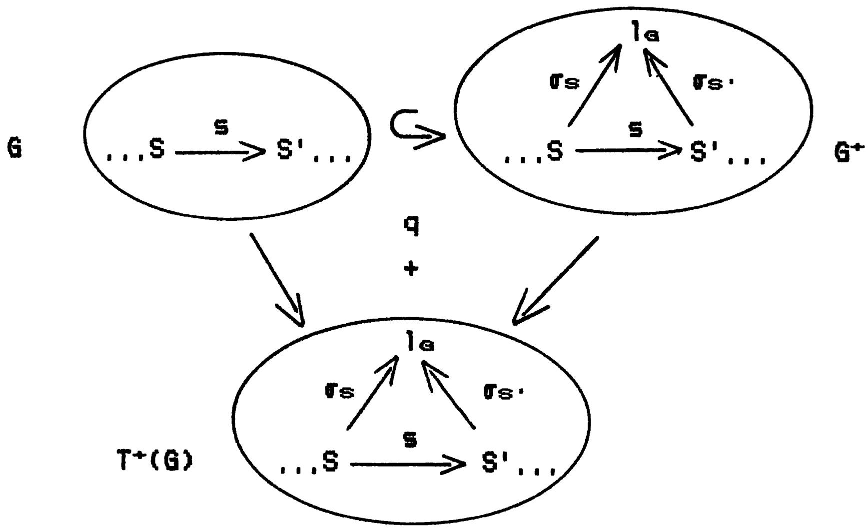


Diagramme 6

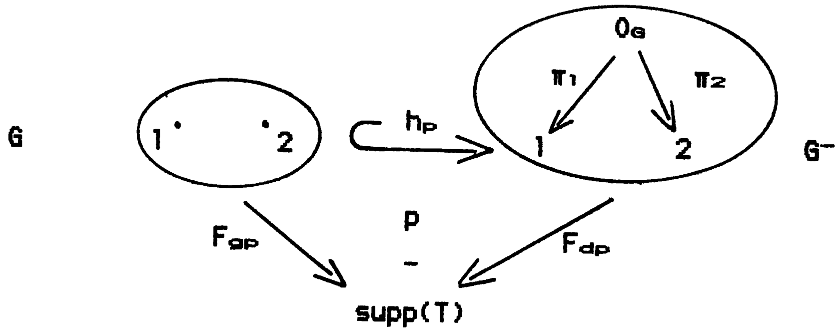


Diagramme 7

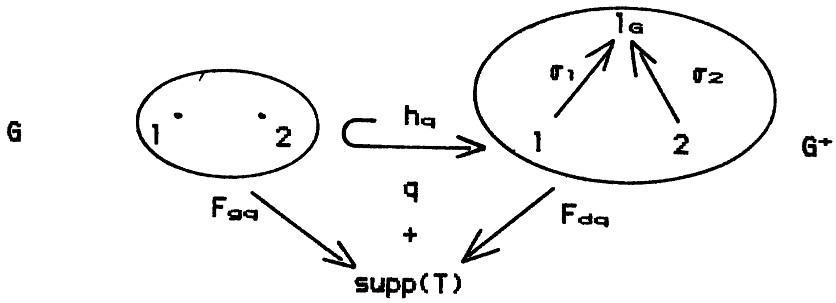


Diagramme 8

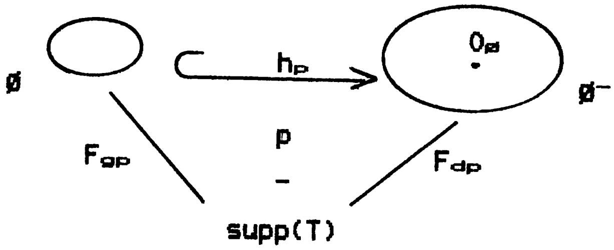


Diagramme 9

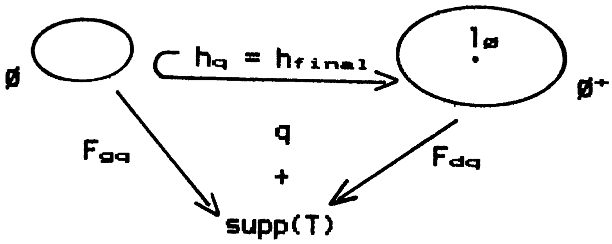


Diagramme 10

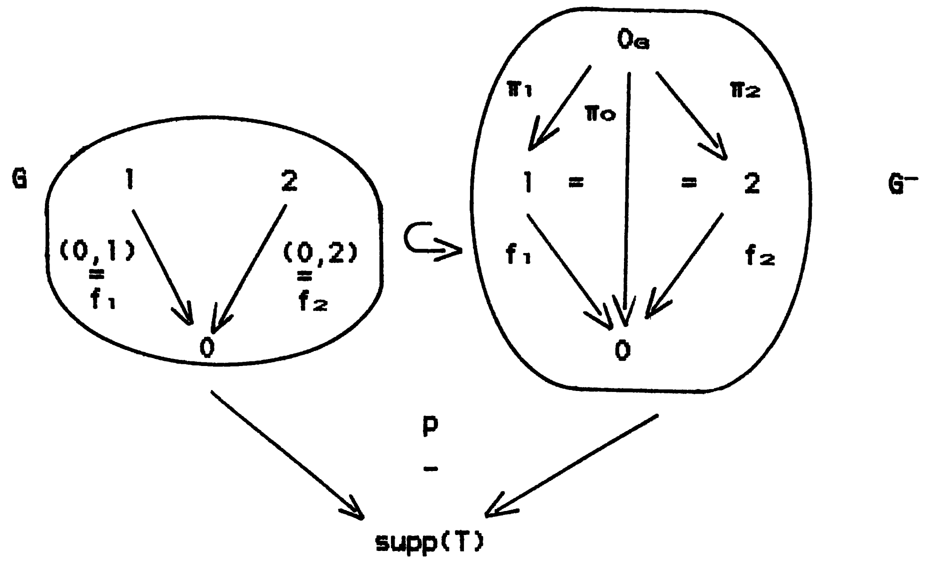


Diagramme 11

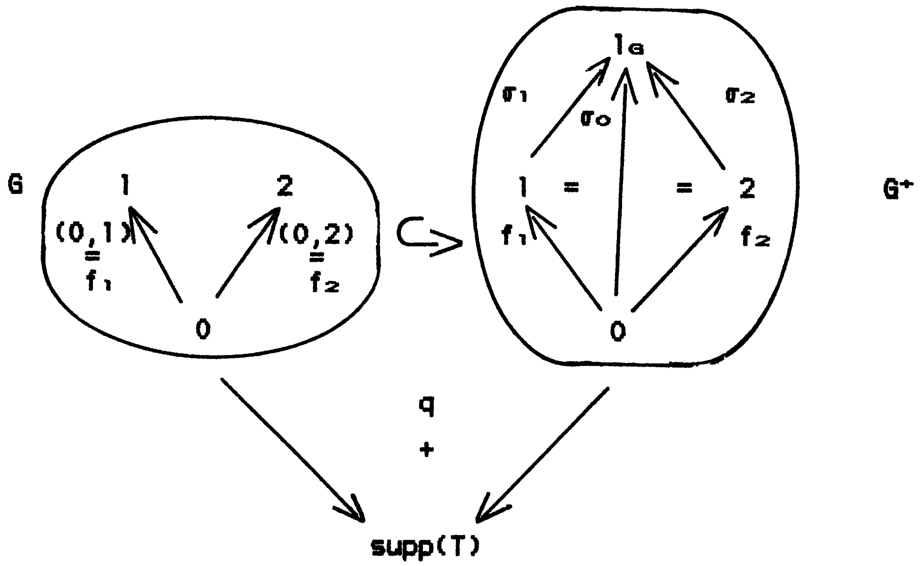
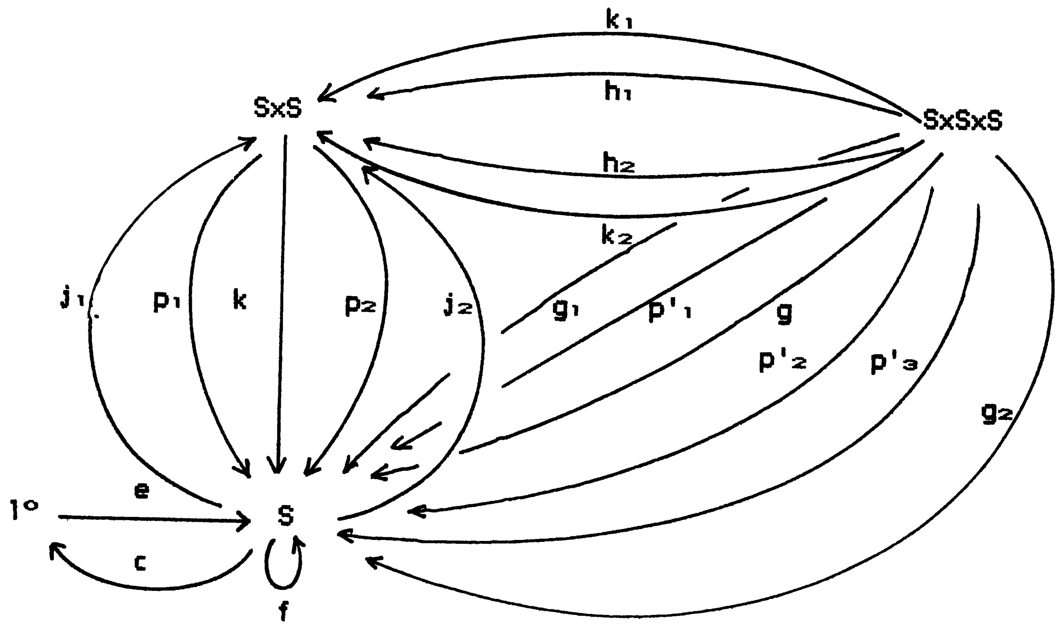


Diagramme 12



$p_1.j_1 = id(S) \qquad p_1.j_2 = e.c = f$

$p_2.j_1 = e.c = f \qquad p_2.j_2 = id(S)$

$k.j_1 = id(S) = k.j_2$

$p_1.h_1 = p'_1 \qquad p_1.h_2 = p'_2$

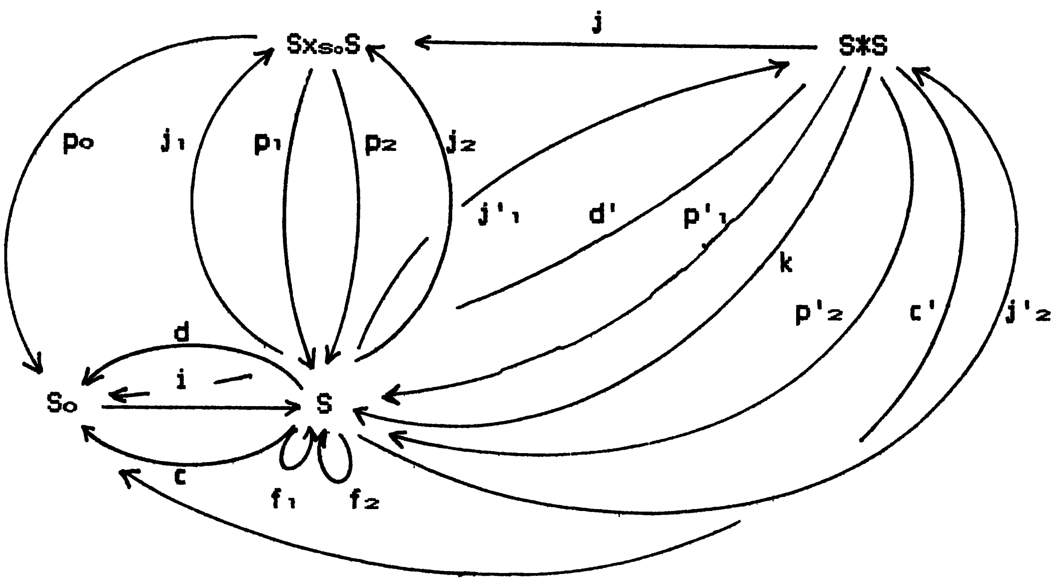
$p_2.h_1 = p'_2 \qquad p_2.h_2 = p'_3$

$p_1.k_1 = k.h_1 = g_1 \qquad p_1.k_2 = p'_1$

$p_2.k_1 = p'_3 \qquad p_2.k_2 = k.h_2 = g_2$

$k.k_1 = k.k_2 = g$

Diagramme 13



$$d.p_1 = p_0 = c.p_2$$

$$p_1.j_1 = id(S) \qquad p_1.j_2 = i.c = f_2$$
$$p_2.j_1 = i.d = f_1 \qquad p_2.j_2 = id(S)$$
$$j.j'_1 = j_1 \qquad j.j'_2 = j_2$$
$$k.j'_1 = id(S) = k.j'_2$$

$$p_1.j = p'_1 \qquad p_2.j = p'_2$$
$$d.k = d.p'_2 = d' \qquad c.k = c.p'_1 = c'$$

Diagramme 14

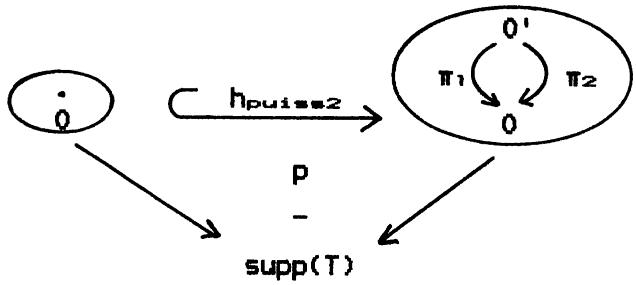


Diagramme 15

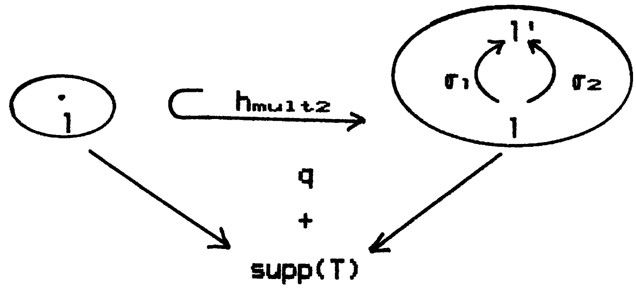


Diagramme 16

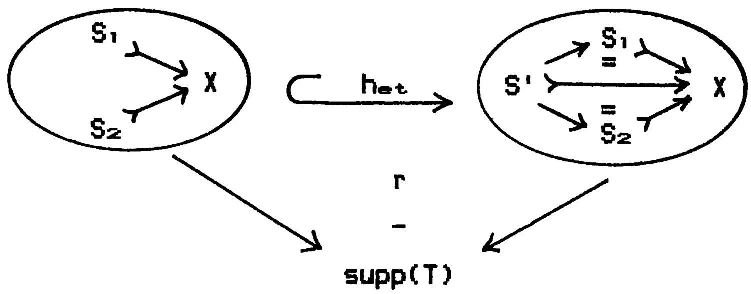


Diagramme 17

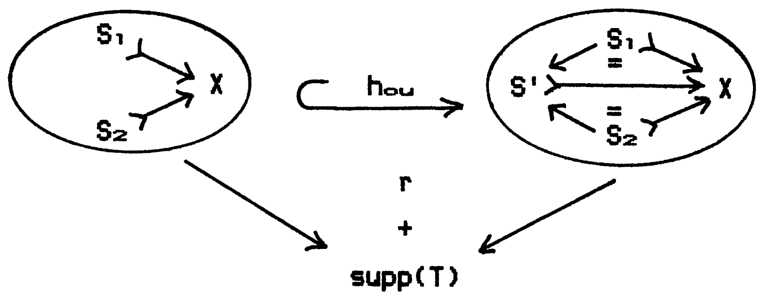


Diagramme 18

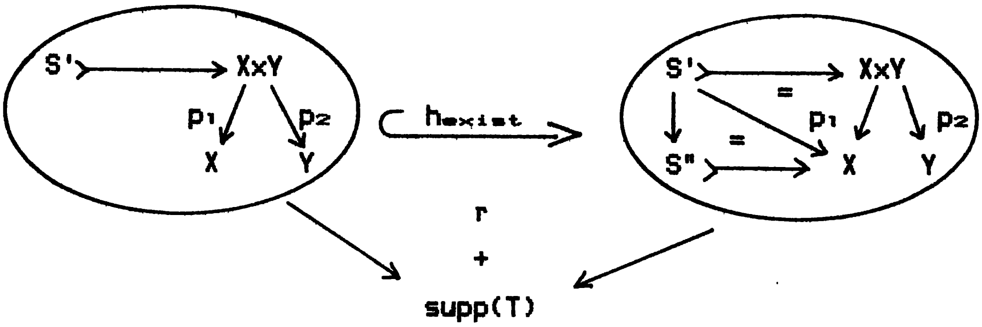


Diagramme 19

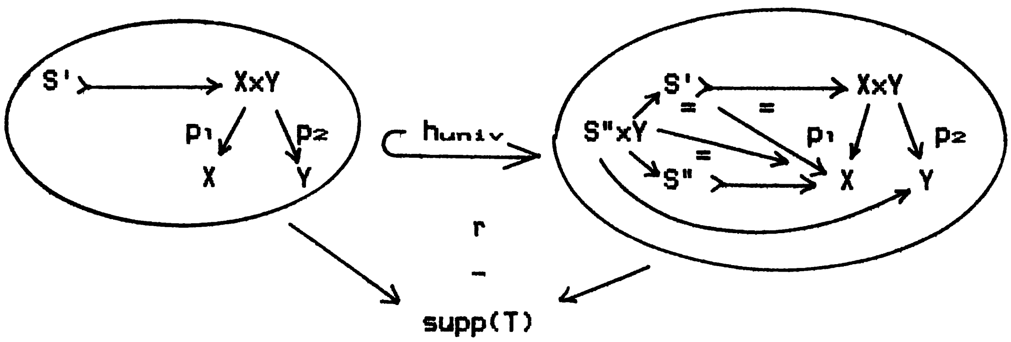


Diagramme 20

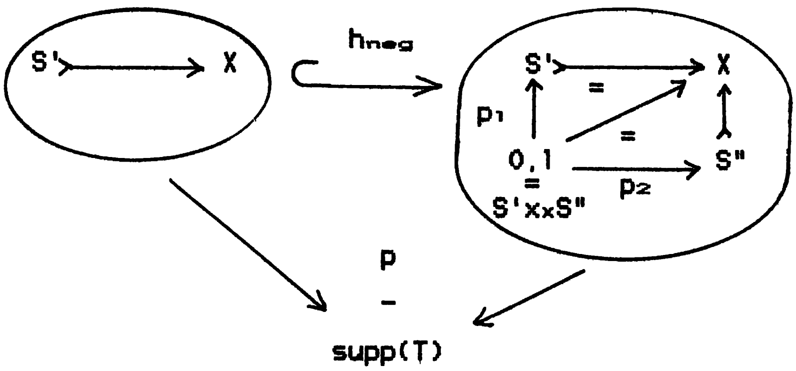


Diagramme 21

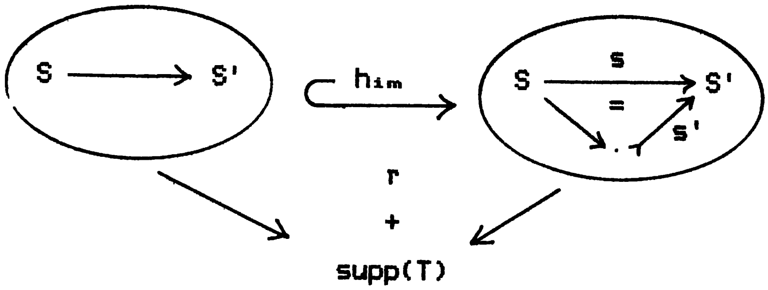


Diagramme 22

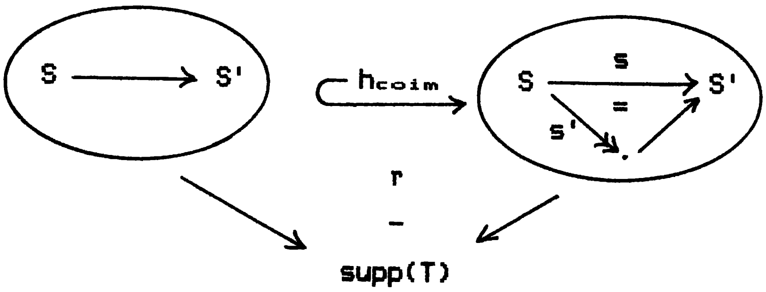


Diagramme 23

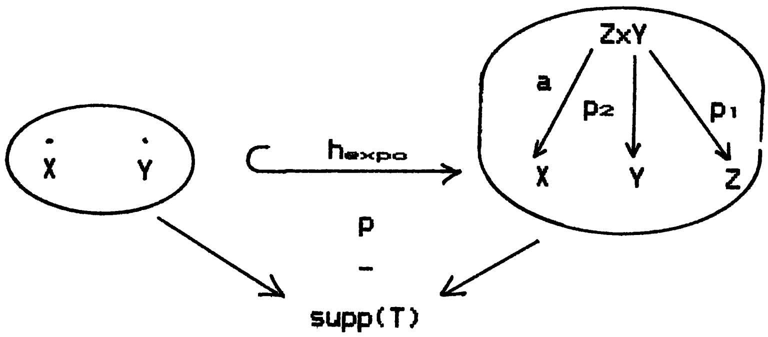


Diagramme 24

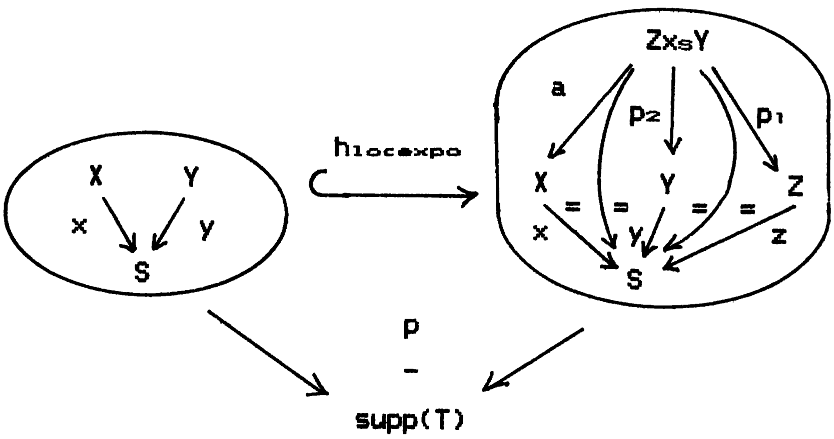


Diagramme 25

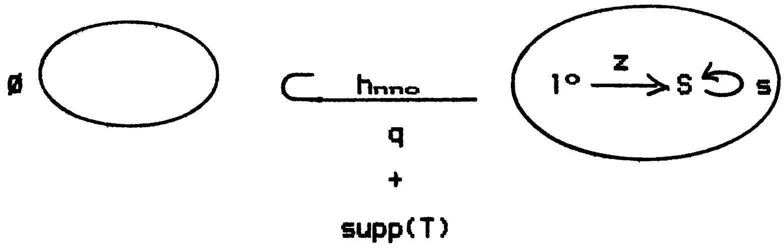


Diagramme 26

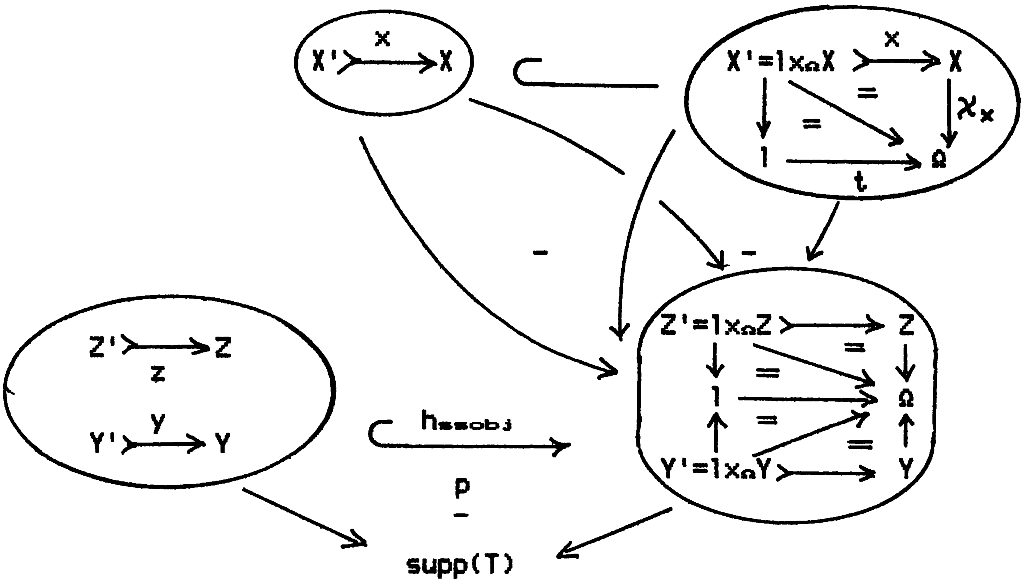


Diagramme 27

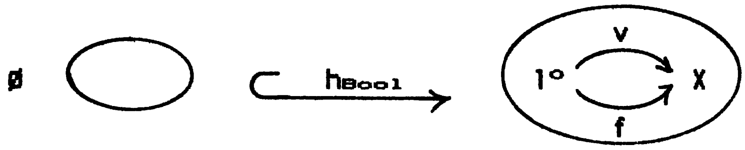


Diagramme 28

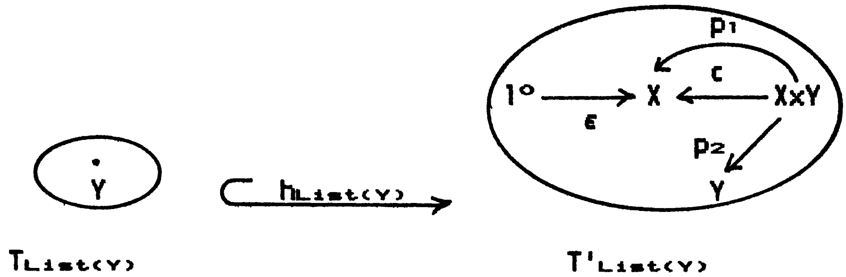
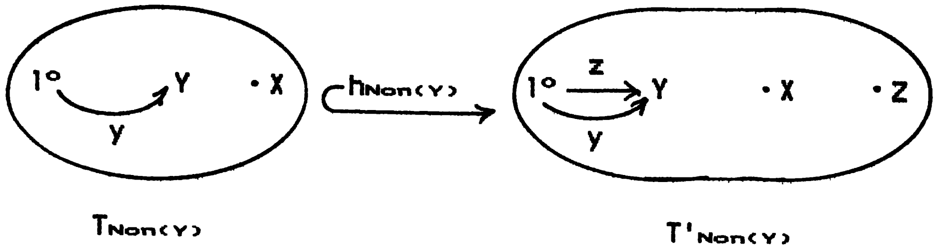
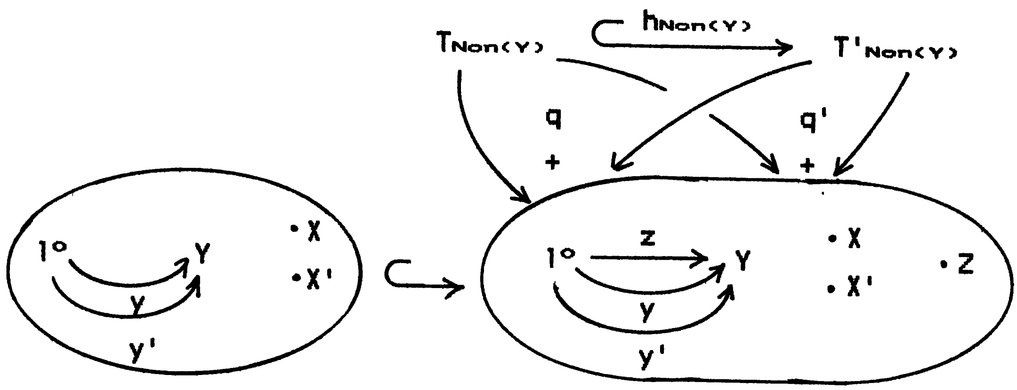


Diagramme 29

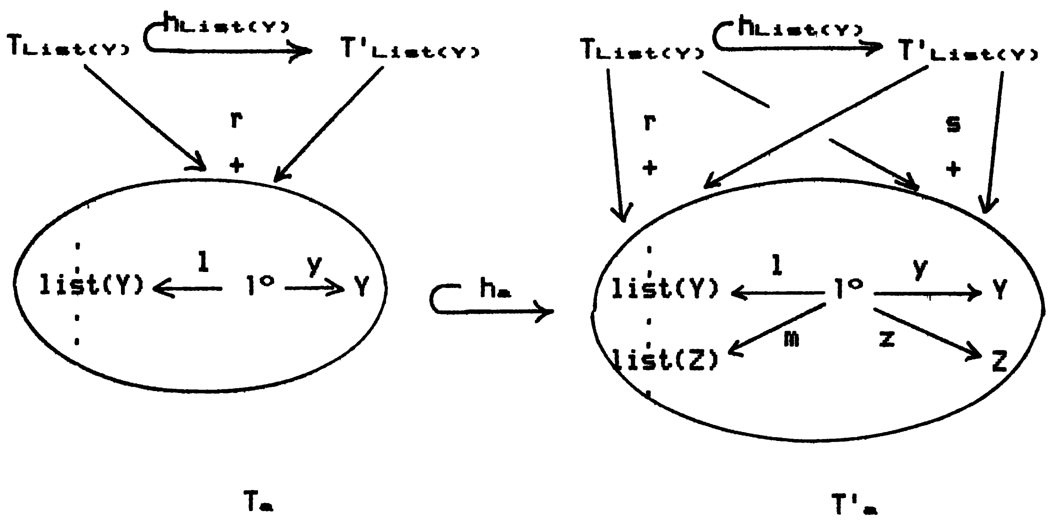




où

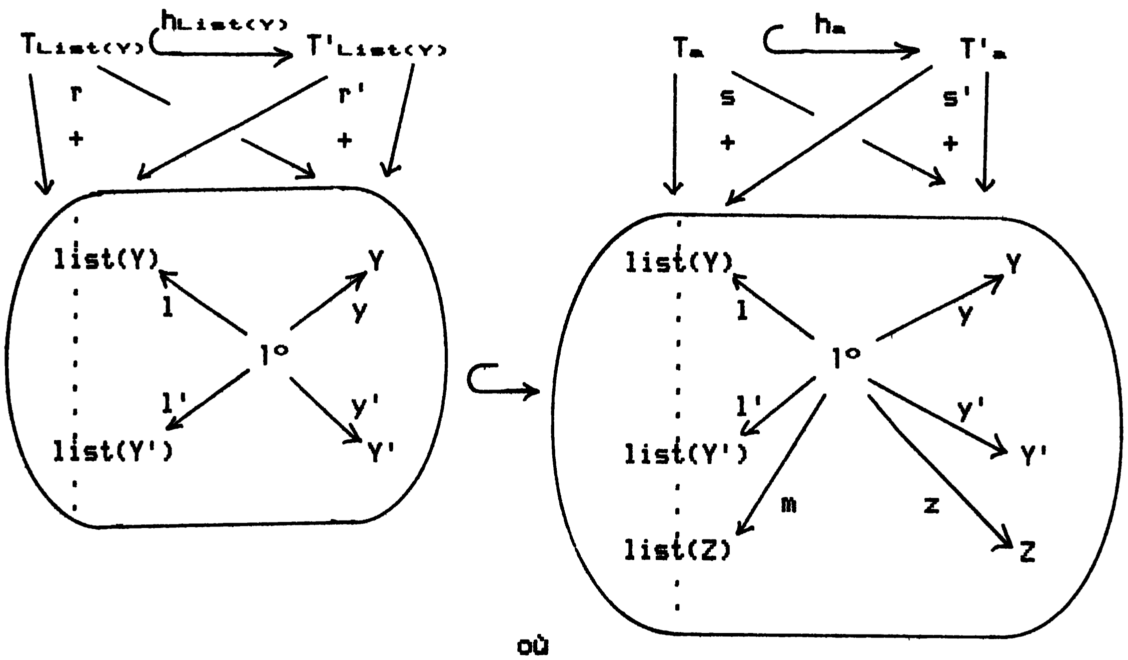
$F_{dq}(y) = y \qquad F_{dq'}(y) = y'$
$F_{dq}(X) = X \qquad F_{dq'}(X) = X'$
$F_{dq}(z) = z = F_{dq'}(z)$
$F_{dq}(Z) = Z = F_{dq'}(Z)$

Diagramme 30



où

$F_{dr}(Y) = Y \quad F_{dr}(X) = list(Y) \quad F_{ds}(Y) = Z \quad F_{ds}(X) = list(Z)$



où

$F_{dr}(X) = list(Y) \quad F_{dr'}(X) = list(Y')$
$F_{ds}(y) = y \quad F_{ds}(1) = 1 \quad F_{ds'}(y) = y' \quad F_{ds'}(1) = 1'$
$F_{ds}(m) = m = F_{ds'}(m) \quad F_{ds}(z) = z = F_{ds'}(z)$

Diagramme 31

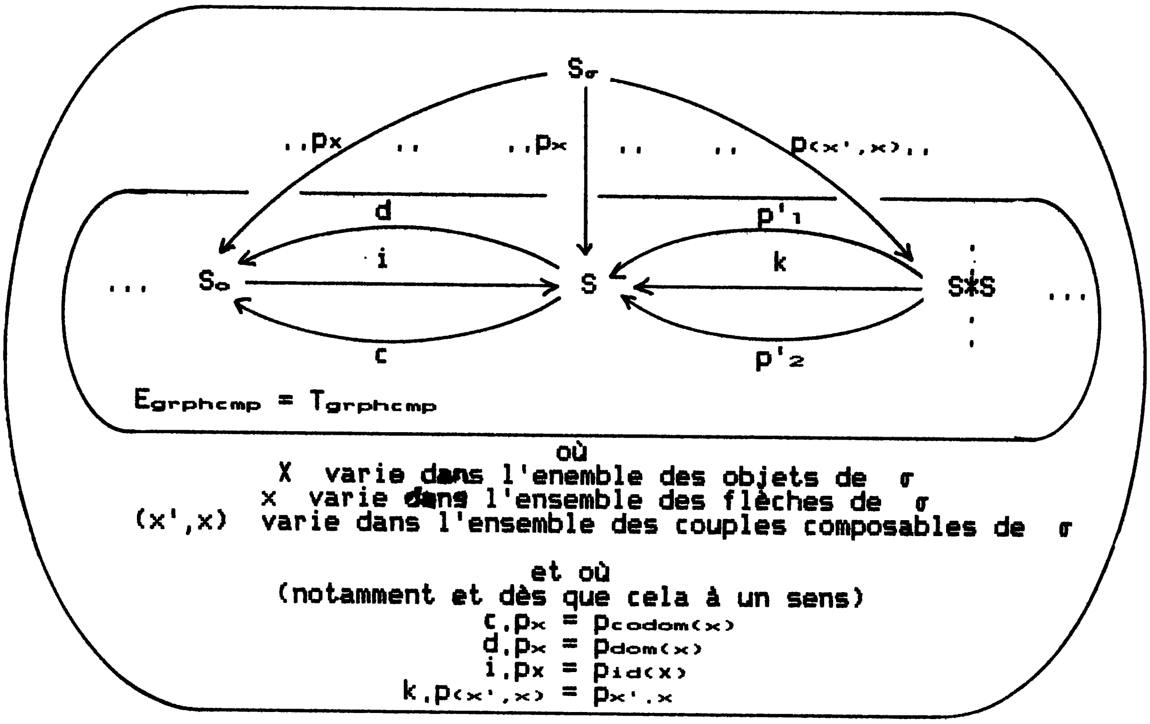


Diagramme 32

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[rr, bend left, "\alpha_h"] \arrow[d, tail, "j_T"'] \arrow[drr, phantom, "="] & & X_{T'} \arrow[ll, "x_h"'] \arrow[d, tail, "j_{T'}"] \arrow[dll, "j_h"'] \\
S_\sigma & & S_{\sigma'} \arrow[ll, "s_T"]
\end{tikzcd}$$

$x_h.\alpha_h = id(X_T)$

Diagramme 33

$$\begin{tikzcd}
X_T \arrow[rr, bend left, "\beta_h"] \arrow[rr, dash, "x_h"'] \arrow[d, tail, "j_T"'] & & X_{T'} \arrow[d, tail, "j_{T'}"] \arrow[dll, "j_h"'] \\
S_\sigma & & S_{\sigma'} \arrow[ll, "s_T"]
\end{tikzcd}$$

$x_h.\beta_h = id(X_T)$

Diagramme 34

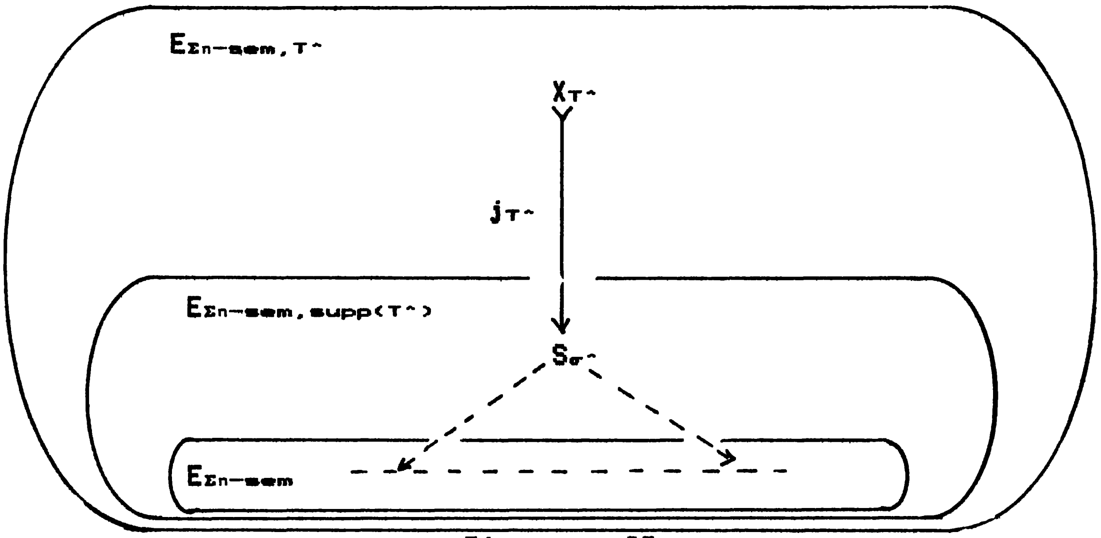


Diagramme 35

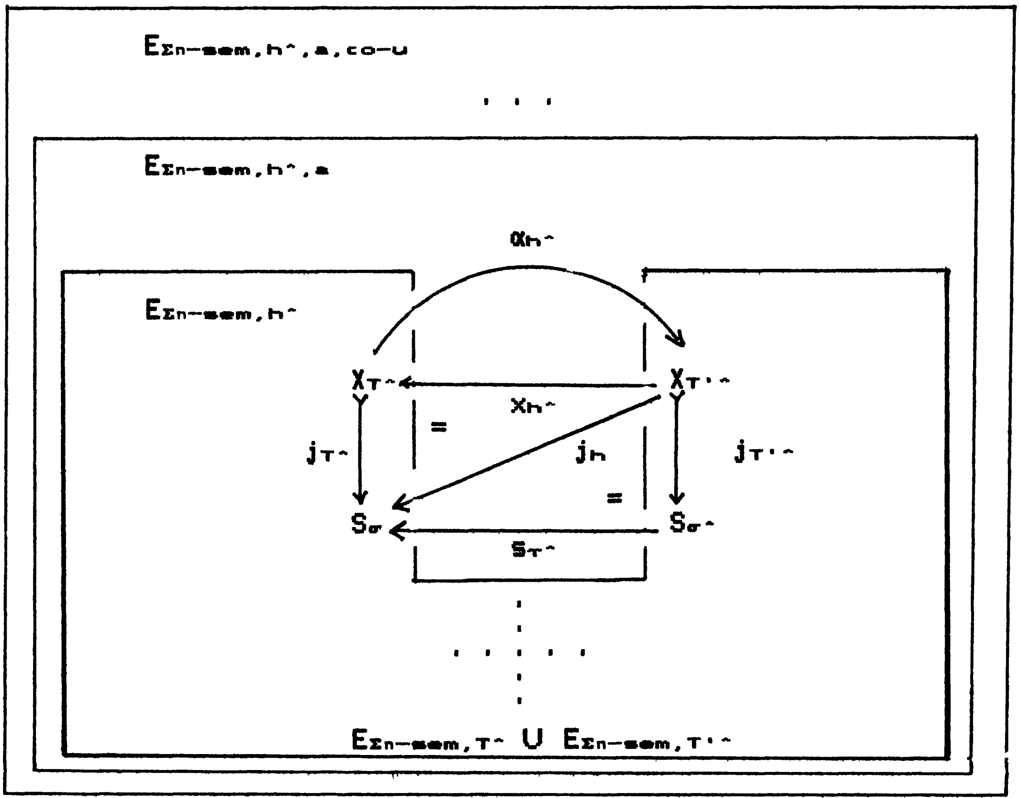


Diagramme 36

Bibliographie

(A.C.C.A.) M. Makkai et R. Paré:

Accessible categories: the foundations of categorical model theory, Rep. from the Dept. of Math. and Stat., McGill Univ., Montréal, 1987.

(A.I.T.T.) P. Martin-Löf:

An intuitionistic theory of types: predicative part, Rose and Shepherdson, 1974.

(A.M.E.N.) L. Coppey et C. Lair:

Algébricité, monadicité et non-algébricité, Diagrammes 13, Paris, 1985.

(C.P.C.A.) L. Coppey:

Catégories de Peano et Catégories algorithmiques, récursivité, Diagrammes 12, Paris, 1984.

(C.Q.C.E.) C. Lair:

Catégories qualifiables et catégories esquissables, Diagrammes 17, Paris, 1987.

(E.G.C.E.) C. Lair:

Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Math. 23, Amiens, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann:

Esquisses et types des structures algébriques, Bull. Instit. Polit. Iasi, XIV, 1968.

(H.O.C.L.) J. Lambek et P. J. Scott:

Introduction to higher order categorical logic, Cambridge Univ. Press, 1986.

BIBLIOGRAPHIE

(I.F.E.C.) J.-Y. Girard:

Interprétation fonctionnelle et élimination des coupures de l'arithmétique d'ordre supérieur, Thèse de Doctorat d'Etat, Univ. Paris VII, 1972.

(L.C.R.F.) R. Guitart et C. Lair:

Limites et co-limites pour représenter les formules, Diagrammes 7, Paris, 1982.

(L.D.T.E.) L. Coppey et C. Lair:

Leçons de théorie des esquisses (I), Diagrammes 12, Paris, 1984.

(L.P.L.G.) F. Ulmer:

Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, Springer, 1971.

(P.T.G.M.) L. Coppey:

Sur quelques problèmes typiques concernant les graphes multiplicatifs, Diagrammes 3, Paris, 1980.

(S.C.D.T.) P. Ageron:

Sémantique catégorique des types: comprendre le système F , (à paraître).

(T.F.A.E.) C. Lair:

Condition syntaxique de triplabilité des foncteurs algébriques esquissés, Diagrammes 1, Paris, 1979.

Table des Matières

UNIVERSITE PARIS 7

U.F.R. DE MATHEMATIQUES

TOURS 45-55-5ème ETAGE

2 PLACE JUSSIEU

75251 PARIS CEDEX 05

FRANCE