

# DIAGRAMMES

WEISHU SHIH

## **Un invariant algébrique associé à une application continue**

*Diagrammes*, tome 15 (1986), exp. n° 5, p. S1-S15

[http://www.numdam.org/item?id=DIA\\_1986\\_\\_15\\_\\_A5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=DIA_1986__15__A5_0)

© Université Paris 7, UER math., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UN INVARIANT ALGEBRIQUE ASSOCIE A UNE APPLICATION CONTINUE

Weishu SHIH  
(C. N. R. S.)

*"L'égalité de consommation pour tous les êtres humains"*

Le but de ce travail est de détailler une partie des résultats annoncés dans [5], [6] et [8], et qui consistent à attacher à chaque application continue d'un espace topologique dans un autre une suite de groupes abéliens que l'on appelle groupes d'homologie sectionnelle de cette application. Ils possèdent la plupart des propriétés des théories d'homologie, mais ce ne sont pas des invariants d'homotopie et ils dépendront de la différentiabilité dans le cas des variétés différentielles.

Ces dernières propriétés nous permettront, dans un travail ultérieur de développer pour les équations aux dérivées partielles, une théorie analogue à la théorie des obstructions en topologie algébrique, et une méthode pour réduire le nombre des variables indépendantes dans un système d'équations aux dérivées partielles non linéaires.

Nous étendrons ici la notion de degré d'une application continue  $f$  entre variétés au cas où les variétés sont de dimensions différentes. Dans le cas où  $f$  est l'application de projection d'un espace fibré, ce degré est déterminé par les différentielles de la suite spectrale du fibré, d'où le lien avec les classes caractéristiques du fibré.

Soit  $f : Y \rightarrow X$  une application continue d'un espace topologique  $Y$  dans un autre  $X$ . Notons  $\Delta_q$  le  $q$ -ième simplexe type de  $\mathbb{R}^{q+1}$  défini par :

$$\Delta_q = \{ (x_0, x_1, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1}, x_i \geq 0, \sum x_i = 1 \}$$

et considérons les couples  $(\sigma, \gamma)$  d'applications continues:

$$\sigma : \Delta_q \rightarrow X \quad , \quad \gamma : \Delta_q \rightarrow Y$$

telles que  $\sigma$  soit injective et  $f \circ \gamma = \sigma$ . Désignons par  $C_q(f)$  le groupe quotient du groupe abélien libre engendré par ces couples  $(\sigma, \gamma)$  par la relation d'équivalence de subdivision barycentrique. Les  $(q+1)$  faces  $\delta_i$  de  $\Delta_q$  nous permettent d'introduire un homomorphisme

$$d_q = \sum_{i=0}^q (-1)^i \delta_i : C_q(f) \rightarrow C_{q-1}(f) ,$$

et comme dans la théorie d'homologie singulière on a  $d_{q-1} \circ d_q = 0$ . Alors on définit le  $q$ -ième groupe d'homologie sectionnelle de  $f$  par :

$$H_q(f)_* = \{ \text{noyau de } d_q \} / \{ \text{image de } d_{q+1} \}$$

Les projections  $p_1 : (\sigma, \gamma) \rightarrow \sigma$  et  $p_2 : (\sigma, \gamma) \rightarrow \gamma$  induisent des homomorphismes du groupe sectionnel  $H_q(f)_*$  dans l'homologie ordinaire:

$$\begin{array}{ccc} & H_q(f)_* & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ H_q(X, Z) & \xrightarrow{f_*} & H_q(Y, Z) \end{array}$$

A chaque diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc} Y_0 & \xrightarrow{j} & Y \\ f_0 \downarrow & & \downarrow f \\ X_0 & \xrightarrow{j_0} & X \end{array}$$

où  $j_0$  est injectif, la somme tordue [9] de l'homomorphisme des groupes différentiels gradués  $j_* : C_*(f_0) \rightarrow C_*(f)$  nous permet

de définir le groupe d'homologie sectionnelle relative  $H_*(f, f_0)_*$  et la suite exacte d'homologie sectionnelle associée à  $(j_0, j)$ :

$$\dots \rightarrow H_*(f_0)_* \rightarrow H_*(f)_* \rightarrow H_*(f, f_0)_* \rightarrow \dots$$

En particulier, si  $U$  est un ouvert de  $X$ , les inclusions  $X-U \rightarrow X$  et  $Y-f^{-1}(U) \rightarrow Y$

$$\begin{array}{ccc} Y-f^{-1}(U) & \longrightarrow & Y \\ f_U \downarrow & & \downarrow f \\ X-U & \longrightarrow & X \end{array}$$

définissent le groupe  $H_*(f, f_U)_*$ .

L'homomorphisme  $H_*(f, f_U)_* \rightarrow H_*(f, f_V)_*$  induit par l'inclusion d'un ouvert  $V$  dans  $U$ , définit sur  $X$  un préfaisceau; on note  $H$  le faisceau associé que l'on appelle faisceau sectionnel de  $f$ . La projection canonique  $p_0 : H_*(f, f_U)_* \rightarrow H_*(X, X-U)$  induit un morphisme du faisceau  $H$  dans le faisceau d'orientation  $H_0$  de  $X$ , soit  $p : H \rightarrow H_0$ , d'où la suite exacte des groupes de cohomologie associée :

$$\dots \rightarrow H^n(X, H) \rightarrow H^n(X, H_0) \rightarrow H^{n+1}(X, p) \rightarrow \dots$$

Supposons maintenant que  $f$  soit une application indéfiniment dérivable entre deux variétés  $Y$  et  $X$  de classe  $C^\infty$ . Fixons un entier positif  $k$ ; nous allons définir les simplexes  $(\sigma, \gamma)$   $k$ -fois dérivables de  $f$ . Pour cela, désignons par  $\epsilon \Delta_q$ ,  $\epsilon > 0$ , l'image de  $\Delta_q$  par l'homothétie de rapport  $1+\epsilon$  et dont le centre est le barycentre de  $\Delta_q$ . Soit :

$F_{i_1, \dots, i_1} = \delta_{i_1} \dots \delta_{i_1} \Delta_q$  la  $i_1 \dots i_1$ -ième face de  $\Delta_q$ , et  $\epsilon F_{i_1, \dots, i_1}$  l'intersection de  $\epsilon \Delta_q$  avec l'hyperplan affine de dimension  $q-1$  qui contient  $F_{i_1, \dots, i_1}$ , et  $\text{int}_\epsilon F_{i_1, \dots, i_1}$  son intérieur.

Alors  $(\sigma, \gamma)$  est dit  $k$ -fois dérivable s'il vérifie :

(1) il existe  $\epsilon > 0$  tel que  $\sigma : \Delta_q \rightarrow X$  et  $\gamma : \Delta_q \rightarrow Y$  se prolongent à  $\epsilon \Delta_q$  en des applications de classe  $C^\infty$  avec  $\sigma_\epsilon$  injectif;

(2) pour tout  $i_1 \dots i_1$ -ième face ( $0 < l \leq q$ )  $F_{i_1, \dots, i_1}$  de  $\Delta_q$ , l'application  $\gamma'$  induite par  $\gamma$  sur l'image  $\sigma(\text{int}_\epsilon F_{i_1, \dots, i_1})$  admet la propriété que son jet d'ordre  $k$

$j^k \gamma' : \sigma(\text{int}F_{i_1, \dots, i_1}) \rightarrow J^k(\sigma(\text{int}F_{i_1, \dots, i_1}); Y)$   
 s'étend en une application continue  $\gamma$  sur la fermeture de  
 $\sigma(\text{int}F_{i_1, \dots, i_1})$  dans  $J^k(\sigma(\text{int}F_{i_1, \dots, i_1}); Y)$ .

Il est clair que les simplexes  $k$ -fois dérivables de  $f$  engendrent un groupe différentiel gradué dont l'homologie  $H_q(f)_{\bullet, k}$  est par définition le *groupe d'homologie sectionnelle  $k$ -fois dérivable* de  $f$ , et on a la suite exacte :

$$\dots \rightarrow H_*(f)_{\bullet, k} \rightarrow H_*(f)_{\bullet, k'} \rightarrow H_*(f)_{k, k'} \rightarrow \dots, \quad k' < k.$$

Rappelons qu'un sous-faisceau  $I$  [3] du faisceau des formes différentielles  $\Omega^*(Y)$  de  $Y$  est appelé idéal différentiel si  $\Omega^*(Y) \wedge I$  et  $dI$  sont inclus dans  $I$ .

On dira qu'un simplexe  $(\sigma, \gamma)$  est intégrable [10] par rapport à l'idéal  $I$  si pour toute forme  $\omega \in I$ , on a  $\gamma^* \omega = 0$ .

Alors le groupe obtenu par les simplexes intégrables est appelé *groupe d'homologie sectionnelle de  $f$  attaché à l'idéal  $I$* ; on le note  $H_*(f)_{\bullet, I}$ .

Enfin, nous définissons le groupe d'homologie réduite de la façon suivante. C'est le groupe d'homologie du quotient de  $C_*(f)$  par la relation d'équivalence suivante: deux chaînes  $c''$  et  $c'$  sont équivalentes s'il existe une chaîne sectionnelle  $c$  de l'application  $f \times \text{Id} : Y \times [0, 1] \rightarrow X \times [0, 1]$  telle que  $dc'' = j_0 c - j_1 c'$ , où  $j_i$ ,  $i = 0, 1$ , est l'inclusion canonique.

$$\begin{array}{ccc} & j_1 & \\ & \longrightarrow & \\ Y & \longrightarrow & Y \times [0, 1] \\ \downarrow f & & \downarrow f \times \text{Id} \\ & j_0 & \\ X & \longrightarrow & X \times [0, 1] \end{array}$$

On notera par  $H_*(f)_r$  le groupe d'homologie sectionnelle réduit de  $f$  et  $q : H_*(f)_{\bullet} \rightarrow H_*(f)_r$  la projection canonique. Dans le cas où  $f$  est l'application identique d'un C.W.complexe  $X$  fini, de dimension  $n$ , on a évidemment :

$$H_i(f)_{\bullet} = H_i(f)_r = H_i(X, Z), \quad 0 \leq i < n$$

$$H_n(f)_r = H_n(X, Z).$$

Ainsi,  $H_*(f)_*$  consiste en une généralisation de l'homologie singulière. Cependant, nous pouvons remarquer (cf. exemple 1) que le groupe  $H_*(f)_*$  n'est pas un invariant homotopique de  $f$ , et dans le cas où  $f$  est une application indéfiniment dérivable entre deux variétés de classe  $C^\infty$  les groupes d'homologie sectionnelle  $k$ -fois dérivables peuvent être différents pour tous les  $k$ . Pour une équivalence d'homotopie  $j$  au-dessus de  $X$ :

$$\begin{array}{ccc} & & j \\ & & \longrightarrow \\ Y & \longrightarrow & Y' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ X & \text{=====} & X \end{array}$$

on a  $H_*(f)_r = H_*(f')_r$ , mais  $H_*(f)_*$  et  $H_*(f')_*$  peuvent être différents.

D'autre part, quand  $X$  est une variété de classe  $C^\infty$  de dimension  $n$ , et  $Y$  une variété de classe  $C^\infty$  de dimension  $m$ ,  $f: Y \rightarrow X$  de classe  $C^\infty$ , il est clair que  $H_n(f)_*$  s'identifie à un sous-groupe de l'espace de  $m$ -courant de la variété  $X \times Y$ . Ceci nous permet de remplacer les distributions par  $H_n(f)_*$  pour une équation aux dérivées partielles non-linéaire.

Le groupe  $H_*(f)_*$  est difficile à déterminer, mais il permet d'introduire la notion de degré d'une application pour les variétés de dimensions différentes qui généralise la notion classique de degré. Pour cela, on suppose que  $X$  est une variété topologique orientée de dimension  $n$ . Plus généralement,  $X$  peut être un espace topologique dont le  $n$ -ième faisceau d'orientation est trivial (isomorphe au faisceau constant sur  $Z$ ),  $Y$  un espace topologique et  $f$  une application continue propre  $f: Y \rightarrow X$ . Alors le degré de  $f$  est défini de la manière suivante: c'est le nombre des éléments du groupe quotient  $H_n(X, Z) / \text{Im } p_* \sim Z / \text{Im } p_*$  diminué d'une unité, où  $p: H_n(f)_* \rightarrow H_n(X, Z)$  est la projection canonique:

$$\text{deg } f = \#(\text{conoyau } p_* : H_n(f)_* \rightarrow H_n(X, Z)) - 1$$

$\text{deg } f$  peut être infini;  $\text{deg } f \in \mathbb{Z}_+ \cup \{+\infty\}$ .

Dans le cas où  $X$ ,  $Y$  et  $f$  sont de classe  $C^\infty$ , on peut utiliser le groupe d'homologie sectionnelle  $k$ -fois dérivable de

$f : \text{deg}^k f$ . De même, si  $Y$  est muni d'un idéal différentiel  $I$ , on peut introduire le degré de  $f$  attaché à cet idéal,  $\text{deg}^I f$ , en utilisant le groupe  $H_n(f)_{\bullet, r}$ . On a évidemment les inégalités suivantes:

$$\text{deg} f \leq \text{deg}^I f \leq \dots \leq \text{deg}^J f .$$

L'exemple montre qu'il y a des applications différentielles  $f$  pour lesquelles tous ces degrés sont différents.

Dans le cas où  $Y$  est une variété orientée connexe de même dimension  $n$  que  $X$ , alors le degré classique  $\text{deg}_c f$  de  $f$  est défini. Le diagramme commutatif

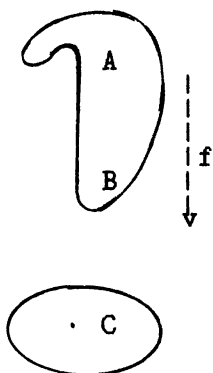
$$\begin{array}{ccc} H_n(f)_{\bullet} & \xrightarrow{\quad} & H_n(Y, Z) \\ & \searrow p & \swarrow f_n \\ & & H_n(X, Z) \end{array}$$

montre que l'on a :

$$\text{deg}_c f \leq \text{deg} f + 1 .$$

Mais l'exemple suivant montre que les degrés peuvent être différents, donc la nullité de notre degré est une condition plus forte que la nullité du degré classique.

**Exemple 1** . Soit  $f$  la projection d'un cercle cur un autre telle que  $f$  projette le segment  $AB$  sur le seul point  $C$ . Alors le degré classique est  $1$ , mais notre degré est infini.



Cet exemple montre en même temps que notre degré n'est pas un invariant homotopique de  $f$  ; donc le groupe d'homologie sectionnelle n'est pas non plus un invariant homotopique de  $f$  .

Revenons au cas où  $X$  est un espace topologique arbitraire, alors le faisceau sectionnel  $H$  nous permet de définir le degré local de  $f$  au point  $x_0 \in X$  de la manière suivante:

$$\text{deg}_{x_0} f = \#(\text{conoyau } p_{x_0}) - 1$$

où  $p_{x_0}$  désigne le morphisme de faisceaux  $p : H \rightarrow H_0$  au point  $x_0$

Le degré local de  $f$  est une fonction semi-continue inférieurement sur  $X$  . La nullité du degré local sur  $X$  signifie l'exactitude de la suite de faisceaux:

$$0 \rightarrow N \rightarrow H \xrightarrow{p} H_0 \rightarrow 0$$

où  $N$  est le noyau de  $p$  , et l'on a  $H^*(X, p) \sim H^*(X, )$   
D'autre part on a évidemment :

$$\sup_{x \in X} \text{deg}_x f \leq \text{deg } f$$

mais l'égalité n'est pas toujours satisfaite (cf. exemple 3). Enfin, pour  $y \in Y$  et  $W_y$  un voisinage de  $y$  , on note  $f|W_y$  la restriction de  $f$  à  $W_y$  , et on définit alors le degré local fort de  $f$  au point  $x_0$  par :

$$\text{deg}_{x_0}^{\text{fort}} f = \sup_{y \in f^{-1}(x_0)} \left\{ \inf_{W_y} (\text{deg}_{x_0} (f|W_y)) \right\} .$$

Supposons maintenant que  $X$  soit une variété orientée et soit  $[X]$  sa classe fondamentale. Si le degré local de  $f$  s'annule sur  $X$  , alors l'image  $\delta[X] \in H^1(X, N)$  par l'homomorphisme  $\delta$  de la suite exacte de cohomologie :

$$H^0(X, N) \rightarrow H^0(X, H) \rightarrow H^0(X, H_0) \xrightarrow{\delta} H^1(X, N) \dots$$

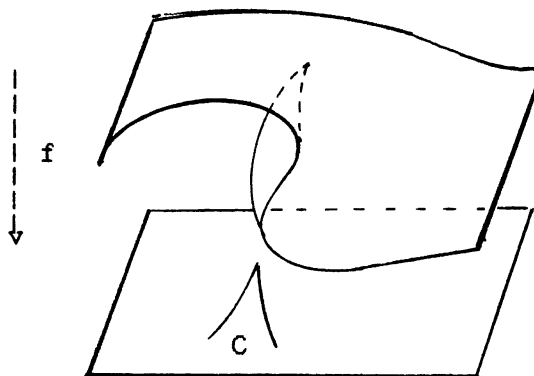
est une obstruction pour que le degré de  $f$  soit égal à zéro.

Remarquons qu'on peut définir les degrés de  $f$  en se servant de l'homologie sectionnelle réduite  $H_*(f)_r$  au lieu de  $H_*(f)_s$  , d'où il résulte que le groupe  $H_*(f)_r$  n'est pas non plus un invariant homotopique de  $f$  . D'autre part , la nullité



du degré (resp. du degré local) de  $f$  signifie qu'il existe une condition nécessaire pour l'existence d'une section (resp. section locale) de  $f$  : i.e. d'une application (resp. application locale)  $g : X \rightarrow Y$  telle que  $f \circ g = 1_X$ . En effet, ceci entraîne que le cycle sectionnel  $\theta = \sum_1 (\sigma_1, g \cdot \sigma_1)$ , où  $[\sum_1 \sigma_1] = [X]$ , vérifie

$p_*[\theta] = [X]$ , donc  $\deg f = 0$ . Mais l'inverse n'est pas vrai. La projection  $f$  de la surface pliée sur  $\mathbb{R}^2$  ne possède pas de section, pourtant son degré est nul, d'où son degré local aussi. Cependant le degré local fort de  $f$  n'est nul qu'en dehors de la caustique  $C$ . D'autre part, le degré local au point d'un éclatement est  $\infty$  donc le degré aussi.



Considérons deux variétés de classe  $C^\infty$  et la restriction  $f$  de l'application source  $\alpha$  à un sous-espace stratifié  $Y$  de la variété des  $k$ -jets de  $X$  dans  $Z$  :  $\alpha : J^k(X, Z) \rightarrow X$ . D'après Ehresmann [4],  $Y$  peut être considéré comme un système d'équations aux dérivées partielles d'ordre  $k$  sur  $X$ , et il introduit l'idéal  $I$  de Cartan sur  $J^k(X, Z)$ , ce qui globalise ainsi le système différentiel canonique de Cartan [1]. Ceci nous permet de considérer le degré de  $f$  attaché à  $I$  :  $\deg^I f$ .

**Théorème 1.** *Pour que le système d'équations aux dérivées partielles  $Y$  (contenu dans  $J^k(X, Z)$ ) possède une solution  $g : X \rightarrow Z$  de classe  $C^\infty$  il faut que  $\deg^I f = 0$ .*

En effet, soit  $j^k g$  le  $k$ -jet de  $g$  et  $\sum \sigma_1$  une subdivision  $C^\infty$  de  $X$  qui représente la classe d'orientation de  $X$ , alors la considération du cycle sectionnel  $\sum (\sigma_1, j^k g \sigma_1)$  montre bien que  $\deg^I f = 0$

Comme on a :

$$\deg f \leq \deg^1 f \leq \dots \leq \deg^m f \leq \deg^r f ,$$

on a une suite d'invariants numériques qui sont des obstructions pour l'existence d'une solution ,  $\deg^m f$  correspondant à la régularité, et nous reviendrons sur ce sujet dans un travail ultérieur. L'exemple suivant donné par C.C.Chou [2] montre que le degré peut être un entier positif arbitraire  $n \in \mathbb{Z}$  .

**Exemple 2.** Désignons par  $(x_1, x_2, u_1, u_2, p_1, p_2, q_1, q_2)$  les coordonnées de  $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  , où  $p_i$  (resp.  $q_i$ ) correspond à  $\partial u_i / \partial x_1$  (resp.  $\partial u_i / \partial x_2$ )

Soit  $Y_n$  (contenu dans  $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ ) défini par :

pour  $n = 2m+1$

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i C_i^n u_1^{n-2i} u_2^{2i} = x_1$$

$$\sum_{i=0}^m (-1)^{2i+1} C_{2i+1}^n u_1^{n-2i-1} u_2^{2i+1} = x_2$$

$$p_1 + q_2 = 0 \quad , \quad p_2 - q_1 = 0$$

et pour  $n = 2m$

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i C_{2i}^n u_1^{n-2i} u_2^{2i} = x_1$$

$$\sum_{i=0}^m (-1)^i C_{2i+1}^n u_1^{n-2i-1} u_2^{2i+1} = x_2$$

$$p_1 + q_2 = 0 \quad , \quad p_2 - q_1 = 0$$

où  $C_i^n$  désigne le coefficient du binôme.

Alors le degré de la restriction  $f$  de l'application source à  $Y_n$  attaché à l'idéal de Cartan est  $n$  .

Remarquons que dans cet exemple la dimension de la fibre générique de  $f$  est 2 . Ceci montre l'avantage de notre degré. Plus généralement, on peut construire un degré de manière analogue dans les cas suivants : équations aux dérivées

partielles avec conditions intégrales, équations intégro-différentielles du type de Boltzmann [7] et le problème de Cauchy à l'aide du groupe d'homologie sectionnelle relative. Ainsi il y a peut-être un certain intérêt à étudier ces degrés. Nous reviendrons sur ce sujet plus tard. Pour le moment nous montrons un théorème qui nous permet de calculer le degré continu dans le cas particulier où  $f$  est une fibration localement triviale. Il est clair dans ce cas-là que les deux degrés locaux sont nuls ainsi que la classe  $\delta[X]$ . De plus, on a le

**Théorème 2.** Soit  $f : Y \rightarrow X$  un espace fibré localement trivial dont la base  $X$  est une variété topologique connexe orientée de dimension  $n$  et dont la fibre est un C.W.-complexe fini connexe. Alors le degré de  $f$  est le plus petit entier  $m > 0$  tel que

$$(m+1)[X] \in \text{Im}(H_n(Y, Z) \xrightarrow{f_n} H_n(X, Z))$$

où  $[X]$  est la classe fondamentale de  $X$ . En particulier quand  $X$  est simplement connexe, le degré de  $f$  est nul si et seulement si :

$$d_r[X] = 0, \quad r = 2, 3, \dots$$

où les  $d_r$  désignent les différentielles de la suite spectrale de l'homologie singulière d'espace fibré  $f : Y \rightarrow X$ .

**Remarque.** Comme les  $d_r$  sont déterminés par la théorie des obstructions [9], ceci donne des rapports entre le degré d'une fibration et ses classes caractéristiques. D'autre part le théorème montre que le degré est un invariant homotopique dans la catégorie des espaces fibrés localement triviaux. Ainsi les propriétés du degré classique s'étendent dans ce cas-là. Enfin l'exemple 1 montre que la condition imposée à  $f$  d'être une fibration est primordiale pour que le résultat du théorème soit vrai.

Avant la démonstration, nous introduirons la notion suivante. Pour un sous-espace  $K$  de  $Y$  et une application continue  $f : Y \rightarrow X$  entre deux espaces topologiques, on pose:

$$\Sigma_{K\sim} = \{ x \in X \mid \dim(f^{-1}(x) \cap K) \geq 1 \};$$

$\Sigma_{K\sim}$  est l'ensemble des valeurs critiques; on pose aussi :

$$\Sigma_K = \{ y \in Y \mid \forall U \in V(y) \dim(U \cap K \cap f^{-1}(f(y))) \geq 1 \},$$

où  $V(y)$  désigne l'ensemble des voisinages de  $y$ ;  
 $\Sigma_K$  est l'ensemble des points critiques de  $f$ . Lorsque  $\Sigma_K = \emptyset$   
on dit que  $K$  est transversal à  $f$  et on écrit :  $K \uparrow f$ .  
D'autre part, par abus de langage, nous identifierons un cycle à  
son support. Ceci étant, remarquons que pour démontrer le  
théorème, il suffit d'établir le fait suivant:

supposons qu'il y ait un cycle  $K$  de  $Y$  formé par des  
simplexes injectifs et tel que l'image de ce cycle par  $f$  soit  
homologue à la classe fondamentale de  $X$ , alors il existe un  
autre cycle  $K'$  homologue à  $K$  formé par des simplexes  
injectifs avec  $\Sigma_{K'} = \emptyset$ , c'est-à-dire  $K' \uparrow f$ .

Nous utilisons alors le lemme suivant:

**Lemme.** Soit  $p : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  la projection canonique,  $m > 1$ ,  $D$   
un disque de dimension  $< n$  plongé dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  dont le bord  
 $\delta D$  est muni d'une triangulation. Alors il existe un disque  
plongé  $D'$  dans  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  tel que  $\delta D = \delta D'$  et  $\text{int}(D') \uparrow p$ ,  
où  $\text{int}(D')$  désigne l'intérieur de  $D'$ . En particulier, si  
 $\Sigma_{\delta D} = \emptyset$ , on a  $D' \uparrow p$  et  $D'$  admet une triangulation  
 $D' = \bigcup_i \Delta_i$ , telle que  $p$  restreint à  $\Delta_i$  soit un  
homomorphisme de  $\Delta_i$  sur son image et  $\delta D$  soit un sous-complexe  
de  $D'$ .

Acceptons ce lemme et fixons-nous une triangulation  $f$  de  
sorte que  $\Sigma_K$  et  $\Sigma_{K'}$  soient des sous-complexes de  $Y$  et de  
 $X$ . Remarquons qu'un cycle  $K'$  formé par des simplexes injectifs,  
définit un polyèdre dont le bord est vide, mais qui n'est pas  
nécessairement un sous-complexe de la triangulation. Or le cas  
 $\dim F = 0$  est trivial, nous supposons donc  $\dim F \geq 1$ .

On va démontrer d'abord le fait suivant :

soit  $x_0$  un sommet de  $\Sigma_{K'}$  et  $U'$  un voisinage de  $x_0$ , alors  
il y a un autre voisinage  $U$  de  $x_0$ , dont la fermeture est  
contenue dans  $U'$ , tel que pour chaque  $q \geq 0$ , il existe un  
cycle  $K_q$  qui vérifie les conditions suivantes :  $K_q$  est  
homologue à  $K$ ,  $\Sigma_{K_q}$  est contenu dans  $\Sigma_K$ ,  $\{x_0\} \cap \Sigma_{K_q^{(q)}} = \emptyset$   
où  $K_q^{(q)}$  est le  $q$ -ième squelette de  $K_q$  et l'égalité suivante  
est vérifiée:

$$K_q \cap (Y - f^{-1}(\bar{U})) = K \cap (Y - f^{-1}(\bar{U}))$$

Nous allons raisonner par récurrence sur  $q \geq 0$ . Pour  $q = 0$   
il suffit de prendre  $K_0 = K$  puisque tout point est  
transversal à  $f$ . Supposons que nous ayons déjà trouvé  $U_{q-1}$  et

$K_{q-1}$ . En subdivisant le cycle  $K_{q-1}$  si nécessaire, on peut supposer  $f^{-1}(U_{q-1}) \sim F_0 \times U_{q-1}$  où  $F_0 = f^{-1}(x_0)$  est muni d'une triangulation, de sorte que chacun des  $n$ -simplexes de  $K_{q-1}$  dont l'intersection avec  $f^{-1}(U_{q-1})$  est non vide sera contenu dans  $\Delta_j \times U_{q-1}$  pour un simplexe  $\Delta_j$  convenable de  $F_0$ . Fixons un  $q$ -simplexe  $\Delta_{q^0}$  de  $K_{q-1}$  tel que l'intersection de  $\Delta_{q^0}$ ,  $f^{-1}(x_0)$  et  $\Sigma_{K_{q-1}}$  soit non vide. Si  $q = n$ , alors le bord de  $\Delta_n^0$  est transversal à  $f$  par l'hypothèse de récurrence; alors le lemme nous permet de remplacer  $\Delta_n^0$  par un  $\Delta_n$  qui est transversal à  $f$  et  $\delta\Delta = \delta\Delta_n^0$ . Dans ce cas-là la démonstration est terminée. Maintenant supposons  $q < n$ , et notons par  $K_{q-1}(j_0)$  l'union des  $n$ -simplexes de  $K_{q-1}$  qui contiennent  $\Delta_{q^0}$  comme une  $q$ -ième face et qui sont contenus dans  $\Delta_{j_0} \times U_{q-1}$ , i.e. l'étoile de  $\Delta_{q^0}$  dans  $K_{q-1} \cap (\Delta_{j_0} \times U_{q-1})$ . Choisissons un ouvert  $U'$  voisinage de  $x_0$ , dont la fermeture soit contenue dans  $U_{q-1}$ , et tel que  $K_{q-1}(j_0) \cap f^{-1}(U')$  soit contractile sur  $\Delta_{q^0}$ . Triangulons les  $n$ -simplexes de  $K_{q-1}$  de sorte que  $K_{q-1}(j_0) \cap f^{-1}(\bar{U}')$  soit un sous-complexe, et soit  $\Delta_n$  un de ces  $n$ -simplexes. Puisque  $q < n$ , on peut choisir une face de  $\Delta_n$  dite  $\Delta_{n-1} = \delta_0\Delta_n$  qui contient  $\Delta_{q^0}$ , et telle que

$\Delta_{n-1} \cap f^{-1}(\delta\bar{U}') = \emptyset$ . Remplaçons  $\Delta_{q^0}$  par  $\Delta_{q'}$ , d'après le lemme, avec  $\Delta_{q'} \uparrow f$ , et  $\Delta_{q^0} = \delta\Delta_{q'}$ . Gardons toutes les autres faces de  $\Delta_{n-1}$  fixes sauf celles qui touchent  $\delta\Delta_{q^0}$ , en appliquant successivement le lemme sur ces simplexes, on obtient un  $\Delta_{n-1}'$  qui contient  $\Delta_{q'}$  et tel que  $\Sigma_{\Delta_{n-1}'}$  soit contenu dans  $\Sigma_{\Delta_{n-1}}$ . Appliquons la même modification pour les autres faces  $\delta_i\Delta_n$ ,  $i \neq 0$ , qui touchent  $\Delta_{q^0}$  et gardent les restes fixes. Enfin le lemme nous permet de construire un  $n$ -simplexe  $\Delta_n'$  tel que  $\Sigma_{\Delta_n'}$  soit contenu dans  $\Sigma_{\Delta_n}$ , et que

$$\Delta_n \cap f^{-1}(\delta\bar{U}') = \Delta_n' \cap f^{-1}(\delta\bar{U}')$$

i.e. conserve le  $K_{q-1}$  en dehors de  $U'$ , et que la face  $\Delta_{q'}$  qui correspond à  $\Delta_{q^0}$  soit transversale à  $f$ . Si  $\Delta_n^{\sim}$  est un autre  $n$ -simplexe de l'étoile, on le modifiera en conservant les faces communes de  $\Delta_n^{\sim}$  et  $\Delta_n$  pour obtenir un  $\Delta_n^{\sim'}$  qui vérifiera la même condition que  $\Delta_n'$ . En continuant ce processus, on arrivera à modifier tous les  $n$ -simplexes de l'étoile  $K_{q-1}(j_0) \cap f^{-1}(U')$  puisque celui-là est contractile sur  $\Delta_{q^0}$ . Le cycle obtenu après cette modification est évidemment homologue à  $K_{q-1}$  et n'augmente pas les points

critiques, en plus il ne contient plus le  $\Delta_{q^0}$  au départ puisqu'on le remplace par un  $\Delta_{q^1}$  qui est transversal à  $f$ . Faisons cette modification pour tous les  $\Delta_{q^0}$  et  $\Delta_{j_0}$  on obtient le cycle  $K_q$ . Ainsi la démonstration par récurrence est achevée.

Appliquons ce que nous venons de démontrer à tous les sommets de  $\Sigma_{K^{\sim}}$ ; on en déduit le fait suivant, dans le cas où  $q = 0$ , puis par construction récurrente le fait lui-même pour tout  $q \geq 0$

pour chaque entier  $q \geq 0$ , il existe un cycle  $C_q$  tel que  $C_q$  soit homologue à  $K$ ,  $\Sigma_{C_q}$  inclus dans  $\Sigma_K$ , et l'intersection de  $\Sigma_{C_q}$  et de  $\Sigma_{K^{(q)^{\sim}}}$  est vide, où  $\Sigma_{K^{(q)^{\sim}}}$  est le  $q$ -ième squelette de  $\Sigma_{K^{\sim}}$

A partir du  $C_q$  nous allons construire le cycle  $C_{q+1}$  en appliquant le fait suivant sur tous les  $q$ -simplexes de  $\Sigma_{K^{\sim}}$ . Fixons-nous un  $q+1$ -simplexe  $\Delta_0$  de  $\Sigma_{K^{\sim}}$  et un ouvert  $U'$  contenant  $\Delta_0$ , alors pour chaque entier  $p \geq 1$  il existe un cycle  $K_p$  et un ouvert  $U$  contenant  $\Delta_0$ , et dont la fermeture est contenue dans  $U'$  tel que :

$$\begin{aligned} K_p &\text{ est homologue à } C = C_q, \\ \Sigma_{K_p} &\text{ est contenu dans } \Sigma_C, \\ \text{l'intersection de } \Delta_0 &\text{ et de } \Sigma_{K_p^{(p)^{\sim}}} \text{ est vide,} \\ K_p \cap (Y-f^{-1}(\bar{U})) &= C \cap (Y-f^{-1}(\bar{U})). \end{aligned}$$

Pour  $p = 0$ , il suffit de prendre  $K_0 = C$ . Supposons que l'on ait déjà construit  $K_{p-1}$ , et soit  $\Delta_p^0$  un  $p$ -simplexe de  $K_{p-1}$  tel que l'intersection de  $\Delta_p^0$ ,  $f^{-1}(\Delta_0)$  et  $\Sigma_{K_{p-1}}$  soit non vide. Alors le même raisonnement tenu auparavant montre que l'on peut modifier le cycle  $K_{p-1}$  dans un voisinage de  $\Delta_p^0$  de sorte que le nouveau cycle obtenu a une face  $\Delta_p^1$  correspondant à  $\Delta_p^0$  avec  $\Delta_p^1 \uparrow f$  d'où l'existence du cycle  $K_p$ . Si on procède de même pour tous les  $q+1$ -simplexes de  $C_q$ , on obtient un cycle  $C_{q+1}$  qui satisfait aux conditions voulues. Alors il est clair que le cycle  $C_n$  est un cycle  $K^{\sim}$  qui convient pour la démonstration du théorème.

**Exemple 3.** Le théorème implique que le fibré de Hopf  $S^3 \rightarrow S^2$  soit de degré infini, pourtant les deux degrés locaux sont évidemment nuls. La projection d'un espace fibré localement

trivial de fibre  $F$  connexe ayant pour base une sphère de dimension  $n$ , son degré est égal à l'ordre de la classe d'obstruction  $\theta \in H_{n-1}(F, \mathbb{Z})$  diminué de 1.

**Remarque.** D.Sullivan et R.Thom donnent une démonstration plus élégante du théorème 2, dans le cas où  $f$  est un fibré différentiable de classe  $C^\infty$ .

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application différentiable et  $\Sigma$  (contenu dans  $\mathbb{R}^m$ ) l'ensemble des valeurs critiques de  $f$ , alors le degré de la restriction de  $f$  à  $\mathbb{R}^n - f^{-1}(\Sigma)$  sur  $\mathbb{R}^m - \Sigma$  est un invariant numérique de l'application  $f$ . Cet invariant est évident dans le cas où  $f$  est un polynôme complexe quasi-homogène, mais le cas général peut présenter un certain intérêt pour l'étude des singularités des applications différentielles. Enfin, à chaque sous-groupe  $H$  d'un groupe de Lie  $G$  on associe son degré comme étant le degré de la projection canonique de  $G$  sur  $G/\bar{H}$ , de même à chaque classe de représentations  $\rho$  de  $G$  on associe son degré comme étant le degré du sous-groupe  $\rho(G)$ . Il y aurait peut-être un certain intérêt à étudier ces invariants numériques.

### Bibliographie.

- [1] E.Cartan:  
Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques, Hermann, Paris, 1945.
- [2] C. C. Chou:  
Quelques exemples d'homologie sectionnaire de Shih, Chinese Journal of Mathematics, Vol.10 June 1982 .
- [3] J. Dieudonné:  
Eléments d'Analyse IV, Gauthier-Villars, 1971
- [4] C. Ehresmann:  
Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudo-groupes de Lie, Colloques internationaux du C.N.R.S., 1953

- [5] W. Shih:  
Un invariant algébrique associé à une application continue et le problème de Cauchy global, C.R.A.S., t.285, série A, p.333, Paris 1977.
- [6] W. Shih:  
Une remarque sur les équations aux dérivées partielles, C.R.A.S., t.286, série A, p.823, Paris 1978 .
- [7] W. Shih:  
Une remarque sur les équations du type de Boltzmann, C.R.A.S., t.290, série A , p.1073, Paris 1980 .
- [8] W. Shih:  
Quelques notions élémentaires sur les équations aux dérivées partielles, C.R.A.S., t.292, série I, p.901, Paris 1981 .
- [9] W. Shih:  
Sur le théorème de Hurewicz-Fadell, C.R.A.S., t.250, p.4095, Paris 1960 .
- [10] R. Thom:  
Bull.Sci.Math., France, Vol.87, p.455, 1959 .

*La Chênetière,*

*78120 Raizeux  
France*