DIAGRAMMES

C. HENRY

Sur quelques problèmes de plongement en algèbre : II. Extensions de Kan et prolongements de foncteurs à des graphes multiplicatifs

Diagrammes, tome 15 (1986), exp. nº 2, p. H1-H13

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1986__15__A2_0>

© Université Paris 7, UER math., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Diagrammes » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR QUELQUES PROBLEMES DE PLONGEMENT EN ALGEBRE:

II. EXTENSIONS DE KAN ET PROLONGEMENTS DE FONCTEURS A DES GRAPHES MULTIPLICATIFS

C. Henry

1. Introduction.

En (C.S.D.P.) est énoncée une condition nécessaire et suffisante (i. e. ne portant que sur le foncteur $K:\mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ entre deux catégories petites) assurant que l'extension de Kan (inductive), le long de K, de tout foncteur $F:\mathbf{C}\to\mathbf{Ens}$, est un *prolongement* de F.

En pratique, une catégorie pouvant être *présentée* par un système de générateurs et relations (qui s'organisent en ce que l'on appelle un graphe multiplicatif (voir (C.A.S.T.)), on peut souhaiter disposer d'une condition nécessaire et suffisante, analogue, mais ne portant que sur une restriction $H:\mathbf{S}\to\mathbf{S}'$ de K à des systèmes générateurs **S** et **S'** de **C** et **C'**. C'est le but de ce travail que d'établir, de ce point de vue, une telle condition nécessaire et suffisante.

2. Généralités.

On dit que $\mathbf{S} = (\mathrm{Ob}(\mathbf{S}),\mathrm{Fl}(\mathbf{S}),\mathbf{S}*\mathbf{S},\mathrm{dom},\mathrm{codom},i,k)$ est un *graphe multiplicatif* si, et seulement si:
- Ob(**S**) est une classe (dite des *objets* de **S**);
- Fl(**S**) est une classe (dite des *flèches* de **S**);
- dom: $\mathrm{Fl}(\mathbf{S})\to\mathrm{Ob}(\mathbf{S})$ est une application (dite *sélection des domaines* des flèches);

A.M.S. Sub. Class. : 18 A 10 , 18 B 15 .

- codom: $Fl(S) \to Ob(S)$ est une application (dite *sélection des codomaines* des flèches);
- i: $Ob(S) \to Fl(S)$ est une application (dite *sélection des identités*); pour tout objet S, on note alors $i(s)=Id_S$, s'il n'y a pas de risque de confusion sur S;
- $\mathbf{S*S} \subseteq Fl(S) \times Fl(S)$ est une classe de couples $(g, g') \in Fl(S) \times Fl(S)$ tels que codom g'=dom g;
- k: $\mathbf{S*S} \to Fl(S)$ est une application (dite de *composition des flèches*);
- $dom \cdot i = Id_{Ob(S)} = codom \cdot i$;
- pour toute flèche $s: S \to S'$, $(s, Id_S) \in \mathbf{S*S}$ et $(Id_{S'}, s) \in \mathbf{S*S}$;
- pour tout couple $(g,g') \in \mathbf{S*S}$, on a $dom \cdot k(g,g') = dom\ g'$;
- pour tout couple $(g,g') \in \mathbf{S*S}$, on a $codom \cdot k(g,g') = codom\ g$.

Une *catégorie* est donc un graphe multiplicatif **S** tel que:
- **S*S** est la classe de *tous* les couples $(g,g') \in Fl(S) \times Fl(S)$ tels que codom g'=dom g;
- k est associative.

On dit qu'un graphe multiplicatif **S** est *petit* si, et seulement si, Ob(**S**) et Fl(**S**) sont des ensembles.
Plus précisément, si α est un ordinal régulier, on dit qu'un graphe multiplicatif **S** est *α-petit* si, et seulement si, Ob(**S**) et Fl(**S**) sont des ensembles de cardinal strictement inférieur à α.

Si **S** et **S'** sont deux graphes multiplicatifs, on dit que $H=(Ob(H), Fl(H))$: $\mathbf{S} \to \mathbf{S'}$ est un *foncteur* si, et seulement si:
- $Ob(H)$: $Ob(\mathbf{S}) \to Ob(\mathbf{S'})$ est une application;
- $Fl(H): Fl(\mathbf{S}) \to Fl(\mathbf{S'})$ est une application;
- $i' \cdot Ob(H) = Fl(H) \cdot i$;
- $dom' \cdot Fl(H) = Ob(H) \cdot dom$;
- $codom' \cdot Fl(H) = Ob(H) \cdot codom$;
- $Fl(H) \times Fl(H)$ admet une restriction $H*H$: $\mathbf{S*S} \to \mathbf{S'*S'}$;
- $Fl(H) \cdot k = k' \cdot H*H$.

Soient **S** un graphe multiplicatif, **C** une catégorie, $F: \mathbf{S} \to \mathbf{C}$ et $G: \mathbf{S} \to \mathbf{C}$ deux foncteurs. On dit que $n=(n_S: F(S) \to G(S))_{S \in Ob(S)}: F \Rightarrow G$ est une *transformation naturelle* si, et seulement si:
- pour toute flèche $s: S \to S'$ de **C**, le diagramme de **C** suivant est commutatif:

$$\begin{tikzcd}
F(S) \arrow[rrr, "F(s)"] \arrow[d, "n_S"'] & & & F(S') \arrow[d, "n_{S'}"] \\
G(S) \arrow[rrr, "G(s)"'] & & & G(S')
\end{tikzcd}$$

Si **S** est un graphe multiplicatif et si **C** est une catégorie, nous notons $\mathbf{C}^{\mathbf{S}}$ la catégorie telle que:
- ses objets sont les foncteurs $F:\mathbf{S}\to\mathbf{C}$;
- ses flèches sont les transformations naturelles entre ces foncteurs.

Ainsi, si $H:\mathbf{S}\to\mathbf{S'}$ est un foncteur et si **C** est une catégorie, nous en déduisons le foncteur

$$\mathbf{C}^{H}:\mathbf{C}^{\mathbf{S'}} \longrightarrow \mathbf{C}^{\mathbf{S}}$$

$$(F':\mathbf{S'}\to\mathbf{C}) \longmapsto (F'\circ H:\mathbf{S}\to\mathbf{C})$$
$$(n':F'\Rightarrow G') \longmapsto (n=(n'_{H(s)})_{s\in Ob(\mathbf{S})}:F'\circ H\Rightarrow G'\circ H).$$

Soit **S** un graphe multiplicatif, on appelle *chemin propre de* **S** *de longueur* $n>1$, tout n-uplet $C=(c_n,\ldots,c_1)$ de flèches de **S** tel que:
- $\mathrm{dom}\ c_{i+1} = \mathrm{codom}\ c_i$, pour tout $1\leq i<n$;
- $c_i\neq Id_{\mathrm{dom}\ c_i}$, pour tout $1\leq i\leq n$.

Les *chemins propres de longueur* 1 sont les flèches de **S**.

Si $C=(c_n,\ldots,c_1)$, on note $C:\mathrm{dom}\ c_1 \xrightarrow{c_1} \mathrm{dom}\ c_2 \ldots \mathrm{dom}\ c_n \xrightarrow{c_n} \mathrm{codom}\ c_n$ ou encore $C:\mathrm{dom}\ c_1 \text{-+->} \mathrm{codom}\ c_n$.

On note Ch(**S**) la *catégorie des chemins propres* de **S**, c'est-à-dire la catégorie telle que:
- ses objets sont ceux de **S**;
- ses flèches sont les chemins propres de **S** (la composition des flèches, notée $*$, se faisant par "concaténation", étant entendu que, pour tout chemin propre $C:S\text{-+->}S'$, on pose $C*Id_S=Id_{S'}*C=C$).

Soit **S** un graphe multiplicatif. Deux flèches $C=(c_n,\ldots, c_1)$ et $C'=(c'_n,\ldots, c'_1)$ de Ch(**S**) sont dites *élémentairement connectées* et l'on note $C\simeq>C'$ si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est vérifiée:

- $C = C'$;
- $m = n+1$ et il existe un entier $1 \leqslant i_0 < n$ tel que:
  + pour tout $1 \leqslant i < i_0$, on a $c_i = c'_i$;
  + pour tout $i_0 < i \leqslant n$ on a $c_i = c'_{i+1}$;
  + $c_{i_0} = c'_{i_0+1} \cdot c'_{i_0}$ dans **S**.

Alors, deux chemins C et C' sont dits *connectés*, et l'on note $C \simeq C'$, si, et seulement si, il existe une famille finie $C_1, \ldots, C_n$ de chemins propres de **S** tels que:

$$C \overset{\simeq}{<} C_1 \overset{\simeq}{>} C_2 \overset{\simeq}{<} \ldots \overset{\simeq}{>} C_{n-1} \overset{\simeq}{<} C_n \overset{\simeq}{>} C'.$$

Clairement, la relation $\simeq$ est la relation d'équivalence, sur $\mathrm{Ch}(\mathbf{S})$, engendrée par la relation $\overset{\simeq}{>}$; elle est évidemment compatible avec la composition des flèches dans $\mathrm{Ch}(\mathbf{S})$: aussi existe-t-il une *catégorie quotient strict* (voir (C.A.S.T.)) $L(\mathbf{S}) = \mathrm{Ch}(\mathbf{S})/\simeq$. Alors on note $l(\mathbf{S}): \mathbf{S} \to L(\mathbf{S})$ le foncteur "passage au quotient".

Remarquons que, si $\alpha > \chi_0$ est un ordinal régulier, si le graphe multiplicatif **S** est α-petit, alors la catégorie $L(\mathbf{S})$ est encore α-petite.

Nous avons:

Proposition 1. *Si* **S** *est un graphe multiplicatif et si* **C** *est une catégorie, alors le foncteur*:

$$\mathbf{C}^{l(\mathbf{S})}: \mathbf{C}^{L(\mathbf{S})} \to \mathbf{C}^{\mathbf{S}}$$

est un isomorphisme de catégories.

(C'est aussi dire que $L(\mathbf{S})$ est la catégorie librement engendrée par **S**, ou encore qu'un graphe multiplicatif est un *système de générateurs et relations pour une catégorie.*)

S'il n'y a pas d'ambiguïté sur **S** et**C**, nous poserons:

$$(\mathbf{C}^{l(\mathbf{S})})^{-1}(-) = \overline{(-)}.$$

Evidemment, si $H: \mathbf{S} \to \mathbf{S}'$ est un foncteur entre graphes multiplicatifs, on en déduit un foncteur:

$$L(H) = \overline{l(\mathbf{S}') \cdot H}: (L(\mathbf{S}) = \mathrm{Ch}(\mathbf{S})/\simeq) \to (L(\mathbf{S}') = \mathrm{Ch}(\mathbf{S})/\simeq).$$

Autrement dit $L(H)$ est *le foncteur librement engendré par* H.

3. Extensions de Kan entre graphes multiplicatifs.

Soient $H:\mathbf{S}\to\mathbf{S'}$ un foncteur entre graphes multiplicatifs et $\mathbf{C}$ une catégorie.
On dit que le foncteur $F':\mathbf{S'}\to\mathbf{C}$ est *extension de Kan inductive du foncteur* $F:\mathbf{S}\to\mathbf{C}$ *, le long de* H , si, et seulement si $\bar{F}'$ est l'extension de Kan (inductive) de $\bar{F}$, le long de $L(H)$ (au sens de (C.F.V.M.)).

Proposition 2 (condition suffisante d'existence d'extensions de Kan). *Si* $\alpha>\chi_0$ *est un ordinal régulier, si* $H:\mathbf{S}\to\mathbf{S'}$ *est un foncteur entre graphes multiplicatifs* α*-petits, si* $\mathbf{C}$ *est une catégorie à limites inductives* α*-petites, alors tout foncteur* $F:\mathbf{S}\to\mathbf{C}$ *possède une extension de Kan, le long de H.*

Preuve. On sait que cela est vrai si $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S'}$ sont des catégories α-petites; donc, d'après la définition précédente d'une extension de Kan, pour que tout foncteur $F:\mathbf{S}\to\mathbf{C}$ possède une extension de Kan, le long de H, il suffit que $\mathbf{S}$ et $\mathbf{S'}$ soient α-petits (car alors $L(\mathbf{S})$ et $L(\mathbf{S'})$ sont α-petites). **Fin de la preuve.**

4. Extensions de Kan et prolongements de foncteurs.

Supposons que $U:\mathbf{E}\to\mathbf{E'}$ soit un foncteur entre catégories et qu'il admet un adjoint à gauche $V:\mathbf{E'}\to\mathbf{E}$, nous notons alors $u:Id_{\mathbf{E}}\to U\circ V$ l'unité de la monade sur $\mathbf{E}$ associée. On dira que U est *à plongements* si, et seulement si:
- pour tout objet E de $\mathbf{E}$, la flèche $u_E:E\to U\circ V(E)$ de $\mathbf{E}$ est un monomorphisme.

Pour exprimer des conditions nécessaires et suffisantes assurant qu'un foncteur U est à plongements, nous aurons besoin des définitions qui suivent.
Pour tout entier $n\geq 0$, on note z_n la catégorie représentée par:

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \quad \ldots\ldots \quad 2_{n-1} \longleftarrow 2_n \longrightarrow 2_{n+1}.$$

Si $\mathbf{S}$ est un graphe multiplicatif, un foncteur $Z:z_n\to\mathbf{S}$ est appelé *zig-zag* de $\mathbf{S}$ et on dit qu'un tel zig-zag est *fermé en l'objet* S de $\mathbf{S}$ si, et seulement si, $Z(1) = Z(2n+1) = S$.
Supposons que $K:\mathbf{C}\to\mathbf{C'}$ est un foncteur entre catégories petites; alors $Ens^K:Ens^{C'}\to Ens^C$ admet un adjoint à gauche et nous savons que (voir(C.S.D.P)):

Proposition 3. *Si* $K:\mathbf{C}\to\mathbf{C}'$ *est un foncteur entre catégories petites, le foncteur* $\mathrm{Ens}^K:\mathrm{Ens}^{\mathbf{C}'}\to\mathrm{Ens}^{\mathbf{C}}$ *est à plongements si, et seulement si:*

- pour tout objet C *de* **C**, *pour tout zig-zag* $Z:z_n\to\mathbf{C}$, *fermé en l'objet* C *de* **C**, *s'il existe un diagramme commutatif de* **C'**, *tel que ci-dessous:*

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \quad \cdots\cdots \quad 2_{n-1} \longleftarrow 2_n \longrightarrow 2_{n+1}$$

$$\big\downarrow Z$$

$$C \longleftarrow C_2 \longrightarrow C_3 \quad \cdots\cdots \quad C_{2n-1} \longleftarrow C_{2n} \longrightarrow C$$

$$\big\downarrow K$$

$$\begin{tikzcd}
K(C) \arrow[drrr, "t'_1=\mathrm{Id}_{K(C)}"'] \arrow[r, phantom, "="] & K(C_2) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[drr, "t'_2"] \arrow[r, phantom, "="] & K(C_3) \arrow[dr, "t'_3"] & \cdots\cdots & K(C_{2n-1}) \arrow[dl, "t'_{2n-1}"'] \arrow[r, phantom, "="] & K(C_{2n}) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dll, "t'_{2n}"'] \arrow[r, phantom, "="] & K(C) \arrow[dlll, "t'_{2n+1}=\mathrm{Id}_{K(C)}"] \\
& & & K(C) & & &
\end{tikzcd}$$

,

alors il existe un foncteur $N:z_m\to z_n$, *tel que* $N(1)=1$ *et* $N(2m+1)=2n+1$, *et un diagramme commutatif de* **C** *tel que ci-dessous:*

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \quad \cdots\cdots \quad 2m+1 \longleftarrow 2m \longrightarrow 2m+1$$

$$\big\downarrow N$$

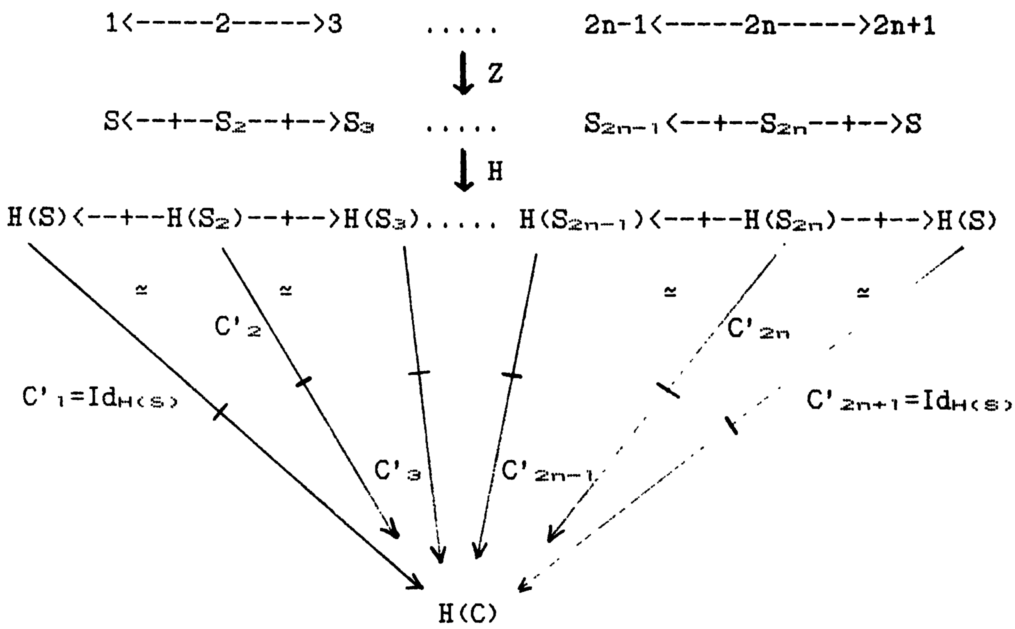
$$1 \longleftarrow 2 \quad \cdots\cdots \quad 2n \longrightarrow 2n+1$$

$$\big\downarrow Z$$

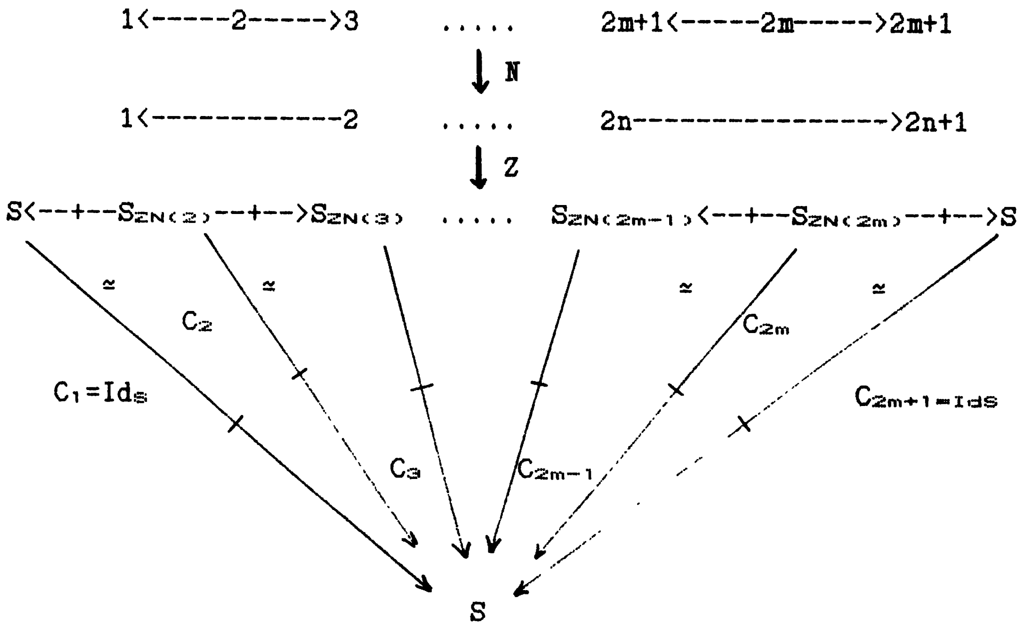
$$\begin{tikzcd}
C \arrow[drrr, "t_1=\mathrm{Id}_C"'] \arrow[r, phantom, "="] & C_{2N(2)} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[drr, "t_2"] \arrow[r, phantom, "="] & C_{2N(3)} \arrow[dr, "t_3"] & \cdots\cdots & C_{2N(2m-1)} \arrow[dl, "t_{2m-1}"'] \arrow[r, phantom, "="] & C_{2N(2m)} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dll, "t_{2m}"'] \arrow[r, phantom, "="] & C \arrow[dlll, "t_{2m+1}=\mathrm{Id}_C"] \\
& & & C & & &
\end{tikzcd}$$

Si $H:\mathbf{S}\to\mathbf{S}'$ est un foncteur entre graphes multiplicatifs, il est clair que $Ens^{\mathbf{S}'}\to Ens^{\mathbf{S}}$ est à plongements si, et seulement si, $Ens^{L(H)}:Ens^{L(\mathbf{S}')}\to Ens^{L(\mathbf{S})}$ l'est; c'est-à-dire si, et seulement si, la condition nécessaire et suffisante de la proposition 3 est vérifiée, où $C=L(\mathbf{S})$, $C'=L(\mathbf{S}')$ et $K=L(H)$. Comme $L(\mathbf{S})=Ch(\mathbf{S})/\simeq$ et $L(\mathbf{S}')=Ch(\mathbf{S}')/\simeq$,cela signifie que:

Proposition 4. *Si* $H:\mathbf{S}\to\mathbf{S}'$ *est un foncteur entre graphes multiplicatifs* α*-petits, le foncteur* $Ens^{H}:Ens^{\mathbf{S}'}\to Ens^{\mathbf{S}}$ *est à plongements si, et seulement si:*
- pour tout objet S *de* $\mathbf{S}$*, pour tout zig-zag* $Z:z_n\to Ch(\mathbf{S})$ *de chemins propres de* $\mathbf{S}$*, fermé en l'objet* S *de* $\mathbf{S}$*, s'il existe un diagramme de chemins propres de* $\mathbf{S}'$*, commutatif à l'équivalence* $\simeq$ *près, tel que ci-dessous:*



alors il existe un foncteur $N:z_m\to z_n$*, tel que* $N(1)=1$ *et* $N(2m+1)=2n+1$*, et un diagramme commutatif, à l'équivalence* $\simeq$ *près, tel que ci-dessous:*



A tout zig-zag de chemins propres $Z:z_n \to Ch(S)$ du graphe multiplicatif **S**, représenté par:

$$\overset{C_1}{\longleftarrow\!+\!\!-\!\!-}\ \overset{C_2}{-\!\!-\!\!+\!\!\longrightarrow}\quad \cdots\cdots \quad \overset{C_{2n-1}}{\longleftarrow\!+\!\!-\!\!-}\ \overset{C_{2n}}{-\!\!-\!\!+\!\!\longrightarrow}$$

où $C_i = (c_{i,p_i}, \ldots\ldots\ldots, c_{i,1})$ avec $p_i \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant i \leqslant 2n$, on associe le zig-zag de flèches $Z^\sim : z_{n^\sim} \to S$ du graphe multiplicatif **S**, où:

- $n^\sim = \sum_{1 \leqslant i \leqslant 2n} 2p_i$,

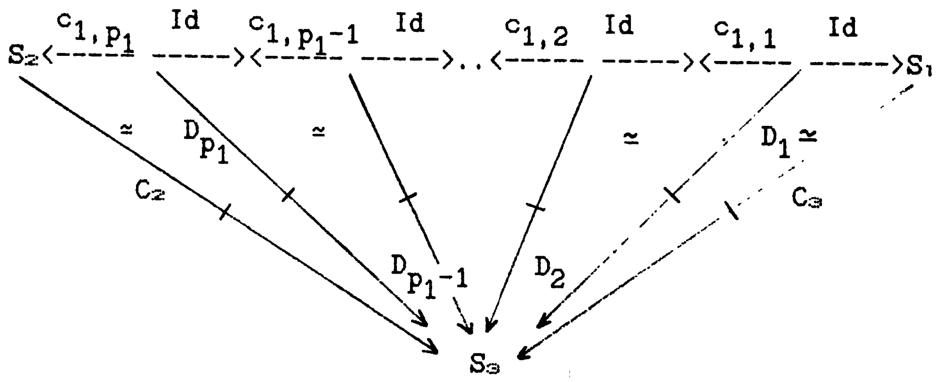
et représenté par:

$$\overset{c_{1,p_1}}{\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-}\ \overset{Id}{-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow}\,..\,\overset{c_{1,1}}{\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-}\ \overset{Id}{-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow}\overset{Id}{\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-}\,..\,\overset{Id}{\longleftarrow\!\!-\!\!-\!\!-\!\!-}\ \overset{c_{2n,p_{2n}}}{-\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\longrightarrow}$$

De même, à tout diagramme de chemins propres de **S**, commutatif à l'équivalence près $\simeq$, tel que ci-dessous:

$$\begin{tikzcd} S_2 \arrow[d, "\mathrm{Id}"'] & S_1 \arrow[l, "C_1"'] \arrow[r, "C_3"] \arrow[d, phantom, "\simeq"] & S_3 \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ S_2 \arrow[rr, "C_2"'] & & S_3 \end{tikzcd}$$

où $C_1=(c_{1,p_1},\dots,c_{1,1})$, on associe le diagramme de flèches de **S** et de chemins propres de **S**, commutatif à l'équivalence $\simeq$ près, tel que ci-dessous:

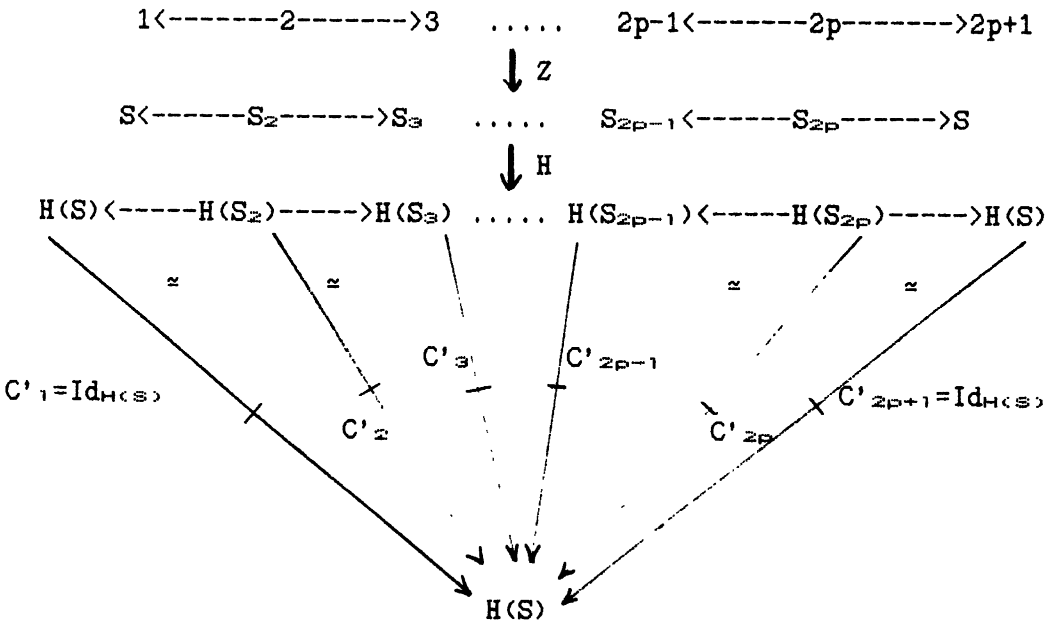


où $D_j = C_2 * c_{1,p_1} * \dots\dots * c_{1,j+1} * c_{1,j}$, avec $1 \leqslant j \leqslant p_1$

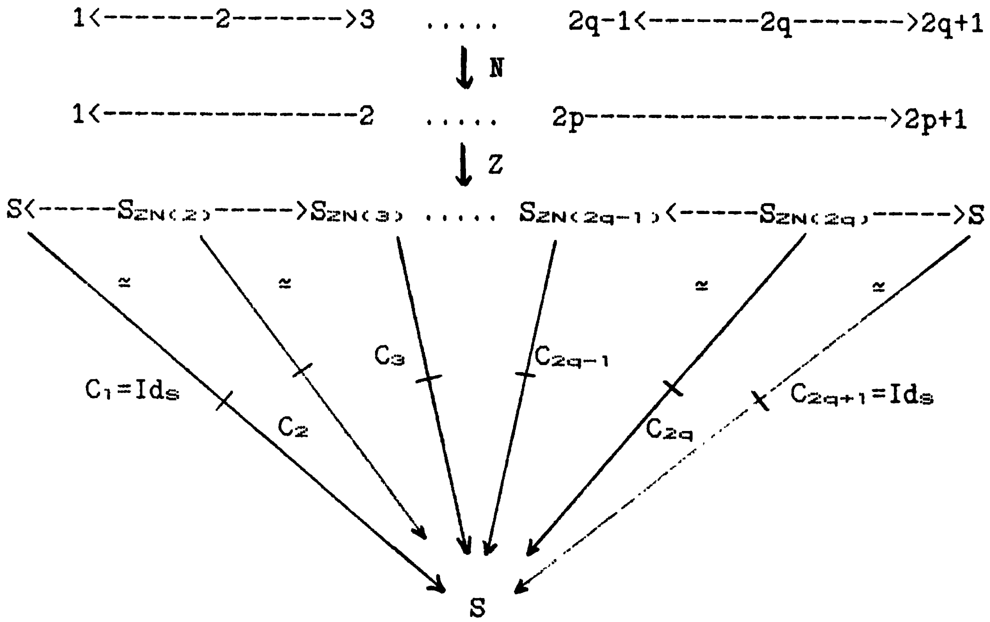
Alors il est clair que:

Proposition 5. *Si* $H:\mathbf{S}\to\mathbf{S}'$ *est un foncteur entre graphes multiplicatifs* α*-petits, le foncteur* $\mathrm{Ens}^{H}:\mathrm{Ens}^{\mathbf{S}'}\to\mathrm{Ens}^{\mathbf{S}}$ *est à plongements si, et seulement si:*

- pour tout objet S *de* **S**, *pour tout zig-zag* $Z:z_p\to\mathrm{Ch}(\mathbf{S})$ *de flèches de* **S**, *fermé en l'objet* S *de* **S**, *s'il existe un diagramme de flèches et de chemins propres de* **S'**, *commutatif à l'équivalence* $\simeq$ *près, tel que ci-dessous:*



alors il existe un foncteur $N:z_q \to z_p$, *tel que* $N(1)=1$ *et* $N(2q+1)=2p+1$, *et il existe un diagramme, commutatif à l'équivalence* ≃ *près, tel que ci-dessous:*



Constatons maintenant que tout diagramme de flèches et de chemins propres de **S** tel que ci-dessous (où $s:S_1 \to S_2 \in \mathrm{Fl}\,\mathbf{S}$ et $d_i:S_i \overset{+}{\dashrightarrow} S_3 \in \mathrm{Fl}(\mathrm{Ch}(\mathbf{S}))$, pour $i = 1,2$):

$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & & S_1 \arrow[ll, dashed, "s"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\
S_2 \arrow[r, dashed, "+" marking, "d_1"'] & S_3 & S_1 \arrow[l, dashed, "+" marking, "d_2"]
\end{tikzcd}$$

est commutatif à l'équivalence $\simeq$ près (i. e. $d_1 * s \simeq d_2$) si, et seulement si, il existe une famille $(C_1,\ldots,C_n)$ de chemins propres de **S** telle que:

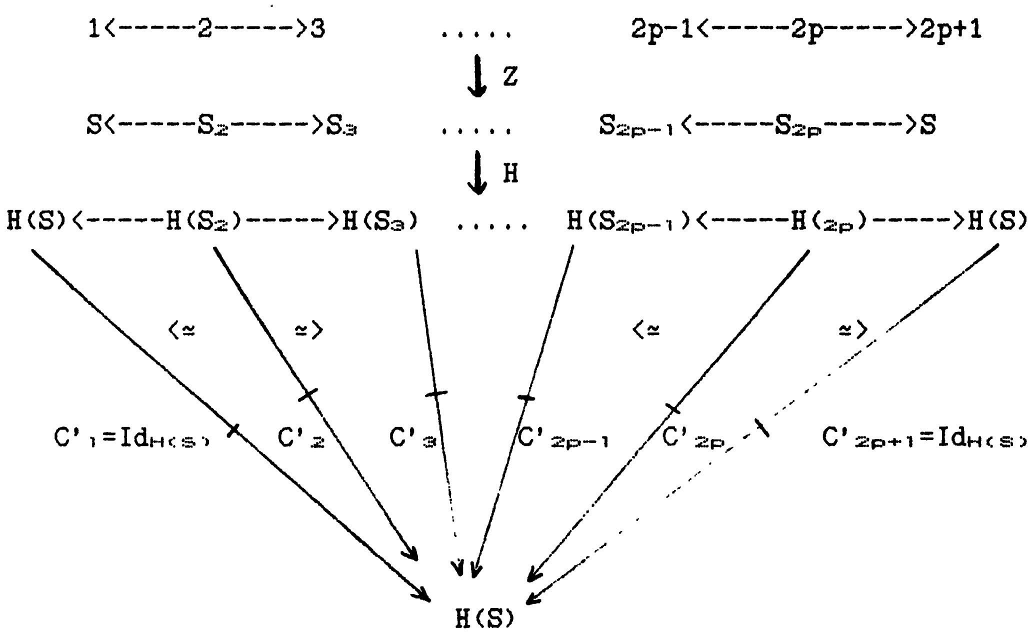
$$d_1 * s \overset{+}{\dashleftarrow} C_1 \overset{+}{\dashrightarrow} C_2 \qquad \ldots\ldots \qquad C_{n-1} \overset{+}{\dashleftarrow} C_n \overset{+}{\dashrightarrow} d_2,$$

autrement dit, si, et seulement si, le diagramme de $\mathrm{Ch}(\mathbf{S})$ suivant est commutatif à la connexité élémentaire $\simeq\!>$ près:

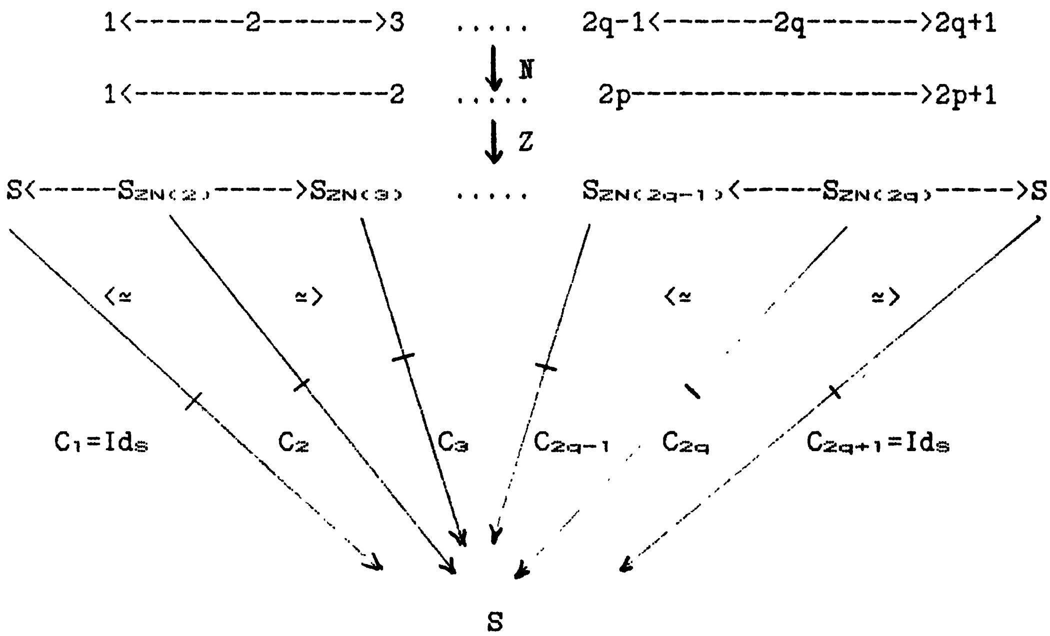
$$\begin{tikzcd}
S_2 \arrow[drrr, bend right, "+" marking, "d_1"'] & S_1 \arrow[l, dashed, "s"'] \arrow[r, dashed, "\mathrm{Id}"] \arrow[drr, "+" marking, "C_1"] \arrow[d, phantom, "<\simeq"] & S_1 \arrow[dr, "+" marking, "C_2"] \arrow[dl, phantom, "\simeq>"] & \ldots\ldots & S_1 \arrow[dl, "+" marking, "C_{n-1}"'] & S_1 \arrow[l, dashed, "\mathrm{Id}"'] \arrow[r, dashed, "\mathrm{Id}"] \arrow[dll, "+" marking, "C_n"'] \arrow[dl, phantom, "<\simeq"] & S_1 \arrow[dlll, bend left, "+" marking, "d_2"] \arrow[dl, phantom, "\simeq>"] \\
 & & & S_3. & & &
\end{tikzcd}$$

En conséquence:

Proposition 6. *Si* $H:\mathbf{S}\to\mathbf{S}'$ *est un foncteur entre graphes multiplicatifs* α*-petits, le foncteur* $\mathrm{Ens}^H:\mathrm{Ens}^{\mathbf{S}'}\to\mathrm{Ens}^{\mathbf{S}}$ *est à plongements si, et seulement si:*
- pour tout objet S *de* **S**, *pour tout zig-zag* $Z:z_p\to\mathrm{Ch}(\mathbf{S})$, *fermé en l'objet* S *de* **S**, *s'il existe un diagramme de flèches et de chemins propres de* **S'**, *commutatif à la connexité élémentaire* $\simeq\!>$ *près, tel que ci-dessous:*



alors il existe un foncteur $\mathbf{N}: z_q \to z_p$, *tel que* $\mathbf{N}(1)=1$ *et* $\mathbf{N}(2q+1)=2p+1$, *et un diagramme de flèches et de chemins propres de* **S**, *commutatif à la connexité élémentaire* ≃> *près, tel que ci-dessous*:



Bibliographie.

(C.A.S.T.) C. Ehresmann:

Catégories et structures, Dunod, Paris, 1965.

(C.F.W.M.) S. Maclane:

Categories for the working mathematician, Grad. Text. in Math. 5, Springer, 1971.

(C.S.D.P.) C. Lair:

Conditions syntaxiques de plongement I., Diagrammes 2 , Paris, 1979.