JACQUES PENON

De l'infinitésimal au local (Thèse de Doctorat d'État)

Diagrammes, tome S13 (1985), p. 1-191

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1985__S13__1_0>

UNIVERSITE PARIS VII

THESE de DOCTORAT D'ETAT

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

PRESENTEE PAR : Jacques PENON

SUJET de la THESE : De l'infinitésimal au local.

(2ème thèse : Le théorème de périodicité de Bott en K-théorie)

soutenue le, 06/1985 **devant la commission d'examen**

JURY :
J.BENABOU (Université Paris Nord)
M.KAROUBI (Université Paris 7)
M.MAKKAI (Université Mac Gill)
G.SABBAGH (Université Paris 7)
E.DUBUC (Université de Buenos Aires)

Je voudrais remercier les membres du jury :

- J.BENABOU, mon Directeur de Thèse qui, en plus des encouragements constants qu'il m'a prodigués lors de l'élaboration de ce travail, m'a appris que les idées les plus simples étaient souvent les plus riches,
- M.MAKKAI qui a eu la patience de décripter l'ensemble de mon travail,
- M.KAROUBI qui, en me proposant mon second sujet de thèse, m'a permis de découvrir une autre discipline mathématique,
- G.SABBAGH qui a accepté de faire partie de ce jury.
- Mes remerciements vont aussi, tout spécialement, à E.DUBUC sans qui ce travail n'aurait probablement jamais vu le jour.

Je ne peux citer tous ceux qui m'ont aidé et encouragé. Qu'il me soit permis cependant de mentionner :

- G.REYES et M.BUNGE qui m'ont offert la possibilité, avec l'aide de M.BARR, de venir m'instruire à Montréal à leur contact et à celui de leur séminaire,
- M.FOURMAN et A.JOYAL qui m'ont beaucoup appris sur la logique intuitionniste,
-M.F.COSTE-ROY qui m'a fait découvrir la Géométrie différentielle synthétique.
- Je pense aussi à G.WRAITH, R.BEKKOUCHE, J.EMSALEM, D.BOURN et beaucoup d'autres.

Mais que serait devenu tout ceci sans le secours matériel de :

- A.BURRONI qui m'a permis de puiser à discrétion dans sa vaste bibliothèque,
- L.COPPEY qui, en prenant en main la publication de ce travail, m'a soulagé d'une tâche des plus pénibles,
- toutes les personnes qui ont réalisé la frappe et le tirage de cet ouvrage dans d'aussi brefs délais et avec autant de zèle.

Enfin, je ne peux terminer ces remerciements sans dire un mot sur C.EHRESMANN sous la direction de qui j'ai fait mes premiers pas dans la recherche mathématique et qui m'a montré que dans ce domaine comme dans bien d'autres, j'imagine, ce qui comptait avant tout c'est d'avoir foi en sa propre étoile.

DE L'INFINITESIMAL AU LOCAL

SOMMAIRE

INTRODUCTION

I. Approche :

- Les deux termes "infinitésimal" et "local" nous sont depuis longtemps familiers. Pourtant, si celui de "local" nous semble bien connu et parfaitement clair, il en est tout autrement de celui d'"infinitésimal". En effet, bien qu'historiquement il soit apparu probablement antérieurement il n'a pu obtenir, aux siècles passés, de statut clair et définitif. Les difficultés logiques que les mathématiciens ont connues à ces époques n'ayant pu être surmontées, il a alors été tout simplement éliminé de la scène mathématique. Dès que le concept de "convergence" fût suffisamment formalisé par Cauchy les "infinitésimaux" perdirent le caractère de nécessité qu'ils avaient eu les premiers temps. Cependant il faut reconnaître que l'outil "infinitésimal" était particulièrement commode en analyse, et les détours rigoureux qui ont suivi ont contribué à rendre ce domaine mathématique un peu moins accessible. Il faut attendre la deuxième moitié de ce siècle pour que revienne en force le besoin d'infinitésimaux. Entre temps le formalisme mathématique avait suffisamment progressé pour que de nouvelles tentatives puissent à nouveau être mises sur pieds.

- La première d'entre elles créée par A. Robinson [37] et que l'on connait sous le nom d'analyse non standard, rend à l'analyse son outil premier. En effet, grâce à une technique propre à la théorie des modèles, on ajoute aux réels des éléments "étrangers" (ou non-standards) qui, tout en se manipulant comme les anciens réels (on peut d'ailleurs leur appliquer n'importe quel théorème des mathématiques classiques) ont la possibilité d'être infiniment petits c'est-à-dire ici, plus petits que n'importe quel "ancien" réel (ou réel standard). Ces réels étrangers ont en plus l'énorme avantage d'être de parfaits "catalyseurs" puisqu'ils peuvent être éliminés une fois leur service rendu.

Mieux encore, toute preuve "non-classique" cache en fait une preuve "classique" d'où l'intérêt d'utiliser la méthode "non-classique" chaque fois qu'elle apparaît de façon plus naturelle.

- La seconde tentative est plus délicate à décrire vu qu'elle est encore en grande partie en gestation même si, paradoxalement, ses origines sont au moins aussi lointaines. C'est A. Weil [39] qui en a probablement posé une des premières pierres dans son article sur les "points proches" où, comme il le dit lui-même, il veut "retourner aux méthodes de Fermat dans le calcul infinitésimal du premier ordre". En effet, généralisant la théorie des jets de C. Ehresmann, il suggérera qu'un point p d'une variété M admet pour <u>points proches</u> les homomorphismes de la $\mathbb{R}$-algèbre $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ des fonctions numériques et C^{∞} définies sur M, dans une $\mathbb{R}$-algèbre A, qu'il appelle locale, et pour lesquels l'homomorphisme composé

$$C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \to A \xrightarrow{\text{canonique}} \mathbb{R}$$

est l'homomorphisme "correspondant au point p" (c'est-à-dire est l'homomorphisme $f \mapsto f(p)$). Sans trop rentrer dans les détails techniques, disons que, par $\mathbb{R}$-algèbre locale il entend généraliser la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R}[X]/(X^2)$ des "nombres duaux" où l'on ajoute formellement à $\mathbb{R}$ un réel "négligeable à l'ordre 2" (en clair : un élément ε tel que $\varepsilon^2 = 0$). Un exemple typique de "point proche" du point p de M est l'homomorphisme

$$\begin{aligned} C^{\infty}(M,\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}[\varepsilon] \\ f &\longmapsto f(p) + v(f)\varepsilon \end{aligned}$$

où V est un "vecteur tangent" à la variété M au point p. Ainsi, chez lui, l'algèbre commutative vient au secours de la géométrie différentielle pour décrire des êtres qui jusque là n'existaient pas à l'état naturel. Cette conception qui, comme nous venons de le constater, a vu le jour au sein de l'analyse trouvera en fait son réel développement dans le domaine mathématique d'où provenaient ses outils essentiels c'est-à-dire l'algèbre commutative ou plus précisément, puisque ces préoccupations étaient de nature géométrique, la géométrie algébrique. En effet, la théorie des Schémas, tout en absorbant celle des variétés algébriques, va pouvoir faire siennes les idées de Weil.

- Un nouveau pas vers "la tentative de réhabilitation des infinitésimaux" va maintenant être franchi grace à la théorie des schémas, elle-même. Ce pas a pour origine la dualité, exploitée par Serre, entre les variétés algébriques affines (sur un corps algébriquement clos k) et les k-algèbres réduites de type fini (cette dualité s'exprime en disant que la catégorie des variétés algébriques affines sur k est équivalente à la catégorie duale de celle des k-algèbres réduites de type fini). Comme, par ailleurs, on vient de voir l'intérêt d'utiliser les algèbres locales de Weil qui ne sont précisément pas des algèbres réduites (les nilpotents ont même un rôle tout à fait essentiel) il nous faut donc étendre notre champ d'investigation. Mais, en n'imposant plus aux algèbres d'être réduites on perd du même coup la dualité géométrico-algébrique décrite précédemment. Cependant, rien ne nous empêche alors de continuer à penser les algèbres (ou plutôt, comme nous l'avons dit, leur objet "dual") comme des variétés algébriques généralisées. Les algèbres locales de Weil n'échappent évidemment pas à cette vision géométrique. Ne possédant qu'un seul point(i.e. leur spectre maximal est réduit à un point, ou encore ils ne possède qu'une seule section globale dans la catégorie "duale" des k-algèbres) tout en étant différentes de l'algèbre k elle-même, il a paru intéressant de voir les algèbres locales comme des "points épais" c'est-à-dire des points auxquels se serraient aglutinés d'autres points "fictifs" infiniment proches. On retrouve ainsi la conception de Weil sous un autre aspect (pour lui les "points proches" seraient plutôt, conformément à ce que nous avons dit précédamment, des morphismes de ces points épais dans une variété). Une difficulté apparaît alors : comment manipuler les points "fictifs" dont nous venons de constater la présence tout en avouant notre impuissance à les exhiber (l'utilisation du spectre premier n'y change rien). Signalons à ce sujet que l'analyse non standard n'a pas ces problèmes car ses réels "étrangers" existent bel et bien, mais dans un autre modèle de la théorie des ensembles, même s'ils ne sont pas là dans le modèle standard. Pour palier ce genre de difficulté la géométrie algébrique s'est tournée résoluement vers les techniques Fonctorielles qui avaient l'avantage de préférer étudier les structures par elles-mêmes plutôt que de s'intéresser à leurs éléments. Aussi allait-on traiter les infinitésimaux "par paquets" plutôt qu'isolément.

- Suivant une démarche semblable à celle de l'analyse non-standard, les géomètres algébristes ont aussi essayé de décrire les propriétés locales (celles qui sont valides sur un voisinage de Zariski) à l'aide de l'outil infinitésimal. Mais ils se sont alors rendu compte que les choses n'allaient pas toujours comme ils le souhaitaient. Prenons le cas des morphismes étales pour illustrer cette nouvelle problèmatique. On montre en effet qu'un morphisme étale entre (par exemple) des k-schémas affines de type fini (où k est algébriquement clos) est "infinitésimalement inversible" alors que cependant il n'est que très rarement "localement inversible". C'est pourquoi, après avoir considérablement élargi, comme nous venons de le voir, le domaine des variétés algébriques en y ajoutant un outillage infinitésimal Grothendieck va alors s'attaquer à "l'outillage locale". Les morphismes étales faisant obstruction dans le passage de l'infinitésimal au local il va se servir de ces derniers pour modifier substantiellement les "conceptions locales" issues de la topologie générale. En effet, lorsqu'il remplace voisinage de Zariski par "voisinage étale" il ne fait pas que remplacer une topologie par une topologie plus fine (du moins si on donne à "topologie" son sens habituel) car les voisinages étales ne sont pas, en général, des sous-schémas. On peut dire que les voisinages sont maintenant "hors de l'espace" au lieu d'en être des parties. Reformulé dans ce contexte, le passage de l'infinitésimal au local devient presque tautologique. En particulier, cela donne une forme un peu inattendue au théorème d'inversion locale pour la géométrie algébrique.

- De cette nouvelle "machinerie étale" où leurs recouvrement (étales) joueront le rôle principal, naîtra la théorie des U-<u>topos</u> (encore appellés topos de Grothendieck pour ne pas les confondre avec le nouveau concept qui suivi quelques années plus tard) : Gigantesques catégories où toutes les constructions imaginables sont possibles et où les recouvrements (comme ici les recouvrements étales) y deviennent les meilleurs souhaitables. La catégorie des schémas, une fois plongée dans un tel U-topos, (il y en a plusieurs possibles) on a maintenant un cadre suffisamment souple pour pouvoir y évoluer sans en sortir. Quelques temps plus tard W. Lawvere et M. Tierney constateront que de tels U-topos ressemblent étrangement à la catégorie des ensembles puisque comme elle ils vérifient "l'axiome des parties". Nous voulons dire par là que pour chaque objet X il existe un nouvel objet PX qui possède la même propriété universelle que l'objet $\mathcal{P}(X)$ a dans la catégorie des ensembles, et qu'elles ont de ce fait toutes les propriétés d'exactitude de la catégorie des ensembles.

- Nous avons dit précédemment que les géomètres algébristes avaient choisi les techniques fonctorielles pour pouvoir manipuler des infinitésimaux dont on reconnaissait la présence sans pouvoir les exhiber explicitement. Cette fois, travaillant sur les propriétés ensemblistes des topos, W. Mitchell et J. Bénabou vont mettre au point une nouvelle technique à la fois beaucoup plus simple intuitivement que la technique fonctorielle et beaucoup plus pénétrante dans son maniement. Au lieu d'utiliser de véritables éléments pour représenter par exemples ces infinitésimaux (toujours plus ou moins à l'aide se spectres) on va cette fois se servir d'"éléments formels" qui serviront seulement d'intermédiaire de calcul. En gros, tout se passe comme si de tels éléments existaient (alors qu'ils ne sont que de simples variables) dans les objets de notre discours, sans jamais avoir besoin de les exhiber à aucun moment (seules les constantes et plus généralement les termes clos peuvent véritablement être exhibés). Cette méthode ne fait évidemment que reprendre une technique bien connue des logiciens mais elle est traitée ici de façon originale puisqu'on interprête cette fois un langage d'ordre supérieur, non pas dans un modèle de la théorie des ensembles mais, dans un topos quelconque

- A ce stade de développement, "la tentative de réhabilitation des infinitésimaux" avait fait des progrès substentiels, même si elle s'était cantonnée dans un domaine mathématique particulier et si, au cours de son évolution, elle n'avait en tout cas pas gagné en simplicité. Cependant les outils mis en place étaient maintenant suffisamment puissants et généraux pour pouvoir finalement se dégager des préoccupations particulières à la géométrie algébrique et revenir une nouvelle fois aux toutes premières méthodes dues à Fermat. Cette fois, c'est W. Lawvere [26] (suivi un peu plus tard par A. Kock) qui, en se plaçant d'emblée dans le cadre général de la théorie des topos, va essayer d'exprimer de façon axiomatique les idées originelles du calcul infinitésimal. Quant à la théorie des schémas, elle en devient alors un simple modèle capable non seulement de montrer la non-contradiction d'un tel discours mais aussi de nous suggérer la marche à suivre ou bien, dans le meilleur des cas, de fournir un terrain d'application idéal. L'axiome principal de Kock-Lawvere ne fait que réexprimer le fait (que Fermat avait remarqué bien avant eux) que tout morceau infinitésimal d'une courbe plane peut être assimilé à un segment de droite (les infinitésimaux étant simplement ici les nilpotents d'ordre 2). Cette loi a évidemment pour conséquence immédiate l'existence d'une dérivée pour n'importe quelle fonction définie sur la droite, et ainsi fournit l'outil de base à un calcul différentiel abstrait (Kock, plus précisément, lui a donné le nom de "Géométrie différentielle synthétique"). Remarquons cependant que cet axiome, qui est des plus intuitif, est largement contradictoire avec la théorie classique des ensembles, même si par exemple on voulait, par un biais quelconque, ajouter des nilpotents à la droite réelle. C'est que, le type de logique propre à la théorie des topos est évidemment plus faible que celui de la théorie classique des ensembles. Il s'apparente d'ailleurs à une logique, inventée par Brouwer, qui porte le nom d'"intuitionnisme" (En fait le terme d'"intuitionnisme" est souvent utilisé maintenant pour désigner précisément "la logique des topos" alors qu'il faut le reconnaître, on est bien loin, à l'heure actuelle, de l'idéologie que Brouwer lui avait insufflé à l'origine).

- Mais cette "géométrie différentielle synthétique" ne reste pas seulement un jeu abstrait, applicable seulement à la théorie des schémas, et Lawvere avait pensé que grâce à un modèle calqué sur celui de la géométrie algébrique on pouvait appliquer aussi ces nouvelles méthodes à la géométrie différentielle ordinaire. C'est pourquoi, se servant du concepts d'anneau C^{∞} (inventé par Lawvere), E. Dubuc s'est proposé de construire le modèle désiré par Lawvere. Il y parviendra quelques années plus tard, après avoir mis sur pieds une véritable théorie des schémas C^{∞}. Cette théorie, bien que largement inspirée par les méthodes de la géométrie algébrique, ne fait au fond que de renouer avec la théorie "des points proches" que Weil avait précisémment conçue pour la géométrie différentielle.

II. <u>Le coeur du sujet</u> :

- Dans les pages qui vont suivre nous allons nous donner une tâche précise, même si au cours du texte nous aurons à faire de longues digressions. En effet notre but est d'arriver à décrire le "théorème d'inversion locale" dans le cadre de la géométrie différentielle synthétique de telle sorte que :

a) il soit valide dans le topos conçu pour la géométrie différentielle (on l'appelle ici le "topos de Dubuc") restituant, après "traduction", le théorème classique d'inversion locale,

b) qu'il soit encore valide dans le topos étale, afin de se trouver en accord avec les travaux de Grothendieck,

c) mais cependant, qu'il soit faux dans le topos de Zariski, justifiant ainsi pleinement le recours à la topologie étale comme substitut à la topologie de Zariski.

Pour cela il va falloir donner un sens à la phrase suivante :
"Toute fonction $R^n \to R^n$ de jacobien non-nul en un point de R^n est localement inversible en ce point".

- Une telle phrase prendra un maximum de puissance lorsqu'elle pourra être décrite par une formule de la logique intuitionniste car on pourra alors l'insérer naturellement dans des raisonnements intuitionnistes naïfs (toujours traduisibles en preuves authentiques par des règles de déduction propres à la logique intuitionniste) ce qui ne saurait être le cas si elle n'était que partiellement formulée. Par exemple, lorsqu'on dit "Pour toute fonction $R^n \to R^n$ etc..." par une formule on dit beaucoup plus qu'en exprimant simplement le fait que "toute les flèches appartenant à la catégorie, de source R^n et de but R^n, etc...". En effet il serait alors impossible d'appliquer le théorème d'inversion locale aux applications paramétrées par une "variable" ou un terme "non clos".

- Evidemment, pour en arriver là, nous allons utiliser au maximum l'outillage résultant des axiomes de Kock-Lawvere. Ainsi (comme on l'avait déjà constaté pour la dérivée) il sera possible d'exprimer le jacobien d'une fonction quelconque $R^n \to R^n$. Par contre, il en va tout autrement losqu'on veut écrire ce qu'on entend par "localement inversible en un point" car l'usage des nilpotents est alors nettement insuffisant pour ce genre de tâche. Dans un premier temps nous nous contenterons donc d'exprimer plutôt l'"inversion infinitésimale". Il est d'ailleurs clair que nous y parviendrons lorsqu'on aura su donner un sens précis au mot "infinitésimal" car, là encore, seule la considération des nilpotents est par trop insuffisante. Il existe en effet beaucoup d'autres infinitésimaux fournis par "le" modèle de la géométrie différentielle (le topos de Dubuc). Donnons en un exemple pour illustrer notre propos. Soit $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞ (ordinaire) plate à l'origine et ne s'annulant qu'en zéro. Une fois placé dans le topos, lorsqu'on essaye d'observer à nouveau l'objet D_θ des éléments sur lesquels la fonction θ s'annule (ce qu'on exprime "fonctoriellement" en considérant le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd}
D_\theta \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "o"] \\
R \arrow[r, "\theta"] & R
\end{tikzcd}$$

où R désigne la droite réelle plongée dans le topos et $0 : 1 \to R$ la section globale correspondant à l'origine, c'est-à-dire l'intersection dans le topos de l'axe des x avec la courbe d'équation $y = \theta(x)$) on constate que D_θ, qui n'a pourtant qu'une section globale (c'est un point "épais") contient (strictement) l'objet D de tous les nilpotents de R. Cette fois l'intuitionnisme, qui n'avait toujours été jusque là qu'un cadre dans lequel on évoluait sans avoir peur de rencontrer des contradictions, va jouer un rôle de premier plan. En effet, si les infinitésimaux sont descriptibles, pourquoi le seraient-ils uniquement dans R ou dans une de ses puissances. L'"infini-proximité" existant, à coup sûr, partout dans le topos, elle ne devrait pas s'exprimer à l'aide de la structure propre à R. En effet, seule la négation est alors nécessaire pour formuler la propriété désirée. Avec ce nouveau matériel mis en place on montre, comme on s'en doutait, que l'anneau canonique R des topos de la géométrie différentielle et algébrique satisfait bien le "théorème d'inversion infinitésimale". On montre aussi, dans le même ordre d'idée, que les morphismes étales entre k-schémas affines de type fini sont bien les "applications infinitésimalement inversibles" décrites abstraitement (du moins si k est un corps algébriquement clos). Le cas différentiable étant encore plus prévisible.

- Il nous reste donc à passer au stade local. Cette fois c'est sur le concept de voisinage ou d'ouvert qu'il va falloir, semble-t-il, se pencher. En effet la stabilité par éléments infiniment voisins n'étant pas suffisante pour exprimer le fait d'être ouvert (on le voit sans doute plus nettement en géométrie différentielle où il n'est pas nécessaire de considérer des sous-objets non-représentables). Il nous faut chercher de nouvelles définitions, si possible avec l'aide de l'outillage logique. Là encore, on constate qu'une telle définition est possible. Cependant le théorème d'inversion locale correspondant n'est plus satisfait dans aucun des topos de la géométrie algébrique (alors qu'il est encore valide en géométrie différentielle).

- Evidemment une telle constatation était prévisible car, comme nous l'avons dit dans "l'approche", pour forcer le "théorème d'inversion locale" à être valide, Grothendieck a dû avoir recours à des "voisinages" (les "voisinages étales") qui ne sont plus des sous-objets. Il nous faut donc faire le même constat. Aussi a-t-on pensé qu'il valait mieux décrire directement le concept "d'inversion locale" (on dira plutôt "bijection locale" pour qu'il n'y ait pas de confusion avec le concept décrit lors de la tentative précédente) sans se ramener nécessairement à celui de voisinage comme on le fait en topologie générale. Cette fois, non seulement un tel concept est formulable intuitionnistement mais en plus le "théorème de la bijection locale" devient précisément valide dans le topos étale tout en restant faux dans le topos de Zariski. On montre aussi, toujours dans ce même ordre d'idée, que les morphismes étale précédemment caractérisés infinitésimalement dans tous les topos "classiques" de k-algèbres peuvent encore l'être dans le topos étale, mais cette fois par une propriété locale. Le topos étale permet donc le passage de l'infinitésimal au local, pour la géométrie algébrique, tout comme le topos de Dubuc le permetait déjà en géométrie différentielle.

CHAPITRE 0

PRELIMINAIRE

§1. L'intuitionnisme ou la logique des topos

n°0. Introduction

Tout le présent travail repose sur l'utilisation de la logique intuitionniste (pour plus de détails voir [14]) pour décrire ou comprendre des situations qui ne pouvaient l'être intrinsèquement, par la logique classique.

Pour quelqu'un qui ne voudrait pas rentrer dans le formalisme de cette logique, disons simplement, qu'elle se distingue de la logique classique par la nécessité d'abandonner l'usage du "tiers exclu" ainsi que tout recours à l'axiome du choix.

Il ne faudrait cependant pas croire que notre but est de vouloir remplacer une "mathématique" par une autre. Tout au contraire, grâce aux différents "modèles de cette logique" (ou topos) que l'on étudiera ici, il sera possible de faire un pont à tout moment, entre des situations mathématiques traditionnelles et des considérations de pure logique intuitionniste. Il n'est donc pas question d'utiliser les modèles, comme on le fait souvent, pour s'assurer seulement de la non-contradiction de tel ou tel système d'axiomes, mais bien plutôt, d'en faire une étude approfondie pour en exhiber leurs traits communs ou au contraire leur particularité (comme on le fait d'ailleurs de n'importe quelle structure !).

n°1. Les topos élémentaires (pour plus de détails voir [20]).

0. Avant de passer au formalisme de la logique intuitionniste, intéressons nous à ces modèles que sont les topos.

1. Un topos (élémentaire) est une catégorie $\mathcal{E}$ satisfaisant les conditions suivantes :

a) $\mathcal{E}$ est à $\varprojlim$ finies (on notera 1 l'objet final)

b) Pour tout couple d'objets A et B de $\mathcal{E}$ il existe un objet B^A dans $\mathcal{E}$ et une flèche (dite : évaluation) $B^A \times A \to B$ satisfaisant la propriété universelle suivante :
Pour tout objet C et toute flèche $C \times A \to B$ il existe une unique flèche $C \to B^A$ telle que le triangle suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C \times A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B^A \times A \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

La flèche horizontale étant déduite de $C \to B^A$ en faisant le produit par A.

c) Il existe un objet Ω et une flèche $1 \to \Omega$ satisfaisant la propriété universelle suivante :
Pour tout objet A et tout monomorphisme $P \to A$ il existe une unique flèche $A \to \Omega$ qui fait du carré suivant un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d] \\ A \arrow[r] & \Omega \end{tikzcd}$$

[Intuitivement Ω représente "l'ensemble des valeurs de vérité" et la flèche unique $A \to \Omega$ est la fonction caractéristique associée à la "partie" P].

2. En dehors de la catégorie des ensembles qui en est un exemple évident (on prend l'ensemble $\{0,1\}$ pour l'objet Ω) nous verrons plus loin, avec quelques détails, le cas des topos de Grothendieck (voir n°2).

3. Chaque topos à sa "logique" propre que nous allons décrire maintenant. A étant un objet d'un topos $\mathcal{E}$, un sous-objet de A est une classe d'équivalence de monomorphismes de but A pour la relation $P \to A \sim P' \to A$ ssi il existe un unique isomorphisme $P \to P'$ rendant le "bon" triangle commutatif. Notons $\mathcal{P}(A)$ l'ensemble des sous-objets de A [il est clair que dans les ensembles, $\mathcal{P}(A)$ est précisément en bijection avec les parties de A, d'où

la terminologie

4. On montre alors, que $\mathcal{P}(A)$ muni de la relation d'ordre évidente (notée $\subset$) est une algèbre de Heyting i.e. :

a) Il a un plus grand élément noté vrai_A (qui est le sous-objet correspondant à l'identité) et un plus petit élément noté Faux_A (qui est le sous-objet $\emptyset \rightarrowtail A$ où $\emptyset$ est l'objet initial de $\mathcal{E}$ qui existe toujours).

b) Tout couple P, Q de sous-objets de A a une borne inférieure notée $P \cap Q$ et une borne supérieure $P \cup Q$ (où $P \cap Q$ est le sous-objet correspondant au produit fibré d'un quelconque de leur représentant respectif).

c) Enfin, toujours pour les deux sous-objets P et Q de A, il existe un unique sous-objet noté $P \to Q$ satisfaisant la propriété suivante :

Pour tout sous-objet R de A alors :

$$R \cap P \subset Q \qquad \text{ssi} \qquad R \subset (P \to Q)$$

Cette propriété implique que $\mathcal{P}(A)$ est un treillis distributif.

5. Si maintenant $f : A \to B$ est une flèche quelconque de $\mathcal{E}$ on peut lui faire correspondre une application croissante notée $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ (obtenue en faisant un produit fibré le long de f). Là encore, on montre que

a) f^{-1} préserve "la structure" de $\mathcal{P}(B)$ (c'est-à-dire le Vrai, le Faux, l'intersection, l'union de l'implication).

b) Il existe une unique application (croissante) notée $\exists_f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ (on comprendra cette notation au 6) telle que, pour tout sous-objets P de A et Q de B on ait :

$$\exists_f(P) \subset Q \qquad \text{ssi} \qquad P \subset f^{-1}(Q)$$

c) De même il existe unique application (croissante) notée $\forall_f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout sous-objets P de A et Q de B on a :

$$f^{-1}(Q) \subset P \qquad \text{ssi} \qquad P \subset \forall_f(P)$$

6. a) L'écriture $\exists_f$ et $\forall_f$ sera encore plus justifiée au n°4. Disons tout

de même pour faire un lien avec la logique traditionnelle, que dans le topos des ensembles :

$$\exists_f(P) = f(P)$$
$$\forall_f(P) = \{y \in B / f^{-1}(\{y\}) \subset P\}$$

en particulier, si on prend pour f une projection $X \times Y \to Y$ alors :

$$\exists_f(P) = \{y \in Y / \underline{\exists x \in X}((x,y) \in P)\}$$
$$\forall_f(P) = \{y \in Y / \underline{\forall x \in X}((x,y) \in P)\}$$

Inversement ces deux applications nous permettront au n°4 d'interpréter n'importe quelle formule du type $\exists x \in X(\phi)$ ou $\forall x \in X(\phi)$ dans un topos quelconque. De même dans les ensembles, $x \in (P \to Q)$ ssi on a l'implication $(x \in P \Rightarrow x \in Q)$. C'est-à-dire $P \to Q = CP \cup Q$.

b) Enfin, on peut, dès à présent, faire apparaître le caractère intuitionniste de cette "logique" car, si on note $\neg P$ (lire "non P") le sous-objet "$P \to \mathrm{Faux}_A$" (il correspond bien au complémentaire dans le cas ensembliste) alors les propriétés suivantes :

$$\neg\neg P = P \quad \text{ou} \quad P \cup \neg P = \mathrm{Vrai}_A$$

n'ont aucune raison d'être toujours satisfaites.

7. Jusqu'à présent nous n'avons décrit que le "premier ordre" de la logique "naturelle" des topos. Pour l'ordre supérieur disons seulement ceci (qui nous sera utile au n°4) :

Pour tout objet X de $\mathcal{E}$ il existe un objet PX et un sous-objet $\varepsilon_X \rightarrowtail X \times PX$ (appelé "la relation d'appartenance de X") qui vérifie la propriété universelle suivante :

Pour tout objet Y et tout sous-objet $R \rightarrowtail X \times Y$ il existe une unique flèche $f : Y \to PX$ telle que $R = (X \times f)^{-1}(\varepsilon_X)$. [Ensemblistement, si on considère R comme une relation binaire alors : $f(y) = \{x \in X / R(x,y)\}$. Inversement, nous verrons que cette propriété universelle va nous permettre d'interpréter le "terme" $\{x \in X/\phi\}$ où ϕ est une formule, dans un topos quelconque] .

Pour le montrer, il suffit de prendre $PX = \Omega^X$ et $\ni_X = ev^{-1}(V)$ où $ev : \Omega^X \times Y \to \Omega$ est la flèche "d'évaluation" (voir 1) et $v : 1 \rightarrowtail \Omega$ est le sous-objet apparaissant dans la définition de Ω.

8. Enfin signalons le théorème suivant qui sera fort utile au n°4. Rappelons tout d'abord, que si X est un objet de $\mathcal{E}$, on note $\mathcal{E}/X$ la catégorie "des objets au-dessus de X" (ou encore, ce qui est beaucoup plus intuitif, la catégorie "des familles d'objets indexés par X") c'est-à-dire la catégorie qui a pour objets les flèches de $\mathcal{E}$ de but X et pour flèches de $(Y \to X)$ vers $(Y' \to X)$, des flèches $Y \to Y'$ dans $\mathcal{E}$ faisant commuter lè bon triangle.

On montre alors que :

(Théorème) a) $\mathcal{E}/X$ est lui-même un topos élémentaire.

b) Pour toute flèche $f : X \to Y$ le foncteur "produit fibré le long de f" (que l'on note f^*) préserve la structure de topos (on dit qu'il est logique). De plus il admet un adjoint à gauche (mais ça c'est évident) et surtout un ajoint à droite.

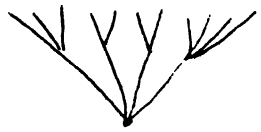
n°2 . Les topos de Grothendieck (pour plus de détails voir [20] ou [1])

0. Le concept de faisceau sur un espace topologique est maintenant bien utilisé en mathématique, et les catégories de ces faisceaux (sur un espace fixé) nous donnent tout de suite des exemples de topos élémentaires. Cependant comme ils n'auront qu'une faible utilité dans ce travail (on ne les utilise que dans l'Appendice, §2) nous sommes obligés de considérer leur généralisation (due à Grothendieck) que sont les faisceaux sur un site (i.e. une catégorie munie d'une topologie de Grothendieck). Disons, pour en avoir une meilleure compréhension, que les recouvrements, qui sont à la base de la définition de faisceau (puisqu'ils permettent les recollements) , ne sont pas uniquement présents dans les espaces topologiques (on pense au recouvrements étales). Il a donc fallu, en dégageant bien le concept, le généraliser suffisamment pour rendre compte de toutes les situations où ils devaient apparaître. Pour la définition de "topologie de Grothendieck" nous renvoyons à [1] car, ayant un intérêt tout théorique, il est préférable de lui substituer celle de pré-topologie qui, tout en conservant les mêmes faisceaux (et c'est au fond ce qui nous intéresse) à l'aventage d'apparaître plus naturellement dans les exemples.

1. Une pré-topologie (de Grothendieck) sur une catégorie $\mathcal{S}$ (qui sera le plus souvent petite et à produits fibrés finis, pour plus de commodité) est la donnée, pour chaque objet S de $\mathcal{S}$ d'un ensemble de familles de flèches de $\mathcal{S}$ de but S (appellées familles couvrantes) satisfaisant les conditions suivantes :

a) Les familles couvrantes sont stables par produits fibrés le long d'une flèche quelconque (on dit plutôt : "stables par changement de base")

b) Elles sont stables aussi par composition (voir dessin ci-dessous)



} couvrantes
⇒ couvrantes
} couvrante

c) Pour chaque objet S la famille constituée de la seule flèche "identité sur S" est couvrante.

2. Un faisceau sur $\mathcal{S}$, pour une pré-topologie donnée, est un foncteur $F : \mathcal{S}^{op} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ satisfaisant la propriété de recollement suivante :

Pour toute famille couvrante $(S_i \to S)_i$ et toute famille compatible d'éléments a_i de FS_i (c'est-à-dire telle que pour deux indices quelconques i et j les "restrictions" de a_i et a_j à $S_i \underset{S}{\times} S_j$ sont les mêmes - en appelant "restriction de a à S" l'image de l'élément a de FS' par l'application $FS' \to FS$ s'il n'y a pas d'ambiguité sur celle-ci), il existe un unique élément a de FS dont la restriction à chacun des S_i vaut a_i.

3. Notons $\tilde{\mathcal{S}}$ la catégorie qui a pour objets, les faisceaux sur $\mathcal{S}$ et pour flèches, les transformations naturelles entre ces faisceaux. On appellera topos de Grothendieck une catégorie équivalente à une catégorie de la forme $\tilde{\mathcal{S}}$. Comme on s'en doute un topos de Grothendieck est un topos élémentaire. De façon plus précise :

a) Si F et G sont deux faisceaux (sur $\mathcal{S}$),

$G^F(S) \simeq \mathrm{Hom}(F \times aS, G)$ (en notant aS le faisceau associé à l'objet S)

b) $\Omega(S) \simeq \mathcal{P}(aS)$ (c'est-à-dire l'ensemble des sous-faisceaux de aS)

4. Passons maintenant à la "logique" des topos de Grothendieck.

F étant un faisceau fixé, on a :

a) $\mathrm{Vrai}_F = (F \hookrightarrow F)$, $\mathrm{Faux}_F = (\emptyset \hookrightarrow F)$ où $\emptyset(S) = F(S) \simeq 1$ si la famille vide $(\to S)$ est couvrante et sinon $\emptyset(S) = \emptyset$.

b) P et Q étant deux sous-faisceaux de F,

- $(P \cap Q)(S) = P(S) \cap Q(S)$

- $a \in (P \cup Q)(S)$ ssi il existe une famille couvrante $(S_i \to S)_i$ pour laquelle les restrictions de a à S_i appartiennent soit à PS_i , <u>soit</u> à QS_i .

- $a \in (P \to Q)(S)$ ssi pour toute flèche $S' \to S$ le fait que la restriction de a à S' soit dans PS' <u>entraine</u> qu'elle est aussi dans QS'.

5. Soit ensuite $f : F \to G$ un morphisme de faisceaux. Alors, si P est un sous-faisceau de F et Q est un sous-faisceau de G on a :

a) $(f^{-1}Q)(S) = (f_S)^{-1}(QS)$

b) $a \in \exists_f(P)(S)$ ssi il existe une famille couvrante $(S_i \to S)$ et des éléments a_i de PS_i qui s'envoient par f (ou plutot f_{S_i}) sur la restriction de a à S_i (ceci exprime bien le fait que "localement" a admet un antécédent).

c) $a \in \forall_f(P)(S)$ ssi pour toute flèche $S' \to S$, PS' contient tous les éléments de FS' qui s'envoient par f sur la restriction de a à S' (il contient la "fibre" au-dessus de la restriction de a à S').

6. Pour la "logique" d'ordre supérieur (voir le 7 du n°1), PF qui est isomorphe à Ω^F, est caractérisé par : $PF(S) \simeq \mathcal{P}(F \times aS)$ et "la relation d'appartenance" $\epsilon_F \hookrightarrow F \times PF$ est caractérisée par :

$$(a,R) \in \epsilon_F(S) \qquad \text{ssi} \qquad (a, Id_S) \in R(S)$$

7. Toutes ces caractérisations peuvent sembler obscures. Nous verrons pourtant au Chapitre II §2. puis au Chapitre III §2 qu'elles peuvent être considérablement simplifiées dans des cas particuliers.

n°3 Un langage pour l'intuitionnisme (plus plus de détails voir [7], [4] ou [31]).

1. Donnons nous, au départ, un langage $\mathcal{L}$ à plusieurs types et d'ordre supérieur. De façon plus précise $\mathcal{L}$ comprend :

- un ensemble de "types de base" que l'on ferme pour l'opération de "formation de types ", c'est-à-dire qu'on définit par induction la phrase "S est un type"par : un "type de base" est un type et si $S_1,\dots,S_n$ sont des types, l'expression $\Omega(S_1,\dots,S_n)$ est encore un type (intuitivement, les types "symbolisent" les ensembles. Plus tard nous verrons qu'on les interprète comme objets dans les topos. Quant à $\Omega(S_1,\dots,S_n)$ il "représente" l'ensemble des parties de l'ensemble $S_1 \times\dots\times S_n$).

- Pour chaque type, un ensemble dénombrable de variables. On dit alors qu'une variable x est de type S si x est une variable associée au type S (intuitivement x est un "élément variable" de l'ensemble S).

- Un ensemble de symboles relationnels (ou prédicats). A chaque prédicat R est associée une suite finie de types $(S_1,\dots,S_n)$ appellée domaine de R (attention, n peut être nul) (intuitivement, R symbolise une "relation" entre n-uplets d'éléments resp. des ensembles $S_1,\dots,S_n$) .

- Un ensemble de symboles fonctionnels. A chacun de ces symboles f est associée une suite finie de types $(S_1,\dots,S_n;S)$ (où n peut être nul). On note alors $f : S_1,\dots,S_n \to S$ (intuitivement, f symbolise une application de source, le produit cartésien des ensembles $S_1,\dots,S_n$, et de but S).

2. A titres d'exemples, signalons qu'à tout topos $\mathcal{E}$ on associe canoniquement un langage $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ que nous décrirons en détails au n°4.

3. On définit maintenant, par induction et de façon simultanée, les termes et leur type ainsi que les formules. Ils sont obtenus par application des règles suivantes :

- chaque variable de type S est un terme de type S,

- si t_1 et t_2 sont des termes de même type alors "$t_1 = t_2$" est une formule,

- si $t_1,\dots,t_n$ sont des termes de type respectifs $S_1,\dots,S_n$ et R un prédicat n-aire de domaine $(S_1,\dots,S_n)$ alors $R(t_1,\dots,t_n)$ est une formule,

- Si $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes de types $S_1,\ldots,S_n$ et $f : S_1,\ldots,S_n \to S$ un symbole fonctionnel alors $f(t_1,\ldots,t_n)$ est un terme de type S.

- Si $t_1,\ldots,t_n$ sont des termes de types $S_1,\ldots,S_n$ et t un terme de type $\Omega(S_1,\ldots,S_n)$ alors "$(t_1,\ldots,t_n) \in t$" est une formule,

- Si ϕ est une formule et si $x_1,\ldots,x_n$ sont des variables distinctes de types $S_1,\ldots,S_n$ alors $\{(x_1,\ldots,x_n) \in S_1 \times\ldots\times S_n/\phi\}$ est un terme de type $\Omega(S_1,\ldots,S_n)$,

- "vrai" et "faux" sont des formules,

- si ϕ et ψ sont des formules alors $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$ et $\phi \to \psi$ sont des formules

- si ϕ est une formule et x une variable de type S alors $\exists x \in S(\phi)$ et $\forall x \in S(\phi)$ sont des formules.

4. L'écriture $\neg\phi$ est ici une abréviation de la formule " $\phi \to$ Faux". Enfin on définit aussi par induction, les variables liées d'un terme ou d'une formule en disant que x est lié dans le terme $\{(x_1,\ldots,x_n) \in S_1 \times\ldots\times S_n/\phi\}$ si x figure parmi les $x_1,\ldots,x_n$, et que x est toujours lié dans les formules $\forall x \in S(\phi)$ et $\exists x \in S(\phi)$. Une variable est libre si elle n'est pas liée.

5. a) Le langage, ainsi décrit, est nettement sur-abondant, car nous aurions pu par exemple, comme dans le cas de la négation, nous passer des symboles Faux, $\vee$, $\to$, $\exists x$ et $\forall x$ dans l'écriture des formules, les considérant seulement comme des abréviations d'autres formules plus complexes, mais notre but ici n'étant pas de donner une description minimale de "la théorie" il nous a semblé plus commode, même si cela semble un peu lourd au départ, d'insérer tous ses connecteurs et quantificateurs dans le formalisme de base.

b) Nous préférons les écritures $\{(x_1,\ldots,x_n) \in S_1 \times\ldots\times S_n/\phi\}$, $\exists x \in S(\phi)$ et $\forall x \in S(\phi)$ au lieu de $\{(x_1,\ldots,x_n)/\phi\}$, $\exists x(\phi)$ et $\forall x(\phi)$ car ainsi, il n'est plus nécessaire de préciser les types des différentes variables utilisées (si les formules sont closes).

6. Au cours de ce texte nous nous placerons le plus souvent dans $\mathfrak{L}(\mathcal{E})$. Il nous arrivera alors de simplifier l'écriture...

a) de certains termes : Par exemple, si f est un terme de type Y^X et t

un terme de type X , on écrira $f(t)$ le terme $ev(f,t)$ où $ev : Y^X \times X \to Y$ est la flèche d'évaluation (voir n°1,1),

b) de certaines formules : Par exemple, on écrira plutôt :

$\forall\, x : X \to Y(\phi)$ au lieu de $\forall\, x \in Y^X(\phi)$

$\forall\, P \subset X(\phi)$ au lieu de $\forall\, P \in \Omega(X)(\phi)$ [Remarquer qu'on utilise de préférence des lettres majuscules pour désigner des variables de type $\Omega(X_1,\ldots,X_n)$].

n°4 Sémantique (mêmes références qu'au n°3)

0. Nous voulons une logique pour les topos, ce sont donc ces derniers qui vont nous assurer de la validité (c'est-à-dire la "vérité") des formules que nous venons de décrire.

1. Soient $\mathcal{E}$ un topos et $\mathcal{L}$ un langage à plusieurs types et d'ordre supérieur. Une interprétation M de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{E}$ est la donnée :

- pour chaque type S d'un objet MS de $\mathcal{E}$, tel que

$$M(\Omega(S_1,\ldots,S_1)) \simeq \Omega^{MS_1 \times\ldots\times MS_n} \quad \text{pour tout type } S_1,\ldots,S_n$$

- pour tout prédicat n-aire R de domaine $(S_1,\ldots,S_n)$ d'un sous-objet

$$MR \rightarrowtail MS_1 \times\ldots\times MS_n$$

- pour tout symbole fonctionnel $f : S_1,\ldots,S_n \to S$ d'une flèche

$$Mf : MS_1 \times\ldots\times MS_n \to MS$$

2. $\mathcal{E}$ étant un topos donné, muni d'un choix d'objet Ω et de produits, nous allons lui associer canoniquement un langage $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ (c'est le langage "naturel" du topos) et une interprétation notée : Val de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E}$. On les obtient de la façon suivante :

- les "types de base" sont les objets de $\mathcal{E}$,
- On construit ensuite par induction $Val(S)$ où S est un type de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ par :

$$Val(S) = S \quad \text{si } S \text{ est un type de base,}$$

$$\mathrm{Val}(\Omega(S_1,\dots,S_n)) = \Omega^{\mathrm{Val}\,S_1 \times\dots\times \mathrm{Val}\,S_n}$$

- les prédicats n-aires de domaine $(S_1,\dots,S_n)$ sont exactement les sous-objets de $\mathrm{Val}\,S_1 \times\dots\times \mathrm{Val}\,S_n$
- les symboles fonctionnels $S_1,\dots,S_n \to S$ sont les flèches de $\mathrm{Val}\,S_1 \times\dots\times \mathrm{Val}\,S_n \to \mathrm{Val}\,S$
- la valeur de Val sur ses symboles est alors évidente.

3. Revenons au cas général. Soit M une interprétation d'un langage $\mathcal{L}$ dans un topos $\mathcal{E}$.
Considérons alors une suite finie V de variables distinctes $x_1,\dots,x_n$ de types $S_1,\dots,S_n$. On notera MV le produit $MS_1 \times\dots\times MS_n$. Nous allons maintenant construire par induction :

- une flèche $M(t,V) : MV \to MS$ pour chaque terme t de type S dont les variables libres figurent dans V,
- un sous-objet $M(\phi,V) \rightarrowtail MV$ pour chaque formule ϕ dont les variables libres figurent dans V.

4. Voici les différentes règles de construction :

- si t est une variable de sorte S alors $M(t;V) : MV \to MS$ est la projection canonique correspondante (puisque, rappelons le, t apparaît dans V)
- si t_1 et t_2 ont même type S alors : $M(t_1 = t_2;V) = f^{-1}\,(\mathrm{Diag}_{MS})$ où $f = (M(t_1;V),M(t_2;V)) : MV \to MS\times MS$ et Diag_{MS} est la diagonale $MS \rightarrowtail MS \times MS$,
- si $t_1,\dots,t_n$ sont des termes de types $S_1,\dots,S_n$ et R un prédicat n-aire alors : $M(R(t_1,\dots,t_n);V) = f^{-1}(MR)$ où $f = (M(t_1;V),\dots,M(t_n;V)) : MV \to MS_1 \times\dots\times MS_n$
- si $t_1,\dots,t_n$ sont des termes de types $S_1,\dots,S_n$ et f un symbole fonctionnel $S_1,\dots,S_n \to S$ alors $M(f(t_1,\dots,t_n);V)$ est le composé :

$$MV \xrightarrow{(M(t_1;V),\dots,M(t_n;V))} MS_1 \times\dots\times MS_n \xrightarrow{Mf} MS$$

- si $t_1,\dots,t_n$ sont des termes de types $S_1,\dots,S_n$ et t un terme de type $S = \Omega(S_1,\dots,S_n)$ alors $M((t_1,\dots,t_n)\in t;V) = f^{-1}(\varepsilon)$ où ε est "la relation d'appartenance de $MS_1 \times\ldots\times MS_n$" (voir le n°1, 7) et

$f = (M(t_1;V),\ldots,M(t_n;V),M(t;V)) : MV \to MS_1 \times\ldots\times MS_n \times MS$

- si ϕ est une formule et W une suite de variables $x_1,\ldots,x_k$ de types $S_1,\ldots,S_k$ n'apparaissant pas dans V alors $M(\{W \in S_1 \times\ldots\times S_k/\phi\} ;V)$ est la flèche $MV \to \Omega^{MW}$ correspondant au sous-objet $M(\phi;WV) \to MW \times MV$ (voir la propriété universelle du n°1, 7) où WV est la concaténation (ou juxtaposition) des suites W et V [Lorsque des variables de W apparaissent dans V (ce qui n'est jamais le cas dans la pratique) il faut préalablement substituer à ces variables d'autres variables de même type mais extérieurs à V (il y en a toujours car V est fini)].
- $M(\mathrm{Vrai};\phi)$ et $M(\mathrm{Faux};\phi)$ sont resp. les sous-objets Vrai_{MV} et Faux_{MV} de MV (voir leur déf. au n°1, 4)
- si ϕ et ψ sont des formules alors : $M(\phi\wedge\psi;V)$, $M(\phi\vee\psi;V)$ et $M(\phi\to\psi;V)$ sont resp. les sous-objets $M(\phi;V)\cap M(\psi;V)$, $M(\phi;V)\cup M(\psi;V)$ et $M(\phi;V)\to M(\psi;V)$ de MV (voir la définition de $\cap$, $\cup$ et $\to$ au n°1, 4)
- si ϕ est une formule et x une variable de type S n'apparaissant pas dans V alors :

$$M(\exists x \in S(\phi);V) = \exists_\pi M(\phi;xV)$$

$$M(\forall x \in S(\phi);V) = \forall_\pi M(\phi;xV)$$

où xV est la concaténation de la suite réduite à x et de V et $\pi : M(xV) \to MV$ est la projection canonique [lorsque x apparaît dans V voir la remarque sur l'interprétation de $\{W \in S_1 \times\ldots\times S_k/\phi\}$] .

5. Soit maintenant ϕ une formule close (i.e. sans variable libre). On dit que ϕ est valide pour M ou que M satisfait ϕ et que l'on écrit encore $M \models \phi$ ssi $M(\phi;\emptyset) = \mathrm{vrai}_1$ (où $\emptyset$ désigne la "suite vide"). On dit aussi que ϕ est universellement valide si pour tout topos $\mathcal{E}$ et toute interprétation M, $M \models \phi$. Enfin si $\mathcal{E}$ est un topos on notera $\mathcal{E} \models \phi$ si l'interprétation canonique de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ dans $\mathcal{E}$ satisfait la formule ϕ .

6. Plaçons-nous dans le langage d'un topos et de son interprétation canonique. Nous allons donner "quelques tuyaux" pour déterminer plus facilement l'interprétation d'une formule.

Soit $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ une formule dont les variables libres sont parmi les variables $x_1,\ldots,x_n$ de type resp. $S_1,\ldots,S_n$, et soit $a_1,\ldots,a_n$ des sections globales $1 \to \mathrm{Val}\ S_1$,..., $1 \to \mathrm{Val}\ S_n$. Alors, les $a_1,\ldots,a_n$ peuvent être considérés comme des termes clos (i.e. sans variable libre) de ce langage, de même type resp. que les $x_1,\ldots,x_n$. On peut donc substituer $a_1,\ldots$ $a_1,\ldots,a_n$ aux variables $x_1,\ldots,x_n$ dans la formule $\phi(x_1,\ldots,x_n)$. Dans ces conditions on montre facilement que :

$$\mathcal{E} \models \phi\ (a_1,\ldots,a_n) \text{ ssi } (a_1,\ldots,a_n) : 1 \to \mathrm{Val}\ S_1 \times\ldots\times \mathrm{Val}\ S_n$$

factorise $\mathrm{Val}(\phi;V)$ où $V = (x_1,\ldots,x_n)$.

7. Nous allons maintenant généraliser ce résultat au cas où les a_i ne sont pas de source 1.

- Tout d'abord, remarquons que si $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un morphisme logique entre topos (i.e. foncteur préservant la structure de topos élémentaire) on peut successivement construire une application (notée encore p) des types puis des symboles et enfin des termes et formules de $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ dans ceux de $\mathcal{L}(\mathcal{E}')$.

- Soit maintenant $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ une formule, comme dans le 6, et $a_1,\ldots,a_n$ des flèches de $\mathcal{E}$ $X \to \mathrm{Val}\ S_1$,..., $X \to \mathrm{Val}\ S_n$. Alors, il leur correspond des flèches $\hat{a}_1 : 1 \to \mathrm{Val}(X^*S_1),\ldots,\hat{a}_n : 1 \to \mathrm{Val}(X^*S_n)$ dans $\mathcal{E}/X$, Où $X^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/X$ désigne le foncteur logique "de changement de base le long de $X \to 1$".

Alors on a l'équivalence suivante :

$$(a_1,\ldots,a_n) : X \to \mathrm{Val}\ S_1 \times\ldots\times \mathrm{Val}\ S_n \quad \text{factorise} \quad \mathrm{Val}(\phi;V) \quad \text{ssi}$$

$$\mathcal{E}/X \models X^*\phi\,(\hat{a}_1,\ldots,\hat{a}_n) \quad .$$

[Au cours de cet article nous utiliserons beaucoup cette équivalence qui, bien souvent, va nous permettre de caractériser $\mathrm{Val}(\phi;V)$ (voir par exemple la proposition 9 du chapitre II §2. n°3). Elle a l'avantage d'une part, d'éliminer les variables libres de ϕ et d'autre part, de n'avoir recours qu'à des sections globales, comme on le ferait dans les ensembles].

8. Voici, pour terminer, quelques règles sémantiques qui permettent de s'assurer plus rapidement de la validité d'une formule pour le modèle canonique.

- On supposera, par souci de situation concrète, que $\mathcal{E}$ est un topos de faisceaux sur un site à $\varprojlim$ finies et que la topologie de ce site est sous-canonique (tout pré-faisceau représentable est un faisceau) ce qui permet d'identifier ce site à une sous-catégorie pleine de $\mathcal{E}$.

- Ces règles sont les suivantes :
" $\mathcal{E} \models$ vrai" est toujours vrai
" $\mathcal{E} \models$ faux" ssi la famille vide $(\to 1)$ recouvre 1 (ou encore $1 \simeq \emptyset$)
$\mathcal{E} \models \phi \wedge \psi$ ssi $\mathcal{E} \models \phi$ et $\mathcal{E} \models \psi$

$\mathcal{E} \models \phi \vee \psi$ ssi il existe une famille d'objets représentables (X_i) telle que $(X_i \to 1)$ est couvrante et telle que $\mathcal{E}/X_i \models X_i^* \phi$ <u>ou</u> $\mathcal{E}/X_i^* \psi$
$\mathcal{E} \models \exists x \in S(\phi(x))$ ssi il existe une famille d'objets représentables (X_i) dans $\mathcal{E}$ telle que $(X_i \to 1)$ est couvrante et, des sections globales $a_i : 1 \to \mathrm{Val}\ X_i^* S$ telles que $\mathcal{E}/X_i \models X_i^* \phi(a_i)$
$\mathcal{E} \models \forall x \in S(\phi(x))$ ssi pour tout objet représentable X et toute section globale $a : 1 \to \mathrm{Val}(X^* S)$ alors $\mathcal{E}/X \models X^* \phi(a)$.

n°5 <u>Règles de déduction</u> (mêmes références qu'au n°3)

<u>0</u>. Si la sémantique est capable de nous renseigner sur la validité de telle ou telle formule dans un topos elle apparait vite comme étant un procédé particulièrement lourd pour déterminer la validité universelle. C'est pourquoi nous allons donner maintenant un certain nombre de règles simples qui vont nous permettre de faire des preuves syntaxiquement sans avoir nécessairement recours à la sémantique décrite précédemment.

<u>1</u>. On appelle <u>séquent</u> une expression de la forme :

$$\phi \vdash_V \psi$$

où ϕ et ψ sont des formules et V est un ensemble fini de variables contenant les variables libres de ϕ et ψ (il faut penser ces expressions comme des "implications"). On écrira aussi, plus simplement $\phi \vdash \psi$ lorsque V est minimum.
Une telle séquence est appelé <u>valide</u> pour l'interprétation M si

$$M(\phi;V) \subset M(\psi;V) \quad \text{dans} \quad \mathcal{P}(MV)$$

Ainsi, en comparant avec le n°4, <u>5</u>, ϕ est valide pour M ssi vrai $\vdash_\emptyset \phi$ est valide. Enfin on dira que $\phi \vdash_V \psi$ est universellement valide si $\phi \vdash_V \psi$ est valide pour toute interprétation dans n'importe quel topos.

2. (Théorème de complétude). En fait, un séquent $\phi \vdash_V \psi$ est universellement valide ssi on peut l'obtenir à partir d'"axiomes" et en utilisant un nombre fini de fois des "règles de déduction" figurant dans la liste suivante :

a) axiomes et règles de premier ordre

- (axiome) $\phi \vdash \phi$
- (règle) . Si $\phi \vdash_V \psi$ alors $\phi \vdash_W \psi$ à condition que $V \subset W$
- (règle du modus ponens) Si $\phi \vdash_V \psi$ et $\psi \vdash_V \theta$ alors $\phi \vdash_V \theta$
- (règle de substitution). Si $\phi \vdash_V \psi$ alors $\phi(t|x) \vdash_W \psi(t|x)$ où $\phi(t|x)$ dénote la substitution de toutes les occurences libres de x par t et où W est l'ensemble des variables libres apparaissant dans $V - \{x\}$, $\phi(t|x)$ et $\psi(t|x)$ à condition que x et t soient des termes de même type et compte tenu des précautions d'usage dans les substitutions de variables (pour plus de précision voir M. Coste [7] ou A. Boileau [4], de toute façon dans la pratique ces situations délicates n'interviennent jamais).
- (règle du $\wedge$) $\phi \vdash_V \psi \wedge \theta$ ssi $\phi \vdash_V \psi$ et $\phi \vdash_V \theta$
- (axiomes) $\phi \vdash$ vrai et faux $\vdash \phi$
- (axiome) vrai $\vdash x = x$
- (axiome) $\phi \wedge (x = y) \vdash \phi(y|x)$ (même condition que pour la règle de substitution)
- (règle du $\forall$) $\phi \vdash_V \forall x \in S(\psi)$ ssi $\phi \vdash_{V \cup \{x\}} \psi$, si x n'est pas libre dans ϕ
- (règle du $\exists$) $\exists x \in S(\phi) \vdash_V \phi$ ssi $\phi \vdash_{V \cup \{x\}} \psi$, si x n'est pas libre dans ψ
- (règle du $\rightarrow$) $\phi \vdash_V \psi \rightarrow \theta$ ssi $\phi \wedge \psi \vdash_V \theta$
- (règle du $\vee$) $\phi \vee \psi \vdash_V \theta$ ssi $\phi \vdash_V \theta$ et $\psi \vdash_V \theta$

b) axiomes d'ordre supérieur

- (extensionnalité) vrai $\vdash \forall \vec{x} \in S_1 \times \ldots \times S_n (\vec{x} \in X_1 \leftrightarrow \vec{x} \in X_2) \rightarrow X_1 = X_2$ en notant "$\vec{x} \in X$" au lieu de "$(x_1, \ldots, x_n) \in X$" et "$\forall \vec{x} \in S_1 \times \ldots \times S_n(\ldots)$" au lieu de "$\forall x_1 \in S_1 \ldots \forall x_n \in S_n(\ldots)$". Attention X_1 et X_2 sont aussi des variables de type $\Omega(S_1, \ldots, S_n)$
- (compréhension) vrai $\vdash \phi \leftrightarrow \vec{x} \in \{\vec{x} \in S_1 \times \ldots \times S_n / \phi\}$

3. Remarquons qu'on relativise les séqents $\phi \vdash \psi$ à un ensemble de variables donné V car il peut arriver, en intuitionnisme, que $\phi \vdash_V \psi$ soit valide sans que $\phi \vdash \psi$ le soit [par exemple lorsque les variables "en trop" sont de type vide !] . C'est aussi pourquoi la règle du "modus ponens" ne doit pas s'écrire " $\phi \vdash \psi$ et $\psi \vdash \theta$ entraîne $\phi \vdash \theta$ " ce qui serait faux.

4. Dans la suite de cet article nous n'utiliserons pas explicitement ces règles de déduction préférant, dans un soucis de lisibilité, utiliser une "logique intuitionniste naïve" (de même qu'on utilise systèmatiquement une "logique classique naïve" dans la pratique mathématique). Cependant, le lecteur scrupuleux pourra toujours "redresser" nos preuves à l'aide de ces règles de déduction (du moins espérons le !...).

n° 6 Familles d'objets

1. Un mot enfin sur les "familles". Sans rentrer dans le cadre des catégories fibrées (pour plus de détails voir [2] et [3]) disons qu'une famille d'objets indexée par un objet donné I, que l'on notera $(X_i)_{i \in I}$ comme dans le cas ensembliste, est un objet dans la catégorie $\mathcal{E}/I$, (la notation $(X_i)_{i \in I}$ là encore est justifiée car, si $\phi : X \to I$ désigne la flèche de $\mathcal{E}$ correspondante, X_i peut être vu comme le terme $\{x \in X/\phi(x) = i\}$ de type $\Omega(X)$) . De même $(X_i)_{i \subset I}$ et $(Y_i)_{i \in I}$ étant deux familles d'objets indexées par un même objet I, une famille d'applications $(f_i : X_i \to Y_i)_{i \in I}$ est une flèche entre ces familles d'objets dans $\mathcal{E}/I$.

2. Comme $\mathcal{E}/I$ est lui-même un topos (voir n°1) on peut donc faire les mêmes constructions "ensemblistes" pour les familles. Par exemple, on peut faire le produit de familles, l'exponentiation de familles ou la famille des parties d'une famille qui seront notés respectivement $(X_i \times Y_i)_{i\in I}$, $(X_i^{Y_i})_{i\in I}$, $(\Omega^{X_i})_{i\in I}$ comme c'est le cas lorsque $\mathcal{E} = \mathbb{E}ns$. Dans le même ordre d'idée, on parlera de "famille de groupes", "famille d'anneaux", "famille de sous-objets ouverts" ou "famille de variétés" etc... (indexée par un objet I) pour désigner des groupes, anneaux, sous-objets ouverts ou variétés dans le topos $\mathcal{E}/I$.

3. Certaines constructions sont spécifiques aux familles. C'est le cas par exemple :

a) du produit d'une famille d'objets $(X_i)_{i \in I}$, que l'on note comme d'habitude $\prod_{i \in I} X_i$, et qui est l'image de $(X_i)_{i \in I}$ par le foncteur $\mathcal{E}/I \to \mathcal{E}$ adjoint à droite du foncteur changement de base le long de la flèche $I \to 1$.

b) de la somme (encore appelée co-produit) d'une famille d'objets $(X_i)_{i \in I}$, que l'on note $\coprod_{i \in I} X_i$ et qui est l'image de $(X_i)_{i \in I}$ par le foncteur (trivial !) $\mathcal{E}/I \to \mathcal{E}$ adjoint à gauche du foncteur changement de base le long de la flèche $I \to 1$.

c) de l'intersection d'une famille de sous-objets $(A_i)_{i \in I}$ de X, que l'on note $\bigcap_{i \in I} A_i$, et qui est le sous-objet $\delta^{-1}(\prod_{i \in I} A_i \rightarrowtail \prod_{i \in I} X)$ de X où $\delta : X \to \prod_{i \in I} X$ désigne la flèche "diagonale".

d) de l'union d'une famille de sous-objets $(A_i)_{i \in I}$ de X, que l'on note $\bigcup_{i \in I} A_i$, et qui est le sous-objet $\exists_\pi(\coprod_{i \in I} A_i \rightarrowtail \coprod_{i \in I} X)$ de X où $\pi : \coprod_{i \in I} X \to X$ désigne la "co-diagonale",(c'est en fait la projection $X \times I \to X$).

4. Si maintenant t est un terme de type $\Omega(X)$ ne possédant tout au plus que la variable i de type I (on supposera pour simplifier que I est un type de base), on peut en faire une famille $(X_i)_{i \in I}$ (on dira alors en abrégé que "$(X_i)_{i \in I}$ est la famille définie par $X_i = t$"). Il suffit pour cela de considérer la flèche $\mathrm{Val}(t,i) : I \to \Omega^{\mathrm{Val}\,X}$, puis le sous-objet correspondant $F \rightarrowtail I \times \mathrm{Val}\,X$. La famille $(X_i)_{i \in I}$ est alors l'objet $(F \rightarrowtail I \times \mathrm{Val}\,X \xrightarrow{proj} I)$ dans $\mathcal{E}/I$.

5. On rencontrera enfin dans le courant de ce texte des "formules" du genre $\forall x \in X_i(\ldots)$ ou $\exists x \in X_i(\ldots)$ qui à priori n'ont pas de signification car X_i ne peut être un type puisqu'il dépend de la variable i. Cela signifie seulement que nous nous plaçons dans le topos $\mathcal{E}/I$ et que les types de base ne sont plus des objets de $\mathcal{E}$ mais des familles d'objets indexées par I. Ainsi, de façon plus correcte, mais plus lourde, on devrait donc écrire $\forall x \in (X_i)_{i \in I}(\ldots)$ ou $\exists x \in (X_i)_{i \in I}(\ldots)$ ce que l'on écrit en fait $\forall i \in I \not\in \forall x \in X_i(\ldots)$ ou $\forall i \in I\ \exists x \in X_i(\ldots)$. Par exemple, au Chapitre III, §4, n°1, 2, au lieu d'écrire

$$\forall f \in (R^{\neg\neg\{x\}})_{x \in X}\ \exists g \in (R^X)_{x \in X}(g_{(\neg\neg\{x\}}\ )_{x \in X} = f)$$

on écrit en fait :

$$\forall x \in X \quad \forall f \in R^{\neg\neg\{x\}}\ \exists g \in R^X\ (g_{\neg\neg\{x\}} = f)$$

ou encore, en utilisant les simplifications du n°3, 6 :

$$\forall x \in X\ \ \forall f : \neg\neg\{x\} \to R \quad \exists g : X \to R(g_{\neg\neg\{x\}} = f) \quad .$$

§2. Quelques modèles de base

n° 0 . Tout au long de ce travail nous aurons besoin de manipuler quelques topos "de base". C'est pourquoi, au lieu d'en donner les constructions au fur et à mesure de leur apparition dans le texte, ce qui l'alourdirait beaucoup et rendrait bien souvent les références malaisées, nous avons préféré les décrire toutes dans le préliminaire. Cela nous permet, en plus, de le faire avec un maximum de détails.

- Tous les topos qui seront décrits maintenant sont des topos de Grothendieck. De ce fait, seul la connaissance de leur site de base suffit à les définir ou encore, de leur catégorie de base munie d'une prétopologie (voir §1. n°2).

- $\mathcal{C}$ étant une catégorie et C un objet de $\mathcal{C}$, on note C^{op} et on le nomme : <u>objet dual</u> de $\mathcal{C}$, l'objet C lui-même, considéré dans la catégorie $\mathcal{C}^{op}$, duale de $\mathcal{C}$. De même, si $f : C \to C'$ est une flèche de $\mathcal{C}$, $f^{op} : C'^{op} \to C^{op}$ est la même flèche f, considérée dans $\mathcal{C}^{op}$.

- Enfin comme chacune des prétopologies de Grothendieck qui vont suivre est sous-canonique (i.e. tous les préfaisceaux représentables sont des faisceaux) son site se plonge de façon pleinement fidèle dans son topos de faisceaux. Aussi est-il naturel d'identifier les objets du site avec ceux du topos.

n°1 En topologie

Soit $\mathcal{T}op$ la catégorie des espaces topologiques. On la munit de la prétopologie formée par les recouvrements ouverts [i.e. $(X_i \to X)_i$ est couvrante ssi X_i est un sous-espace ouvert de X et $X = \bigcup_i X_i$] . On note $\mathbb{T}op$ le topos des faisceaux sur le site obtenu (c'est un gros topos !).

n°2 En géométrie algébrique

<u>1</u>. Soit $\mathcal{A}_k$ la catégorie des k-algèbres (commutatives unitaires) où k est un anneau (commutatif unitaire) fixé. On muni se catégorie duale $\mathcal{A}_k^{op}$ de la prétopologie (zar) [resp. (et), (fppf)] . [On rappelle (voir [9]) que pour la prétopologie (zar) [resp. (et),(fppf)] les familles couvrantes sont les familles $(A_i^{op} \xrightarrow{f_i^{op}} A^{op})_i$ où les morphismes $\operatorname{Spec} A_i \to \operatorname{Spec} A$ (entre schémas affines) sont des immersions ouvertes (resp. morphismes étales de type fini, morphismes plats localement de type fini) tels que :

$$\bigcup_i \mathrm{Im\ Spec}\ f_i = \mathrm{Spec}\ A$$

On note $\mathbb{Z}\mathrm{ar}_k$ [resp. $\mathbb{E}\mathrm{t}_k, \mathbb{P}\ell_k$] le topos des faisceaux sur le site obtenu [on l'appelle encore "topos de Zariski, sur k" (resp. "topos étale, sur k", "topos plat, sur k")] .

2. Soit maintenant $\mathcal{A}\mathrm{pf}_k$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{A}_k$ formée des k-algèbres de présentation finie. En munissant $\mathcal{A}\mathrm{pf}_k^{op}$ des mêmes topologies que précédemment on obtient de nouveaux sites, et les topos de faisceaux sur ces différents sites sont notés resp. $\mathbb{Z}\mathrm{ar}_k^{(pf)}$, $\mathbb{E}\mathrm{t}_k^{(pf)}$ et $\mathbb{P}\ell_k^{(pf)}$

3. Enfin on emploiera l'expression volontairement vague : "topos de k-algèbres" pour désigner un quelconque de ces 6 topos et "topos de k-algèbres de présentation finie" pour désigner les trois derniers topos construits sur le site $\mathcal{A}\mathrm{pf}_k^{op}$.

n°3 En géométrie différentielle

1. Soit $\mathcal{L}$ la catégorie qui a pour objets les ouverts de $\mathbb{R}^n$ (n variable) et pour flèches, les applications C^∞ entre ces ouverts. On munie cette catégorie, de la prétopologie formée par les recouvrements ouverts. On note $\mathbb{L}\mathrm{iss}$ le topos des faisceaux sur le site obtenu. Ce topos est souvent appelé "topos lisse" dans la littérature.

2. (Voir aussi l'Appendice §2 n°3). Soit $\mathcal{D}^{op}$ la catégorie duale de la catégorie des anneaux lisses de type fini (voir l'Appendice §1 n°4 pour leur définition). On munit cette catégorie de la prétopologie formée par les "recouvrements ouverts" (i.e. les familles de la forme $(A_{U_i}^{op} \to A^{op})_i$ ou les U_i sont des ouverts de Spec A tels que $\bigcup_i U_i = \mathrm{Spec}\ A$). On note $\mathbb{D}$ le topos des faisceaux sur le site obtenu. Ce topos sera souvent désigné sous le nom de "topos de Dubuc", car c'est E. Dubuc qui l'a construit pour la première fois et montré en quoi il était "bien adapté à la géométrie différentielle".

CHAPITRE I

UTILISATION DES NILPOTENTS

§0. Introduction

L'utilisation des nilpotents n'est pas nouvelle en mathématiques. Ils sont même déjà très abondamment employés par les géomètres algébristes (c'est d'ailleurs, en partie pourquoi ces derniers utilisent des schémas plutôt que des variétés algébriques car la présence d'anneaux réduits leur interdit précisément l'utilisation des nilpotents). Cependant jamais comme en "géométrie différentielle synthétique" ceux-ci n'ont été explicitement vus comme des éléments infinitésimaux de la droite affine. Ici le point de vue est adopté de façon délibérée, ce qui permet de rendre explicite ce qui était le plus souvent implicite en géométrie algébrique. Mais c'est surtout sur le plan philosophique que l'on peut y voir le plus gros intérêt puisque cela permet de renouer avec la façon de voir des pionniers de l'analyse :

On revient au "calcul infinitésimal". On ne peut alors s'empêcher de penser à cette autre approche logique de la méthode infinitésimale qu'est "l'analyse non standard". Toutefois ces deux approches sont fort différentes à bien des égards. En effet le point de vue de la géométrie différentielle synthétique reste beaucoup plus algébrique ou même équationnel (du moins si on se réfère à ce chapitre qui correspond plus spécifiquement à la conception de Lauwvere et Kock) que l'analyse non standard. D'autre part son étude ne se fait, le plus souvent, que dans un seul modèle et non à cheval entre un modèle "standard" et un "non-standard" (tous les ensembles sont de même nature). Enfin, le terrain d'application de la géométrie différentielle synthétique n'est pas uniquement réservé a l'analyse mais elle se tourne plus franchement vers l'algèbre (et même, plus précisément, vers la géométrie algébrique complexe mais aussi réelle). Cependant, le principal handicap de la géométrie différentielle synthétique est l'utilisation d'une logique plus faible que la logique classique, ce qui ne lui permet pas de se laisser aller à l'habituelle souplesse de cette dernière.
Nous verrons pourtant, dans les chapitres ultérieurs, qu'une étude plus approfondie de la logique intuitionniste peut avoir certains avantages non négligeables.

§1. Préliminaire d'algèbre linéaire

n° 0. Voici quelques définitions et résultats d'algèbre linéaire dans les topos qui, essentiellement, ont été établis par A. Kock (voir [22]) en 1976. Nous en aurons besoin lorsque nous aborderons la géométrie différentielle synthétique.

- On se place dans un topos élémentaire quelconque, et on raisonne en "logique intuitionniste naïve" (voir Chapitre 0, §1, n°5, 4).

n° 1. Les déterminants

0. Commençons par quelques évidences.

1. Soit R un anneau commutatif unitaire fixé. Les définitions de R-module et d'application linéaire sont les mêmes que dans le cas usuel. M et N étant deux R-modules, nous noterons $L(M,N)$ le R-module des applications linéaires de M dans N.

2. On a une bijection canonique :

$$L(R^p,R^q) \underset{m}{\xrightarrow{\sim}} Mat(q\times p) \qquad \text{(en notant } Mat(q\times p) = R^{qp})$$

donnée par les formules suivantes :

$$m(u)_{ij} = (u(e_j))_i \qquad \text{et} \qquad m^{-1}M(x)_i = \sum_{j=1}^{p} M_{ij}\, x_j$$

où $(-)_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ projection et e_j est le p-uplet $(0,0,\dots,0,1,0,\dots,0)$ dans lequel le 1 est mis à la $j^{\text{ème}}$ place.
Ceci permet de munir $Mat(n\times n)$ d'une structure de R-algèbre (non commutative) comme on le fait habituellement dans les ensembles.

3. On peut définir aussi, sans changement, le déterminant d'une application linéaire $R^n \to R^n$ ou d'une matrice $n\times n$ et, comme dans le cas usuel on a :

$$\det(A.B) = \det A.\ \det B$$
$$\det(I) = 1 \quad \text{où } I \text{ est la matrice unité.}$$

4. Soit A une matrice $n\times n$ alors :

A est inversible dans $Mat(n\times n)$ ssi det A est inversible dans R.

n° 2 Les corps commutatifs

0. Nous allons nous intéresser dans le n°3 au cas des "espaces vectoriels", c'est-à-dire supposer que l'anneau R est en fait un corps commutatif. Cependant, en intuitionnisme de nombreuses définitions de corps sont possibles (elles sont évidemment non équivalentes). La définition de corps de Kock que nous allons donner ici à l'aventage d'avoir comme exemples, tous les anneaux "canoniques" des modèles envisagés ici et, d'être suffisante pour faire de l'algèbre linéaire.

1. Soit R un anneau commutatif unitaire tel que $0 \neq 1$ [qui est l'abréviation de $\neg(0 = 1)$] , on dit que :

a) R est local s'il satisfait la formule suivante :

$$\forall x \in R \quad (x \text{ inversible} \ \vee \ 1-x \text{ inversible})$$

b) R est un corps de fractions [20] s'il satisfait la formule suivante :

$$\forall x \in R \quad (x \neq 0 \rightarrow x \ \text{ inversible})$$

c) R est un corps de Kock s'il satisfait, pour chaque entier n, la formule :

$$\forall x_1 \in R \ldots \forall x_n \in R \left[\neg \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i = 0) \rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} (x_i \ \text{ inversible})\right]$$

où les écritures $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} \phi_i$ et $\bigvee\limits_{i=1}^{n} \phi_i$ sont resp. des abréviations de $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \ldots \wedge \phi_n$ et $\phi_1 \vee \phi_2 \vee \ldots \vee \phi_n$.

2. On voit facilement qu'un corps de Kock est un corps de fraction et un anneau local. Par contre un corps de fraction est un corps de Kock ssi pour tout entier n il satisfait la formule :

$$\forall x_1 \in R \ldots \forall x_n \in R \ \forall x_1' \in R \ldots \forall x_n' \in R \left[\neg \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i = x_i') \rightarrow \bigvee_{i=1}^{n} \neg(x_i = x_i')\right]$$

Nous verrons au Chap. II, §1, n°2, 9 que cette condition est en fait de "nature topologique" (!) elle signifie seulement que les R^n sont séparés...

3. Exemples

a) En géométrie algébrique. On se place dans "un topos de k-algèbres" (voir terminologie au Chapitre 0, §2) où k est un anneau commutatif unitaire quelconque, et on considère l'anneau canonique R (i.e. $R = k[X]^{op}$ ou encore R est le "foncteur oubliant la structure d'anneau" considéré comme faisceau sur $\mathcal{A}_k^{op}$ ou $\mathcal{A}pf_k^{op}$) . Alors :

Théorème (Kock). R est un corps de Kock.

Preuve : Voir [22]. En fait on procède comme dans l'exemple suivant :

b) En géométrie différentielle. Considérons dans le topos de Dubuc (voir définition à l'appendice) l'anneau cononique R (i.e. $R = C^\infty \mathbb{R}^{op}$ ou encore R est le "foncteur oubliant la structure d'anneau lisse" $\mathfrak{D} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$). Alors R est un corps de Kock.

Preuve : 1) Soit $A \simeq C^\infty\mathbb{R}^m/I$ un anneau lisse de type fini et $f_1,\dots,f_n : A^{op} \to R$ des flèches du topos. Notons encore $f_1,\dots,f_n$ des éléments de $C^\infty\mathbb{R}^m$ qui les engendrent. Alors :

$(f_1,\dots,f_n) : A^{op} \to R^n$ factorise $\mathrm{Val}(\neg \bigwedge_{i=1}^{n} (x_i = 0); (x_1,\dots,x_n))$

[voir la notation $\mathrm{Val}(\phi;V)$ au chapitre 0 §1, n°4]

ssi $\neg \bigcap_{i=1}^{n} (f_1,\dots,f_n)^{-1} \mathrm{Val}(x_i = 0; (x_1,\dots,x_n)) = \mathrm{vrai}_{A^{op}}$

[car $(f_1,\dots,f_n)^{-1}$ préserve l'intersection et la négation]

ssi $\bigcap_{i=1}^{n} (f_1,\dots,f_n)^{-1} \mathrm{Val}(\dots) = \mathrm{Faux}$

ssi $\bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1} \mathrm{Val}(x_i = 0; x_i) = \mathrm{Faux}$

ssi $\bigcap_{i=1}^{n} C^\infty \mathbb{R}^m/I + (f_i)^{op} = \mathrm{Faux}$

[car on a $\mathrm{Val}(x_i = 0; x_i) = (C^\infty\mathbb{R}/(\mathrm{Id})^{op} \rightarrowtail C^\infty\mathbb{R}^{op})$

et le carré ci-dessous est un produit fibré dans $\mathbb{D}$]

$$\begin{tikzcd}
C^\infty\mathbb{R}^m/I + (f_i)^{op} \arrow[r] \arrow[d, tail] & C^\infty\mathbb{R}/(\mathrm{Id})^{op} \arrow[d, tail] \\
C^\infty\mathbb{R}^m/I^{op} \arrow[r] & C^\infty\mathbb{R}^{op}
\end{tikzcd}$$

ssi $C^\infty\mathbb{R}^m/I + (f_1,\dots,f_n)^{op} = \mathrm{Faux}$

ssi $C^\infty\mathbb{R}^m/I + (f_1,\dots,f_n)$ est l'anneau lisse nul

ssi $Z(I + (f_1,\dots,f_n)) = \emptyset$ [par le théorème des zéros] ssi $ZI \subset \bigcup_{i=1}^{n} \neg Zf_i$

ssi $\text{Spec } A = \bigcup_{i=1}^{n} \text{Spec } A\,\{f_i^{-1}\}$

ssi $\bigcup_{i=1}^{n} A\{f_i^{-1}\}^{op} = \text{vrai}_{A^{op}}$ [voir la définition de la prétopologie sur $\mathfrak{F}^{op}$]

ssi $\bigcup_{i=1}^{n} f_i^{-1}\,\text{Val}(x_i \text{ inversible}; x_i) = \text{vrai}$

[car $\text{Val}(x \text{ inversible}; x) = C^{\infty}\mathbb{R}\ \{id^{-1}\}^{op}]_n$

ssi $(f_1,\dots,f_n) : A^{op} \to R^n$ factorise $\text{Val}(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \text{ inversible}; (x_1,\dots,x_n))$

2) D'autre part on a : $\text{Val}(\neg(0 = 1); \emptyset) = \neg\text{Val}(0 = 1; \emptyset)$ (où $\emptyset$ désigne la suite vide) or $\text{Val}(0 = 1;\emptyset)$ est l'égalisateur de $0,1 : 1 \rightrightarrows R$ par suite $\text{Val}(0 = 1;\emptyset) = \text{Faux}$ (puisque dualement dans $\mathfrak{B}$ le coégalisateur des morphismes correspondant $C^{\infty}\mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ est l'anneau lisse nul) ce qui prouve que R satisfait $0 \neq 1$.

n° 3 <u>Rang d'une matrice</u>

<u>1</u>. Soit maintenant R un corps de Kock fixé. M étant un espace vectoriel sur R et m étant un entier (externe) alors on dit qu'une famille $v = (v_1,\dots,v_m) \in M^m$ est <u>libre</u> ssi $\forall t_1 \in R \dots \forall t_m \in R(\sum_1^m t_i v_i = 0 \to \bigwedge_{i=1}^{m} (t_i = 0))$ [en fait, pour être correct, il faudrait dire que l'écriture "v libre" est une abréviation de la formule précédente]. On dit aussi que v est <u>de rang</u> $\geq r$ ssi $\bigvee_{s \in S(r,m)}$ "V_s libre" où $S(r,m)$ est l'ensemble (externe) des injections croissantes de $\{1,\dots,r\}$ dans $\{1,\dots,m\}$ et où $V_s = (V_{s_1},\dots,V_{s_r})$.

<u>2</u>. Théorème (Kock). Soit B une matrice $n \times m$ et r un entier $r \leq n$ et $r \leq m$, alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $\exists A \in \text{Mat}(r \times r)$ ("A sous-matrice de B" $\wedge$ det A inversible)

ii) $\ell(B)$ est de rang $\geq r$

iii) $c(B)$ est de rang $\geq r$

où "A sous-matrice de B" signifie $\bigvee_{(s,s') \in S(r,n) \times S(r,m)} (A = B_{(s,s')})$

en notant $B_{(s,s')}$ la matrice $(B_{s_i,s'_j})_{ij}$ et où $\ell : R^{nm} \to (R^m)^n$ et $c : R^{nm} \to (R^n)^m$ sont les bijections canoniques.

3. On dit alors que B est de rang $\geq r$ s'il satisfait une des trois conditions équivalentes du 2.

4. Théorème (Kock). Soit A une matrice $n \times m$. Alors on a :

$$\text{"}A \text{ est de rang } \geq n\text{"} \rightarrow \exists B \in \mathrm{Mat}(m \times n) \quad (A.B = I)$$

$$\text{"}A \text{ est de rang } \geq m\text{"} \rightarrow \exists B \in \mathrm{Mat}(m \times n) \quad (B.A = I)$$

En particulier une matrice qui a des lignes (resp. Colonnes) indépendantes admet un inverse à droite (resp. gauche).

§2. L'axiome de Kock-Lawvere

n°0 Ce paragraphe contient essentiellement les bases de ce qu'on appelle maintenant la "géométrie différentielle synthétique". Pour plus de détails nous vous renvoyons au livre de A. Kock [23].

n°1 Enoncé de l'axiome de Kock-Lawvere

0. Plaçons-nous, comme au §1, dans un topos quelconque et raisonnons en "logique intuitionniste naïve" (voir Chapitre 0, §1, n°5, 4).

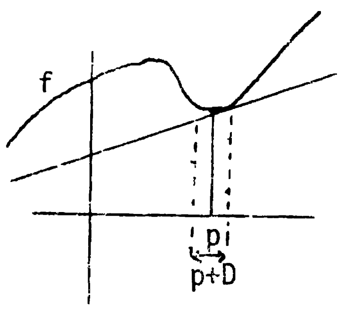
1. Soit R un anneau commutatif unitaire fixé. Notons $D = \{d \in R / d^2 = 0\}$. (avec les conventions c'est un terme de type $\Omega(R)$ i.e. une flèche $1 \to \Omega^R$) . Considérons alors l'application suivante :

$$R \times R \xrightarrow{\mathrm{Aff}} R^D$$
$$(a,b) \longmapsto (d \mapsto a+bd)$$

Définition (Kock-Lauwvere). On dit que R est un anneau de type ligne si l'application Aff précédente est bijective.

2. Intuitivement on peut voir cet axiome de la façon suivante :

- En interprétant D comme étant "un voisinage infinitésimal" de l'origine (en géométrie différentielle synthétique on l'appelle le premier voisinage de l'origine), l'axiome nous dit alors (ou plutôt une conséquence de cet axiome) que toute application $R \to R$ "infinitésimalement" peut être assimilée à une droite (!).



- En effet, pour toute application $f : R \to R$ et tout "point" p de R il existe un unique couple $(a,b) \in R \times R$ tel que, sur D on ait : $f(p+(\ )) = \mathrm{Aff}(a,b)$ ou encore tel que $\forall\, d \in D (f(p+d) = a+bd)$ ce qui signifie bien que f, restreinte à $p+D$, est affine.

- Il est clair que la droite affine qui vient d'être décrite n'est autre que la tangente à la courbe définie par f, au point p. Mais la connaissance des tangentes à une courbe nous donne aussi celle de sa dérivée. Nous voyons donc, dès maintenant l'intérêt d'un tel axiome pour faire du "calcul différentiel" dans un topos.

- Remarquons enfin, qu'un tel axiome ne nécessite, en plus de la structure d'anneau, aucune autre structure supplémentaire de nature plus ou moins topologique. Le "calcul différentiel" devient ainsi un simple calcul entièrement algébrique.

n°2 Exemples :

1. Dans les ensembles : Pour un anneau, être de type ligne est très nettement incompatible avec la logique ensembliste habituelle. En fait, dans **Ens** , le seul anneau de type ligne est l'anneau nul !.

Preuve : Soit la fonction $f : D \to R$ définie par $fo = 0$ et $fd = 1$ si $d \neq 0$. (on remarque l'utilisation du tiers exclu !). On voit facilement que cette fonction n'est affine que si $D = \{0\}$. Or dans ce cas la bijection "Aff" entraîne que $0 = 1$. D'où $R = 0$.

2. En géométrie algébrique : Plaçons nous dans "un topos de k-algèbres" (voir. définition au Chapitre 0, §2) où k est un anneau commutatif unitaire quelconque. Dans ce topos, considérons l'anneau canonique R (i.e. $R = k[X]^{op}$ ou encore R est le "foncteur oubliant la structure d'anneau" considéré comme faisceau sur $\mathcal{A}_k^{op}$ ou $\mathcal{A}pf_k^{op}$) . D est alors le sous-foncteur de R défini par $D(A) = \{d \in A / d^2 = 0\}$. En fait D est lui-même représentable par $k[\varepsilon]^{op} = k[X]/(X^2)^{op}$.

Théorème (Kock-Lawvere). R est un anneau de type ligne.

Preuve : comme :

$(R \times R)(A) \simeq RA \times RA = A \times A$

et $(R^D)(A) \simeq \mathrm{Hom}(D \times A^{op}, R) \simeq \mathrm{Hom}(k[\varepsilon]^{op} \times A^{op}, R) \simeq \mathrm{Hom}((k[\varepsilon] \underset{k}{\otimes} A)^{op}, R) \simeq$

$\simeq k[\varepsilon] \underset{k}{\otimes} A \simeq A[\varepsilon]$

le morphisme $\mathrm{Aff} : R \times R \to R^D$, appliqué en A, devient dans ce cas :

$$A \times A \longrightarrow A[\varepsilon]$$
$$(a,b) \longmapsto a+b\varepsilon$$

qui est évidemment bijectif.

3. En géométrie différentielle. Prenons, comme modèle, le topos de Dubuc (voir définition, appendice) et soit R l'anneau cononique (i.e. R est, comme dans le cas algébrique, le foncteur d'oubli $\mathcal{D} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ qui est représentable par $C^\infty\mathbb{R}^{op}$). De la même façon, D est le sous-foncteur de R défini par $DA = \{d \in A/d^2 = 0\}$. Il est, là aussi, représentable par $\mathbb{R}[\varepsilon]^{op}$ [où $\mathbb{R}[\varepsilon]$, qui est le quotient $\mathbb{R}[X]/(X^2)$ peut être vu aussi comme le quotient $C^\infty\mathbb{R}/(Id^2)$ (voir l'Appendice, §1, n°1, 4)

Théorème (Dubuc) : R est un anneau de type ligne.

Preuve : comme dans l'exemple "algébrique" cela revient à montrer que, pour tout anneau lisse A l'application :

$$A \times A \longrightarrow A\{X\}/(X^2)$$
$$(a,b) \longmapsto a + b\widehat{X}$$

est une bijection. En notant $A\{X\}$ l'anneau lisse $A \otimes C^\infty\mathbb{R}$ où X est l'image de l'identité (considéré comme élément de $C^\infty\mathbb{R}$) par le morphisme canonique $C^\infty\mathbb{R} \to A \otimes C^\infty\mathbb{R}$ (il vérifie la "même" propriété universelle que son homologue $A[X]$ de l'algèbre commutative). Montrons maintenant que cette application est bijective. Pour cela soit $C^\infty\mathbb{R}^n/I$ une présentation de A. Alors on a : $A\{X\}/(X^2) \simeq C^\infty\mathbb{R}^{n+1}/\overline{p^*I+(q^2)}$ où $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ et $q : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sont les projections. L'application précédente devient maintenant

$$C^\infty\mathbb{R}^n/I \times C^\infty\mathbb{R}^n/I \longrightarrow C^\infty\mathbb{R}^{n+1}/\overline{p^*I+(q^2)}$$
$$(\widehat{f}\ ,\ \widehat{g}) \longmapsto \widehat{f \circ p + (g \circ p).q}$$

- Elle est surjective, car toute application $h \in C^\infty\mathbb{R}^{n+1}$ s'écrit :

$$h(\vec{x},x) = h(\vec{x},0) + \frac{\partial h}{\partial x}(\vec{x},0).x + k(\vec{x},x).x^2$$

où $k \in C^\infty\mathbb{R}^{n+1}$.

- Elle est aussi injective. En effet soit un couple $(\hat{f},\hat{g}) \in A \times A$ tel que

$$(f \circ p + (g o p).q)_{(\vec{X},0)} \in (p^*I + (q^2))_{(\vec{X},0)}$$

pour tout $\vec{X} \in ZI$. Donc, localement autour d'un point $(\vec{X},0)$ de $ZI \times \{0\}$ on a :

$$f(\vec{x}) + g(\vec{x}).x = \sum_i \lambda_i(\vec{x},x).h_i(\vec{x}) + k(\vec{x}).x^2$$

où $h_i \in I$ pour tout i et où $\lambda_i \in C^\infty \mathbf{R}^{n+1}$. En particulier pour $x = 0$,

$f(\vec{x}) = \sum_i \lambda_i(\vec{x},0).h_i(\vec{x})$ donc f appartenant localement à I appartient globalement à celui-ci. Toujours localement

$$g(\vec{x}).x = \sum_i (\lambda_i(\vec{x},x) - \lambda_i(\vec{x},0)).h_i(\vec{x}) + k(\vec{x}).x^2$$

Mais d'après le lemme d'Hadamard $\lambda_i(\vec{x},x) - \lambda_i(\vec{x},0) = \mu_i(\vec{x},x).x$
où $\mu_i \in C^\infty \mathbf{R}^{n+1}$. Ainsi $g(\vec{x}).x = \sum_i \mu_i(\vec{x},x).x.h_i(\vec{x}) + k(\vec{x}).x^2$ et donc

$g(\vec{x}) = \sum_i \mu_i(\vec{x},x).h_i(\vec{x}) + k(\vec{x}).x$. En particulier, pour $x = 0$

$g(\vec{x}) = \sum \mu_i(\vec{x},o).h_i(\vec{x})$. Ce qui prouve, là encore, que g appartenant localement à I, y appartient en fait globalement.

n°3 Dérivées

1. Comme nous l'avons dit au n°1 l'axiome de type ligne entraine l'existence de la dérivée d'une fonction de R dans R.

- En effet, pour toute fonction $f : R \to R$ et tout point $p \in R$ nous avons vu qu'il existe un unique couple $(a,b) \in R \times R$ tel que :

$$\forall\, d \in D\ (f(p+d) = a+bd)$$

En fait, en faisant $d = 0$, on voit que $a = fp$. Quant à b il dépend lui aussi du point p. Notons le $f'p$ (c'est bien le coefficient directeur de la droite affine tangente à f au point p). Il est alors naturel d'appeler l'application $p \mapsto f'p$, la dérivée de f. La formule précédente s'écrit alors :

$$\forall\, d \in D\ (f(p+d) = fp + f'p.d)$$

qui n'est autre que le développement de Taylor de la fonction f tronqué à l'ordre 1.

- Ainsi, dans ce contexte, toute fonction $R \to R$ est dérivable. De ce fait, toute fonction $R \to R$ est aussi indéfiniment dérivable.

2. On peut légèrement généraliser la définition de dérivée d'une fonction f au cas ou f n'est pas définie sur R tout entier.

Soit p un élément de R et V une partie de R telle que $\forall\, d \in D\ (p+d \in V)$ Alors, comme au 1. , on peut reproduire la définition de la dérivée au point p d'une fonction f définie (seulement) sur V . Et, évidemment, si V satisfait la condition plus forte suivante : $\forall\, x \in R\ \forall\, d \in D\ (x \in V \to x+d \in V)$ la dérivée de f peut être définie sur V tout entier.

Ainsi, une fonction définie sur D lui même admet toujours une dérivée en zéro mais généralement ne peut admettre une dérivée globalement sur D tout entier, car D n'étant pas stable par somme, il ne peut satisfaire la condition "forte" précédente.

3. a) En géométrie algébrique, la dérivée d'une fonction $R \to R$ est bien la dérivée du polynome correspondant. Plus généralement même, si $f(X)/g(X)$ est une fraction rationnelle, la flèche correspondante dans le topos ayant un domaine $V = k[X][(g(X)^{-1}]^{op}$ qui satisfait la condition "forte" donnée au 2. elle admet une dérivée dans le topos qui n'est autre que la flèche correspondant à la dérivée habituelle de cette fraction rationnelle.

b) Comme on aurait pu le prévoir, en géométrie différentielle, dérivée "abstraite" et dérivée "habituelle" coïncident, même lorsque la fonction n'est définie que sur un ouvert U de $\mathbb{R}$, car dans ce cas la flèche correspondante du topos est définie sur $C^{\infty}U^{op} \subset R$ qui satisfait bien la condition "forte" du 2.

4. Etudions maintenant le cas de fonctions à plusieurs variables.
Soit $p = (p_1,\dots,p_n)$ un "point" (c'est-à-dire un élément) de R^n et V une partie de R^n telle que, pour un indice $i \leq n$ on ait :

$$\forall\, d \in D\ \ [(p_1,\dots,p_{i-1},p_i+d,p_{i+1},\dots,p_n) \in V]$$

Soit maintenant $f : V \to R$ une application. On définit alors de façon habituelle la dérivée partielle de f au point p par rapport à la variable x_i , c'est-à-dire que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ est la dérivée de l'application $x \mapsto f(p_1,\dots,p_{i-1},x,p_{i+1},\dots,p_n)$ au point p_i .

5. Notons aussi, pour abréger, $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f$ au lieu de $\frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial}{\partial x_j} f)$.

Comme dans le cas classique on a le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$V \subset R^n$ étant une partie suffisamment bonne (voir le 6) ,

. on définit aussi la matrice jacobienne d'une fonction $f : V \to R^m$ au point $p \in V$ ainsi que son jacobien au point p (on le notera $\frac{\partial f}{\partial x}$ (p) ou $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ (p)) lorsque $n = m$. Enfin, grâce à la bijection $Mat(n \times m) \simeq L(R^n,R^m)$ (voir §1, n°1), on peut aussi parler de la dérivée de f en p, que l'on notera df(p).

n°4. Microlinéarité et fibré tangent

0. Si l'on veut étendre le calcul différentiel à des objets du modèle autres que R^n il va falloir imposer quelques conditions à ces objets.

1. Pour en arriver là, considérons tout d'abord quelques "voisinages infinitésimaux" dans R^n . Notons $D^{(n)} = \{(d_1,\ldots,d_n) \in R^n / \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} (d_i d_j = 0)\}$ (même remarque qu'au n°1, 1).

Notons aussi, plus généralement, $D^{(n)}(x) = x+D^{(n)}$, ou encore :
$D^{(n)}(x) = \{(x'_1,\ldots,x'_n) \in R^n / \bigwedge\!\!\!\bigwedge_{i,j} (x_i - x'_i)(x_j - x'_j) = 0\}$ où $x = (x,\ldots,x_n) \in R^n$.

- Considérons aussi les différentes applications suivantes :

$$D \xrightarrow{\pi_i} D^{(n)}$$
$$d \longmapsto (0,\ldots,0,d,0,\ldots,0) \qquad \text{(d étant situé à la } i^{\text{ème}} \text{ place)}$$

2. On peut maintenant formuler la définition suivante :
Un objet M est appelé micro-linéaire si, pour tout $p \in M$ l'application suivante est bijective :

$$\{f : D^{(n)} \to M \,/\, fo = p\} \to \{f : D \to M \,/\, fo = p\}^n$$
$$f \longmapsto (f \circ \pi_i)_{i \le n}$$

Nous verrons au cours de ce sous-paragraphe que de tels objets ont de "bons" fibrés tangents.

3. Exemples : Dans la plupart des modèles de la "géométrie différentielle synthétique" R est mocrolinéaire. En particulier pour les topos de k-algèbres, en géométrie algébrique ou le topos de Dubuc, en géométrie différentielle (voir [23]). Dans le cas de la géométrie algébrique, par exemple, comme pour une k-algèbre A,

$R^D(A) \simeq A[X]/(X^2) = A[\varepsilon]$ (voir le n°2) et

$R^{D(n)}(A) \simeq A[X_1,\dots,X_n]/(X_iX_j/1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n) = A[\eta_1,\dots,\eta_2]$

il suffit de vérifier que l'application suivante est bijective :

$$A[\eta_1,\dots,\eta_n] \longrightarrow A[\varepsilon_1] \times_A A[\varepsilon_2] \times_A \dots \times_A A[\varepsilon_n]$$

$$a+b_1\eta_1+\dots+b_n\eta_n \longmapsto (a+b_1\varepsilon_1, a+b_2\varepsilon_2,\dots,a+b_n\varepsilon_n)$$

4. A partir de l'anneau canonique R on construit d'autres exemples à l'aide de la proposition suivante :

Si M est micro-linéaire il en est de même de M^X, pour tout objet X. En particulier, pour tout entier n, M^n est micro-linéaire.

5. M étant un objet quelconque (que l'on pensera comme une variété) un vecteur tangent à M et de point de base $p \in M$ est une application $t : D \to M$ telle que $t(0) = p$ (on comprend bien cette terminologie en imaginant un vecteur tangent comme un "chemin infinitésimal"). L'espace tangent à M au point p est donc

$$T_pM = \{t \in M^D / to = p\}$$

Quant au fibré tangent, c'est tout simplement M^D (en fait on a bien $M^D = \coprod_p T_pM$)
La "fibration" étant donnée par l'application $M^D \to M$ définie par $t \mapsto t(0)$.

6. a) Lorsque M est micro-linéaire, T_pM est muni canoniquement d'une structure de R-module. En effet :

La loi de composition externe est donnée par l'application :

$$\begin{aligned} R \times T_pM &\longrightarrow T_pM \\ (r,t) &\longmapsto (d \mapsto t(rd)) \end{aligned}$$

Quant à la loi de groupe, on l'obtient par le composé suivant :

$$T_pM \times T_pM = \{t : D \to M / t\,o = p\}^2 \xrightarrow[\sim]{} \{t : D^{(2)} \to M / t\,o = p\} \longrightarrow \{t : D \to M / t\,o = p\} = T_pM$$

où la flèche de gauche provient de la micro-linéarité de M et celle de droite est $t \mapsto t \circ \delta$, en notant $\delta : D \to D^{(2)}$ l'application $d \mapsto (d,d)$.

b) De même lorsque $f : M \to N$ est une application entre objets micro-linéaires, l'application canonique $T_pf : T_pM \to T_{fp}N$ est linéaire.

7. a) Lorsque on suppose seulement que R est de type ligne, l'application suivante est bijective :

$$\begin{aligned} R^n &\xrightarrow{a} T_pR^n \\ v &\longmapsto (d \mapsto p+dv) \end{aligned}$$

b) Si on suppose, de plus, que R est micro-linéaire a est alors un isomorphisme de R-module.

8. Si maintenant $f : R^n \to R^m$ est une application quelconque et p un point de R^n , on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} T_pR^n \arrow[r, "T_pf"'] & T_{fp}R^m \\ R^n \arrow[u, "a"] \arrow[r, "df(p)"] & R^m \arrow[u, "a"'] \end{tikzcd}$$

D'autre part $f(D^{(n)}(p)) \subset D^{(m)}(fp)$ et on a la formule :

$$\forall\, d \in D^{(n)}\ (f(p+d) - fp = df(p)(d)) .$$

9. Des propositions précédentes et du §1 il résulte que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $n = m$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(p)$ est inversible dans R,

b) $df(p) : R^n \to R^m$ est bijective,

c) $T_p f : T_p R^n \to T_{fp} R^m$ est bijective,

d) la restriction $f : D^{(n)}(p) \to D^{(m)}(fp)$ est bijective.

10. L'équivalence (a)$\Leftrightarrow$(d) donne une première forme du théorème d'inversion "infinitésimale". Cependant $D^{(n)}(p)$ est un voisinage "si infinitésimal" que le théorème est quasiment tautologique. Dans la suite de ce travail nous allons progressivement "grossir" ce "voisinage" de p afin d'obtenir des théorèmes d'inversion de plus en plus forts.

n°5. Application 1-étales et 1-variétés (voir Kock-Reyes [24])

0. Nous allons étendre la propriété d'"inversibilité infinitésimale" à d'autres applications du topos. Pour cela, utilisons (après l'avoir renforcé) la propriété (c) de la proposition 9 du n°4.

1. Appelons 1-étale une application $f : M \to N$ telle que, pour tout objet J de la forme $D^{(n_1)} \times \ldots \times D^{(n_k)}$ le carré suivant est un produit fibré

$$\begin{tikzcd} M^J \arrow[r, "f^J"] \arrow[d] & N^J \arrow[d] \\ M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

où les applications verticales sont $t \mapsto t(0)$ (dans la proposition 9 du n°4 on avait seulement pris $J = D^{(1)} = D$).

2. Voici quelques propriétés des applications 1-étales.

a) Soient J_1 et J_2 deux objets de la forme ci-dessus et $k : J_1 \to J_2$ une application, alors le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} M^{J_2} \arrow[r, "f^{J_2}"] \arrow[d, "M^k"'] & N^{J_2} \arrow[d, "N^k"] \\ M^{J_1} \arrow[r, "f^{J_1}"] & N^{J_1} \end{tikzcd}$$

b) Les applications 1-étales sont stables par composition et changement de base

c) $f : M \to N$ étant une application 1-étale,

- si f est surjective et M est micro-linéaire alors N est micro-linéaire,
- si f est injective et N est micro-linéaire alors M est micro-linéaire,

d) Une application $f : M \to N$ entre objets micro-linéaires est 1-étale ssi, pour tout point p de M , $T_p f : T_p M \to T_{fp} N$ est bijective.

3. Exemples : a) Nous verrons dans les chapitres ultérieurs qu'un morphisme étale entre schémas affines est 1-étale (il sera en fait beaucoup plus) dans les topos de k-algèbres de présentations finies.

b) De même nous verrons au Chapitre II qu'un difféomorphisme local C^∞ entre variétés C^∞ est un morphisme 1-étale dans le topos de Dubuc $\mathbb{D}$.

c) Enfin, très généralement, dans un topos possédant un anneau de type ligne R, le sous-objet $Inv(R) \rightarrowtail R$ formé des éléments inversibles de R est encore 1-étale.

4. On dit qu'un objet M est une 1-variété de dimension n si :

a) M est micro-linéaire,

b) pour tout point p de M, $T_p M$ est linéairement isomorphe à R^n

(En fait cette définition est un peu plus générale que celle donnée par Kock et Reyes dans [24]).

5. Exemples : Nous verrons au Chapitre II que toute variété C^∞ est une 1-variété dans le topos $\mathbb{D}$ (et même beaucoup plus). La réciproque étant fausse même

pour les objets représentables (il suffit de prendre $M = C_0^\infty \mathbb{R}^{op}$) .

6. (Invariance de la dimension). Supposons que $0 \neq 1$ dans l'anneau R (ce qui est toujours le cas dans les modèles), alors si un objet M est à la fois une variété de dimension m et n on a nécessairement $m = n$.

§3. Anneaux de Fermat

n°1 . Généralités

0. Signalons, avant de terminer ce chapitre qu'il y a une autre façon d'introduire la dérivée sans avoir recours aux nilpotents. Elle peut d'ailleurs trouver son utilité, précisément, dans les modèles sans nilpotents [comme dans le topos lisse (voir définition au Chapitre 0 §2) par exemple].

1. (voir [36]) . Plaçons nous dans un topos fixé et soit R un anneau commutatif unitaire. On dit que R est un anneau de Fermat s'il satisfait l'axiome suivant

$$\forall f : R \to R \quad \exists! g : R^2 \to R \quad \forall x,x' \in R \quad [fx'-fx = (x'-x).g(x',x)]$$

On notera ∂f l'unique application g. Dans ces conditions l'application dérivée $f' : R \to R$ est simplement définie par $f'(x) = \partial f(x,x)$. De la même façon qu'au §2, n°3 on définit aussi les dérivées partielles d'une fonction à plusieurs variables.

2. On peut, en fait, décomposer l'axiome de Fermat en deux nouveaux axiomes comme suit :

(i) $\forall f : R \to R \quad \exists g : R^2 \to R \quad \forall x,x' \in R \, [fx'-fx = (x'-x).g(x',x)]$

(ii) $\forall f : R \to R \, [\forall\, x \in R(x.fx = 0) \to \forall x \in R(fx = 0)]$

Preuve : g_1 et g_2 étant deux fonctions vérifiant l'identité du (i), il suffit de considérer la fonction $k(h,x) = g_1(x+h,x) - g_2(x+h,x)$ car elle vérifie la formule $\forall\, h \in R\ (h.k(h,x) = 0)$.

3. A partir de maintenant R sera un anneau de Fermat. Soit $f : R \to R$ une application quelconque, alors il existe une application $g : R^2 \to R$ telle que :

$$\forall x \in R \quad \forall h \in R \, [f(x+h) = fx + h.f'x+h^2.g(x,h)]$$

Preuve : Il suffit d'appliquer l'axiome de Fermat à l'application $h \mapsto \partial f(x+h,x)$

4. Supposons, en plus, que R soit aussi un anneau de type ligne (voir §2, n°1) alors, pour tout $f : R \to R$ les deux définitions de dérivée de f coïncident

(c'est-à-dire au sens du 1 et au sens du §2, n°3, 1).

Preuve : Résulte immédiatement du 3.

5. Soit maintenant une application $f : R^n \to R$, alors il existe n fonctions $g_1,\dots,g_n : R^n \times R^n \to R$ telles que :

a) $\forall\, x \in R^n\ \forall x' \in R^n\ [fx'-fx = \sum_{i=1}^{n} g_i(x,x').(x'_i-x_i)]$

b) $\forall x \in R^n\ (g_i(x,x) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x))$.

Preuve : Comme $fx' - fx = f(x'_1,\dots,x'_n) - f(x'_1,\dots,x'_{n-1},x_n) + f(x'_1,\dots,x'_{n-1},x_n) - f(x'_1,\dots,x'_{n-2},x_{n-1},x_n) +\dots+ f(x'_1,x_2,\dots,x_n) - f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ il suffit alors de considérer, pour chaque indice i la fonction $h_i(x,x') : t \mapsto f(x'_1,\dots,x'_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_n)$ et dans ce cas $g_i(x,x') = \partial h_i(x,x')(x'_i,x_i)$.

6. En conséquence, si $f : R^n \to R^m$ est une application quelconque, il existe une application $g : R^n \times R^m \to \mathrm{Mat}(n \times m)$ telle que :

a) $\forall x,x' \in R^n\ [fx'-fx = g(x',x).(x'-x)]$

b) $\forall x \in R^n [g(x,x) = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x))_{ij}]$

7. Comme pour les anneaux de type ligne, on pourrait refaire tout un "calcul différentiel". Pour avoir un peu plus de détails voir par exemple [36].

n°2 . Exemples

1. En géométrie algébrique. Soit $\mathcal{E}$ un topos de k-algèbres (voir Chapitre 0, §2) où k est un anneau commutatif unitaire quelconque, et R son anneau canonique (i.e. $R = k[X]^{op}$). Alors R satisfait l'axiome de Fermat.

Preuve : Comme pour toute k-algèbre A, $\mathcal{E}/A^{op}$ est lui-même un topos de A-algèbres, il suffit de montrer que, pour toute flèche $f : R \to R$ de $\mathcal{E}$ on a :

(a) $\mathcal{E} \models \exists g : R \times R \to R \ \forall x,x' \in R \ [fx - fx' = (x-x').g(x,x')]$

(b) si $\mathcal{E} \models \forall \in R(x.fx = 0)$ alors $\mathcal{E} \models \forall x \in R \ (fx = 0)$

a) Comme $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(R,R) \simeq k[X]$, f s'identifie à un polynome $F(X)$ à une variable à coefficients dans k. Soit alors $G(X,Y)$ le polynôme à deux variables tel que :

$$f(Y) - f(X) = G(X,Y).(Y-X)$$

($G(X,Y)$ existe bien car le polynôme $f(Y) - f(X)$ s'annulant lorsque "$Y = X$", il est donc divisible par $Y - X$). Soit alors $g : R^2 \to R$ la flèche de $\mathcal{E}$ correspondante on voit facilement que $\mathcal{E} \models \forall x,x' \in R \ [fx-fx' = (x-x').g(x,x')]$. Par suite on a bien montré que $\mathcal{E}$ satisfait la formule (a).

b) Supposons maintenant que $\mathcal{E} \models \forall x \in R \ (x.fx = 0)$. Cela signifie en fait que $X.F(X) = 0$ dans $k[X]$. Or, il est clair que dans ce cas $F(X) = 0$, donc $\mathcal{E} \models \forall x \in R \ (fx = 0)$.

2. En géométrie différentielle, dans le topos lisse. Considérons l'anneau canonique R (i.e. $R = \mathbb{R}$) du topos lisse (voir définition au Chapitre 0 §2). Alors, comme précédemment R satisfait l'axiome de Fermat.

Preuve : Soit U un ouvert de dimension n et $f : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application C^∞ correspondante à une flèche quelconque $f : U^*R \to U^*R$ de $\mathbb{L}\mathrm{iss}/U$.

a) Par le lemme d'Hadamard avec paramètres il existe une unique fonction C^∞ $g : U \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle qur $f(v,x') - f(v,x) = (x'-x).g(v,x',x)$, pour tout $(v,x,x') \in U \times \mathbb{R}^2$. Il est clair que si on considère la flèche $g : U^*R^2 \to U^*R$ de $\mathbb{L}\mathrm{iss}/U$ correspondante, $\mathbb{L}\mathrm{iss}/U$ satisfait la formule désirée.

b) Supposons que $\mathbb{L}\mathrm{iss}/U \models \forall x \in U^*(R)(x.fx = 0)$. Cela signifie que, pour tout couple $(v,x) \in U \times \mathbb{R}$ on a $x.f(v,x) = 0$. Donc $f(v,x) = 0$ lorsque $x \neq 0$ et par continuité $f(v,0) = 0$ pour tout $v \in U$. Finalement $f = 0$ ce qui signifie que $\mathbb{L}\mathrm{iss}/U \models \forall x \in U^*R \ (fx = 0)$.

3. En géométrie différentielle dans le topos de Dubuc. Considérons l'anneau canonique R (i.e $R = C^\infty\mathbb{R}^{op}$) du topos $\mathbb{D}$ (voir Définition au Chapitre 0, §2). Alors, là encore, R satisfait l'axiome de Fermat.

<u>Preuve</u> : Soit $A \simeq C^{\infty}\mathbb{R}^n/I$ un anneau lisse et $h : C^{\infty}\mathbb{R} \to A \otimes C^{\infty}\mathbb{R}$ l'homomorphisme C^{∞} correspondant à une flèche quelconque $f : (A^{op})^*R \to (A^{op})^*R$ dans $\mathbb{D}/A^{op}$. Remarquons tout d'abord que $A \otimes C^{\infty}\mathbb{R} \simeq C^{\infty}\mathbb{R}^{n+1}/\overline{p^*I}$ où $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ désigne la projection canonique, et que h est de la forme f^* où $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ est une application C^{∞} .

a) A nouveau, par le lemme d'Hadamard avec paramètres il existe une unique fonction C^{∞},$g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(v,x') - f(v,x) = (x'-x).g(v,x',x)$ pour tout $(v,x,x') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$. Il lui correspond l'homomorphisme C^{∞}, $g^* : C^{\infty}\mathbb{R} \to A \otimes C^{\infty}\mathbb{R}^2$ puis la flèche $g : (A^{op})^*R^2 \to (A^{op})^*R$ dans $\mathbb{D}/A^{op}$
On vérifie facilement que $\mathbb{D}/A^{op}$ satisfait la formule désirée.

b) Supposons que $\mathbb{D}/A^{op} \models \forall x \in (A^{op})^*R \; (x.fx = 0)$. Cela signifie que l'application $(v,x) \mapsto x.f(v,x)$ appartient à $\overline{p^*I}$, c'est-à-dire que, pour tout point $(v_0,x_0) \in Z(\overline{p^*I}) = ZI \times \mathbb{R}$ on a $(x.f(v,x))_{(v_0,x_0)}$ qui appartient à $(p^*I)_{(v_0,x_0)}$. Donc, localement autour de (v_0,x_0) on a $x.f(v,x) = \sum_i \lambda_i(v,x).h_i(v)$ où les λ_i appartiennent à $C^{\infty}\mathbb{R}^{n+1}$ et les h_i à I. Si $x_0 \neq 0$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie et lisse dans un voisinage suffisamment petit de x_0 , par suite $f_{(v_0,x_0)} \in p^*I_{(v_0,x_0)}$. Il reste le cas où $x_0 = 0$. Alors en faisant $x = x_0 = 0$ on obtient $\sum_i \lambda_i(v,0).h_i(v) = 0$. Puis, en appliquant une nouvelle fois le lemme d'Hadamard aux fonctions λ_i on a $\lambda_i(v,x) - \lambda_i(v,0) = x.\mu_i(v,x)$ donc $x.f(v,x) = \sum_i [\lambda_i(v,x) - \lambda_i(v,0)].h_i(v) = x. \sum_i \mu_i(v,x).h_i(v)$ et ainsi, par continuité $f(v,x) = \sum_i \mu_i(v,x).h_i(v)$ ce qui prouve, encore une fois, que $f_{(v_0,x_0)} \in p^*I_{(v_0,x_0)}$. Finalement $f \in \overline{p^*I}$, ce qui achève de montrer que $\mathbb{D}/A^{op} \models \forall x \in (A^{op})^*R \; (fx = 0)$.

CHAPITRE II

UTILISATION DES INFINITESIMAUX

§0. Introduction.

Nous avons vu au chapitre I que les nilpotents de l'anneau canonique R, dans les différents modèles déjà considérés, pouvaient être vu comme des "infinitésimaux". Nous allons voir dans ce chapitre qu'il en existe beaucoup d'autres, à condition de se placer dans d'autres modèles que ceux de la géométrie algèbrique, comme par exemple dans le topos de Dubuc (voir déf. au chapitre 0, §2). Une définition générale des infinitésimaux est même possible en utilisant, non plus la structure d'anneau de R qui est beaucoup trop insuffisante, mais la logique du topos lui-même. De ce fait on peut aussi représenter les germes de fonctions par des vraies fonctions de domaines infinitésimal. D'où le gain appréciable au niveau de leur manipulation (l'utilisation des nilpotents permettait déjà un calcul des jets (voir [6])). Remarquons aussi qu'en ne se servant que de la logique pour décrire les infinitésimaux on met en évidence le caractère <u>intrinsèque</u> des infinitésimaux (ou plutôt de la relation d'"infini-proximité") : Tout objet, à priori, pouvant en posséder. Par là même, cette façon de décrire les infinitésimaux présente certains avantages sur les nilpotents. Leur caractère intrinsèque permet une simplification appréciable dans l'approche des "variétés" et des "morphismes étales".

§1. Généralités sur les infinitésimaux.

N°1. Eléments infiniments voisins.

1. Plaçons nous dans un topos fixé et soit X un objet (de ce topos). On dira que deux éléments x, x' de X sont "infiniment voisins" s'ils satisfont la formule

$$\neg\neg(x = x')$$

où le symbole $\neg$ désigne la négation (voir chapitre 0, §1, n°3,4).
On notera en abrégé $x \neq x'$ pour $\neg(x=x')$ et $x \sim x'$ pour $\neg\neg(x=x')$. Enfin on appellera voisinage infinitésimal de x dans X le sous-objet $\neg\neg\{x\}=\{x'\in X/x'\neq x\}$ de X.

2. La négation ayant un sens plus fort en intuitionnisme qu'en logique classique, il vaut mieux penser "$x \neq x'$" x est discernable de x' ou même, de façon plus géométrique encore, "x est à une distance non nulle de x'". On comprendra alors mieux que leur négation puisse signifier "x est infiniment voisin de x'". (Signalons cependant qu'un "intuitionniste traditionnel" ne plaçant pas son "intuition" sur le plan géométrique ne le conçoit évidemment pas ainsi).

3. Pour les exemples nous renvoyons au §3. Indiquons seulement, pour justifier ce qui vient d'être dit que :

a) En géométrie différentielle dans le topos de Dubuc (voir définition au chapitre 0, §2) on a la bijection :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg\{0\},R) \simeq C_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$$

Où le Hom est pris dans le topos $\mathbb{D}$ et la double négation porte sur le sous-objet $\{0\}$ de R^n.

b) En géométrie algébrique dans les topos de k-algèbres (voir définition au chapitre 0, §2) on a la bijection :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg\{0\},R) \simeq k[[X_1,\dots, X_n]]$$

où le Hom est pris dans ce topos et la double négation porte sur le sous-objet $\{0\}$ de R^n.

(On retrouve bien, du moins pour l'exemple (a), la représentabilité des "germes" par de vraies fonctions de domaine infinitésimal. Dans le cas algébrique tout ceci reste encore vrai, à condition de remplacer "germe" par "série de Taylor" ce qui au fond est naturel).

4. Voici quelques propriétés élémentaires des relations $\neq$ et $\sim$:

x, x' et x'' étant des éléments d'un objet X et y et y' des éléments d'un objet Y on a :

a) $x \neq x' \wedge x' \sim x'' \to x \neq x''$

b) $\sim$ est une relation d'équivalence

c) $x \sim x' \wedge y \sim y' \to (x,y) \sim (x',y')$

d) si $f : X \to Y$ est une application, alors :

$$fx \neq fx' \to x \neq x'$$

$$x \sim x' \to fx \sim fx'$$

e) si $f : X \to Y$ est une injection, alors :

$$x \neq x' \to fx \neq fx'$$

$$fx \sim fx' \to x \sim x'$$

Preuve : La vérification de (a) (d) et (e) est immédiate, (b) est une conséquence de (a). Enfin on peut voir (c) comme une conséquence du fait que $\neg\neg$ forme une topologie élémentaire sur le topos "ambiant".

N°2. Applications infinitésimalement inversibles.

1. Une application $f : M \to N$ est appellée infinitésimalement inversible au point p de M, si sa restriction $\neg\neg\{p\} \to \neg\neg\{fp\}$ (qui existe, par le n°1,4,d) est bijective. On dit aussi qu'elle est infinitésimalement inversible si elle est infinitésimalement inversible en tout point de M (Dans [32] une telle application était appelée "étale").

2. Pour les exemples nous renvoyons au §4. Signalons, tout de même, qu'aussi bien en géométrie différentielle qu'en géométrie algébrique ce concept recouvre bien les exemples voulus.

3. Soit $f : M \to N$ une application. Considérons alors les propriétés suivantes :

a) Pour tout point q de N, $f^{-1}\{q\}$ est un faisceau pour la topologie élémentaire de la double négation.

b) Pour tout point q de N, $f^{-1}\{q\}$ est séparé pour la topologie élémentaire de la double négation (i.e. $\neg\neg$(diagonale de $f^{-1}\{q\}$) = (diagonale de $f^{-1}\{q\}$)).

c) f est infinitésimalement inversible.

On a toujours les implications (a) $\Longrightarrow$(c) $\Longrightarrow$(b).

Preuve : (a) $\Rightarrow$(c) : Soit p un point de M. L'application composée $\neg\neg\{p\} \rightarrowtail M \xrightarrow{f} N$ vérifie (a) et l'application $fp : 1 \to \neg\neg\{fp\}$ est $\neg\neg$-dense. Par suite, comme le carré en traits pleins suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[rr, "fp"] \arrow[d, tail] & & \neg\neg\{fp\} \arrow[d, tail] \arrow[dll, dashed] \\
\neg\neg\{p\} \arrow[r, tail] & M \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

il existe donc une unique application $g : \neg\neg\{fp\} \to \neg\neg\{p\}$ telle que le diagramme complet précédent commute. On vérifie alors que g est l'inverse de la restriction de f à $\neg\neg\{p\} \to \neg\neg\{fp\}$.

(c) $\Longrightarrow$(b) : soient q un point de N et p, p' deux éléments de $f^{-1}\{q\}$ tels que $p \sim p'$. Alors, p et p' appartiennent à $\neg\neg\{p\}$ et $fp' = fp$. Il suffit alors d'appliquer l'injectivité de la restriction de f à $\neg\neg\{p\}$ pour conclure que $p = p'$.

4. Cependant, en général (c) $\not\Rightarrow$(a) et (b) $\not\Rightarrow$(c), comme on le voit en considérant le contre-exemple suivant :
On se place dans le topos $\mathbb{E}\mathrm{ns}^{\mathbf{2}}$ (où $\mathbf{2}$ est la catégorie ". $\to$."). Dans ce cas, soient $M = (M_0 \xrightarrow{m} M_1)$ et $N = (N_0 \xrightarrow{n} N_1)$ deux objets du topos et $f = (f_0, f_1) : M \to N$ une flèche. Alors :

a) f vérifie (3,a) ssi le carré correspondant dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ est un produit fibré,

b) f vérifie (3,b) ssi l'application canonique $M_0 \to M_1 \underset{N_1}{\times} N_0$ est injective,

c) f vérifie (3,c) ssi pour tout élément x de M_0 l'application $\overline{x} \to \overline{f_0 x}$ est bijective (où $\overline{x}$ et $\overline{f_0 x}$ sont resp. les classes d'équivalences de x et $f_0 x$ pour les relations d'équivalence nucléaires associées à $m : M_0 \to M_1$ et $n : N_0 \to N_1$).

5. Voici maintenant quelques propriétés générales des applications infinitésimalement inversibles.

a) Les applications inf. inversibles sont stables par changement de base (i.e. dans le produit fibré ci-dessous si f' est inf. inversible il en est de même de f)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M' \arrow[d, "f'"] \\ N \arrow[r] & N' \end{tikzcd}$$

b) Etant donné le triangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

- si f et g sont inf. inversibles alors h est inf. inversible,
- si h et g sont inf. inversibles alors f est inf. inversible,
- si h et f sont inf. inversibles et f est surjectif alors g est inf. inversible.

c) Etant donné un objet I "sans infinitésimaux" c'est-à-dire satisfaisant la formule $\forall i \in I\ \forall i' \in I\ (i \sim i' \to i = i')$ et une famille d'applications $(M_i \xrightarrow{f_i} N)_i$ (voir déf. au n°6, §1 du chapitre 0) alors :

Pour tout $i \in I$, f_i est inf. inversible ssi $f : \coprod_i M_i \to N$ est inf. inversible.

<u>Preuve</u> : a) Cela résulte du fait suivant : Etant donné deux éléments $p, p' \in M$ si $fp \sim fp'$ et $ap \sim ap'$ alors $p \sim p'$ (car M s'injectant dans $N \times M'$ on utilise le n°1, <u>4</u>, c et e)

b) Evident.

c) Immédiat, car I ne possèdant pas d'infinitésimaux, pour tout $p \in \coprod M_i$ si $p \in M_i$ alors $\neg\neg\{p\} \subset M_i$.

<u>6</u>. La proposition précédente admet le corollaire suivant :

Soit $f : M \to N$ une application et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de M où I est un objet "sans infinitésimaux"(voir le <u>5</u>) et $U_i \twoheadrightarrow M$ est inf.inversible, pour tout $i \in I$. Alors : f est inf.inversible ssi la restriction de f à U_i est inf.inversible pour tout $i \in I$.

<u>preuve</u> : Il suffit d'appliquer la prop. <u>5</u> au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \coprod U_i \arrow[r] \arrow[dr] & M \arrow[d, "f"] \\ & N \end{tikzcd}$$

N°3. <u>Variété de type infinitésimal</u>.

<u>1</u>. Fixons (jusqu'à la fin de ce paragraphe) un corps de fractions R (voir définition au chapitre I, §1, <u>1</u>). Remarquons tout d'abord que le sous-objet $\mathrm{Inv}(R) \rightarrowtail R$ formé des éléments inversibles de R est infinitésimalement inversible (car il est égal à $\neg\{0\} \rightarrowtail R$). Notons maintenant $\Delta = \neg\neg\{0\}$ (la double négation étant prise dans R). On a donc $\Delta = \neg(\mathrm{Inv}\ R)$. D'autre part en dimension n on a $\Delta^n = \neg\neg\{0\}$, la double négation étant prise, cette fois, dans R^n (résulte du n°1, <u>4</u>,c).

<u>2</u>. On dit qu'un objet M est une <u>variété de type infinitésimal de dimension</u> n (ou simplement : un variété de dimension n, s'il n'y a pas d'ambiguité) si pour tout point p de M, $\neg\neg\{p\}$ est en bijection avec Δ^n (Dans [32] un tel objet est appellé simplement "variété de dimension n").

3. On aurait pu demander, de façon équivalente, dans la définition précédente que pour tout point p de M, il existe une bijection $\phi : \Delta^n \to \neg\neg\{p\}$ telle que $\phi(0) = p$ [En effet ϕ est alors le composé $\Delta^n \xrightarrow{t} \Delta^n \xrightarrow{\psi} \neg\neg\{p\}$, où ψ est l'ancienne bijection et t est la translation $x \mapsto x + \psi^{-1}p$ (on utilise le 4 du n°1)].

4. Exemples : Toute variété C^∞ considérée comme objet du topos de Dubuc est une variété de type infinitésimal (de même dimension). Mais nous en reparlerons, plus en détail, au §4.

5. Voici quelques propriétés des variétés (de type infinitésimal).

a) Soient M et N deux variétés resp. de dimension m et n. Alors $M \times N$ est une variété de dimension $m + n$,

b) Soit I un objet "sans infinitésimaux" (voir le n°2, 5.c) et $(M_i)_{i \in I}$ une famille d'objets indexée par I (i.e. une application $\phi : M \to I$ où $M_i = \phi^{-1}\{i\}$ et $M = \coprod_i M_i$). Si M_i est une variété de dimension n pour tout i de I alors $\coprod_i M_i$ est aussi une variété de même dimension,

c) Soit $f : M \to N$ une application inf. inversible. Alors :

- si N est une variété de dimension n alors il en est de même de M
- si M est une variété de dimension n et f est surjective alors N est, elle aussi, une variété de dimension n.

Preuve : a) Car, pour tout $(p,q) \in M \times N$, $\neg\neg\{(p,q)\} \simeq \neg\neg\{p\} \times \neg\neg\{q\}$ (d'après le n°1, 4.c)

b) Même remarque qu'à la preuve du n°2, 5.c.

c) Evident.

6. La proposition précédente a pour corollaire immédiat :

a) R^n est une variété de dimension n.

b) Soient I un objet "sans infinitésimaux" (voir le n°2, 5.c) et $(f_i : M_i \to N)_{i \in I}$ une famille surjective d'applications inf. inversibles où pour chaque i, M_i est une variété de dimension n. Alors N est, elle-même, une variété de dimension n.

N°4. Etude comparée des différents infinitésimaux.

0. Nous allons revenir maintenant aux conditions du chapitre I, §2 (anneau de type ligne etc...) afin de comparer la "taille" des différents infinitésimaux étudiés jusqu'ici. Après quoi, on continuera la comparaison pour les concepts d'"application étale" et de "variété" qui ont été précédemment introduits.

1. Notons $D_n = \{d \in R / d^{n+1} = 0\}$ (en particulier $D = D_1$). Alors, on a les inclusions suivantes (R étant toujours supposé être un corps de fraction) :

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_n \subset \ldots \subset \Delta$$

Par suite, pour tout entier m, $D^{(m)} \subset \Delta^m$.

Preuve : Il suffit de montrer que $D_n \cap \mathrm{Inv}\, R = \emptyset$.

2. Par conséquent, très généralement (c.a.d. sans autre condition sur l'anneau R) :
Toute application infinitésimalement inversible est 1-étale (voir définition au chapitre I, §2, n°5).

Preuve : Soient $f : M \to N$ une application inf.inversible et $J = D^{(n_1)} \times \ldots \times D^{(n_k)}$. Alors, d'après le 1, $J \subset \Delta^n$ où $n = n_1 + \ldots + n_k$. Considérons maintenant un point p de M et $t : J \to N$ une application telle que $to = fp$. Alors, comme $t(J) \subset \neg\neg\{fp\}$ (puisque $J \subset \Delta^n = \neg\neg\{0\}$) on peut considérer l'application composée k suivante :

$$J \to \neg\neg\{fp\} \xrightarrow{\sim} \neg\neg\{p\} \rightarrowtail M$$

(où la flèche du milieu est l'inverse de la restriction de f). Elle est, en fait, l'unique application faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, tail, "o"] \arrow[d, "p"'] & J \arrow[d, "t"] \arrow[dl, "k"'] \\ M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

ce qui achève de prouver que f est 1-étale.

3. Supposons maintenant que le corps de fraction R soit de type ligne et micro-linéaire. Alors : Toute variété de type infinitésimal est une 1-variété de même dimension (voir déf. au chapitre I, §2, n°5).

Preuve : 1) Démontrons, tout d'abord, que Δ^n est micro-linéaire. Clairement $\Delta \rightarrowtail R$ est inf.inversible donc 1-étale (voir prop. 2) de plus R est micro-linéaire, par suite Δ est micro-linéaire ainsi que toutes ses puissances (voir au chapitre I, §2, le n°5,2 et le n°4,4).

2) Soit maintenant M une variété de type infinitésimal de dimension m et p un point de M. Comme le diagramme suivant commute pour tout entier n,

$$\begin{array}{ccc}
\{f : D^{(n)} \to M \ / \ fo = p\} & \xrightarrow{\text{can.}} & \{f : D \to M \ / \ fo = p\}^n \\
\wr & & \wr \\
\{f : D^{(n)} \to \daleth\daleth\{p\} \ / \ fo = p\} & \xrightarrow{\text{can.}} & \{f : D \to \daleth\daleth\{p\} \ / \ fo = p\}^n \\
\wr & & \wr \\
\{f : D^{(n)} \to \Delta^m \ / \ fo = o\} & \xrightarrow{\text{can.}} & \{f : D \to \Delta^m \ / \ fo = o\}^n
\end{array}$$

où les flèches verticales sont des bijections, la flèche horizontale supérieure est inversible car, d'après ce qu'on vient de montrer au 1), il en est ainsi de la flèche horizontale inférieure. D'où la micro-linéarité de M.

3) De ce fait, pour tout point p de M, T_pM a canoniquement une structure de R-module. D'autre part on a les isomorphismes linéaires suivant

$$T_pM \simeq T_p(\daleth\daleth\{p\}) \simeq T_o(\Delta^m) \simeq T_oR^m \simeq R^m$$

(pour le dernier isomorphisme voir chapitre I, §2, n°4,7). Ce qui achève de prouver que M est une 1-variété de dimension m.

4. En particulier une variété de type infinitésimal (sous les conditions précédentes) ne peut avoir qu'une dimension (d'après le chapitre I, §2,n°5, 6).

N°5. Inversion infinitésimale.

0. Il est possible maintenant de formuler le (théorème) d'inversion infinitésimale (et non "locale", mais nous reviendrons sur cette distinction). Comme en géométrie différentielle "classique" il va permettre de reconnaitre les applications infinitésimalement inversibles et de fournir de nombreux exemples de variétés.

1. (Enoncé de l'axiome d'inversion infinitésimale). Plaçons-nous dans le cas où R est un corps de fractions, de type ligne et micro-linéaire. Considérons alors, pour chaque n, la formule :

(II_n) $\quad \forall f : \Delta^n \to \Delta^n \quad (fo = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0 \to f \text{ bijective}).$

- Cet axiome est encore équivalent (moyennant les prop. 8 et 9 du chapitre I, §2,n°4) au fait que le carré suivant est un produit fibré :

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Iso}_0(\Delta^n,\Delta^n) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathrm{Iso}_0(D^{(n)},D^{(n)}) \arrow[d, tail] \\ \mathrm{Hom}_0(\Delta^n,\Delta^n) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_0(D^{(n)},D^{(n)}) \end{tikzcd}$$

où $\mathrm{Hom}_0(\Delta^n,\Delta^n) = \{f : \Delta^n \to \Delta^n \ / \ fo = 0\}$ (même remarque pour $\mathrm{Iso}_0(\Delta^n,\Delta^n)$).

- Il est clair que (II_n) entraîne aussi que :

(II'_n) $\quad \forall f : R^n \to R^n \quad \forall p \in R^n \ (\frac{\partial f}{\partial x}(p) \neq 0 \to f$ est inf. inversible en p).

2. Soit $f : M \to N$ une application entre variétés de dimension n. Alors, en supposant satisfait l'axiome (II_n) les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) pour tout point p de M, l'application linéaire tangente $T_pM \to T_{fp}N$ est bijective,

ii) f est 1-étale,

iii) f est inf. inversible.

Preuve : L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$(ii) résulte du chapitre I,§2,n°5,2,d. L'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) a été donnée au n°4,2 de ce paragraphe. Il reste donc à prouver l'implication (ii)$\Longrightarrow$(iii). Soit p un point de M. Comme M et N sont des variétés de dimension n il existe des bijections a : $\neg\neg\{p\} \to \Delta^n$ et b : $\neg\neg\{fp\} \to \Delta^n$ telles que ap = 0 et bfp = 0. Considérons alors l'application composée

$$\Delta^n \xrightarrow[\sim]{a^{-1}} \neg\neg\{p\} \longrightarrow \neg\neg\{fp\} \xrightarrow[\sim]{b} \Delta^n$$

D'après le chapitre I,§2,n°4,8 on a la factorisation :

$$\begin{tikzcd}
D^{(n)} \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & D^{(n)} \arrow[d, tail] \\
\Delta^n \arrow[r] & \Delta^n
\end{tikzcd}$$

De plus le diagramme suivant étant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
D^{(n)} \arrow[r, tail] \arrow[d] & \Delta^n \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \neg\neg\{p\} \arrow[r, tail] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\
D^{(n)} \arrow[r, tail] & \Delta^n \arrow[r, "\sim"] & \neg\neg\{fp\} \arrow[r, tail] & N
\end{tikzcd}$$

et l'application f étant 1-étale, il existe (d'après le chapitre I,§2,n°5,2, a) une unique application k : $D^{(n)} \to M$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
D^{(n)} \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\
D^{(n)} \arrow[r] \arrow[ur, "k"] & N
\end{tikzcd}$$

comme ko = p, k se factorise par $\neg\neg\{p\} \rightarrowtail M$, puis par $\Delta^n \to \neg\neg\{p\}$ et enfin par $D^{(n)} \rightarrowtail \Delta^n$. On voit alors facilement que l'application $D^{(n)} \to D^{(n)}$ ainsi construite est l'inverse de celle déjà construite précédemment. Par suite d'après l'axiome d'inversion infinitésimale la flèche $\Delta^n \to \Delta^n$ est bijective ainsi que la restriction de f à $\neg\neg\{p\} \to \neg\neg\{fp\}$.

3. Plaçons nous enfin dans le cas où R 1) est un corps de Kock (voir chapitre I,§1,n°2) 2) est de type ligne et micro-linéaire 3) vérifie l'axiome

d'inversion infinitésimale. On a alors la proposition suivante (montrée aussi par M. Bunge dans [6]) :

Soit $f : R^n \to R^m$ une application et $M = f^{-1}\{0\}$. Si pour tout point a de M la matrice jacobienne de f en a est de rang $\geq m$ alors M est une variété de dimension n-m.

Preuve : Soit a un point de M, alors la matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{ij}$ admet une sous-matrice d'ordre m inversible (voir chapitre I, §1,n°3). Pour simplifier l'écriture supposons que c'est la sous-matrice $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{\substack{i\leq m\\ j\leq m}}$ qui est inversible. Soit alors l'application $\phi = (f,\pi) : R^n \to R^m \times R^{n-m}$ où $\pi : R^n \to R^{n-m}$ est la projection $(x_1,\ldots, x_n) \mapsto (x_{m+1},\ldots,x_n)$. Par construction, le jocobien de f en a est non-nul donc, par l'axiome d'inversion infinitésimale d'application $\neg\neg\{a\} \to \neg\neg\{\phi a\}$ est bijective. Soit $P = \{(x_i) \in R^n / x_1=\ldots=x_m=0\}$ alors $M = \phi^{-1}(P)$. On a donc la bijection $\neg\neg\{a\} \cap M \to \neg\neg\{\phi a\} \cap P$. Enfin $\neg\neg\{\phi a\} \cap P \simeq \neg\neg\{\pi a\}$ (cette dernière double négation étant prise dans R^{n-m}). Ceci achève de prouver que M est une variété de dimension n-m.

§2. Caractérisation de la négation.

N°0. Une fois établies les généralités sur les infinitésimaux, il reste maintenant à interroger les modèles que nous avons construits au chapitre 0 pour savoir si, dans chacun d'eux, les infinitésimaux correspondent à ce que l'on en attendait. Toutefois, comme pour ces différents modèles on utilise une marche à suivre relativement semblable, il nous a paru intéressant de trouver un contexte suffisamment général pour éviter des répétitions fastidieuses. Il s'avère en effet que les différents "sites" construits au chapitre 0 ont des propriétés communes qui prédéterminent, entre autre, la nature de la "négation" et par la même celle des infinitésimaux (on caractérise en fait toute la logique du 1er ordre). Nous pensons, tout particulièrement, au "nullstellensatz" qui, on le sait, est déjà un outil central en géométrie algébrique et qui ici retrouve cette position privilégiée, à condition évidemment de lui donner une forme adaptée au contexte.

N°1. Sites concrets.

1. (Définition). On appelle site concret la donnée :

- d'une catégorie $\mathcal{T}$ à limites projectives finies et objet initial $\emptyset$, vérifiant le "Nullstellensatz" c'est-à-dire : Pour tout objet X de $\mathcal{T}$, $\Gamma X = \emptyset$ ssi $X = \emptyset$. En notant $\Gamma X = \mathrm{Hom}(1,X)$, (on verra, dans les exemples, une justification de cette terminologie)

- d'une pré-topologie sur cette catégorie vérifiant les propriétés suivantes :

  a) Elle est sous-canonique (i.e. tout préfaisceau sur $\mathcal{T}$ qui est représentable est un faisceau)

  b) Si $(X_i \to X)_i$ couvre alors $(\Gamma X_i \to \Gamma X)_i$ est surjective,

  c) la famille vide $(\to \emptyset)$ couvre $\emptyset$.

2. Exemples : a) En topologie : Il est clair que la catégorie $\mathcal{T}op$ des espaces topologiques munie de la pré-topologie des recouvrements ouverts (voir chapitre 0, §2,n°1) est un exemple de site concret.

b) En géométrie différentielle : La catégorie $\mathfrak{D}^{op}$ (voir chapitre 0, §2, n°2) munie de la pré-topologie des recouvrements ouverts (même référence) est aussi un exemple de site concret. En effet, soit $A \simeq C^\infty \mathbb{R}^n/I$ un anneau lisse. Comme $\Gamma A^{op} = \mathrm{Spec}A \simeq ZI$, le "Nullstellensatz" s'écrit alors $ZI = \emptyset$

ssi A est l'anneau lisse nul ou encore ssi $1 \in I$. On retrouve là, le théorème des zéros signalé dans l'Appendice, §1, n°2,5. L'axiome (a), quant à lui, résulte du §2, n°3,1 de ce même Appendice, et l'axiome (b) provient du fait que $\mathrm{Spec}(A_U) = U$ (voir, toujours dans l'Appendice, le §1, n°6,4,a). Enfin la vérification de l'axiome (c) est immédiate.

c) En géométrie algébrique : La catégorie $\mathcal{A}pf_k^{op}$ (voir chapitre 0, §2, n°3) où k est un corps algébriquement clos, munie d'une des pré-topologies (zar), (et) ou (fppf), (même référence) est encore un exemple de site concret. En effet, comme dans l'exemple précédent, le "Nullstellensatz abstrait" signifie que $ZI = \emptyset$ ssi $1 \in I$ car, pour un anneau de la forme $A = k[\vec{X}]/I$ on a $\mathcal{A}pf_k(A,k) \simeq ZI$ (là encore on tombe sur le théorème des zéros habituel pour les corps algébriquement clos). Pour la vérification de l'axiome (a) nous renvoyons au [18] et [9]. Quant à l'axiome (b) il provient du fait que l'application $U \mapsto U \cap \mathrm{Spm}A$ définit une bijection entre l'ensemble des ouverts de SpecA dans celui des ouverts de SpmA. Enfin l'axiome (c) est immédiatement vérifié.

3. $\mathcal{T}$ étant un site concret, soit $\mathcal{E}$ le topos des faisceaux sur $\mathcal{T}$. Alors $\mathcal{E}$ satisfait aussi le "Nullstellensatz". En particulier les seuls sous-objets de 1 sont $(1 \rightarrowtail 1)$ et $(\emptyset \rightarrowtail 1)$.

Preuve : Tout objet F de $\mathcal{E}$ étant limite inductive de représentables, il existe donc une famille épimorphe $(X_i \to F)_i$ dans $\mathcal{E}$ où les X_i sont représentables. Si $\Gamma F = \emptyset$ alors pour tout i, $\Gamma X_i = \emptyset$. Or, $\mathcal{T}$ vérifiant le Nullstellensatz, tous les X_i sont vides (dans $\mathcal{T}$, mais aussi dans $\mathcal{E}$, à cause de l'axiome (c)). Finalement F est lui-même vide car la famille $(X_i \to F)_i$ est épimorphe.

4. L'objet final n'ayant que deux sous-objets, on serait tanté de penser que le topos $\mathcal{E}$ a une logique "classique" (mis à part l'axiome du choix). Il n'en est évidemment rien, car ces deux seules valeurs de vérité ne sont qu'"externes", par contre "internement" la formule $\forall p \subset 1\ (p = \text{vrai} \vee p = \text{faux})$ n'est pas satisfaite dans $\mathcal{E}$ (si c'était le cas on dirait que le topos est booléen).

N°2. Sous-objets construits "point par point".

0. Ce que nous allons faire maintenant n'est qu'une généralisation de la "construction point par point d'anneaux lisses" faite dans l'Appendice , §1, n°6. On construit en effet universellement un sous-objet d'un objet donné en partant d'un sous-ensemble arbitraire de points (c'est-à-dire dans le cas présent, de sections globales) de cet objet. Cette construction nous permettra alors de déterminer le "complémentaire" de n'importe quel sous-objet.

1. Soient S un objet de $\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ désignant le topos des faisceaux sur un site concret fixé), et P une partie de ΓS. Alors, il existe un sous-objet de S, noté E(S,P), tel que, pour toute flèche $X \to S$ de $\mathcal{E}$ on ait :

$$X \to S \text{ factorise } E(S,P) \rightarrowtail S \quad \text{ssi} \quad \Gamma X \to \Gamma S \text{ factorise } P \rightarrowtail \Gamma S$$

Preuve : Soit précisément, pour chaque objet X du site $\mathcal{T}$, E(S,P)(X) l'ensemble des flèches $X \to S$ telles que $\Gamma X \to \Gamma S$ factorise $P \rightarrowtail \Gamma S$. On vérifie facilement qu'on définit ainsi un foncteur $E(S,P) : \mathcal{T}^{op} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ qui est en fait un faisceau sur $\mathcal{T}$ (en se servant de l'axiome (b)). Enfin se foncteur vérifie la propriété universelle ci-dessus car tout faisceau est limite inductive de représentables.

2. La construction du faisceau E(S,P) peut se voir autrement (comme l'a suggéré E. Dubuc). Tout d'abord, constatons que le foncteur $\Gamma : \mathcal{E} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$ préservant les produits fibrés et les familles épimorphes (résulte de l'axiome (b)) il admet un adjoint à droite Γ_*(voir [1]). Le sous-objet E(S,P) est alors défini par le produit fibré ci-dessous dans $\mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} E(S,P) \arrow[r] \arrow[d, tail] & \Gamma_* P \arrow[d, tail] \\ S \arrow[r, "\text{cano.}"] & \Gamma_* \Gamma S \end{tikzcd}$$

3. L'application $P \mapsto E(S,P)$ définit un foncteur $\mathcal{P}(\Gamma S) \to \mathcal{P}(S)$ adjoint à droite du foncteur $\Gamma : \mathcal{P}(S) \to \mathcal{P}(\Gamma S)$, où $\mathcal{P}(-)$ désigne le treillis des sous-objets de (-), considéré comme catégorie (voir chapitre 0, §1, n°1). Par la suite, s'il n'y a pas d'ambiguité, nous écrirons simplement EP au lieu de E(S,P).

4. (Exemples) a) <u>En topologie</u> : X étant un espace topologique et P un sous-ensemble de X, le sous-objet $EP \rightarrowtail X$ dans $\mathbb{T}\mathrm{op}$ (voir définition au chapitre 0, §2) est simplement P muni de la topologie induite, comme on le vérifie immédiatement par la propriété universelle de E.

b) <u>En géométrie différentielle</u> : Si A est un anneau lisse et P une partie de SpecA (ouverte ou fermée) alors : $(EP \rightarrowtail A^{op}) = (A_P^{op} \rightarrowtail A^{op})$ (résulte de la propriété universelle de A_P définie dans l'Appendice, §1,n°6) dans le topos de Dubuc.

c) <u>En géométrie algébrique</u> : k étant un corps algébriquement clos, soit A une k-algèbre de type fini et a un élément de A, alors dans un topos de k-algèbres de type fini (voir définition au chapitre 0, §2), on a : $(ED_a \rightarrowtail A^{op}) = (A[a^{-1}]^{op} \rightarrowtail A^{op})$, en notant D_a l'ensemble des points p de SpmA (que l'on identifie à ΓA) tels que $a \notin p$. On le voit facilement en remarquant que $\Gamma A[a^{-1}]^{op} = D_a$ et qu'un élément b d'une k-algèbre de type fini B est inversible ssi $hb \neq 0$ pour tout k-homomorphisme $h : B \to k$.

N°3. <u>Les foncteurs</u> Γ <u>et</u> E <u>face à la logique du 1er ordre</u> (voir aussi [13])

0. Nous allons maintenant étudier comment Γ et E "transportent" les logiques du 1er ordre, respectives de $\mathcal{E}$ et $\mathbb{E}\mathrm{ns}$. Pour cela, nous utiliserons les mêmes notations pour désigner les symboles logiques des deux topos.

1. Tout d'abord, pour les connecteurs logiques, on a les équations suivantes : (déjà montrées dans [13])

a) $\Gamma E = \mathrm{Id}$

b) $\Gamma\emptyset = \emptyset$	b') $E\emptyset = \emptyset$
c) $\Gamma(- \cap -) = \Gamma(-) \cap \Gamma(-)$	c') $E(- \cap -) = E(-) \cap E(-)$
d) $\Gamma(- \cup -) = \Gamma(-) \cup \Gamma(-)$	d') $\Gamma E(- \cup -) = \Gamma(E(-) \cup E(-))$
e) $\Gamma(- \to -) = (\Gamma(-) \to \Gamma(-))$	e') $E(- \to -) = (E(-) \to E(-))$
f) $\Gamma\neg = \neg\Gamma$	f') $E\neg = \neg E$

Preuve : On vérifie facilement :

a) à l'aide de la propriété universelle de E,
b) et b') à l'aide du Nullstellensatz,
c) car Γ est représentable,
c') car E a un adjoint à gauche,
d) car Γ a un adjoint à droite,
d') à l'aide du d) et du a)
e') car E est l'adjoint à droite de Γ et qu'on a a)
f) et f') successivement à l'aide de e) et b) puis e') et b')

Il reste à vérifier la propriété e). Elle résulte en fait des propriétés équivalentes suivantes :

$$p \in \Gamma(P \to Q)$$
$$p^{-1}(P \to Q) = 1$$
$$(p^{-1}P \to p^{-1}Q) = 1$$
$$p^{-1}P \subset p^{-1}Q$$
$$p^{-1}P = 1 \Rightarrow p^{-1}Q = 1$$
$$p \in \Gamma P \Rightarrow p \in \Gamma Q$$
$$p \in (\Gamma P \to \Gamma Q)$$

L'équivalence entre la 4ième et la 5ième ligne provenant du fait que 1 n'a que deux sous-objets.

2. On peut encore améliorer les équations f) et f') du 1 en caractérisant la négation et la double négation dans $\mathcal{E}$. On a alors :

$$\neg = E\neg\Gamma \qquad \text{et} \qquad \neg\neg = E\Gamma$$

Preuve : a) Pour tout sous-objet P et Q d'un objet donné on a les équivalences suivantes :

$$P \subset \neg Q$$
$$P \cap Q = \emptyset$$
$$\Gamma(P \cap Q) = \emptyset$$
$$\Gamma P \cap \Gamma Q = \emptyset$$
$$\Gamma P \subset \neg\Gamma Q$$
$$P \subset E\neg\Gamma Q$$

b) La caractérisation de la double négation se déduit immédiatement du fait que le topos $\mathbb{E}$ns est booléen (i.e. $\neg\neg = \mathrm{Id}$).

3. Soit maintenant $f : X \to Y$ une flèche de $\mathcal{E}$. Notons de la même façon la flèche $\Gamma X \to \Gamma Y$ correspondante. On a maintenant, pour les quantificateurs (voir chapitre 0, §1, n°1,5), les équations suivantes (déjà montrées dans [13]).

a) $\Gamma f^{-1} = f^{-1}\Gamma$	a') $Ef^{-1} = f^{-1}E$
b) $\Gamma\forall_f E = \forall_f \Gamma E$	b') $E\forall_f = \forall_f E$
c) $\Gamma\exists_f = \exists_f\Gamma$	c') $\Gamma E\exists_f = \Gamma\exists_f E$

Preuve : On vérifie facilement :

a) car Γ est représentable,
a') car E admet un adjoint à gauche,
b') à l'aide du a) et des adjonctions $f^{-1} \dashv \forall_f$ et $\Gamma \dashv E$
b) à l'aide du b') et de l'équation a) du 1
c) à l'aide du a') et des adjonctions $\exists_f \dashv f^{-1}$ et $\Gamma \dashv E$
c') à l'aide du c) et de l'équation a) du 1.

4. Signalons enfin la dernière équation suivante (qui nous sera utilise au chapitre III, §2)

$$E(\Gamma X \times P) = X \times EP$$

où P est un sous-objet d'un objet donné et X est un objet de $\mathcal{E}$.

Preuve : Résulte immédiatement de la propriété universelle de E.

§3. Les infinitésimaux des différents modèles.

N°0. Négation et double négation ayant été caractérisées au paragraphe précédent (voir n°3, 2) dans un contexte suffisamment général, nous sommes en mesure de déterminer les infinitésimaux de chacun des modèles défini au chapitre 0, §2.

N°1. En topologie.

1. Soit X un espace topologique et P un sous-objet de X dans $\mathbb{T}\mathrm{op}$ (voir sa définition au chapitre 0, §2). Alors, P est "stable par double négation" (i.e. $\neg\neg P = P$) ssi P est un sous-espace de X.

Preuve : Résulte, dans le §2, des propositions 4,a du n°2 et 2 du n°3.

2. En particulier, pour tout espace topologique X, la diagonale $X \rightarrowtail X \times X$ est stable par double négation. Par suite X satisfait la formule :

$$\forall x \in X \quad \forall x' \in X \quad (\neg\neg(x=x') \to x = x')$$

Cela signifie donc que X ne possède pas d'infinitésimaux.

N°2. En géométrie différentielle.

1. A étant un anneau lisse de type fini (voir définition dans l'Appendice, §1, n°4) soit P un sous-objet de A^{op} dans un topos de Dubuc $\mathbb{D}$ (voir définition au chapitre 0, §2). Alors, si $E = (\Gamma P \to \Gamma A^{op})$ est ouvert ou fermé dans SpecA on a :

$$\neg\neg(P \rightarrowtail A^{op}) = (A_E^{op} \rightarrowtail A^{op})$$

En particulier, si L est une partie quelconque ouverte ou fermée de SpecA, $A_L^{op} \rightarrowtail A^{op}$ est stable par double négation dans ce topos.

Preuve : Résulte du §2, n°3, 2 et du §2, n°2, 4, b.

2. a) En conséquence, R désignant l'anneau canonique de $\mathbb{D}$ (i.e. $R = C^{\infty}R^{op}$), on a :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg P, R) \simeq A_E \text{ (où E désigne } \Gamma P)$$

b) En particulier si p est un point de A (voir définition dans l'Appendice, §1, n°1, 9), on a :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg\{p\}, R) \simeq A_p$$

(A condition de faire l'identification $\mathrm{Spec}A = \mathrm{Hom}(1, A^{op})$)

c) Plus particulièrement encore, si on considère le "point" 0 de R^n on a :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg\{0\}, R^m) \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Preuve : a) Car $C^\infty\mathbb{R}$ est l'anneau C^∞ libre à un générateur

b) Car $A_{\{p\}} = A_p$ (voir Appendice, §1, n°6, 8, a)

c) Car $(C^\infty\mathbb{R}^n)_0 = C_0^\infty\mathbb{R}^n$ (voir Appendice, §1, n°5, 5) et $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})^m \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

3. Ainsi donc, dans un tel modèle, les germes de fonctions lisses deviennent représentables par de vraies fonctions (de domaine infinitésimal)! C'est pourquoi, comme nous l'avons signalé dans l'introduction de ce chapitre, il est maintenant légitime de voir le sous-objet $\neg\neg\{0\}$ de R^n comme "l'ensemble" de tous les infinitésimaux de R^n. D'autant plus qu'il ne possède qu'une seule section globale qui est 0 lui-même (car $\Gamma\neg\neg\{0\} = \Gamma E \Gamma\{0\} = \{0\}$). On retrouve là, partiellement, la conception de l'analyse non-standard qui voit dans les infinitésimaux de "faux" éléments (le seul "vrai" élément infiniment petit étant zéro lui-même) c'est-à-dire des éléments qui ne sont pas standards. Ici aussi le seul "vrai" élément (qui est l'unique section globale) est encore zéro, mais "internement parlant" (c'est-à-dire, en utilisant la logique du topos) il y en a d'autres.

L'analogie "standard = section globale" ne sera cependant pas prise en compte ici, car elle nous obligerait, comme en analyse non standard, à raisonner entre deux logiques différentes (la logique du topos et la logique ensembliste).

4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application (dans $\mathbb{E}$ns) lisse et plate en zéro (i.e. $\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) telle que $fx = 0$ ssi $x = 0$. Notons D_f le sous-objet de R^n, dans le topos $\mathbb{D}$, défini par la formule :

$$D_f = \{x \in R^n \;/\; fx = 0\}$$

On a alors les inclusions strictes suivantes :

$$D_\infty \underset{\neq}{\subset} D_f \underset{\neq}{\subset} \neg\neg\{0\} \qquad \text{(encore noté } \Delta^n \text{ au §1, n°3).}$$

En notant $D_\infty = \bigcup\limits_n D_n$ (pour les D_n, voir leur définition au §1, n°4,1).

Preuve : a) Par le lemme d'Hadamard, on sait qu'il existe une fonction lisse $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $fx = x^n.gx$ d'où, au niveau des idéaux, l'inclusion $(f) \subset (Id^n)$ qui donne, dans $\mathbb{D}$, l'inclusion $D_n \subset D_f$ (car $D_n = C^\infty\mathbb{R}/(Id^n)^{op}$ et $D_f = C^\infty\,\mathbb{R}/(f)^{op}$). Donc $\bigcup\limits_n D_n = D_\infty \subset D_f$. Montrons que cette inclusion est stricte.

b) Si $\bigcup\limits_n D_n = D_f$ alors, comme D_f est représentable, il existe un recouvrement ouvert (U_i) de ΓD_f tel que chaque EU_i (voir définition de $E(-)$ au §2, n°2) soit contenu dans un D_n (par définition de la pré-topologie sur la catégorie $\mathcal{D}^{op}$). Mais comme $\Gamma D_f = \{0\}$ (par hypothèse pour f) il existe un indice i_0 tel que $U_{i_0} = \Gamma D_f$. Ainsi $EU_{i_0} = D_f$. Il existe donc un entier n pour lequel $D_f \subset D_n$, d'où l'égalité $D_n = D_f$ pour cet entier. Ainsi en utilisant le (a) on en déduit que $D_{n+1} \subset D_n$ ou encore, au niveau des idéaux, que $(Id^n) \subset (Id^{n+1})$. Mais cette dernière inclusion entraîne l'existence d'une fonction lisse g définie sur $\mathbb{R}$ tout entier (donc définie et continue en zéro) telle que $gx = \frac{1}{x}$ pour tout $x \neq 0$. Ce qui est évidemment contradictoire. L'inclusion $D_\infty \subset D_f$ est donc stricte.

c) Enfin, comme ensemblistement $\Gamma D_f \subset \{0\}$ on a dans $\mathbb{D}$, $D_f \subset E\{0\} = \neg\neg\{0\}$ (voir au §2 le n°2, 3 et le n°3, 2). Mais comme f n'appartient pas à l'idéal $I^\omega(0)$ des fonctions lisses de germe nul en zero on a, au niveau des idéaux, $I^\omega(0) \neq (f)$ et dans $\mathbb{D}$, $\neg\neg\{0\} \neq D_f$ (car $\neg\neg\{0\} = C_0^\infty\mathbb{R}^{op}$).

d) Remarquons que cette démonstration prouve <u>seulement</u> qu'il n'y a pas les égalités $D_\infty = D_f = \neg\neg\{0\}$ dans le modèle (c'est-à-dire qu'on a $\mathbb{D} \not\models D_\infty = D_f$ et $\mathbb{D} \not\models D_f = \neg\neg\{0\}$). Par contre elle ne prouve pas, ce qui est un peu plus fort, les non-égalités dans ce modèle (c'est-à-dire que $\mathbb{D} \models \neg(D_\infty = D_f) \wedge \neg(D_f = \neg\neg\{0\})$) comme l'énoncé de la proposition aurait pu le laisser supposer.

5. Comme nous l'avons signalé dans l'introduction, il y a donc dans l'anneau R de $\mathbb{D}$ bien d'autres infinitésimaux que les nilpotents, contrairement au cas de la géométrie algébrique (voir le n°3), ce qui est "naturel géométriquement"

6. X étant un objet représentable dans $\mathbb{D}$ (par exemple $X \simeq A^{op}$), notons SpecX l'ensemble ΓX muni de la topologie, homéomorphe à celle de SpecA, transportée par la bijection :

$$\Gamma X \xrightarrow{\sim} \Gamma A^{op} \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}(A,\mathbb{R}) = \mathrm{Spec}A.$$

Si $f : X \to Y$ est une flèche du topos où X et Y sont représentables, alors l'application Γf : SpecX $\to$ SpecY est continue.

Nous verrons plus loin (chapitre III, §2) qu'on peut définir de tels spectres dans un contexte beaucoup plus général.

7. (Théorème spectral d'inversion). Soit $f : X \to Y$ une flèche de $\mathbb{D}$ telle que :

1) X et Y sont représentables,
2) SpecX $\to$ SpecY est un homéomorphisme,
3) pour tout point p de SpecX, $\neg\neg\{p\} \to \neg\neg\{fp\}$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}$. Alors, sous ses hypothèses, f est un isomorphisme.

<u>Preuve</u> : Résulte du 1 et de l'Appendice, §2, n°2, 4.

N°3. <u>En géométrie algébrique</u>.

0. Dans ce sous-paragraphe nous n'allons pas utiliser les résultats du §2, car les caractérisations que nous allons obtenir sont valables très généralement sans condition sur l'anneau de base k.

1. k étant un anneau fixé, soit A une k-algèbre et $\mathfrak{a} = (a_1,\dots,a_k)$ un idéal de type fini de A. Alors dans les topos de k-algèbres (voir chapitre 0, §2)

on a les deux caractérisations suivantes :

a) $\neg(A/\mathfrak{a}^{op} \rightarrowtail A^{op}) = \bigcup_{i=1}^{k} (A[a_i^{-1}]^{op} \rightarrowtail A^{op})$

b) $\neg\neg(A/\mathfrak{a}^{op} \rightarrowtail A^{op}) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} [(A/\mathfrak{a}^{p})^{op} \rightarrowtail A^{op}]$

Preuve : a) Soit B une k-algèbre et $h : A \to B$ un k-homomorphisme. Alors $B^{op} \to A^{op}$ factorise $\neg(A/\mathfrak{a}^{op} \rightarrowtail A^{op})$ ssi le carré suivant est un produit fibré dans le topos :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & A/\mathfrak{a}^{op} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^{op} & \longrightarrow & A^{op} \end{array}$$

c'est-à-dire ssi $B/h\mathfrak{a}$ est l'anneau nul (où $h\mathfrak{a}$ désigne l'idéal image de $\mathfrak{a}$ dans B) ou encore ssi $1 \in (ha_1,\dots,ha_k)$. Or cette dernière propriété équivaut à dire que $\bigcup_{i=1}^{k} B[ha_i^{-1}]^{op} = B^{op}$ dans le topos (voir la définition des trois pré-topologies (zar), (et) et (fppf)). Par suite, comme $B[ha_i^{-1}]^{op} = (h^{op})^{-1} A[a_i^{-1}]^{op}$, l'égalité précédente peut encore s'écrire : $B^{op} = \bigcup_i (h^{op})^{-1} A[a_i^{-1}]^{op} = (h^{op})^{-1} \bigcup_i A[a_i^{-1}]^{op}$ ce qui signifie précisément que $B^{op} \to A^{op}$ factorise $\bigcup_i A[a_i^{-1}]^{op}$.

b) Comme précédemment, donnons nous une k-algèbre B et un k-homomorphisme $h : A \to B$. Alors, $B^{op} \to A^{op}$ factorise $\neg\neg(A/\mathfrak{a}^{op})$ ssi le carré suivant est un produit fibré dans le topos (d'après a)) :

$$\begin{array}{ccc} \emptyset & \longrightarrow & \bigcup_i A[a_i^{-1}]^{op} \\ \downarrow & & \downarrow \\ B^{op} & \longrightarrow & A^{op} \end{array}$$

c'est-à-dire ssi $\bigcup_i B[ha_i^{-1}]^{op} = \emptyset$ (voir raisonnement précédent). Mais $\bigcup_i B[ha_i^{-1}]^{op} = \emptyset$ ssi, pour tout indice $i \leq k$, $B[ha_i^{-1}]$ est l'anneau nul ; ou encore ssi, pour tout $i \leq k$, ha_i est nilpotent dans B ; ou même ssi, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $ha_i^n = 0$ pour tout $i \leq k$. Or cette dernière propriété équivaut à dire qu'il existe un entier n pour lequel on a la factorisation de $B^{op} \to A^{op}$ par $A/(a_1^n,\dots,a_k^n)^{op}$. Considérons alors l'entier $p = kn$ alors $\mathfrak{a}^p \subset (a_1^n,\dots,a_k^n)$. La factorisation précédente entraîne l'existence d'un entier p pour lequel $B^{op} \to A^{op}$ factorise $(A/\mathfrak{a}^p)^{op}$. Elle entraîne donc, à fortiori, la factorisation de $\bigcup_p (A/\mathfrak{a}^p)^{op}$ par $B^{op} \to A^{op}$. Finalement on a donc montré que $\neg\neg(A/\mathfrak{a}^{op}) \subset \bigcup_p (A/\mathfrak{a}^p)^{op}$. Il reste à établir la réciproque, c'est-à-dire, ce qui est équivalent, que $\bigcup_p (A/\mathfrak{a}^p)^{op} \cap \neg(A/\mathfrak{a}^{op}) = \emptyset$ ou encore que $\bigcup_p (A/\mathfrak{a}^p)^{op} \cap \bigcup_{i\leq k} A[a_i^{-1}]^{op} = \emptyset$. Pour cela il nous suffit de prouver que pour chaque $i \leq k$ et $p \in \mathbb{N}$ on a : $(A/\mathfrak{a}^{op}) \cap A[a_i^{-1}]^{op} = \emptyset$ ce qu'on établit aisément.

2. La proposition précédente admet le corollaire suivant (démontré pour la première fois par A. Kock). Si k est un anneau quelconque et R l'anneau canonique dans un topos de k-algèbres (i.e. $R = k[X]^{op}$). Alors on a :

$$\neg\neg\{0\} = \bigcup_m D_m^{(n)} = D_\infty^n$$

(la double négation étant prise dans R^n) où

$$D_m^{(n)} = \{(d_1,\dots,d_n) \in R^n \ / \bigwedge_{p_1+\dots+p_n=m} d_1^{p_1}\dots d_n^{p_n} = 0\} \text{ et } D_\infty = \bigcup_n D_n$$

<u>Preuve</u> : Car $D_m^{(n)} = [k[X_1,\dots,X_n]/(X_1,\dots,X_n)^m]^{op}$

3. a) Soient k un anneau noethérien, A une k-algèbre de type fini et $\mathfrak{P}$ un idéal premier de A. Alors, dans les "gros" topos de k-algèbres (c'est-à-dire qu'on ne considère que le "gros" site $\mathcal{A}_k^{op}$) on a :

$$\neg\neg(k(\mathfrak{P})^{op} \rightarrowtail A^{op}) = \bigcup_n [(A_{\mathfrak{P}}/\mathfrak{m}^n)^{op} \rightarrowtail A^{op}],$$

où $k(\mathfrak{P})$ est le corps résiduel de A en $\mathfrak{P}$, et $\mathfrak{m}$ est l'unique idéal maximal de l'anneau local $A_{\mathfrak{P}}$.

b) En particulier, lorsque k est un corps algébriquement clos et $m : 1 \to A^{op}$ est une section globale dans le topos, on a :

$$\neg\neg\{m\} = \bigcup_n [(A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}^n)^{op} \rightarrowtail A^{op}],$$

où $\mathfrak{m}$ désigne aussi bien l'idéal maximal de A correspondant à la section globale m, que l'unique idéal maximal de $A_{\mathfrak{m}}$.

Preuve : a) Montrons tout d'abord que $\neg\neg(k(\mathfrak{p})^{op} \rightarrowtail A^{op}) \subset (A_{\mathfrak{p}}^{op} \rightarrowtail A^{op})$. Comme $A_{\mathfrak{p}}^{op} = \bigcap_{a \notin \mathfrak{p}} A[a^{-1}]^{op}$ il suffit de constater que $\neg\neg k(\mathfrak{p})^{op} \subset A[a^{-1}]^{op}$ pour tout $a \notin \mathfrak{p}$, ce qui provient du fait que $A[a^{-1}]^{op} \rightarrowtail A^{op}$ est stable par double négation puisque $A[a^{-1}]^{op} = \neg A/(a)^{op}$ (voir le 1,a). Par suite on a :

$$\underset{A_{\mathfrak{p}}^{op}}{\neg\neg} k(\mathfrak{p})^{op} = \underset{A^{op}}{\neg\neg} k(\mathfrak{p})^{op} \cap A_{\mathfrak{p}}^{op} = \underset{A^{op}}{\neg\neg} k(\mathfrak{p})^{op}$$

(où la lettre en dessous de $\neg\neg$ désigne l'objet dans lequel on effectue la double négation). L'identité cherchée résulte alors de la proposition précédente (car, k étant noethérien, $\mathfrak{m}$ est de type fini).

b) résulte du a) et du fait que $k(\mathfrak{m}) \simeq k$.

4. a) Revenons aux hypothèses du 1. Soit k un anneau fixé, A une k-algèbre et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de A. Alors, dans les topos de k-algèbres on a :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg(A/\mathfrak{a}^{op}), R) \simeq \hat{A},$$

où $\hat{A}$ désigne la complétion de A pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique.

b) De plus, quand simultanément k est noethérien, A est de type fini et $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de A alors, dans les "gros" topos de k-algèbres (pour cette appellation voir le 3) on a :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg k(\mathfrak{p})^{op}, R) \simeq \hat{A}_{\mathfrak{p}},$$

où $\hat{A}_{\mathfrak{p}}$ désigne la complétion de $A_{\mathfrak{p}}$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique ($\mathfrak{m}$ désignant l'unique idéal maximal de $A_{\mathfrak{p}}$).

c) Enfin lorsque k est un corps algébriquement clos et $m : 1 \to A^{op}$ est une section globale dans un topos de k-algèbres on a :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg\{m\}, R) \simeq \hat{A}_{\mathfrak{m}},$$

$\mathfrak{m}$ désignant l'idéal maximal de A correspondant à la section globale m.

Preuve : Le foncteur Hom(-,R) envoyant des limites à droites sur des limites à gauche, on en déduit, d'après le 1, que :

$$\mathrm{Hom}(\daleth(A/\mathfrak{a}^{op}),R) \simeq \varprojlim_{n}(A/\mathfrak{a}^n),$$

d'où le premier résultat cherché. Quant au (b) et (c) on les a de façon analogue à l'aide du 3. Signalons seulement, dans le cas (c), qu'il n'est plus nécessaire ici de se placer dans un "gros" topos de k-algèbres car l'équation $\hat{A} = \hat{A}_{\mathfrak{m}}$ ayant été établi à l'aide d'un quelconque des "gros" topos (par (a) et (c)) on peut alors appliquer (a) pour obtenir le résultat cherché dans n'importe quel topos de k-algèbres.

5. La proposition précédente admet pour corollaire :

k étant un anneau quelconque et 0 l'origine de R^n dans un topos de k-algèbres, on a :

$$\mathrm{Hom}(\daleth\{0\},R) \simeq k[[X_1,\ldots,X_n]]$$

Preuve : Car la k-algèbre des séries formelles à n variables est la complétion de la k-algèbre $k[X_1,\ldots,X_n]$ pour la topologie $(X_1,\ldots,X_n)$-adique.

6. (Remarque). F étant un objet d'un topos de k-algèbres, s'il est représentable, il est clair que ce sera nécessairement par la k-algèbre Hom(F,R) comme on le remarque immédiatement en utilisant le lemme de Yonéda. Ceci prouve en particulier, pour l'origine dans R, que $\daleth\{0\}$ ne peut être représentable car sinon, il le serait par k[[X]]. En effet, on a vu à la proposition 2 que $\daleth\{0\} = D_\infty$, donc pour toute k-algèbre A, $\daleth\{0\}(A) = D_\infty(A) = \{a \in A \ / \ a \text{ nilpotent}\}$. En particulier l'identité dans $\mathrm{Hom}_k(k[[X]],k[[X]]) \simeq \daleth\{0\}(k[[X]])$ devrait être nilpotente, ce qui n'est évidemment pas le cas.

§4. Le théorème d'inversion infinitésimale.

N°1. En géométrie différentielle.

0. Ayant (en partie) justifié l'affirmation : "x infinitésimal" $\Leftrightarrow \neg\neg(x=0)$ et surtout ayant constaté que dans le topos de Dubuc $\mathbb{D}$ (voir définition au chapitre 0, §2) on a :

$$\mathrm{Hom}(\neg\neg\{0\},\mathbb{R}^m) \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \text{ (la double négation étant prise dans } R^n\text{)},$$

on peut se demander, ce qui parait légitime, si le théorème d'inversion infinitésimale, qui a été formulé au §1, n°5 est valide dans $\mathbb{D}$.

1. Tout d'abord, considérons les deux axiomes suivants (où $\Delta = \neg\neg\{0\}$, la double négation étant prise dans R^n).

(II_n) $\forall f : \Delta^n \to \Delta^n$ $(fo = o \wedge \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0 \to f \text{ bijective})$

(II'_n) $\forall f : R^n \to R^n$ $(fo = o \wedge \frac{\partial f}{\partial x}(0) \text{ inversible} \to f \text{ inf.inversible en } 0)$

Comme nous l'avons déjà vu au §1 on a toujours l'implication $(II_n) \Rightarrow (II'_n)$ (sous les hypothèses du §1, n°5,1). L'implication $(II'_n) \Rightarrow (II_n)$, elle aussi, est valide dans le topos $\mathbb{D}$.

Preuve : Cela résulte en fait du lemme suivant (il suffit de faire une preuve intuitionniste).

Lemme : $\mathbb{D}$ satisfait les formules suivantes (pour chaque n)

$$\forall f : \Delta^n \to R \;\; \exists g : R^n \to R \;\; \forall x \in \Delta^n \;\; (fx = gx)$$

Preuve du lemme : Soit $X = C^\infty\mathbb{R}^m/I^{op}$ un objet représentable de $\mathbb{D}$ et $F : X^*\Delta^n \to X^*R$ une flèche quelconque de $\mathbb{D}/X$. Elle est en fait parfaitement déterminée par la flèche $f : X \times \Delta^n \to R$ de $\mathbb{D}$. Comme Δ^n est représentable par "l'objet dual" (voir chapitre 0, §2, n°0) d'un quotient de $C^\infty\mathbb{R}^n$, $X \times \Delta^n$ est lui-même représentable par l'objet dual d'un quotient de $C^\infty\mathbb{R}^{m+n}$. Par suite f peut se prolonger en une fonction $g : R^m \times R^n \to R$. Il suffit alors d'en faire la restriction à $X \times R^n \rightarrowtail R^m \times R^n$ pour obtenir la flèche cherchée (c'est en fait la flèche $X^*R \to X^*R$ correspondante qui est la flèche cherchée).

2. Le topos $\mathbb{D}$ satisfait l'axiome d'inversion infinitésimale (i.e. les formules (II_n) pour tout entier n).

Preuve : Par le 1 il suffit de montrer que $\mathbb{D}$ satisfait les formules (II_n'). Soit $X = C^\infty\mathbb{R}^m/I^{op}$ un objet représentable de $\mathbb{D}$ et $F : X^*R^n \to X^*R^n$ une flèche quelconque dans $\mathbb{D}/X$. Montrons alors que :

$\mathbb{D}/X \models [Fo = o \wedge \frac{\partial F}{\partial x}(o) \text{ inversible}]$ entraîne que $\mathbb{D}/X \models [F : X^*\Delta^n \to X^*\Delta^n \text{ bijectif}]$

Soit $F = (\text{proj},f) : X \times R^n \to X \times R^n$ la flèche de $\mathbb{D}$ définissant $F : X^*R^n \to X^*R^n$ dans $\mathbb{D}/X$. Sous les hypothèses précédentes il faut donc montrer que la restriction de F (notée encore F) $X \times \Delta^n \to X \times \Delta^n$ est un isomorphisme dans $\mathbb{D}$. Pour cela nous allons utiliser le "théorème spectral d'inversion" (voir §3, n°2, 7). Comme $\text{Spec}(X \times \Delta^n) \simeq ZI \times \{0\}$, soit $(p,0) : 1 \to X \times \Delta^n$ une section globale. Montrons alors que la flèche (restriction de F) $\neg\neg\{(p,0)\} \to \neg\neg\{(p,0)\}$ est inversible dans $\mathbb{D}$ (la double négation étant prise dans $X \times \Delta^n$ ou encore dans $X \times R^n$ puisque $X \times \Delta^n \rightarrowtail X \times R^n$ est stable par double négation). Mais tout d'abord, remarquons (comme au lemme du 1) que $F = (\text{proj},f) : X \times R^n \to X \times R^n$ est elle-même la restriction d'une flèche (notée encore) $F = (\text{proj},f) : R^m \times R^n \to R^m \times R^n$ (car $X = C^\infty \mathbb{R}^m/I^{op}$). Utilisons maintenant l'hypothèse. Comme le foncteur $p^* : \mathbb{D}/X \to \mathbb{D}$ est logique on doit avoir $\mathbb{D} \models [(p^*F)(0) = 0 \wedge \frac{\partial(p^*F)}{\partial x}(0) \text{ inversible}]$ ou encore, puisque $p^*F = f(p,-) : R \to R$ on a $f(p,0) = 0$ et $\frac{\partial f(p,-)}{\partial x}(0) \neq 0$ (f est considéré maintenant comme une application lisse usuelle $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$). En utilisant l'application lisse $F = (\text{proj},f) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ cela devient :

$$F(p,0) = (p,0) \text{ et } \frac{\partial F}{\partial x}(p,0) \neq 0$$

Nous sommes maintenant sous les hypothèses du théorème d'inversion locale classique. Il existe donc des voisinages ouverts resp. U de (p,0) et V de $F(p,0) = (p,0)$ tels que $FU \subset V$ et la restriction de F à $U \to V$ est un isomorphisme C^∞. Exprimé dans le topos cela signifie que la factorisation suivante:

$$\begin{tikzcd} EU \arrow[r, dashed] \arrow[d, tail] & EV \arrow[d, tail] \\ R^m \times R^n \arrow[r, "F"] & R^m \times R^n \end{tikzcd}$$

est un isomorphisme. Mais EU et EV étant stables par double négation et

$F : EU \to EV$ et $F^{-1} : EV \to EU$ préservant la relation d'"infini-proximité" on montre facilement (de façon intuitionniste) que la flèche, restriction de F, $\neg\neg\{(p,0)\} \to \neg\neg\{(p,0)\}$ est inversible. Par suite, comme l'application $\mathrm{Spec}(X \times \Delta^n) \to \mathrm{Spec}(X \times \Delta^n)$ est un homéomorphisme (car le spectre de la projection $X \times \Delta^n \to X$ est un homéomorphisme $\mathrm{Spec}(X \times \Delta^n) \to \mathrm{Spec}X$) on en déduit par le théorème spectral d'inversion (voir §3, n°2, 7) que la flèche $F : X \times \Delta^n \to X \times \Delta^n$ et un isomorphisme dans $\mathbb{D}$, ce qui achève de prouver notre proposition.
3. Comme $\mathrm{Hom}(\neg\neg\{0\}, R^n) \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ il est clair que le théorème d'inversion infinitésimal, que l'on vient de montrer dans le topos $\mathbb{D}$, restitue le théorème classique d'inversion locale.

4. Nous allons maintenant passer à la caractérisation des morphismes infinitésimalement inversibles (entre objets représentables) dans le topos $\mathbb{D}$.

Soit $h : A \to B$ un homomorphisme entre anneaux lisses de type fini. Alors : $h^{op} : B^{op} \to A^{op}$ est inf. inversible dans $\mathbb{D}$ ssi, pour tout point $p \in \mathrm{Spec}B$, l'homomorphisme canonique $A_q \to B_p$ (où $q = \mathrm{Spech}(p) = p \circ h$) est un isomorphisme.

Preuve : Autrement dit, il faut donc montrer qu'une flèche $f : X \to Y$ dans $\mathbb{D}$ est infinitésimalement inversible ssi, X et Y étant représentables, la flèche canonique $\neg\neg\{p\} \to \neg\neg\{fp\}$ est un isomorphisme, pour toute section globale $p : 1 \to X$ (voir le §3, n°2, 1). Il est clair que cette condition est satisfaite si f est inf. inversible. Montrons maintenant la réciproque. Utilisons pour cela la caractérisation suivante des flèches inf. inversibles dans un topos quelconque :

Lemme : Une "application" $f : X \to Y$ est inf. inversible ssi l'application suivante est bijective :

$$\begin{aligned} \tilde{X} &\to Z \\ (x,x') &\mapsto (x,fx') \end{aligned}$$

En notant $\tilde{X} = \{(x,x') \in X^2 / x \sim x'\}$ et $Z = \{(x,y) \in X \times Y \,/\, fx \sim y\}$.

Preuve : Immédiate, par des arguments "intuitionnistes".

Preuve de la proposition 4 (suite) : Comme à la proposition 2 nous allons utiliser le "théorème spectral d'inversion" (voir §3, n°2, 7) pour montrer que l'application $\tilde{X} \to Z$ est inversible. Constatons déjà que $\tilde{X}$ et Z sont représentables (voir la caractérisation de $\neg\neg$ dans $\mathbb{D}$ au §3, n°2, 1) et que l'application $\mathrm{Spec}(\tilde{X}) \to \mathrm{Spec}(Z)$ est un homéomorphisme (car les spectres des premières projections $\tilde{X} \to X$ et $Z \to X$ sont des homéomorphismes). Il nous reste à vérifier la condition "infinitésimale" du théorème. Soit donc un point p de SpecX, il nous faut montrer que la flèche suivante $\neg\neg\{(p,p)\} \to \neg\neg\{(p,fp)\}$ (où les doubles négations sont resp. prises dans $\tilde{X}$ et Z) est un isomorphisme dans $\mathbb{D}$. Ou encore, dit de façon plus "élémentaire", que la flèche suivante :

$$\begin{array}{ccc} \{(x,x') \in X^2/(x,x') \sim (p,p)\} & \to & \{(x,y) \in X \times Y/(x,y) \sim (p,fp)\} \\ (x,x') & \longmapsto & (x,fx') \end{array}$$

est un isomorphisme dans le topos. Mais cela découle immédiatement du fait que, par hypothèse, c'est la flèche (restriction de f) $\{x \in X/x \sim p\} \to \{y \in Y/y \sim fp\}$ qui est un isomorphisme.

5. En particulier si M et N sont des variétés C^∞ (ordinaires) et $f : M \to N$ une application lisse alors f est un difféomorphisme local ssi la flèche canonique $C^\infty M^{op} \to C^\infty N^{op}$ est infinitésimalement inversible dans $\mathbb{D}$.

Preuve : Résulte de la proposition précédente car $(C^\infty M)_p \simeq C^\infty_p M$ (voir Appendice, §1, n°6, 9, b) pour une variété M.

6. Terminons maintenant par la recherche (dans $\mathbb{D}$) des variétés de type infinitésimal.

Soit M une variété C^∞ (ordinaire) alors l'objet $C^\infty M^{op}$ est une variété de type infinitésimal, de même dimension, dans le topos $\mathbb{D}$.

Preuve : M étant une variété C^∞ (disons de dimension n) elle est recouverte par des ouverts U_i isomorphes à des ouverts de $\mathbb{R}^n$. De ce fait, dans le topos, la famille $(C^\infty U_i^{op} \rightarrowtail C^\infty M^{op})_i$ est épimorphe (voir Appendice, §1, n°6, 9, a) et formée de flèches inf. inversibles (voir proposition précédente). De plus les applications $U_i \to \mathbb{R}$ sont des difféomorphismes locaux, par suite les flèches $C^\infty U_i^{op} \to (C^\infty \mathbb{R}^n)^{op}$ étant inf. inversibles, $C^\infty U_i^{op}$ est une variété de type infinitésimal de dimension n (voir §1, n°3, 5, c). Il nous reste à appliquer la proposition 6 du §1, n°3 pour conclure que $C^{\infty}M^{op}$ est une variété de type infinitésimal de dimension n.

7. La réciproque est évidemment fausse dans le cas général, même si la variété de type infinitésimal X est représentable (il suffit de prendre $X = C_0^{\infty}\mathbb{R}^{op}$). Cependant, nous verrons au chapitre III, §4, n°1, 5 que lorsque $X = A^{op}$ où A est un anneau lisse de présentation finie (c'est-à-dire de la forme $C^{\infty}\mathbb{R}^m/I$ où I est un idéal de type fini), la réciproque est vraie, c'est-à-dire que X est une variété de type infinitésimal ssi $X \simeq C^{\infty}M^{op}$ où M est une variété C^{∞} (ordinaire).

N°2. En géométrie algébrique.

1. Soit $\mathcal{E}$ un topos de k-algèbres (voir définition au chapitre 0, §2), pour un anneau quelconque k et $R = k[X]^{op}$ l'anneau canonique. Alors, pour chaque entier n, $\mathcal{E}$ satisfait la formule :

$$(II_n) \quad \forall f : \Delta^n \to \Delta^n \quad (fo = o \wedge \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0 \quad \to f \text{ bijective}).$$

Preuve : Comme k est quelconque et que pour toute k-algèbre A, $\mathcal{E}/A^{op}$ est lui-même un topos de A-algèbres, il n'est pas nécessaire de changer de base et on peut supposer que $f : \Delta^n \to \Delta^n$ est une flèche "externe" de $\mathcal{E}$.

Soit maintenant $\Phi(f)$ la formule "$fo = o \wedge \frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0$". Alors $\mathcal{E} \models \Phi(f)$ ssi $fo = o$ et la section globale $\frac{\partial f}{\partial x}(0) : 1 \to R$ factorise $\mathrm{Inv}(R) \rightarrowtail R$ (car R est un corps de fractions - voir chapitre I, §1, n°2, 3). En utilisant maintenant la proposition 5 du §3, n°3 on obtient les bijections naturelles suivantes (dans $\mathbb{E}$ns) :
$\{f : \Delta^n \to \Delta^n / \mathcal{E} \models \Phi(f)\} \simeq \{f : \Delta^n \to R^n / fo = o$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(0) : 1 \to R$ factorise $\mathrm{Inv}(R) \rightarrowtail R\} \simeq \{(f_1,\dots,f_n) \in k[[X_1,\dots,X_n]]^n / \forall i \leq n \ (f_i o = o)$ et $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(X_1,\dots,X_n)}(0)$ inversible dans $k\}$.

Or on sait (voir [5]) que si $f = (f_1,\dots,f_n) \in k[[X_1,\dots,X_n]]^n$ est tel que , pour tout $i \leq n$, $f_i o = o$ et $\frac{\partial(f_1,\dots,f_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(0)$ est inversible dans k alors, il existe un "inverse" $g = (g_1,\dots,g_n) \in k[[Y_1,\dots,Y_n]]^n$ tel que, pour tout $i \leq n$, $g_i o = o$, $f_i(g_1,\dots,g_n) = Y_i$ et $g_i(f_1,\dots,f_n) = X_i$. Mais cela signifie précisément que $f : \Delta^n \to \Delta^n$ admet un inverse dans $\mathfrak{E}$.

2. (Remarque). On a vu au n°1 qu'en géométrie différentielle le théorème d'inversion infinitésimale permettait de retrouver le théorème classique d'inversion locale (voir la remarque au n°1, 3). Par contre ici, le théorème (qui est a fortiori valide même dans le topos de Zariski!) reste essentiellement infinitésimal puisque même pour un polynome il ne considère que la série de Taylor de son "inverse". Il est donc nécessaire maintenant de laisser de côté le point de vu infinitésimal pour passer au stade local.

CHAPITRE III

UTILISATION DES VOISINAGES INTRINSEQUES

§0. Introduction

Comme nous l'avons constaté en géométrie algébrique, on ne pouvait pas nécessairement passer de l'infinitésimal au local (voir la remarque, à la fin du chapitre précédent, à propos du théorème d'inversion infinitésimale). Mais nous aurions pu, tout aussi bien, arriver aux mêmes conclusions d'une façon différente, par la géométrie différentielle. En effet, "moralement", les sous-objets infinitésimalement inversibles d'une variété C^∞ ordinaire, qui ne sont qu'une version infinitésimale du concept d'ouvert devraient tous provenir d'ouverts usuels de cette variété. Or, évidemment, il n'en est rien. Pour s'en convaincre il suffit de remarquer que, même pour un fermé F de $\mathbb{R}^n$, $E(F) \rightarrowtail R^n$, qui est pourtant réprésentable (par $C^\infty\mathbb{R}^n/I^\omega(F)$) est infi. inversible (il est même fermé pour la topologie élémentaire de la double négation). Ainsi les infinitésimaux étant insuffisants pour décrire certaines situations locales, il nous faut à nouveau intérroger la "logique" pour savoir s'il est possible, malgré tout, de décrire ces nouvelles situations "intrinsèquement" (c'est-à-dire sans le secours d'aucune structure supplémentaire; comme c'était le cas, nous l'avons vu, pour les infinitésimaux). C'est une analyse plus approfondie de la négation qui nous permettra d'aller plus avant. En effet, étant donné un point x d'un objet quelconque X (on peut se placer dans un quelconque des modèles envisagés ici) si l'identité $\neg\neg\{x\} \cap \neg\{x\} = \emptyset$ est toujours satisfaite, par contre l'identité $\neg\neg\{x\} \cup \neg\{x\} = X$ ne l'est presque jamais. Ainsi $\neg\neg\{x\}$ ne remplit donc pas complètement le "vide" laissé par $\neg\{x\}$. On a donc perdu une part des informations "autour" de x. Mais ces informations sont-elles présisément, comme on vient d'en constater l'existence, celles qui, de nature locale, n'arrivent pas à être décrites par les infinitésimaux ? Pour s'en assurer il nous faut sensiblement modifier la définition de sous-objet inf. inversibles. Au lieu d'imposer qu'un tel sous-objet U soit stable par "voisinage infinitésimal" (i.e. tel que $\forall x \in X\ \forall y \in X\ [\neg\neg(x = y) \wedge x \in U \rightarrow y \in U]$), on préférera l'alternative, pour un élément x de U et un élément y quelconque :

"ou y est discernable de x" ou bien (nous aimerions dire "dans le cas contraire") "y est dans U". La phrase entre parenthèses n'étant pas formellement nécéssaire peut donc être supprimée. On arrive alors à l'écriture logique sui-

suivante :

$$\forall x \in X \quad \forall y \in X \; [x \in U \rightarrow y \neq x \vee y \in U]$$

Nous allons voir maintenant que cette nouvelle formulation rend bien compte de la nature locale de ces sous-objets (et pas seulement de la nature infinitésimale).

§1. Généralités

n°1 . Voisinages et ouverts intrinsèques

1. Dans ce paragraphe on se placera dans un topos fixé.

Définitions (voir[33]) Etant donné un objet X (du topos) , on dit que :

a) une partie V de X est un voisinage intrinsèque d'un point x_0 de X, ou encore que x_0 est intérieur à V si la formule suivante est satisfaite :

$$\forall x \in X \quad (x \neq x_0 \vee x \in V)$$

b) une partie U de X est un ouvert-intrinsèque, si elle est voisinage intrinsèque de chacun de ses points. C'est-à-dire, si elle satifait la formule :

$$\forall x \in X \quad \forall x' \in X \quad (x \in U \rightarrow x' \neq x \vee x' \in U)$$

Dans la suite, lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguité sur les mots "voisinage" et "ouverts" on omettra souvent le qualificatif "intrinsèque".

2. Exemples : Nous verrons dans le paragraphe suivant que, dans de nombreux modèles, les ouverts intrinsèques sont bien ceux qu'il était légitime de trouver. Cependant pour les topos spaciaux (i.e. topos de faisceaux sur un espace topologique) il y a "plus" d'ouverts intrinsèques que d'ouverts "traditionnels" comme le montre l'exemple suivant (du à Johnstone,[21]). Soit $\mathcal{E}$ le topos de faisceaux sur un espace topologique (non-vide) X . Notons R les "réels de Dedekind" du topos $\mathcal{E}$ (on sait qu'en fait $RU = \mathcal{C}^0(U,\mathbb{R})$, voir [20]) et soit a un point de X et $P \rightarrowtail R$ le sous-faisceau défini par :

$PU = \{f \in RU/fa = 0\}$ si $a \in U$

$PU = RU$ sinon

On vérifie que $P \rightarrowtail R$ est un ouvert intrinsèque dans $\mathcal{E}$ mais n'est pas un ouvert "traditionnel" c'est-à-dire ne satisfait pas la formule :

$$\forall x \in P \quad \exists y \in R \quad \exists z \in R \; (x \in \,]y,z[\; \wedge \;]y,z[\subset P)$$

- Mais nous reviendrons au n°4 sur les rapports existants entre les "ouverts intrinsèques" et les "ouverts traditionnels" puis nous verrons au §3 que, contrairement à l'exemple précédent, ils coïncident dans tous les "bons" topos.

3. Donnons maintenant quelques propriétés générales des voisinages (intrinsèques): Soient X, X' deux objets, x_0 un élément de X, V, W deux parties de X et V' une partie de X', alors :

a) Si V est un voisinage de x_0 alors V contient $\neg\neg\{x_0\}$,

b) $f : X \to X'$ étant une application quelconque, si V' est un voisinage de fx_0 alors $f^{-1}V'$ est un voisinage de x_0 ,

c) Si V est un voisinage de x_0 dans X et W un voisinage de x_0 dans V, alors W est encore un voisinage de x_0 dans X,

d) Si V et W sont des voisinages de x_0 alors, $V \cap W$ est un voisinage de x_0

e) Si V est un voisinage de x_0 et $V \subset W$ alors W est un voisinage de x_0

Les deux dernières propriétés montrent en fait que l'ensemble des voisinages de x_0 forme un filtre sur X.

Preuve : se montre sans difficulté.

4. Passons maintenant aux propriétés des ouverts (intrinsèques).

- La proposition précédente admet immédiatement pour corollaire que les ouverts sont des sous-objets infinitésimalement inversibles (voir définition au Chapitre II, §1, n°2). De plus, elle montre que les ouverts sont stables :

a) par changement de base (i.e. si $f : X \to X'$ est une application et U est un ouvert de X' alors $f^{-1}U$ est un ouvert de X, ce que l'on peut exprimer encore en disant, que toute application est continue !)

b) par composition (i.e. U ouvert de X et V ouvert de $U \Rightarrow V$ ouvert de X)

c) par réunion quelconque (d'une famille indexée par un objet de topos - voir leur définition au n°6, §1 du Chapitre 0)

d) par intersection finie.

5.(Remarque) a) Si les ouverts sont toujours inf. inversibles, la réciproque est souvent fausse, comme on le voit par exemple en comparant le Chapitre II,

§3, n°1, 1 avec, dans ce chapitre, le §2, n°5, 1.

b) La propriété (c) de la proposition précédente entraine, en particulier, que tout sous-objet de l'objet final 1 est ouvert. Cela va permettre de montrer, dans quelques exemples (voir §2, n°5, 3,b) qu'il y a parfois "plus" d'ouverts intrinsèques qu'on ne l'aurait souhaité. Une autre conséquence de cette remarque est que les ouverts, qui sont toujours inf. inversibles, ne sont pas nécessairement stables par double négation.

Preuve du (b) : Soit $P \subset 1$ alors $P = \bigcup_{x \in P} \{x\}$ or, pour tout $x \in P$ $\{x\}$, qui est égal à 1 tout entier, est évidemment un sous-objet ouvert de 1. Donc P est lui-même ouvert.

6. Bien que la formule définissant les ouverts ne soit pas "cohérente" (voir [27]) les ouverts sont cependant stables par image inverse de morphismes géométriques (i.e. soit $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ un morphisme géométrique entre topos et $U \rightarrowtail X$ un sous-objet dans $\mathcal{E}'$ alors, si $U \rightarrowtail X$ est ouvert dans $\mathcal{E}'$ il en est de même de $P^*U \rightarrowtail P^*X$ dans $\mathcal{E}$).

Preuve : On voit facilement que $U \rightarrowtail X$ est un ouvert ssi on a l'identité :

$$\neg(\mathrm{Gr}U) \cup (U \times U) = U \times X$$

(où $\mathrm{Gr}U \subset U \times X$ est le graphe de $U \to X$). Par suite, comme p^* préserve les $\varprojlim$ finies et les $\varinjlim$ quelconques, on en déduit que :

$$p^*(\neg\, \mathrm{Gr}U) \cup (p^*U \times p^*U) = p^*U \times p^*X$$

or $p^*(\neg\, \mathrm{Gr}U) \subset \neg p^*\mathrm{Gr}U$ (car p préservant l'objet initial et les intersections on a : $p^*(\neg\, \mathrm{Gr}U) \cap P^*\mathrm{Gr}U = \emptyset$). Donc, à fortiori, on a :

$$\neg(p^*\mathrm{Gr}U) \cup (p^*U \times p^*U) = p^*U \times p^*X$$

ce qui prouve que $p^*U \rightarrowtail p^*X$ est ouvert dans $\mathcal{E}$(car $p^*\mathrm{Gr}U = \mathrm{Gr}p^*U$).

7. P étant une partie de X, notons $\overset{o}{P}$ l'ensemble des points de X intérieurs à P. On a les propriétés suivantes :

a) $\overset{o}{X} = X$ et $\overset{o}{\emptyset} = \emptyset$

b) $\overset{o}{P} \subset P$

c) $P \subset Q$ alors $\mathring{P} \subset \mathring{Q}$

d) $\overset{\circ}{\widehat{P \cap Q}} = \mathring{P} \cap \mathring{Q}$

<u>Preuve</u> : évidente.

<u>8</u>. a) Cependant on n'a pas toujours $\mathring{P} = \mathring{\mathring{P}}$ (ce qui signifie encore que $\mathring{P}$ n'est pas nécessairement ouvert).

b) Il faut pour cela, certaines conditions sur X. Plus précisèment si X satisfait la condition (dite "de recouvrement") suivante :

$$\forall P \subset X \quad \forall Q \subset X \quad (P \cup Q = X \to \mathring{P} \cup \mathring{Q} = X)$$

alors pour tout $P \subset X$, $\mathring{\mathring{P}} = \mathring{P}$. Nous verrons au §3 que cette condition est presque toujours satisfaite dans les modèles présentés ici.

c) Par contre, toute partie contient un plus grand ouvert qui est évidemment la réunion de tous les ouverts contenus dans cette partie.

<u>Preuve du</u> (b) : x étant un point de X, si x appartient à $\mathring{P}$ alors on a $\neg\{x\} \cup P = X$. Mais alors, d'après la contion de recouvrement, on a aussi $\overset{\circ}{\widehat{\neg\{x\}}} \cup \mathring{P} = X$ ce qui prouve que x est intérieur à $\mathring{P}$ (car $\overset{\circ}{\widehat{\neg\{x\}}} \subset \neg\{x\}$).

n°2. <u>Objets discrets et objets séparés</u>

<u>0</u>. Nous ne nous étendrons pas ici sur les versions "intrinsèques" des différentes propriétés "topologiques" que peut posséder un objet quelconque (pour avoir plus de détails à ce sujet voir [13]). Signalons seulement deux de ces propriétés qui nous seront utiles à plusieurs reprises dans la suite de ce texte.

<u>1</u>. Un objet X est dit (intrinsèquement) <u>discret</u> s'il satisfait une des propriétés équivalentes suivantes :

(i) Tous les points de X sont des ouverts,

(ii) Toute partie de X est ouverte,

(iii) La diagonale de X est ouverte dans $X \times X$,

(iv) $\forall x \in X \quad \forall x' \in X \quad (x = x' \vee x \neq x')$.

Preuve : (i)$\Leftrightarrow$ (ii) : Résulte du n°1, 4,c,

(iii) $\Rightarrow$ (i) car tout "point" $\{x\}$ est l'image réciproque de la diagonale par l'application $y \mapsto (x,y)$

(i) $\Rightarrow$ (iv) : évident

(iv) $\Rightarrow$ (iii) : Soient x_1, x_2 et x trois éléments de X. Comme on a toujours $\neg(x_1 = x_2) \to \neg(x_1 = x \wedge x_2 = x)$, il suffit d'appliquer (iv) aux deux éléments x_1 et x_2 de X pour prouver qu'on a $(x_1,x_2) \neq (x,x) \vee x_1 = x_2$, qui est la formule cherchée.

2. Nous verrons au §2 qu'un espace topologique (ordinaire) est intrinsèquement discret dans $\mathbb{T}$op (voir sa définition au Chapitre 0, §2) ssi il est discret (au sens usuel). Ainsi la terminologie d'objet "discret" est, en partie justifiée.

3. Sans insister sur les propriétés de tels objets remarquons simplement que, comme pour les ouverts, les objets discrets sont stables par image inverse de morphisme géométrique. En particulier, si $p : \mathcal{E} \to \mathfrak{B}$ est un morphisme géométrique entre topos, où $\mathfrak{B}$ est booléen alors, $p^* X$ est toujours discret, quelque soit l'objet X de $\mathfrak{B}$.

Preuve : Résulte du 1 (iii) et du n°1, 6 .

4. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille d'objets indexée par un objet discret I alors, pour chaque indice i de I, l'injection canonique $X_i \to \coprod_i X_i$ définit un sous-objet ouvert de $\coprod_i X_i$.

Preuve : évident, car ce sous-objet est l'image réciproque du singleton $\{i\}$ de I par l'application canonique $\coprod_i X_i \to I$.

5. Passons maintenant aux objets séparés (voir [13]).
On dit qu'un objet X est (intrinsèquement) séparé s'il satisfait une des propriétés équivalentes suivantes :

(i) $\forall x \in X \quad \forall y \in X \quad \forall z \in X \quad (x \neq y \to z \neq x \vee z \neq y)$

(ii) $\forall x \in X$ $(\neg\{x\}$ ouvert de $X)$

(iii) Le complémentaire (i.e. la négation) de la diagonale de X est un ouvert de $X \times X$.

Preuve de l'équivalence:(i) $\Rightarrow$(iii) : Soient x,y,x' et y' des éléments de X alors, comme X vérifie (i) on a :

$$x \neq y \rightarrow x \neq y' \vee y \neq y'$$

$$x \neq y' \rightarrow x \neq x' \vee y' \neq x'$$

donc $x \neq y \rightarrow x \neq x' \vee x' \neq y' \vee y \neq y'$
de plus $x \neq x' \vee y \neq y' \rightarrow \neg(x = x' \wedge y = y')$
Par suite $x \neq y \rightarrow \neg(x = x' \wedge y = y') \vee x' \neq y'$
ou encore $(x,y) \in \neg\mathrm{Diag} \rightarrow (x,y) \neq (x',y') \vee (x',y') \in \neg\mathrm{Diag}$, en notant Diag la diagonale de X.

(iii)$\Rightarrow$(ii) : Les ouverts étant stables par changement de base, il suffit de considérer, pour chaque point x de X, l'application $y \mapsto (x,y)$ de X dans $X \times X$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): évident.

6. Pour les exemples, nous renvoyons au §2. Disons seulement, pour justifier là encore la terminologie, qu'un espace topologique est intrinsèquement séparé dans **Top** ssi il est séparé (au sens usuel). Mais la terminologie de "séparé" paraitra encore plus probante après avoir vu la proposition suivante :

7. Soit X un objet, tel que $X \times X$ a la "topologie produit" c'est-à-dire, satisfaisant la condition suivante :

(P) $\forall x_1 \in X$ $\forall x_2 \in X$ $\forall V \in X^2$ [V vois. de $(x_1,x_2) \rightarrow \exists V_1 \subset X . \exists V_2 \subset X$ (V_1 vois. de $x_1 \wedge V_2$ vois. de $x_2 \wedge V_1 \times V_2 \subset V$)].

Alors X est séparé ssi la propriété (habituelle) suivante est satisfaite :

(S) $\forall x \in X$ $\forall y \in X$ [$x \neq y \rightarrow \exists V \subset X \exists W \subset X$ (V vois. de $x \wedge W$ vois. de $y \wedge V \cap W = \emptyset$]

Preuve : L'équivalence de (S) avec la propriété (iii) de séparation, résulte immédiatement du fait que $V \cap W = \emptyset$ ssi $V \times W \subset \neg\mathrm{Diag}$ où Diag désigne le diagonale de X.

8. (Remarque) a) Même si X ne satisfait pas (P) on a toujours (S) $\Rightarrow$ séparé.

b) On peut se demander, alors, pourquoi avoir choisi cette définition d'objet séparé plutôt que la propriété plus forte (S). En fait, même si cela peut paraître justifié dans **Top** et dans $\mathbb{D}$ (voir définition au Chapitre 0, §2) puisqu'ils satisfont la propriété (P) (du moins, pour les objets représentables) il en va tout autrement en géométrie algébrique où la propriété (P) n'est presque jamais vérifiée (en tant qu'espace topologique $\mathrm{Spm}(A \times A) \neq \mathrm{Spm}A \times \mathrm{Spm}A$, pour une k-algèbre de type fini A où k est un corps algébriquement clos). C'est pourquoi, bien que $\mathrm{Spm}A$ ne soit que rarement séparé, A^{op} est toujours intrinsèquement séparé dans les topos de k-algèbres, ce qui est bien conforme à l'optique de la géométrie algébrique (en effet $\mathrm{Spec}A$ est séparé en tant que schéma).

9. La proposition suivante nous montre que, même en "algèbre", la propriété de séparation est essentielle pour un anneau. En effet,

Soit R un corps de fractions (voir définition au Chapitre I, §1, n°2). Alors :

a) R est un anneau local (même référence) ssi R est séparé,

b) R est un corps de Kock (même référence) ssi R^n est séparé, pour tout entier n.

<u>Preuve</u> : a) Il suffit de vérifier que la propriété d'anneau local est équivalente au fait que $\neg\{0\}$ est ouvert. Si R est local alors, pour tout élément inversible x de R et tout élément y de R on a $\frac{y}{x}$ inversible $\vee$ $\frac{y}{x}-1$ inversible, ou encore y inversible $\vee$ $y-x$ inversible. Mais comme $\neg\{0\} = \mathrm{Inv}(R)$ on a montré que :

$$x \in \neg\{0\} \rightarrow y \neq x \ \vee \ y \in \neg\{0\}$$

ce qui prouve que $\neg\{0\}$ est ouvert. Inversement, il suffit de remarquer que $\neg\{0\}$ est un voisinage de 1.

b) Soit $x = (x_1,\ldots,x_n)$ un point de R^n tel que $x \neq 0$. Si R^n est séparé alors

$$\forall y \in R^n \ (y \neq x \ \vee \ y \neq 0)$$

En particulier, pour $y = (x_1,\ldots,x_{n-1},0)$, on trouve :

$$x_n \neq 0 \vee (x_1,\ldots,x_{n-1}) \neq (0,\ldots,0)$$

Par suite, si tous les R^n sont séparés, on en défuit, par induction sur n que :

$$\neg(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = 0) \to \bigvee_{i=1}^{n} \neg(x_i = 0)$$

ce qui montre, moyennant la propriété de corps de fraction de R, que R est un corps de Kock. Inversement, soit $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$ et $z = (z_1,\ldots,z_n)$ trois points de R^n . Montrons que : $x \neq y \to z \neq x \vee z \neq y$. Pour cela, posons $t_i = z_i - x_i$ si $i \leq n$ et $t_i = z_{i-n} - y_{i-n}$ si $n+1 \leq i \leq 2n$. Comme $\neg(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = y_i) \to \neg(\bigwedge_{i=1}^{2n} t_i = 0)$ on en déduit (de la structure de corps de Kock) que la condition $x \neq y$ entraine que $\bigvee_{i=1}^{n} (z_i - x_i$ inversible) $\vee$ $\bigvee_{i=1}^{n} (z_i - y_i$ inversible). D'où le résultat cherché.

10. Pour finir, nous allons montrer que la conception "infinitésimale" du Chapitre II et la conception "locale" adoptée ici sont bien compatibles entre elles (du moins dans le cas séparé, ce qui est déjà fort général). En effet :

X étant un objet séparé et x un point de X, alors :

$$\neg\neg\{x\} = \bigcap \{V \subset X / V \text{ voisinage de } x\}.$$

Preuve : l'inclusion du premier membre dans le second étant évidente par le n°1, 3, a, il nous reste à montrer l'autre. Soit y un élément de X appartenant à l'intersection des voisinages de x. Si y appartenait à $\neg\{x\}$, symétriquement x appartiendrait à $\neg\{y\}$ qui étant un ouvert puisque X est séparé, serait un voisinage de x. Par suite, y appartiendrait lui aussi à ce voisinage de x ce qui est évidemment faux. Ainsi, comme nous venons de montrer que $(y \in \neg\{x\} \to \text{Faux})$, nous avons établi que $y \in \neg\neg\{x\}$.

n°3 . Inversion locale

0. Le concept de voisinage ayant été mis au point il est possible maintenant de formuler l'"inversion locale" en déroulant la machinerie "classique". Cependant nous verrons plus tard (au §4) que le passage de l'"inversion infinitésimale" (voir Chapitre II §1, n°2 et 5) à l'"inversion locale" n'est pas toujours possible,

là où on l'aurait désiré.

1. On dit qu'une application $f : X \to Y$ est <u>localement inversible</u> en un point x_0 de X si elle satisfait la formule :

$$\exists V \subset X \quad (V \text{ vois. de } x_0 \wedge fV \text{ vois. de } fx_0 \wedge f_V \text{ injective})$$

où f_V désigne la restriction de f à V. (<u>Attention</u>, ne pas confondre avec "localement bijective" qui sera défini au Chapitre IV).

En particulier si $X \to Y$ est injective, elle est localement inversible en x_0 ssi, en tant que sous-objet, c'est un voisinage de x_0 .

2. On a toujours l'implication :

$$f \text{ localement inversible en } x_0 \to f \text{ infinitésimalement inversible en } x_0$$

Mais la réciproque est généralement fausse.

<u>Preuve</u> : L'implication se montre facilement quant à la réciproque il suffit de considérer le cas ou f est injective. On est alors renvoyé à la remarque 5, a, du n°1.

3. (propriétés de stabilité) a) Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications et x_0 un élément de X, alors si f est localement inversible en x_0 et g est localement inversible en fx_0 , leur composé $g \circ f$ est localement inversible en x_0 .

b) Soient le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "b"] & Y' \end{tikzcd}$$

et x_0 un élément de X. Alors, si f' est localement inversible en ax_0, f est localement inversible en x_0 .

<u>Preuve</u> : a) Soient resp. V et W des voisinages "adéquats" (i.e. satisfaisant les conditions données dans la formule du 1) de x_0 et fx_0, alors $V \cap f^{-1}W$ est encore "adéquat" pour $g \circ f$ (on utilise la composition des

voisinages).

b) Résulte de la commutation $\exists_f \circ a^{-1} = b^{-1} \circ \exists_{f'}$.

4. Soit maintenant R un corps de fractions de type ligne et micro-linéaire, alors l'axiome d'inversion locale peut se formuler ainsi, pour chaque entier n :

$$(I\ L_n)\quad \forall f : R^n \to R^n \quad \forall x_0 \in R^n \quad (\frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0 \to f \text{ localement inversible en } x_0)$$

Nous verrons au §4 dans quels modèles il est satisfait.

5. R vérifiant les conditions précédentes (axiome d'inversion locale compris) on a :

(Théorème des fonctions implicites). Soit $f : R^m \times R^n \to R^n$ une application. Si (a,b) est un point de $R^m \times R^n$ tel que $f(a,b) = 0$ et $\frac{\partial f(a,-)}{\partial x}(b) \neq 0$ alors, il existe des voisinages V de a dans R^m, W de (a,b) dans $R^m \times R^n$ et une application $g : V \to R^n$ telle que :

$$\forall x \in R^m \quad \forall y \in R^n \quad ((x,y) \in W \wedge f(x,y) = 0 \leftrightarrow x \in V \wedge y = gx)$$

Preuve : C'est la preuve "classique".

6. On dira qu'un objet M est une variété de type local de dimension n si : Pour tout point x_0 de M il existe un voisinage V de x_0 dans M, W de 0 dans R^n et une application $f : V \to W$ qui est bijective.
Il est clair qu'une variété de type local est une variété de type infinitésimal (voir définition au Chapitre II, §1, n°3, 2) de même dimension.

7. Soit $f : M \to N$ une application localement inversible. Alors :

a) Si N est une variété de type local de dimension n il en est de même de M,

b) f étant supposée surjective, N est une variété de type local de dimension n ssi M en est une.

Preuve : "classique".

8. Soit M un objet et $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de M (i.e. une famille d'ouverts, indexée par un objet I du topos, telle que $\bigcup_{i \in I} U_i = M$). Alors, si pour tout i de I, U_i est une variété de type local de dimension n, M est

lui-même une variété de type local de dimension n.

Preuve : immédiat.

9. R vérifiant les conditions données au 4 on a la proposition suivante :
Soit $f : R^n \to R^p$ une application et $M = f^{-1}\{0\}$. Si, en tout point de M, la matrice jacobienne de f est de rang $\geq p$ (voir définition au Chapitre I, §1, n°3) alors, M est une variété de type local de dimension $n-p$.

Preuve : "classique".

n°4 . La structure topologique intrinsèque et les autres

0. On peut évidemment considérer le concept classique "d'espace topologique" dans un topos. Comme nous l'avons vu au n°1 tout objet, en plus des "structures topologiques" (nous préférons cette terminologie à celle de "topologie" qui peut être confondue, dans les modèles, avec "topologie élémentaire" ou "topologie de Grothendieck") discrètes et grossières en possède aussi une "intrinsèque". Nous allons voir maintenant à quelle condition une structure topologique donnée peut être comparable avec celle qui est intrinsèque. Ceci nous permettra au §3 de caractériser "internement" la structure topologique intrinsèque des objets (représentables) des différents modèles étudiés ici.

1. Une structure topologique sur un objet X est une partie T de PX (i.e. l'ensemble des parties de X) satisfaisant les conditions (habituelles) suivantes :

1) $\emptyset \in T \wedge X \in T$

2) $U \in T \wedge V \in T \to U \cap V \in T$

3) $\mathfrak{U}$ étant un "ensemble de parties" de X (i.e. une partie de Ω^X)

$$\mathfrak{U} \subset T \to \bigcup_{U \in \mathfrak{U}} U \in T$$

- si on note $\mathrm{ouv}(X) = \{U \subset X / U \text{ ouvert intrinsèque}\}$ il est clair (d'après le n°1, 4) que $\mathrm{Ouv}(X)$ est une structure topologique sur X. Nous l'appellons la structure topologique intrinsèque de X.

2. (voir [17]) T étant une structure topologique sur X et P une partie de X,

notons int(P) le plus grand ouvert de T contenu dans P. Si T satisfait la condition (dite de recouvrement) suivante

$$\forall P \subset X \quad \forall Q \subset X \quad (P \cup Q = X \to \text{int } P \cup \text{int } Q = X)$$

alors T est plus fine que la structure topologique intrinsèque (i.e. tout ouvert intrinsèque est un ouvert de T).

Preuve : Soit $U \subset X$ un ouvert intrinsèque et x un élément de U, alors $\neg\{x\} \cup U = X$, par suite, d'après l'hypothèse $\text{int}(\neg\{x\}) \cup \text{int } U = X$ ou encore, puisque $\text{int}(\neg\{x\}) \subset \neg\{x\}$, on a $\neg\{x\} \cup \text{int } U = X$. Donc x appartient à int U. D'où l'inclusion $U \subset \text{int } U$, ce qui achève de prouver que U est un ouvert de T.

3. (Remarque). La propriété de l'intérieur envisagé au 2 peut surprendre, car elle est incompatible avec la théorie "classique" des ensemble (la proposition précédente en est d'ailleurs la preuve !) elle est pourtant vérifiée dans la plupart des exemples que nous allons traiter au §3. Signalons, à ce propos, que Brouwer (le père de l'intuitionnisme) avait constaté que la droite réelle vérifiait cette propriété ! (voir par exemple [14]). En fait chez lui, elle découle de l'axiome suivant, partant sur les entiers naturels :

$$\forall P \subset N^N (\forall \phi : N \to N \ \exists n \in N \ P(n,\phi) \to \forall \phi : N \to N \ \exists n \in N \ \exists m \in N \ \forall f : N \to N \ [\vec{f}m = \vec{\phi}m \to P(n,f)])$$

où $\vec{f}m = \vec{\phi}m$ signifie $\forall n \in N \ (n > m \to fn = \phi n)$.

4. Il nous reste maitenant à trouver des structures topologiques moins fines que la structure intrinsèque. Nous allons voir qu'il nous suffit pour cela de recopier les exemples "classiques". Commençons tout d'abord par le cas algébrique :

R étant un corps de fractions séparé fixé (donc un anneau local par le n°2, 9,a) soit X un objet quelconque. Une partie $U \subset X$ est appelée "ouvert affine" si elle satisfait la propriété suivante :

$$\exists f : X \to R \quad (U = f^{-1}(\text{Inv } R))$$

où Inv R (qui est aussi égal à $\neg\{0\}$) désigne l'ensemble des éléments inversibles de R. (L'expression : ouvert affine, provient du fait que dans les topos de la géométrie algébrique si $X = A^{op}$ alors $f : X \to R$ s'identifie à un élément de A et $f^{-1}(\text{Inv } R) = A[f^{-1}]^{op}$. On retrouve ainsi la terminologie habituelle d'ouvert affine). Munissons X de la structure topologique de Zariski, c'est-à-dire de celle dont les ouverts sont des réunions d'ouverts affines. C'est-à-dire :

$$U \text{ ouvert de Zariski ssi } \forall x \in U \ \exists f : X \to R \ (x \in f^{-1}(\text{Inv } R) \subset U).$$

Alors la structure topologique de Zariski sur X est moins fine que l'intrinsèque. (Nous verrons au §3 que dans les modèles de la géométrie algébrique ces deux structures topologiques coïncident sur les représentables).

Preuve : Tout d'abord on vérifie facilement que les ouverts de Zariski forment bien une structure topologique, la stabilité par intersection finie résultant du fait que :

$$x \text{ inversible} \wedge y \text{ inversible} \leftrightarrow x.y \text{ inversible}$$

D'autre part $\text{Inv } R$ étant un ouvert intrinsèque dans R, tout ouvert affine de X en est un aussi et donc, par réunion quelconque, tout ouvert de Zariski est encore un ouvert intrinsèque.

5. Soit maintenant R un anneau commutatif unitaire muni d'un sous-objet $R_>$ (on notera en fait $x > 0$ au lieu de $x \in R_>$). On demande, en plus à R de satisfaire les conditions suivantes :

1) $x \neq 0 \to x$ inversible

2) $x+y$ inversible $\to x$ inversible $\vee y$ inversible

3) $x > 0 \wedge y > 0 \to x+y > 0 \wedge x.y > 0$

4) x inversible $\to x > 0 \vee -x > 0$

5) $1 > 0$

6) $\neg(0 > 0)$

Notons $x > y$ pour $x-y > 0$ et $x \geq y$ pour $\neg(y > x)$. Notons aussi, comme d'habitude $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$, $]a,b[$ les ensembles suivants $\{x \in R / x > a\}$, $\{x \in R / x < a\}$, $\{x \in R / a < x < b\}$.

6. On vérifie facilement que la relation $>$ satisfait les propriétés suivantes :

a) $0 \neq 1$

b) $x > y \to x-y > 0$

c) $x > y \to x \neq y$

d) $x > y \wedge y > z \to x > z$

e) $x > y \wedge x' > y' \to x+x' > y+y'$

f) $x > 0 \wedge y > z \to x.y > x.z$

g) $\neg(x > 0 \wedge x < 0)$

h) $x+y > 0 \to x > 0 \vee y > 0$

i) $x > y \to x > z \vee z > y$

j) $x > 0 \to 1/x > 0$

k) n entier $\to n.1$ inversible $\wedge$ $n.1 > 0 \wedge 1/n.1 > 0$

7. Les intervalles "ouverts" $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ et $]a,b[$ sont des ouverts intrinsèques.

Preuve : Montrons tout d'abord que $]0,+\infty[$ est un ouvert intrinsèque. Soit $x \in]0,+\infty[$ et $y \in R$. Alors on a $x > 0 \to x > y \vee y > 0$ (d'après le 6(i)). Mais $x > y \to x \neq y$ (d'après le 6 (c)). On a donc finalement $x \neq y \vee y > 0$ ce qui signifie précisément que $]0,+\infty[$ est un ouvert intrinsèque. Par suite, (par translation et homothétie), tous les intervalles ouverts de la forme $]a,+\infty[$ et $]-\infty,a[$ sont aussi des ouverts intrinsèques. Il en va donc de même des intervalles $]a,b[$ obtenus par intersection des précédents.

8. Soit n un entier et M une partie de R^n. Considérons sur M la structure topologique "traditionnelle" c'est-à-dire celle formée par les parties U de M vérifiant la condition suivante :

$$\forall x \in M\ [x \in U \leftrightarrow \exists \varepsilon > 0\ (B(x,\varepsilon) \cap M \subset U)]$$

où $B(x,\varepsilon) = \{y \in R^n \,/\!/ \bigwedge_{i=1}^{n} \varepsilon > y_i - x_i > -\varepsilon\}$

Alors, la structure topologique "traditionnelle" est moins fine que l'intrinsèque. En particulier donc, cela reste vrai pour la structure topologique "traditionnelle" de la droite R. Nous verrons au §3 que, dans le modèle de Dubuc, les deux structures topologiques coïncident sur les représentables.

Preuve : Tout d'abord on vérifie que les ouverts "traditionnels" forment bien une structure topologique, car pour tout couple $\varepsilon,\varepsilon' > 0$ on a :

$B(x,\varepsilon/2) \subset B(x,\varepsilon) \cap B(x,\varepsilon')$ ou $B(x,\varepsilon'/2) \subset B(x,\varepsilon) \cap B(x,\varepsilon')$ (car, de l'inégalité $1/2 < 2$ on déduit $1/2 < \varepsilon'/\varepsilon \vee \varepsilon'/\varepsilon < 2$ (voir 6 (i)) et par suite $[\varepsilon/2 < \varepsilon \wedge \varepsilon/2 < \varepsilon'] \vee [\varepsilon'/2 < \varepsilon \wedge \varepsilon'/2 < \varepsilon']$). D'autre part, pour tout point x de R^n et tout $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon)$ est un ouvert intrinsèque car $B(x,\varepsilon) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_i^{-1}(]x_i-\varepsilon,x_i+\varepsilon[)$ où $\pi_i : R^n \to R$ est la $i^{ème}$ projection. Par suite, comme toutes les parties de la forme $B(x,\varepsilon) \cap M$ sont des ouverts intrinsèques de M, un ouvert "traditionnel", qui en est une réunion, est lui-même un ouvert intrinsèque.

9. Soit enfin un espace métrique M, c'est-à-dire (comme dans le cas habituel) un objet M muni d'une application $d : M \times M \to [0,+\infty[$ (ce dernier intervalle se définissant comme d'habitude à l'aide de la relation $\leq$ déjà définie) satisfaisant les conditions suivantes :

1) $d(x,y) = 0 \leftrightarrow x = y$
2) $d(x,y) = d(y,x)$
3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

M peut alors être muni de la structure topologique "traditionnelle" c'est-à-dire de celle formée par les parties U de M vérifiant la condition suivante :

$$\forall x \in M (x \in U \leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 \ (B(x,\varepsilon) \subset U))$$

où $B(x,\varepsilon) = \{y \in M / d(x,y) < \varepsilon\}$.

Alors, comme dans les cas précédents, la structure topologique "traditionnelle" de M est moins fine que l'intrinsèque.
Remarquons que la structure topologique définie au 8 n'est pas, en général, un cas particulier de celle-ci car, dans le topos de Dubuc par exemple, les distances "habituelles" sur R^n ne peuvent exister ici car elles ne sont pas différentiables à l'origine. Nous verrons cependant au §3 que sur les espaces métriques représentables dans **Top** les deux structures topologiques "traditionnelle" et "intrinsèque" coïncident.

Preuve : On vérifie tout d'abord, comme dans l'exemple précédent, que les ouverts "traditionnels" forment bien une tructure topologique. Ensuite, les ouverts "traditionnels" étant des réunions de boules $B(x,\varepsilon) = d_x^{-1}([0,\varepsilon[)$ où $d_x : y \mapsto d(x,y)$, on déduit de 7 et des propriétés générales des ouverts intrinsèques qu'un ouvert traditionnel est toujours intrinsèque.

10. Avant de terminer ce paragraphe, profitons des axiomes dont est muni R (voir le 5) pour justifier, encore un peu plus, notre approche des infinitésimaux (voir Chapitre II). En effet dans R on a l'identité :

$$\neg\neg\{x\} = \bigcap_{\varepsilon > 0}]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$$

(cette identité nous fait à nouveau penser à la définition des infinitésimaux en analyse non standard, mais ici on quantifie sur tous les $\varepsilon > 0$ c'est-à-dire, pas seulement sur ceux qui sont standards).

Preuve : Les ouverts intrinsèques étant inf. inversibles (voir n°1, 4) , on en déduit, par la proposition précédente, que $\neg\neg\{x\} \subset \bigcap_{\varepsilon>0}]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Réciproquement, soit $y \in \bigcap_{\varepsilon > 0}]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Si $y \in \neg\{x\}$ alors, par les axiomes (1) et (4) de R on voit que $y-x > 0 \vee x-y > 0$. Dans le cas où $y-x > 0$, il suffit de poser $\varepsilon = y-x$ car par hypothèse, y appartenant à $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ on arrive à une contradiction. Dans le second cas, on procède de la même façon.

§2. Caractérisation des ouverts intrinsèques

n°0 . Comme pour la caractérisation des infinitésimaux (voir Chapitre II, §2) il va être nécessaire ici de se situer à un niveau intermédiaire de généralité. En effet, la plupart des sites considérés ici (voir leur définition au Chapitre 0, §2) ont des propriétés communes qui à elles seules, permettent d'aller très loin dans la caractérisation des ouverts intrinsèques.
Aussi, avons nous jugé bon de bien mettre en évidence de telles propriétés sous le qualificatif de "site topologique" afin, là encore, d'éviter des répétitions de preuves.

n°1 . Sites topologiques et foncteur Spec.

1. (Définition). On appelle site topologique la donnée :

- d'une catégorie $\mathcal{G}$ à limites à gauche finies et à objet initial $\emptyset$ (on suppose que $\emptyset \neq 1$). Notons à nouveau $\Gamma = \mathrm{Hom}(1,-)$,
- d'une classe $\mathcal{U}$ de flèches de $\mathcal{G}$ telle que :

a) $\mathcal{U}$ est stable par changement de base et par composition.

b) Pour toute famille $(X_i \to X)_i$ de flèches de $\mathcal{U}$, si $(\Gamma X_i \to \Gamma X)_i$ est surjective alors $(X_i \to X)_i$ est épimorphe effective dans $\mathcal{G}$.

2. Nous montrerons au n°2 , avec quelques détails, comment la plupart des modèles définis au Chapitre 0, §2, sont des sites topologiques.

3. Tout site topologique est en fait un site concret (en prenant pour pré-topologie sur $\mathcal{G}$, les familles $(X_i \to X)_i$ de $\mathcal{U}$ dont l'image par Γ est surjective dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$).

Preuve : "le Nullstellensatz" : Soit X un objet de $\mathcal{G}$ tel que $\Gamma X = \emptyset$. Comme la famille vide $(\to X)$ est une famille de $\mathcal{U}$ et que la famille $(\to \Gamma X)$ est surjective, on en déduit, par l'axiome (b), que la famille $(\to X)$ est épimorphe effective ce qui signifie que $X = \emptyset$.
"l'axiome (a)" : la pré-topologie décrite ci-dessus est sous-canonique car ses familles couvrantes sont épimorphes effectives et universelles puisque Γ préserve les produits fibrés
"l'axiome (b)" : cet axiome est satisfait par construction.

"l'axiome (c)" : $(\rightarrow \emptyset)$ est couvrante car $\Gamma\emptyset = \emptyset$ puisque $\emptyset \neq 1$.

4. Soit $\mathcal{S}$ un site topologique et $\mathcal{E}$ le topos des faisceaux sur $\mathcal{S}$. Pour tout objet X de $\mathcal{E}$, on munit ΓX d'une structure d'espace topologique, notée Spec X, de la façon suivante :

a) lorsque X est représentable, Spec X a pour base d'ouverts la famille des sous-ensembles de la forme $\mathrm{Im}(\Gamma f)$ (i.e. l'image dans ΓX de l'application Γf) lorsque $f : Y \rightarrow X$ parcourt $\mathfrak{U}$ (remarquons que par l'équation (c) du Chapitre II, §2, n°3, on a $\mathrm{Im}(\Gamma f) = \Gamma(\mathrm{Im} f)$).

b) Si X est quelconque dans $\mathcal{E}$, Spec X est la topologie finale déterminée par les familles d'applications $(\mathrm{Spec}\ Y \xrightarrow{\Gamma f} \Gamma X)_Y$ où Y parcourt des objets représentables de $\mathcal{E}$; c'est-à-dire qu'une partie $U \subset \Gamma X$ est ouverte dans Spec X ssi pour tout objet représentable Y et toute flèche $f : Y \rightarrow X$ dans $\mathcal{E}$, $\Gamma f^{-1}(U)$ est ouverte dans Spec Y.

5. En fait, lorsque X est représentable, les ouverts de Spec X sont des réunions d'ouverts de base car, Γ préservant les intersections, si $f_1 : Y_1 \rightarrow X$ et $f_2 : Y_2 \rightarrow X$ sont des flèches de $\mathfrak{U}$ et f est la flèche canonique $Y_1 \underset{X}{\times} Y_2 \rightarrow X$ (qui est elle-même un élément de $\mathfrak{U}$) on a : $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f_1) \cap \mathrm{Im}(f_2)$.

- On vérifie aussi que si $f : X \rightarrow Y$ est une flèche quelconque de $\mathcal{E}$, l'application $\Gamma f : \Gamma X \rightarrow \Gamma Y$ est continue de Spec X dans Spec Y. Ainsi, on construit un foncteur Spec : $\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{E}\mathrm{ns}$.

n°2 . Exemples

1. En topologie. Dans la catégorie $\mathcal{T}op$ des espaces topologiques on considère la sous-classe de flèches $\mathfrak{U}$ formée des injections continues ouvertes (i.e. homéomorphismes sur des sous-espaces ouverts). Il est clair qu'on a là un site topologique. Le topos de faisceaux sur ce site est $\mathbb{T}\mathrm{op}$ (voir sa définition au Chapitre 0, §2). De plus, par construction du foncteur Spec (voir le n°1), on a évidemment Spec X = X , sur les objets représentables X.

2. En géométrie différentielle. Dans la catégorie $\mathfrak{F}^{op}$ (définie au Chapitre 0, §2) soit $\mathfrak{U}$ la sous-classe formée des flèches de la forme $B^{op} \rightarrow A^{op}$ où $B \simeq A_U$ pour un certain ouvert U de Spec A. Comme $\Gamma(A^{op}) = \mathrm{Spec}\ A$ (voir la définition

du spectre d'un anneau lisse de type fini dans l'Appendice au §1, n°6) on en déduit que $\mathcal{D}^{op}$ est un site topologique (pour montrer (c) on utilise le théorème 1 de l'Appendice, §2, n°2). Il est alors clair que le topos de faisceaux sur ce site est le topos $\mathbb{D}$ défini au Chapitre 0, §2. Enfin, on vérifie, par construction de $\mathcal{U}$ que, pour tout anneau lisse de type fini A, on a $\mathrm{Spec}(A^{op}) = \mathrm{Spec}\ A$ (le premier spectre est défini au n°1 et le second dans l'Appendice au §1, n°6).

3. En géométrie algébrique. Soit k un corps algébriquement clos. Considérons la catégorie $\mathcal{A}\mathrm{pf}_k^{op}$ (définie au Chapitre 0, §2). De plus, soit $\mathcal{U}_1$(resp. $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$) la sous-classe de cette catégorie formée des immersions ouvertes (resp. des morphismes étales, des morphismes plats). Comme $\Gamma(A^{op}) = \mathrm{Spm}\ A$ (spectre maximal de A) on en déduit que $\mathcal{A}\mathrm{pf}_k^{op}$ muni de la classe $\mathcal{U}_1$ (resp. $\mathcal{U}_2$, $\mathcal{U}_3$) est un site topologique (pour s'en assurer on utilise les remarques faites au Chapitre II, §2, n°1, 2, c, et le fait que la topologie (zar) [resp. (et), (fppf)] est sous-canonique). Le topos de faisceaux sur ce site n'est autre que

$\mathbb{Z}\mathrm{ar}_k^{(pf)}$ [resp. $\mathbb{E}\mathrm{t}_k^{(pf)}$, $\mathbb{P}\ell_k^{(pf)}$] qui est défini au Chapitre 0, §2. Enfin, on vérifie, par construction de $\mathcal{U}$ que, pour toute k-algèbre de type fini A, on a $\mathrm{Spec}(A^{op}) = \mathrm{Spm}\ A$ (le premier spectre est défini au n°1). Pour le montrer on utilise le fait que tout morphisme plat de type fini a un spectre qui est une application ouverte.

n°3 . Caractérisation des ouverts intrinsèques

1. a) Soit X un objet représentable du topos $\mathcal{E}$, et U un ouvert de Spec X, U est donc de la forme $U = \bigcup_i \mathrm{Im}\ \Gamma f_i$ où les $f_i : X_i \to X$ sont des flèches de $\mathcal{U}$. Alors, on a

$$EU = \bigcup_i \mathrm{Im}\ f_i \quad \text{(voir la définition de E au Chapitre II, §2, n°2)}$$

b) En particulier, lorsque $f : X' \to X$ est une flèche de $\mathcal{U}$ on a :

$$\mathrm{Im}\ f = E(\mathrm{Im}\ \Gamma f)$$

Preuve : Soit Y un autre objet représentable, et $f : Y \to X$ une flèche. Alors, $Y \to X$ factorise $EU \rightarrowtail X$ ssi $\Gamma Y \to \Gamma X$ factorise $U \rightarrowtail \Gamma X$ donc ssi

$\Gamma f^{-1}(\bigcup_i \text{Im } \Gamma f_i) = \Gamma Y$. Or on a $\Gamma f^{-1}(\bigcup_i \text{Im } \Gamma f_i) = \bigcup_i \Gamma f^{-1}(\text{Im } \Gamma f_i) = \bigcup_i \text{Im } \Gamma f'_i$ où $f'_i : Y_i \to Y$ est la flèche de $\mathcal{U}$ obtenue par le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} Y_i \arrow[r] \arrow[d, "f'_i"'] & X_i \arrow[d, "f_i"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Donc f factorise EU ssi $(\Gamma f'_i)_i$ est surjective. Mais $(\Gamma f'_i)_i$ est surjective ssi $(f'_i)_i$ est épimorphe dans $\mathcal{E}$. Ainsi en reprenant le raisonnement précédent en sens inverse, f factorise EU ssi f factorise $\bigcup_i \text{Im } f_i$ ce qui établit le résultat cherché.

2. On peut améliorer encore le (b) du 1 en constatant que, lorsque $f : X \to Y$ est une flèche de $\mathcal{U}$, $\Gamma f : \text{Spec } X \to \text{Spec } Y$ est une application ouverte. De plus, si U est un ouvert de Spec X alors on a :

$$\exists_f \, EU = E\exists_f U$$

Preuve : La première partie de cette proposition provient immédiatement du fait que $\mathcal{U}$ est stable par composition. D'autre part, si U est un ouvert de Spec X, $U = \bigcup_i \text{Im } \Gamma f_i$ où les $f_i : X_i \to X$ sont des flèches de $\mathcal{U}$. D'après ce qui précède $EU = \bigcup_i \text{Im } f_i$. Donc $\exists_f \, EU = \bigcup_i \exists_f(\text{Im } f_i) = \bigcup_i \text{Im}(f.f_i)$. Par suite, $\exists_f EU = EV$ où $V = \bigcup_i \text{Im } \Gamma(f.f_i)$. En d'autres termes

$V = \bigcup_i \exists_{\Gamma f}(\text{Im } \Gamma f_i) = \exists_{\Gamma f} \bigcup_i \text{Im } \Gamma f_i = \exists_{\Gamma f} U$. D'où l'identité cherchée.

3. X étant un objet quelconque de $\mathcal{E}$ et (U_i) une famille d'ouverts de Spec X alors, on a :

$$\bigcup_i E(U_i) = E(\bigcup_i U_i)$$

(on améliore ainsi l'équation (d') du Chapitre II, §2, n°3, 1) .

Preuve : Envisageons deux cas :

a) Si X est représentable, il suffit d'appliquer la proposition 1 en donnant une présentation à chaque U_i .

b) Si X est quelconque, soit Y un objet représentable et $f : Y \to X$ une flèche quelconque. On vérifie facilement que f factorise $\bigcup_i EU_i$ ssi f factorise $E(\bigcup_i U_i)$ car Y étant représentable on peut appliquer le a) à la famille $(\Gamma f^{-1}(U_i))_i$.

4. Soit X un objet <u>représentable</u> de $\mathcal{E}$ et $P \rightarrowtail X$ un sous-objet (non nécessairement représentable). Alors on a toujours

$$\overset{\circ}{P} \subset E(U) \subset P ,$$

(pour la définition de $\overset{\circ}{P}$ voir le §1, n°1,<u>7</u>), où U est l'ouvert de Spec X défini par $p \in U$ ssi, il existe un voisinage ouvert V de p dans Spec X tel que $EV \subset P$.

<u>Preuve</u> : Nous allons pour cela appliquer la méthode "logique" qui a été signalée au Chapitre 0,§1, n°4, <u>7</u>. Soit Y un objet représentable et $f : Y \to X$ une flèche. Alors, il est clair que f factorise $\overset{\circ}{P}$ ssi $\hat{f}$ factorise $Y^*(\overset{\circ}{P})$ dans $\mathcal{E}/Y$ (où $Y^* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}/Y$ est le morphisme logique canonique et $\hat{f} : 1 \to Y^*\overset{\circ}{P}$ est la section globale de $Y^* \overset{\circ}{P}$ dans $\mathcal{E}/Y$ correspondant à f).
Mais Y^* étant logique $Y^*(\overset{\circ}{P}) = \widehat{Y^* P}$ donc f factorise $\overset{\circ}{P}$ dans $\mathcal{E}$ ssi on a (dans $\mathcal{E}/Y$) $\quad \neg\{\hat{f}\} \cup Y^*P = Y^*X \quad$ (H)

D'autre part f factorise EU ssi Γf factorise $U \subset \Gamma X$ (C)

Il reste donc à montrer que (H) entraine (C) . Soit donc $p : 1 \to Y$ une section globale et montrons que $\Gamma f(p)$, qui est égal à $f.p$, appartient à U. La flèche $p : 1 \to Y$ détermine un morphisme logique $P^* : \mathcal{E}/Y \to \mathcal{E}$ qui, appliqué à l'identité (H) donne :

$$\neg p^*(\hat{f}) \cup p^* Y^* P = p^* Y^*X \qquad (H')$$

or $(1 \xrightarrow{p} Y \xrightarrow{!} 1) = (1 \xrightarrow{Id} 1)$ donc $P^*Y^* \simeq Id$ et $p^*(\hat{f}) = f.p$. L'identité (H') s'écrit donc encore : $\neg\{f.p\} \cup P = X \quad (H")$.

Mais X étant représentable, il existe donc une famille couvrante $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_i$ telle que f_i factorise $\neg\{f.p\}$ ou P. Notons J l'ensemble des indices i tels que f_i factorise P. Si $i \in J$ on a : $\mathrm{Im}\, f_i \subset P$.
Donc $\bigcup_{i \in J} \mathrm{Im}\, f_i \subset P$ et $\bigcup_{i \in J} \mathrm{Im}\, f_i = EV$ où $V = \bigcup_{i \in J} \mathrm{Im}\,\Gamma f_i$ (qui est un

ouvert de Spec X). L'égalité (H") devient maintenant :

$\neg\{f.p\} \cup EV = X$ (car $\bigcup_{i \notin J} \operatorname{Im} f_i \cup EV = X$) .

En conséquence $f.p : 1 \to X$ factorise $EV \subset X$ et $EV \subset P$. Mais ceci achève de prouver que $\Gamma f(p) \in U$.

5. La proposition précédente admet le corollaire suivant :

Soit X un objet représentable. L'application $P \mapsto \Gamma P$ définit une injection de l'ensemble des ouverts intrinsèques de X dans l'ensemble des parties ouvertes de Spec X.

Preuve : Si $P \rightarrowtail X$ est un ouvert intrinsèque, alors $\overset{\circ}{P} = P$ donc, d'après la proposition précédente $P = EU$, pour un certain ouvert U de Spec X. Ainsi $\Gamma P = \Gamma EU = U$ (d'après l'équation (a) du Chapitre II, §2, n°3,1) . L'application donnée dans l'énoncé est donc bien définie et son injectivité est alors immédiate à vérifier.

6. X étant maintenant un objet quelconque de $\mathcal{E}$ et $Q \rightarrowtail X$ un sous-objet, si Q est un ouvert intrinsèque de X alors ΓQ est un ouvert dans Spec X, et dans ce cas $Q = E\Gamma Q$. En particulier (comme au 5) l'application $Q \mapsto \Gamma Q$ définit une injection de l'ensemble des ouverts intrinsèques de X dans l'ensemble des parties ouvertes de Spec X.

Preuve : Soit Y un objet représentable et $f : Y \to X$ une flèche, alors comme $Q \rightarrowtail X$ est un ouvert intrinsèque, il en va de même de $f^{-1}Q \rightarrowtail Y$ (car les ouverts intrinsèques sont stables par changement de base). De plus $\Gamma f^{-1}Q = f^{-1}\Gamma Q$ (d'après l'équation (a) du Chapitre II, §2, n°3, 3). Donc par 5, ΓQ est un ouvert de Spec X. D'autre part f factorise Q ssi $f^{-1}Q = Y$. Mais par 5 ceci est réalisé ssi $\Gamma f^{-1}Q = \Gamma Y$, ou encore ssi $f^{-1}\Gamma Q = \Gamma Y$. Finalement f factorise Q ssi elle factorise $E\Gamma Q$.

7. Pour tout ouvert intrinsèque $Q \rightarrowtail X$ dans $\mathcal{E}$ et toute flèche $f : X \to Y$, on a :

$$\Gamma \forall_f Q = \forall_f \Gamma Q$$

Preuve : Résulte du 5 et de l'équation (b) du Chapitre II, §2, n°3, 3.

8. (Définition) . On dit qu'un objet X de $\mathscr{C}$ est de Haussdorff si la diagonale de ΓX est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{Spec}(X \times X)$. (Remarquons que Spec X, quant à lui, n'est pas nécessairement séparé car le foncteur Spec ne préserve pas, en général les produits).

9. Soit X un objet de Haussdorff de $\mathscr{C}$. Alors, si U est un ouvert de Spec X, $EU \rightarrowtail X$ est un ouvert intrinsèque dans $\mathscr{C}$.

Preuve : $EU \rightarrowtail X$ est un ouvert intrinsèque dans $\mathscr{C}$ ssi

$\mathscr{C} \models \forall x \in X\ (x \in EU \to \neg\{x\} \cup EU = X)$ c'est-à-dire (voir Chapitre 0, §1, n°4,8) ssi pour tout objet représentable Y et toute flèche $f : Y \to X$ on a l'implication

$$(\mathscr{C}/Y \models \hat{f} \in Y^*EU) \Rightarrow (\mathscr{C}/Y \models \neg\{\hat{f}\} \cup Y^*EU = Y^*X)$$

(où $\hat{f} : 1 \to Y^*X$ est la section globale, dans $\mathscr{C}/Y$, correspondant à la flèche $f : Y \to X$ dans $\mathscr{C}$) . Mais $\mathscr{C}/Y \models \hat{f} \in Y^*EU$ ssi f factorise EU et $\mathscr{C}/Y \models \neg\{\hat{f}\} \cup Y^*EU = Y^*X$ ssi $\neg\mathrm{Gr}(f) \cup Y \times EU = Y \times X$ dans $\mathscr{C}$, où $\mathrm{Gr}(f)$ désigne le graphe de f, considéré comme sous-objet de $Y \times X$. Il reste donc à montrer que si f factorise EU on a l'identité $\neg\mathrm{Gr}(f) \cup Y \times EU = Y \times X$. Constatons tout d'abord, par les propositions 2 et 4 du Chapitre II, §2, n°3, qu'on a

$\neg\mathrm{Gr}(f) = EV$ où $V = \neg\mathrm{Gr}(\Gamma f)$ et $Y \times EU = E(\Gamma Y \times U)$. D'autre part, $\Gamma Y \times U$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}(Y \times X)$ et, comme X est de Haussdorff, $\mathrm{Gr}(\Gamma f)$ est fermé dans $\mathrm{Spec}\ (Y \times X)$, car on a le produit fibré suivant dans $\mathscr{C}$: ...

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Gr}(f)"'] & X \arrow[d, "\mathrm{diag}"] \\
Y \times X \arrow[r, no head, "f \times X"] & X \times X
\end{tikzcd}$$

Autrement dit, les deux sous-objets $\neg\mathrm{Gr}(f)$ et $Y \times EU$ de $Y \times X$ ont des spectres ouverts. Ceci nous permet donc d'en conclure (grace au 3) que :

$$\neg\mathrm{Gr}(f) \cup Y \times EU = Y \times X$$

puisque c'est le cas au niveau de leurs sections globales.

10. A l'aide de 6 et de 9 on peut donc énoncer le théorème de caractérisation

des ouverts, suivant :

(Théorème) : Soit X un objet de Haussdorff dans $\mathcal{C}$, $Q \rightarrowtail X$ un sous-objet et U une partie de ΓX, alors :

a) on a les équivalences suivantes :

i) Q est un ouvert intrinsèque de X ssi ΓQ est un ouvert de Spec X,

ii) U est un ouvert de Spec X ssi EU est un ouvert intrinsèque de X

b) E et Γ sont les bijections réciproques de l'ensemble des ouverts de Spec X dans l'ensemble des ouverts intrinsèques de X.

<u>11</u>. On peut alors améliorer la proposition <u>4</u> de la façon suivante :

Si X est un objet de Haussdorff représentable et $P \rightarrowtail X$ est un sous-objet alors :

$$\overset{\circ}{P} = EU \qquad \text{où } U \text{ est un ouvert de Spec } X$$

(Remarquons que dans ces conditions, pour tout sous-objet $P \rightarrowtail X$, $\overset{\circ}{P}$ est toujours intrinsèquement ouvert ce qui, nous l'avons déjà dit, ne semble pas être le cas d'une façon générale).

n°4 . <u>Caractérisation des objets séparés</u>

<u>1</u>. (voir [13]) . Soit $f : X \to Y$ une flèche de $\mathcal{C}$ où X et Y sont de Haussdorff. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

a) $\exists_f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$ préserve les ouverts intrinsèques,

b) Spec $X \to$ Spec Y est une application ouverte.

<u>Preuve</u> : a) $\Rightarrow$ b) car, U étant un ouvert de Spec X on a, d'après l'équation (c') du Chapitre II, §2, n°3, <u>3</u> et le théorème <u>10</u> du n°3 de ce paragraphe :

$$\exists_f(U) = \Gamma E\, \exists_f(U) = \Gamma \exists_f\, E(U)$$

b) $\Rightarrow$ a) : résulte là encore du théorème <u>10</u> du n°3 et de l'équation (c) du Chapitre II, §2, n°3, <u>3</u>.

<u>2</u>. (voir [13]) X et Y étant deux objets de Haussdorff et $f : X \to Y$ une

flèche "ouverte" (dans le sens de 1), pour les ouverts intrinsèques, les équations (b) et (c') du Chapitre II. §2, n°3, 3 sont satisfaites "au sens fort" , c'est-à-dire :

Si U est un ouvert de $\mathrm{Spec}\, X$ et Q un ouvert intrinsèque de X alors :

$$E\,\exists_f\, U = \exists_f\, E\, U \qquad \text{et} \qquad \Gamma\forall_f\, Q = \forall_f\, \Gamma Q$$

Preuve : La première équation résulte du 1, du n°3, 10 , et de l'équation (c') du Chapitre II, §2, n°3,3. Quant à la seconde elle a déjà été montrée au n°3,7.

3.(voir [13]) Les objets de Haussdorff sont stables par produits finis dans $\mathcal{E}$.

Preuve : Cela découle du fait que l'application composée suivante est continue, pour tout X et Y :

$$\mathrm{Spec}\,[(X\times Y)\times(X\times Y)] \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}\,[(X\times X)\times(Y\times Y)] \to \mathrm{Spec}(X\times X)\times \mathrm{Spec}(Y\times Y)$$

4. X et Y étant deux objets de Haussdorff, la projection $\pi : X\times Y \to X$ est "ouverte" dans le sens de 1 (en utilisant 3 et les propriétés générales des ouverts intrinsèques) par suite, pour les ouverts intrinsèques, toute la logique de $\mathcal{E}$, "coïncide" avec celle de $\mathbb{E}$ns via Γ et E. Elle est donc "classique".

5. (voir [13]) (Théorème). X étant un objet de $\mathcal{E}$,

X est séparé ssi X est de Haussdorff

(pour la définition de séparé voir le §1, n°2, 5)

Preuve : Si X est séparé, $\neg\mathrm{Diag}$ est un ouvert intrinsèque de $X\times X$ (où Diag désigne la diagonale de X) donc $\Gamma\neg\mathrm{Diag}$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}(X\times X)$ (d'après le 6 du n°3). Mais par ailleurs $\Gamma\neg\mathrm{Diag} = \neg\Gamma\,\mathrm{Diag}$ (voir Chapitre II, §2, n°3, 1) et $\Gamma\,\mathrm{Diag} = \mathrm{Diag}$. Donc X est de Haussdorff.

Réciproquement, si X est de Haussdorff on peut, cette fois, appliquer le Théorème 10 du n°3, car $X\times X$ est lui-même de Haussdorff par la proposition 3. Il entraine immédiatement que X est séparé.

n°5 . Retour aux modèles

0. Nous pouvons maintenant appliquer aux différents modèles considérés au n°2,

les théorèmes de caractérisation des ouverts (voir le n°3, 10) et des séparés (voir le n°4, 5).

1. En topologie : Comme pour tous espaces topologiques X et Y on a (dans $\mathbb{T}op$) : $\mathrm{Spec}(X \times Y) = \mathrm{Spec}\, X \times \mathrm{Spec}\, Y$, on en déduit qu'un espace topologique X est séparé (i.e. de Haussdorff) dans le topos $\mathbb{T}op$ ssi il l'est au sens usuel. De ce fait, X étant un espace topologique séparé, l'application $Q \mapsto \Gamma Q$ est une bijection entre les ensembles suivants :

$$\{Q \rightarrowtail X/Q \text{ ouvert intrinsèque dans } \mathbb{T}op\} \xrightarrow{\sim} \{U \subset X/U \text{ ouvert usuel}\}$$

2. En géométrie différentielle : Une fois encore dans le topos de Dubuc $\mathbb{D}$ on a l'identité $\mathrm{Spec}(X \times Y) = \mathrm{Spec}\, X \times \mathrm{Spec}\, Y$ (du moins pour les objets représentables, comme on le constate en utilisant la caractérisation du foncteur Spec donnée au n°2). Par suite tout objet représentable est séparé (i.e. de Haussdorff). De ce fait, A étant un anneau lisse de type fini, l'application $Q \mapsto \Gamma Q$ définit une bijection entre les ensembles suivants

$$\{Q \rightarrowtail A^{op}/Q \text{ ouvert intrinsèque dans } \mathbb{D}\} \xrightarrow{\sim} \{U \subset \mathrm{Spec}\, A/U \text{ ouvert usuel}\}$$

(voir la définition du spectre d'un anneau lisse dans l'Appendice au §1, n°6,1)

3. En géométrie algébrique : a) Soit k un corps algébriquement clos. Dans les topos de k-algèbres de type fini (voir leur définition au Chapitre 0, §2) le foncteur Spec (qui, on l'a vu au n°2, 3, est égal à Spm sur les représentables) ne préserve plus les produits, par contre, on voit facilement que toute k-algèbre de type fini a son objet dual (voir définition au Chapitre 0, §2) qui est de Haussdorff, donc séparé (ce qui n'est évidemment pas le cas pour son spectre). De ce fait, si A est une k-algèbre de type fini, l'application $Q \mapsto \Gamma Q$ définit une bijection entre les ensembles suivants :

$$\{Q \rightarrowtail A^{op}/Q \text{ ouvert intrinsèque dans } \mathcal{Z}\} \xrightarrow{\sim} \{U \subset \mathrm{Spm}\, A/U \text{ ouvert usuel}\}$$

(où $\mathcal{Z}$ désigne l'un des topos de k-algèbres de type fini)

b) Signalons cependant, qu'en général, il n'y a plus bijection lorsque k cesse d'être un corps algébriquement clos. En particulier, on voit facilement, pour $k = \mathbb{Z}$ et $A = \mathbb{Z}$, que ce n'est pas le cas (car dans un topos quelconque tout sous-objet de l'objet final est un ouvert intrinsèque : voir Remarque 5 du §1, n°1) même si on change le spectre maximal en spectre premier. Mais nous verrons au paragraphe suivant un moyen de tourner la difficulté (voir précisément le §3, n°4, 3).

§3. Caractérisation de la structure topologique intrinsèque

n° 0 . Dans le paragraphe précédent, notre but était de caractériser l'ensemble (externe) des ouverts intrinsèques d'un objet donné, dans les différents modèles que nous nous étions fixés au départ. Cette fois-ci notre démarche est plus "interne" puiqu'on va chercher à caractériser, non plus l'ensemble, mais l'objet des ouverts intrinsèques d'un objet (ce qui a un sens puisque les ouverts intrinsèques sont définissables par une formule). C'est d'ailleurs ce que nous avons appelé, au §1, n°4, la structure topologique intrinsèque de cet objet.

D'autre part, nous avons rencontré (toujours au §1, n°4) plusieurs autres structures topologiques qui, selon les cas, pourraient paraître mieux adaptés à certains types de problèmes. Par exemple, considérant l'objet des réels de Dedekind, les seuls ouverts apparemment interessants sont ceux définis "classiquement". En fait, nous allons voir maintenant que, pour peu qu'on se place dans le bon topos, la structure topologique intrinsèque coïncide toujours avec celle qui est la plus naturelle.

n°1 . La structure topologique spectrale

0. Nous allons reprendre le théorème de caractérisation des ouverts du §2, mais cette fois nos exigences seront plus grandes puisque nous essayerons d'obtenir un théorème formulé lui-même dans le langage du modèle (permettant ainsi la caractérisation de l'objet des ouverts intrinsèques). Pour cela il nous faudra décrire par une formule l'expression "U est un ouvert de Spec X" , d'où le nom d'ouvert spectral donné à un sous-objet satisfaisant une telle formule.

1. Soit $\mathcal{S}$ un site topologique (voir définition au §2, n°1) et $\mathcal{E}$ son topos de faisceaux. Considérons le foncteur $S : \mathcal{S}^{op} \to \mathbf{Ens}$ où, pour chaque objet X de $\mathcal{S}$, SX est l'ensemble des ouverts de l'espace topologique Spec X. Si Ω désigne l'objet classifiant les sous-objets dans $\mathcal{E}$, c'est lui-même un foncteur $\mathcal{S}^{op} \to \mathbf{Ens}$. Soit maintenant la transformation naturelle $e : S \to \Omega$ définie, pour chaque objet X de $\mathcal{S}$ par

$$\begin{array}{ccc} SX & \longrightarrow & \Omega X \\ U & \longmapsto & EU \end{array}$$

où, comme nous l'avons vu au Chapitre II, §2, n°2, 1, EU est le sous-objet de X dans $\mathcal{E}$ défini par : $EU(Y) = \{Y \to X / \Gamma Y \to \Gamma X$ factorise $U \rightarrowtail \Gamma X\}$.
Comme $\Gamma E = \mathrm{Id}$ (voir Chapitre II, §2, n°3, 1, a) e est un monomorphisme. Le sous-objet $S \rightarrowtail \Omega$ correspondant, s'identifie alors au sous-foncteur (noté encore S) de Ω défini par : $SX = \{P \in \Omega X / E\Gamma P = P$ et ΓP ouvert de Spec X$\}$

2. S est un sous-faisceau de Ω sur le site $\mathcal{S}$.

Preuve : Soit $(X_i \xrightarrow{f_i} X)_i$ une famille couvrante de $\mathcal{S}$, c'est-à-dire une famille de flèches de $\mathcal{U}$ telle que $\bigcup_i \mathrm{Im}\, \Gamma f_i = \Gamma X$. On va montrer que des diagrammes commutatifs du type suivant (celui qui est en traits pleins)...

$$\begin{tikzcd} X_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d] & X \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ S \arrow[r, tail] & \Omega \end{tikzcd}$$

... peuvent être "diagonalisés" (c'est-à-dire qu'il existe une flèche, en traits pointillés sur la figure, qui fait commuter les nouveaux diagrammes obtenus).
De tels diagrammes reviennent à considérer un sous-objet P de X tel que $f_i^{-1}P \in SX_i$, pour tout i. Demander qu'ils se diagonalisent c'est s'interroger sur l'appartenance de P à SX.

Remarquons tout d'abord que $\bigcup_i \exists_{f_i}(f_i^{-1} P) = P$ puisque $\bigcup_i \exists_{\Gamma f_i} (\Gamma(f_i^{-1}P)) = \Gamma P$ (voir formules du Chapitre II, §2) or $\Gamma(f_i^{-1}P)$ est ouvert dans Spec X_i , par hypothèse, et Γf_i est une application ouverte (car $f_i \in \mathcal{U}$: voir §2, n°3, 2) donc ΓP est un ouvert de Spec X. De plus (par le 3 puis le 2 du §2, n°3) on a :

$$E\Gamma P = \bigcup_i E \exists_{\Gamma f_i} \Gamma(f_i^{-1}P) = \bigcup_i \exists_{f_i} E\, \Gamma(f_i^{-1}P) = \bigcup_i \exists_{f_i}(f_i^{-1}P) = P$$

Ainsi S est lui-même un faisceau.

3. Soit maintenant X un objet quelconque de $\mathcal{E}$. Appelons "structure topologique spectrale" sur l'objet X, la structure topologique (voir définition au §1. n°4) engendrée (dans le topos $\mathcal{E}$) par le sous-objet S^X de Ω^X . Comme S^X est stable par intersections finies la formule suivante est satisfaite :

$$\forall\, U \subset X \;(\text{"U ouvert spectral"} \leftrightarrow \forall x \in X\, [x \in U \to \exists V \subset X (x \in V \subset U \wedge V \in S^X)])$$

4. Soit X un objet représentable de $\mathcal{E}$. Alors la structure topologique spectrale de X satisfait la condition de recouvrement (du §1, n°4, 2))

$$\forall\, P\subset X \quad \forall\, Q \subset X \quad (P\cup Q = X \to \operatorname{int} P \cup \operatorname{int} Q = X)$$

Preuve : a) Utilisons, pour cela, le lemme suivant :

Lemme : Soit Y un autre objet représentable et U un ouvert de $\operatorname{Spec}(Y \times X)$. Alors $EU \rightarrowtail Y \times X$ (considéré comme sous-objet de Y^*X dans $\mathcal{E}/Y$) est un ouvert spectral de Y^*X dans $\mathcal{E}/Y$.

Preuve du Lemme : Comme $EU \in S^X(Y)$, on a $\mathcal{E}/Y \models (EU \in S^X)$. Donc $\mathcal{E}/Y \models$ "EU ouvert spectral".

Preuve de la proposition (suite) : On va, encore une fois, employer la technique "logique" du Chapitre 0, §1, n°4, (7 et 8) . Soit Y un objet représentable et P,Q deux sous-objets quelconques de Y^*X dans $\mathcal{E}/Y$. Il faut donc montrer l'implication suivante :

$$(\mathcal{E}/Y \models \; P\cup Q = Y^*X) \Rightarrow (\mathcal{E}/Y \models \operatorname{int}(P) \cup \operatorname{int}(Q) = Y^*X)$$

Par des considérations générales de la théorie des faisceaux (voir Chapitre 0, §1, n°2, 4) on sait que si $P\cup Q = Y\times X$ il existe une famille $(Z_i \xrightarrow{f_i} Y\times X)_i$ couvrante et un recouvrement de l'ensemble d'indices de la famille par deux sous-ensembles J_1 et J_2 tels que f_i factorise P ssi $i \in J_1$ et f_i factorise Q ssi $i \in J_2$. Notons $U_k = \bigcup_{i \in J_k} \operatorname{Im} \Gamma f_i$ pour $k \in \{1,2\}$. Alors $EU_k = \bigcup_{i\in J_k} \operatorname{Im} f_i$ (voir le §2, n°3, 1). Par suite $EU_1 \subset P$, $EU_2 \subset Q$ et $EU_1 \cup EU_2 = Y\times X$. Or, par le lemme précédent EU_1 et EU_2 sont des ouverts spectraux de Y^*X dans $\mathcal{E}/Y$. On a donc les inclusions $EU_1 \subset \operatorname{int} P$ et $EU_2 \subset \operatorname{int} Q$ et ainsi, puisque $EU_1 \cup EU_2 = Y^*X$, on en déduit que $\operatorname{int} P\cup \operatorname{int} Q = Y^*X$.

5. (Théorème). Soit X un objet représentable de $\mathcal{E}$. Alors :

a) La structure topologique spectrale de X est plus fine que la structure topologique intrinsèque.

b) De plus, lorsque X est de Haussdorff (voir définition au §2, n°3,7) les deux structures topologiques intrinsèque et spectrale coïncident i.e. $\mathcal{E}$ satisfait la formule :

$$\forall\, U \subset X \ \ (\text{"}U \text{ ouvert intrinsèque"} \longleftrightarrow \text{" } U \text{ ouvert spectral"})$$

Preuve : a) Résulte de la proposition précédente et du §1, n°4, 2.

b) Les ouverts intrinsèques étant stables par réunions quelconques (internes) il suffit de montrer que $\mathcal{E}$ satisfait $\forall Q \subset X\ (Q \in S^X \to$ "Q ouvert intrinsèque") ou encore, en jouant avec les quantificateurs que :
$\mathcal{E} \models \forall\, Q \subset X\ \forall\, x \in X (Q \in S^X \wedge x \in Q \to$ "Q voisinage intrinsèque de x").
Soient donc Y un objet représentable, $Q \rightarrowtail Y \times X$ un sous-objet tel que ΓQ soit ouvert dans $\mathrm{Spec}(Y \times X)$ et $Q = E\Gamma Q$, et enfin $x : Y \to X$ une flèche pour laquelle le graphe $Gr(x)$ de x, est contenu dans Q. Montrons que dans ces conditions $\mathcal{E}/Y \models$ "Q est un voisinage intrinsèque de x" (où x désigne encore la section globale de Y^*X, dans $\mathcal{E}/Y$, correspondant à la flèche $x : Y \to X$ dans $\mathcal{E}$) c'est-à-dire que $\neg Gr(x) \cup Q = Y \times X$ dans $\mathcal{E}$. Comme X est de Haussdorff, $Gr(\Gamma x)$, qui est égal à $\Gamma Gr(x)$, est fermé dans $\mathrm{Spec}(Y \times X)$, donc $\neg\Gamma Gr(x)$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}(Y \times X)$. De plus, comme par hypothèse, ΓQ est ouvert dans $\mathrm{Spec}(Y \times X)$ et $\Gamma Gr(x) \subset \Gamma Q$, on a $\neg\Gamma Gr(x) \cup \Gamma Q = \Gamma(Y \times X)$. On a donc (par le §2, n°3, 3 et le Chapitre II, §2, n°3,2) la relation suivante $\neg Gr(x) \cup Q = Y \times X$ qui est l'identité cherchée.

6. La proposition précédente admet le corollaire suivant :
Si X est un objet représentable intrinsèquement séparé (voir Définition au §1, n°2) alors X satisfait les formules suivantes :

a) (Condition intrinsèque de recouvrement)

$$\forall P \subset X \ \ \forall Q \subset X \ \ (P \cup Q = X \to \mathring{P} \cup \mathring{Q} = X)$$

b) $\forall P \subset X$ ($\mathring{P}$ est un ouvert intrinsèque)

c) $\forall P \subset X$ ($\mathring{P} = \mathrm{int}\, P$) où $\mathrm{int}\, P$ désigne l'intérieur de P pour la structure topologique spectrale.

Preuve : a) Les ouverts intrinsèques et spectraux coïncidant on a toujours $\mathrm{int}\, P \subset \mathring{P}$. La première formule résulte donc du 4 .

b) Résulte de (a) en utilisant le §1, n°1, 8, b.

c) $\overset{\circ}{P}$ étant un ouvert intrinsèque (d'après (b)) c'est un ouvert spectral, donc $\overset{\circ}{P} \subset \operatorname{int} P$, d'où l'égalité cherchée.

7. Supposons que le foncteur Spec : $\mathcal{S} \to \mathcal{C}op$ préserve les produits finis (ce qui est, par exemple, le cas pour $\mathcal{S} = \mathcal{C}op$ ou $\mathcal{S} = \mathcal{B}^{op}$, mais certainement pas pour $\mathcal{S} = \mathcal{A}pf_k^{op}$) . Alors, si X et Y sont deux objets représentables et intrinsèquement séparés, ils satisfont la formule suivante (ou "vois" est une abréviation de "voisinage intrinsèque")

$\forall x \in X \ \ \forall y \in Y \ \ \forall U \subset X \times Y$ (U vois. de $(x,y) \to \exists V \subset X \, \exists W \subset Y$ [V vois. de $x \wedge W$ voi. de $y \wedge V \times W \subset U$]).

Preuve : Grâce à la proposition 6 précédente et les propositions 3 et 5 du §2, n°4, il nous suffit de montrer que la formule suivante est satisfaite.

$$\forall x \in X \ \ \forall y \in Y \ \ \forall U \subset S^{X \times Y}((x,y) \in U \to \exists V \in S^X \ \exists W \in S^Y \ [x \in V \wedge y \in W \wedge V \times W \subset U])$$

Soient donc Z un objet représentable, $x : Z \to X$ et $y : Z \to Y$ deux flèches et U un ouvert de Spec $(Z \times X \times Y)$, (puisque les sous-objets de $Z \times X \times Y$ appartenant à $S(Z \times X \times Y)$ sont tous de la forme EU) tels que $(Id,x,y) : Z \to Z \times X \times Y$ factorise $EU \rightarrowtail Z \times X \times Y$. Considérons alors un élément z de ΓZ. Comme le foncteur Spec préserve les produits et comme $(z, \Gamma x(z), \Gamma y(z)) \in U$, il existe des voisinages ouverts O de z dans Spec Z, V de $\Gamma x(z)$ dans Spec X et W de $\Gamma y(z)$ dans Spec Y tels que $O \times V \times W \subset U$ [en faisant l'identification Spec $Z \times$ Spec $X \times$ Spec $Y = \operatorname{Spec}(Z \times X \times Y)$] et $O \subset \Gamma x^{-1}(V) \cap \Gamma y^{-1}(W)$. Alors les applications $(Id,x) : EO \to EO \times X$ et $(Id,y) : EO \to EO \times Y$ (en notant à nouveau x et y leur restriction à EO) factorisent resp. $EO \times EV$ et $EO \times EW$, et d'autre part $(EO \times EV) \underset{EO}{\times} (EO \times EW)$ qui est égal à $EO \times EV \times EW$ est inclus dans EU. Il existe donc une famille couvrante

$$(Z_i \xrightarrow{f_i} Z) \text{ telle que } \mathcal{E}/Z_i \models \exists V \in Z_i^* \, S^X \ \exists W \in Z_i^* \, S^X \ (f_i^* x \in V \wedge f_i^* \, y \in W \wedge V \times W \subset f_i^* U).$$

Il suffit pour cela de regrouper les f_i qui apparaissent dans la construction des O (puisque $O = \bigcup_i \operatorname{Im} \Gamma f_i$) lorsque ces O , qui varient avec z, recouvrent ΓZ.

8. (Corollaire). Plaçons nous sous les hypothèses de la proposition précédente et soit X un objet représentable, alors les conditions suivantes sont

équivalentes :

i) X est intrinsèquement séparé,

ii) X satisfait la formule suivante :

$$\forall x \in X \ \ \forall x' \in X \ [x \neq x' \rightarrow \exists V \subset X \ \ \exists W \subset X \ \ (V \text{ vois. de } x \wedge W \text{ vois. de } x' \wedge V \cap W = \emptyset]$$

iii) X est de Haussdorff

iv) Spec X est un espace topologique séparé

Preuve : On utilise aussi la proposition 5 du §2, n°4, et la proposition 7 du §1, n°2.

n°2 . Structure topologique traditionnelle d'un espace métrique (voir définition au §1, n°4)

0. Nous allons étudier cette structure topologique dans le topos **Top** (voir définition au Chapitre 0, §2) où, précisément, se plongent tous les espaces métrisables ordinaires. Dans les autres modèles envisagés ici cette structure topologique présente peu d'intérêt vu que R lui-même n'y est pas "métrisable".

1. Tout d'abord, constatons que $\mathbb{R}$, plongé dans **Top**, satisfait les conditions du §1, n°4, 5.

Preuve : $\mathbb{R}$ étant dans **Top** l'objet des réels de Dedekind il satisfait immédiatement les conditions de 2) à 6) (voir [20]). De plus comme $\neg\{0\}$ est le complémentaire (ensembliste) de $\{0\}$ muni de la topologie induite (voir Chapitre II, §2, n°2, 4) il est donc aussi égal à Inv(R) . Signalons que le graphe de la relation $>$ est le même que son homologue ensembliste, muni de la topologie induite.

2. Tout espace métrique (ordinaire) plongé dans **Top** reste un espace métrique (au sens du §2, n°4, 9)

Preuve : Comme $[0,+\infty[\ = \neg]-\infty,0[$ c'est le même intervalle ensembliste muni de la topologie induite. Quant aux conditions 1), 2) et 3) pour une distance, étant "algébriques", elles se vérifient Hom par Hom, ce qui est immédiat.

3. Soit M un espace métrique (ordinaire). Alors, sa structure topologique "traditionnelle" (voir définition au §1, n°4, 9) dans **Top** satisfait la condition de recouvrement du §1, n°4, 2. c'est-à-dire :

$$\forall P \subset M \quad \forall Q \subset M \; [(P \cup Q = M) \rightarrow (\mathrm{int}\, P \cup \mathrm{int}\, Q = M)]$$

Preuve : Démontrons pour cela le lemme suivant :

Lemme : Soient X un espace topologique et U un ouvert (ordinaire) de $X \times M$. Montrons que U (en tant que sous-objet de X^*M dans **Top**/X) est un ouvert "traditionnel" de X^*M dans **Top**/X.

Preuve du lemme :Comme on le fait tout au long de ce paragraphe, utilisons la technique "logique" d'interprétation signalée au Chapitre 0, §1, n°4, (7 et 8) Soient Y un espace topologique $p : Y \to X$ et $f : Y \to M$ deux applications continues telles que $(p,f) : Y \to X \times M$ factorise $U \hookrightarrow X \times M$ [on vient d'"interpréter" $\forall x \in M \; (x \in U \to \ldots)$]. Considérons alors un élément $y \in Y$. Comme U est ouvert, il existe un voisinage ouvert V de py dans X et une boule ouverte de centre fy et de rayon ε' , notée $B(fy,\varepsilon')$, tels que $V \times B(fy,\varepsilon') \subset U$. Posons alors $\varepsilon = \varepsilon'/2$, $W = (p,f)^{-1}\,[V \times B(fy,\varepsilon)]$ et $\hat{\varepsilon} : W \to [0,+\infty[$ l'application constante sur ε [les ouverts W recouvrant Y, on vient d'interpréter $\exists \varepsilon > 0(\ldots)$] . Soient enfin Z un nouvel espace topologique, $q : Z \to W$ et $g : Z \to M$ deux nouvelles applications continues telles que : $d\, o(f \circ q,\, g) < \hat{\varepsilon}$ [on a interprété, cette fois $\forall x' \in M \; (d(x,x') < \varepsilon \to \ldots)$]. z étant un élément quelconque de Z , comme $qz \in W$ on a $pqz \in V$ et $d(fqz,fy) < \varepsilon$. Mais, on a aussi $d(fgz,gz) < \varepsilon$, par hypthèse sur g. Donc $d(gz,fy) < 2\varepsilon = \varepsilon'$, c'est-à-dire $gz \in B(fy,\varepsilon')$. Ainsi $(pq(z),gz) \in U$, d'où la factorisation de $U \hookrightarrow X \times M$ par $(pq,g) : Z \to X \times M$ [ce qui achève d'interpréter $(\ldots \to x' \in U)$] .

Preuve de la proposition (suite). On procède comme au n°1, 4.

4. La proposition précédente admet pour corollaire le théorème suivant :

Théorème : Si M est un espace métrique (ordinaire) alors, plongé dans $\mathbf{Top}$ il satisfait la formule :

$$\forall U \subset M \quad (U \text{ ouvert intrinsèque} \leftrightarrow U \text{ ouvert "traditionnel"})$$

où ouvert "traditionnel" (qui a été défini au §1, n°4, 9) signifie

$$\forall x \in M \; [x \in U \rightarrow \exists \varepsilon > 0 (B(x,\varepsilon) \subset U)] \quad \text{où} \quad B(x,\varepsilon) = \{y \in M / d(x,y) < \varepsilon\}$$

Preuve : En plus de la proposition précédente, on utilise les propositions 2 et 9 du §1, n°4.

5. Ce dernier théorème admet lui-même pour corollaire : (Fourmann)
Dans $\mathbf{Top}$ "toute" application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue, où $\mathbb{R}$ désigne l'objet des réels de Dedekind , c'est-à-dire que $\mathbf{Top}$ satisfait la formule suivante :

$$\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x' \in \mathbb{R} \, (|x-x'| < \eta \rightarrow |fx-fx'| < \varepsilon \,)$$

Preuve : Raisonnons "intuitionnistement". Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application, et x un élément de $\mathbb{R}$, alors $B(fx,\varepsilon)$ étant un ouvert "traditionnel" dans $\mathbb{R}$, pour la distance $(x,y) \rightarrow |x-y|$, c'est aussi un ouvert intrinsèque. Mais comme ceux-ci sont stables par changement de base, $f^{-1}(B(fx,\varepsilon))$ est un ouvert intrinsèque, donc "traditionnel", de $\mathbb{R}$ contenant x. Par suite, il existe $\eta > 0$ tel que $B(x,\eta) \subset f^{-1}(B(fx,\varepsilon))$ mais cela signifie exactement que la formule cherchée est satisfaite.

6. (Remarque). Précisons, en passant, la différence qu'il peut y avoir entre le théorème précédent et celui (du à A. Joyal) (voir [15]) qui montre que dans le topos libre "toute" application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue (c'est toujours de l'objet des réels de Dedekind qu'il s'agit). En effet, la différence essentielle réside dans l'emploi de l'adverbe "toute". Dans le cas de $\mathbf{Top}$, nous avons vu que $\mathbf{Top} \models \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (f "continue"), par contre pour le topos libre $\mathbb{L}$, on montre seulement que "pour toute flèche f de source $\mathbb{R}$ et de but $\mathbb{R}$ alors $\mathbb{L} \models$ (f "continue")» . Quant à la formule $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (f "continue"), elle est évidemment fausse dans $\mathbb{L}$ car sinon, cela signifierait que dans n'importe quel topos, donc en particulier dans $\mathbf{Ens}$, toute application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue !...

n°3 . <u>Structure topologique traditionnelle des parties de</u> R^n (voir définition au §1, n°4, <u>8</u>)

<u>0</u>. Plaçons nous cette fois dans le topos de Dubuc $\mathbb{D}$ (voir définition au Chapitre 0, §2) où R désigne l'anneau canonique (i.e. $R = C^\infty\mathbb{R}^{op}$) . Le cas du topos $\mathbb{T}$op se règlant facilement car les sous-espaces de $\mathbb{R}^n$ étant métrisables externement, le sont aussi internement. On est donc ramené au sous-paragraphe précédent.

<u>1</u>. R muni du sous-objet $R_> = C^\infty(]0,+\infty[)^{op}$ satisfait les conditions du §1, n°4, <u>5</u> .

<u>Preuve</u> : R étant un corps de Kock (voir Chapitre I, §1, n°2) les conditions (1) et (2) sont satisfaites. D'autre part, comme $R_> = E(]0,+\infty[)$, on en déduit que pour tout anneau lisse de type fini A présenté par $C^\infty\mathbb{R}^n/I$ et toute flèche $a : A^{op} \to R$ (où a s'identifie à une classe d'équivalence d'un élément f de $C^\infty\mathbb{R}^n$) a factorise $R_>$ ssi Spec a : Spec $A \to \mathbb{R}$ factorise $]0,+\infty[$ c'est-à-dire ssi la restriction de f à ZI est > 0. Par suite les conditions (3) et (5) sont satisfaites. On sait aussi (voir Chapitre II, §2, n°3, <u>2</u>) que dans $\mathbb{D}$: Val("x inversible";x) = Val($x \neq 0$;x) = $E(\neg\{0\})$. Or, dans $\mathbb{E}$ns , on a :

$$\neg\{0\} = \;]-\infty,0[\; \cup \;]0,+\infty[\quad \text{donc} \quad E(\neg\{0\}) = E(]-\infty,0[) \cup E(]0,+\infty[)$$

dans le modèle (par définition de la pré-topologie sur $\mathfrak{B}^{op}$). C'est-à-dire :

$$\text{Val}(\text{"x inversible"};x) = \text{Val}(-x>0;x) \cup \text{Val}(x>0;x) = \text{Val}(-x>0 \vee x>0;x)$$

Enfin, si pour un objet $A^{op} = (C^\infty\mathbb{R}^n/I)^{op}$ de $\mathbb{D}$ la restriction de $0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ à ZI est >0 alors ZI = $\emptyset$ et donc $A^{op} = \emptyset$, ce qui prouve la condition (6).

<u>2</u>. Soit $M = (C^\infty\mathbb{R}^n/I)^{op}$ un objet représentable. Alors M étant un sous-objet de R^n, a une structure topologique traditionnelle (voir le §1, n°4, <u>8</u>)
En fait, cette structure topologique satisfait la condition de recouvrement (du §1, n°4, <u>2</u>) c'est-à-dire :

$$\forall P \subset M \;\; \forall Q \subset M \; [(P \cup Q = M) \to (\text{int } P \cup \text{int } Q = M)]$$

<u>Preuve</u> : Comme dans les sous-paragraphes précédents cela résultera

(en utilisant, en gros, la même preuve qu'au n°1, 4) du lemme suivant (où l'on va oublier que l'on a à faire à des anneaux lisses et où la seule chose que l'on retiendra du site est que les objets représentables ont pour spectre des sous-espaces des R^n) .

<u>Lemme</u> : Soit X un objet représentable et U un ouvert de $\mathrm{Spec}(X\times M)$, alors EU est un ouvert traditionnel de X^*M dans $\mathbb{D}/X$.

<u>Preuve du lemme</u> : Soit Y un nouvel objet représentable, $p : Y\to X$ et $f : Y\to M$ deux flèches de $\mathbb{D}$ telles que $(p,f) : Y\to X\times M$ factorise $EU \rightarrowtail X\times M$ [on vient d'interpréter $\forall x \in M\ (x\in EU \to \ldots)$] . Considérons alors un élément $y\in \mathrm{Spec}\ Y$. Comme U est un ouvert de $\mathrm{Spec}(X\times M)$, qui est égal à $\mathrm{Spec}\ X\times \mathrm{Spec}\ M$, il existe un voisinage ouvert V_0 de $\Gamma p(y)$ dans Spec X et un voisinage V_1' de $\Gamma f(y)$ de la forme $B(\Gamma f(y),\varepsilon') \cap \mathrm{Spec}\ M$ (où $B(a,\alpha)$ désigne la boule ouverte de centre a et de rayon α pour la distance $d(x,y) = \mathrm{Sup}|x_i-y_i|$ sur $\mathbb{R}^n$) dans Spec M tels que $V_0\times V_1' \subset U$. Posons alors $\varepsilon = \varepsilon'/2$ puis $V_1 = B(\Gamma f(y),\varepsilon) \cap \mathrm{Spec}\ M$ puis encore $W = (\Gamma p\ ,\Gamma f)^{-1}[V_0\times V_1]$ et enfin $\varepsilon = (EW \to 1 \to R)$ la flèche constante sur ε [les ouverts W recouvrant Spec Y, on vient d'interpréter $\ldots \exists\varepsilon>0\ (\ldots)$] . Soient enfin Z un dernier objet représentable ainsi que $q : Z\to EW$ et $g : Z\to M$ deux flèches de $\mathbb{D}$ telles que $-\varepsilon < \Gamma g_i(z) - \Gamma f_i \circ \Gamma q(z) < +\varepsilon$, pour tout indice i et tout élément z de Spec Z [on a interprété, cette fois,... $\forall x'\in M(\bigwedge_{i=1}^{n} (-\varepsilon < x_i' - x_i < +\varepsilon \to \ldots)$] c'est-à-dire que $d(\Gamma g(z), \Gamma f \circ \Gamma q(z)) <\varepsilon$. D'autre part $\Gamma q(z)$ appartenant à W , $\Gamma f\circ \Gamma q(z)$ appartient à $B(\Gamma f(y),\varepsilon)$ donc $d(\Gamma f(y), \Gamma f\circ\Gamma q(z)) < \varepsilon$. On en déduit alors que $d(\Gamma g(z),\Gamma f(y)) < 2\varepsilon = \varepsilon'$ et ainsi que $\Gamma g(z)$ appartient à $B(\Gamma f(y),\varepsilon')$. Par suite $(\Gamma p \circ \Gamma q,\Gamma g)(z) \in U$ ce qui prouve que $(p\circ q,g) : Z\to X\times M$ factorise $EU\rightarrowtail X\times M$ [on a donc fini d'interpréter la formule "$\ldots\to x' \in E$"].

3. Comme précédemment, la proposition précédente admet le corollaire suivant :

Si M est un sous-objet représentable de R^n dans $\mathbb{D}$, il satisfait la formule :

$$\forall U\subset M\ \ (U \text{ ouvert intrinsèque} \leftrightarrow U \text{ ouvert traditionnel})$$

où "ouvert traditionnel" (voir définition au §1, n°4, 8) signifie :

$$\forall x\in M\ \ [x\in U \to \exists\varepsilon>0\ (B(x,\varepsilon) \cap M\subset U)]$$

en notant $B(x,\varepsilon) = \{y \in R^n / \bigwedge_{i=1}^{n} (-\varepsilon < y_i - x_i < \varepsilon\}$

Preuve : En plus de la proposition précédente on utilise les propositions 2 et 8 du §1, n°4.

4. Cette dernière proposition admet elle même pour corollaire :

([29]) . Dans $\mathbf{D}$ "toute" application de R dans R est continue (où $R = C^\infty \mathbf{R}^{op}$) c'est-à-dire que $\mathbf{D}$ satisfait la formule :

$$\forall f : R \to R \quad \forall x \in R \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x' \in R \quad (-\eta < x - x' < \eta \to -\varepsilon < fx - fx' < \varepsilon)$$

Preuve : c'est la même qu'au n°2, 5

n° 4 Structure topologique de Zariski (voir définition au §1, n°4, 4)

0. Nous étudierons ici deux topos. Pour commencer on se placera dans l'un quelconque des topos $\mathcal{Z}$ de k-algèbres (voir définition au Chapitre 0,§2) où k est un anneau commutatif unitaire. Puis on envisagera (rapidement) le cas du topos de Dubuc.

1. R désignant l'anneau canonique de $\mathcal{Z}$ (i.e. $R = k[X]^{op}$) c'est un corps de fractions séparé (voir la définition de corps de fraction au Chapitre I, §1, n°2 et d'objet séparé au §1, n°2) dans le topos $\mathcal{Z}$, car c'est un corps de Kock (voir §1, n°2, 9) .

2. Soit $M = A^{op}$ un objet représentable de $\mathcal{Z}$. Alors, sa stature topologique de Zariski (voir §1, n°4, 4) dans $\mathcal{Z}$ satisfait la condition de recouvrement (du §1, n°4, 2) c'est-à-dire :

$$\forall P \subset M \quad \forall Q \subset M \; [P \cup Q = M \to \text{int } P \cup \text{int } Q = M]$$

Preuve : résulte comme d'habitude du lemme suivant :

Lemme : Soit $X = B^{op}$ un objet représentable de $\mathcal{Z}$ et f un élément de $B \otimes A$ alors le sous-objet $(B \otimes A)[f^{-1}]^{op} \rightarrowtail (B \otimes A)^{op}$ considéré comme sous-objet de X^*M dans $\mathcal{Z}/X$ est un ouvert de Zariski dans $\mathcal{Z}/X$.

<u>Preuve</u> : Car $(B \otimes A)\,[f^{-1}]^{op} = f^{-1}[\mathrm{Inv}\ R]$ dans $\mathcal{E}/X$ (qui est un topos de B-algèbres), en notant encore $f : (B \otimes A)^{op} \to B[X]^{op}$ la flèche correspondante à l'élément de $B \otimes A$.

<u>3</u>. Comme aux sous-paragraphes précédents, la proposition <u>2</u> admet le corollaire suivant :

(Théorème) : Si M est un objet représentable de $\mathcal{E}$, il satisfait la formule :

$$\forall U \subset M \ (U \text{ ouvert intrinsèque} \leftrightarrow U \text{ ouvert de Zariski}) ,$$

où "ouvert de Zariski" (voir définition au §1, n°4, <u>4</u>) signifie :

$$\forall x \in M\ [x \in U \to \exists f : X \to R\ (x \in f^{-1}(\mathrm{Inv}\ R) \subset U)]$$

<u>Preuve</u> : En plus de la proposition précédente on utilise les proposition <u>2</u> et <u>4</u> du §1, n°4.

<u>4</u>. (Remarque). Les conclusions de ce théorème peuvent paraitre contradictoires avec la remarque du §2, n°5, <u>3</u>, b . Cela provient, en fait, du sens différent donné au mot "ouvert de Zariski", selon qu'on considère des réunions "externes" ou "internes" d'ouverts affines.

<u>5</u>. Plaçons-nous, maintenant, à nouveau dans le topos de Dubuc $\mathbb{D}$ où $R = C^{\infty}\mathbb{R}^{op}$. Là encore on peut retranscrire les preuves précédentes pour obtenir la proposition suivante :
Les deux structures topologiques "intrinsèque" et "de Zariski" coïncident sur tout objet représentable de $\mathbb{D}$.
Elles coïncident donc aussi avec la structure topologique "spectrale" (voir n°1) et la structure topologique "traditionnelle" pour les parties de R^n (voir n°3).

§4. Le théorème d'inversion locale

n°1 . En géométrie différentielle

0. On se souvient de l'identité $\mathrm{Hom}(\Delta^n,R) = C_0^\infty(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ (où $\Delta = \neg\neg\{0\}$ dans R) démontrée au Chapitre II, §3, n°2, 2, dans le topos de Dubuc. Seul le terme de gauche pouvait alors se formuler dans la logique du modèle. Comme maintenant on sait ce qu'est un voisinage de 0, il va donc être possible de formuler aussi le terme de droite. On aura ainsi un "passage" de l'infinitésimal au local, qui nous permettra de montrer le "théorème d'inversion locale" grâce à son homologue "infinitésimal" . On pourra aussi donner des caractérisations des isomorphismes locaux et des variétés de type local, (pour leur définition, voir le §1, n°3).

1. Montrons, en préliminaire, la proposition suivante :
Soit X un objet représentable dans $\mathbf{D}$ (voir définition au Chapitre 0, §2) Plus précisément on suppose que $X = A^{op}$ où A est un quotient de $C^\infty\mathbf{R}^n$.
La formule suivante est alors satisfaite :

$$\forall f : X \to R \ \exists g : R^n \to R \ (g_X = f)$$

où g_X désigne la restriction de g au sous-objet X de R^n .

Preuve : Supposons que A soit présenté par $C^\infty\mathbf{R}^n/I$ et soit B un autre anneau lisse de type fini présenté par $C^\infty\mathbf{R}^m/J$. On notera Y l'objet dual de B dans $\mathbf{D}$. Soit aussi $f : Y^* X \to Y^*R$ une flèche de $\mathbf{D}/Y$. Il lui correspond donc une flèche (notée encore) $f : Y\times X \to R$ dans $\mathbf{D}$ ou encore un C^∞-homomorphisme $C^\infty\mathbf{R} \to B\otimes A$. Or il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} C^\infty\mathbf{R} \arrow[rr, dashed] \arrow[dr] & & C^\infty\mathbf{R}^{m+n} \arrow[dl] \\ & B\otimes A & \end{tikzcd}$$

par suite f peut se prolonger en une flèche $R^m\times R^n \to R$ et, par restriction, en une flèche $Y\times R^n \to R$. Ainsi, on a montré que $\mathbf{D}/Y \models \exists g : R^n \to R\ (g_X = f)$.

2. Soit maintenant X un objet représentable, alors il satisfait les formules suivantes :

(a) $\forall x \in X \ \ \forall f : \neg\neg\{x\} \to R \ \ \exists g : X \to R \ \ (g_{\neg\neg\{x\}} = f)$

(b) $\forall x \in X \ \ \forall f : X \to R(\neg\neg\{x\} \subset f^{-1}\{0\} \to f^{-1}\{0\}$ vois. de $x)$

(cela généralise en fait un résultat dû à E. Dubuc où X était simplement remplacé par R^n) .

Preuve : Ecrivons tout d'abord X sous la forme A^{op} où $A = C^\infty\mathbb{R}^n/I$.

a) Soit maintenant Y un autre objet représentable par B^{op} où $B = C^\infty\mathbb{R}^m/J$ et $a : Y \to X$ une flèche de $\mathbb{D}$ correspondant à une section globale $x_0 : 1 \to Y^*X$ dans $\mathbb{D}/Y$. Comme $\neg\neg Gr(a)$ (où $Gr(a)$ désigne le graphe de a, considéré comme un sous-objet de $Y \times X$) est représentable par l'objet dual d'un quotient de $C^\infty\mathbb{R}^{n+m}$ (voir Chapitre II, §3, n°2) on va pouvoir, comme au 1, prolonger n'importe quelle flèche $\neg\neg Gr(a) \to R$ à $R^m \times R^n \to R$ puis à nouveau par restriction à $Y \times X \subset R^m \times R^n$ on aura la flèche cherchée.

b) Y et a étant comme dans (a) soit $f : Y \times X \to R$ une flèche de $\mathbb{D}$ telle que $\neg\neg Gr(a) \subset f^{-1}\{0\}$[on interprète ainsi le début de la formule $\forall x_0 \in X \ \forall f : X \to R$ $(\neg\neg\{x_0\} \subset f^{-1}\{0\} \to \ldots)$]. Or $\neg\neg Gr(a) = C_F^{op}$ où $C = B \otimes A$ et F est le graphe de Γa dans $\mathrm{Spec}(B\otimes A)$. De plus $C_F = \varinjlim_{F\subset V} C_V$ (voir Appendice, §1, n°6,7) lorsque V décrit les ouverts contenant F. Par suite, la condition $\neg\neg Gr(a) \subset f^{-1}\{0\}$, qui exprime que l'image de f (vu comme élément de $B\otimes A$) dans C_F est nulle, entraine l'existence d'un voisinage ouvert V de F dans Spec C tel que la restriction f_V de f à V est nulle. ce qui signifie, dans le topos, que $f_{EV} = 0$, ou encore que $EV \subset f^{-1}\{0\}$. Enfin, comme F est fermé dans $\mathrm{Spec}(Y \times X) = \mathrm{Spec}(B\otimes A)$ et est contenu dans V, $\Gamma(Y \times X)$ est l'union, dans $\mathbb{E}$ns , des deux ouverts $\neg F$ et V donc $\neg Gr(a) \cup EV = Y \times X$ dans le topos. Ainsi $\neg Gr(a) \cup f^{-1}\{0\} = Y \times X$ ce qui achève de prouver que $\mathbb{D}/Y \models$ "$f^{-1}\{0\}$ vois. de x_0".

3. Nous pouvons maintenant donner la version "interne" de l'identité $\mathrm{Hom}(\Delta^n,R) \simeq C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ signalée au début de ce sous-paragraphe. Elle se formule comme suit : Dans le topos $\mathbb{D}$ l'application "restriction" suivante est un isomorphisme :

$$R^{R^n}/I \xrightarrow{\sim} R^{\Delta^n}$$

où $I = \{f \in R^{R^n} / \exists V \subset R^n$ (V vois. de $0 \wedge f_V = 0)\}$, en notant f_V la restriction de f à V.

Preuve : Grâce à la proposition précédente nous pouvons raisonner de façon entièrement "intuitionniste". Soit $f : R^n \to R$ une flèche telle que sa restriction à Δ^n est nulle. Posons alors $V = f^{-1}\{0\}$. Par le 2, b, V est un voisinage de 0, ce qui prouve que $f \in I$. On a ainsi montré l'injectivité de l'application "restriction" $R^{R^n}/I \to R^{\Delta^n}$. Quant à sa surjectivité elle résulte immédiatement du 2, a.

4. Soient A et B des anneaux lisses de type fini où A est en plus de présentation finie (i.e. $A \simeq C^\infty\mathbb{R}^m/I$ où I est un idéal de type fini). Alors, si on pose $X = A^{op}$ et $Y = B^{op}$. Ils satisfont la formule :

$$\forall x \in X \ \forall f : X \to Y \ \ (f \text{ inf. inversible en } x \to f \text{ loc. inversible en } x).$$

Preuve : Tout d'abord, comme Y est représentable c'est un sous-objet d'un R^m pour un certain entier m. De plus, remarquons que, puisque A est de présentation finie, il existe un entier n et un nombre fini d'éléments $\phi_1,\dots,\phi_k$ de $C^\infty\mathbb{R}^n$ tels que $A \simeq C^\infty\mathbb{R}^n/(\phi_1,\dots,\phi_k)$ donc, dans le topos (X étant considéré comme un sous-objet de R^n) on a $X = \bigcap_i \phi_i^{-1}\{0\}$. Ceci étant, nous allons pouvoir maintenant raisonner entièrement de façon "intuitionniste".
Soit x_0 un élément quelconque de X et $f : X \to Y$ une application inf. inversible. On notera $y_0 = fx_0$. Tout d'abord, grâce à la proposition 1 nous pouvons prolonger $f : X \to Y$ en une fonction $F : R^n \to R^m$. D'autre part, comme la restriction γ de f à $\neg\neg\{x_0\} \to \neg\neg\{y_0\}$ est un isomorphisme (les doubles négations étant resp. prises dans X et Y) il existe (par la proposition 2,a) une application $G : Y \to R^n$ dont la restriction à $\neg\neg\{y_0\}$ est égal à γ^{-1}.

a) Constatons pour commencer que localement en y_0 , G factorise $X \rightarrowtail R^n$. En effet comme $G^{-1}(X) = \bigcap_i (\phi_i^{-1} \circ G)\ \{0\}$ et $\neg\neg\{y_0\} \subset G^{-1}(X)$ (puisque $G(\neg\neg\{y_0\}) = \gamma^{-1}(\neg\neg\{y_0\}) = \neg\neg\{x_0\} \subset X)$, $G^{-1}(X)$, que l'on notera encore V, est un voisinage de y_0 dans Y (par la proposition 2.b) d'où la locale factorisation.

b) Soit maintenant $H = F \circ G - I : Y \to R^m$ (où I est l'inclusion $Y \rightarrowtail R^m$).
Comme $\neg\neg\{y_0\} \subset H_i^{-1}\{0\}$ (où H_i désigne la $i^{\text{ème}}$ composante de H), $H_i^{-1}\{0\}$ est un

voisinage de y_0 dans Y. Soit alors $W = V \cap \bigcap_i H_i^{-1}\{0\}$, c'est aussi un voisinage de y_0 . On a donc montré que $\forall y \in Y\ (y \in W \rightarrow FG(y) = y)$. Soit aussi $K = G \circ f - I : X \rightarrow R^n$ (où I est cette fois l'inclusion $X \rightarrowtail R^n$). On montre de la même façon que W' qui par définition est égal à $\bigcap_i K_i^{-1}\{0\}$ est un voisinage de x_0 dans X. On a alors, comme précédemment

$$\forall x \in X\ (x \in W' \rightarrow GF(x) = x).$$

c) D'autre part on voit facilement qu'on a les inclusions suivantes :

$$F(W' \cap F^{-1}(W)) \subset W \cap G^{-1}(W')$$

$$G(W \cap G^{-1}(W') \subset W' \cap F^{-1}(W)$$

d) De plus on montre que :

- $W' \cap F^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0 dans X car $W' \cap F^{-1}(W) = W' \cap f^{-1}(W)$ (W étant dans Y et W' dans X) et W est un voisinage de y_0 dans Y,
- $W \cap G^{-1}(W)$ est un voisinage de y_0 dans Y car $W \cap G^{-1}(W') = W \cap g^{-1}(W')$ [où $g : V \rightarrow X$ désigne la restriction de G (voir le (a))] et W' est un voisinage de x_0 dans X. Finalement, de tout ce qui précède on déduit que la restriction de F a $W' \cap F^{-1}(W) \rightarrow W \cap G^{-1}(W)$ est l'isomorphisme cherché.

5. La proposition précédente admet pour premier corollaire :

(Théorème) : L'anneau canonique R du topos de Dubuc $\mathbf{D}$ satisfait l'axiome d'inversion locale (voir §1, n°3, 4). C'est-à-dire que pour chaque entier n, $\mathbf{D}$ satisfait la formule :

$$(IL_n)\quad \forall f : R^n \rightarrow R^n\ \ \forall x_0 \in R^n\ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0) \neq 0 \rightarrow f \text{ loc. inversible en } x_0\right) .$$

Preuve : Résulte, par la proposition précédente, du théorème d'inversion infinitésimale (montré au Chapitre II, §4, n°2) .

6. La proposition 4 admet pour second corollaire, la proposition suivante (qui généralise la proposition 5 du Chapitre II, §4, n°1). Soit $h : B \rightarrow A$ un homomorphisme d'anneaux lisses de type fini où A est en fait de présentation finie (voir définition à la proposition 4) . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) Pour tout point p de Spec A, l'homomorphisme $B_q \to A_p$ est un isomorphisme (où $q = \mathrm{Spec}\, h(p)$)

(b) $h^{op} : A^{op} \to B^{op}$ est infinitésimalement inversible dans $\mathbb{D}$,

(c) $h^{op} : A^{op} \to B^{op}$ est localement inversible dans $\mathbb{D}$,

(d) Pour tout point p de Spec A, il existe resp. un voisinage ouvert V de p dans Spec A et un voisinage ouvert W de Spec $h(p)$ dans Spec B tels que $\mathrm{Spec} h(V) = W$ et l'homomorphisme restriction $B_W \to A_V$ est un isomorphisme.

Preuve : L'équivalence (a)$\Leftrightarrow$(b) a été montrée au Chapitre II, §4, n°1, 4
L'équivalence (b)$\Leftrightarrow$(c) vient d'être montrée dans la proposition 4

L'implication (c) $\Rightarrow$(d) provient du fait que l'objet final 1 n'admet que des recouvrements triviaux dans $\mathbb{D}$ (à cause du Nullstellesatz).
Enfin l'implication (d) $\Rightarrow$(a) est évidente.

7. Soit A un anneau lisse de présentation finie (voir définition à la proposition 4) et X son objet dual dans $\mathbb{D}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) X est une variété de type infinitésimal de dimension n (voir définition au Chapitre II, §1, n°3)
(b) X est une variété de type local de dimension n (voir définition au §1, n°3, 6) .
(c) X est isomorphe à $(C^{\infty}M)^{op}$ pour une certaine variété C^{∞} (ordinaire) de dimension n.

Preuve : L'implication (c) $\Rightarrow$(a) a été montrée au Chapitre II, §4, n°1, 6 .
Montrons maintenant l'implication (a) $\Rightarrow$ (b) : Nous procéderons de façon entièrement "intuititionniste". Soit x un élément de X. Par hypothèse, il existe donc un isomorphisme $\gamma : \neg\neg\{x\} \to \neg\neg\{0\}$ (où les doubles négations sont resp. prises dans X et R^n) tel que $\gamma(x) = 0$. Mais par la proposition 2 on peut prolonger γ en une application $f : X \to R^n$ qui est évidemment inf. inversible en x. Par suite, par la proposition 4 elle est aussi loc. inversible en x. Ainsi il existe bien un voisinage de x dans X et un voisinage de 0 dans R^n qui sont isomorphes.
Il reste à montrer l'implication (b)$\Rightarrow$(c) : Les recouvrements de l'objet final étant triviaux on voit facilement que pour tout p de Spec X, il existe des

des voisinages intrinsèques W' de p dans X et W de 0 dans R^n tels que $W' \simeq W$. Par la proposition 2 du §2, n°5, il existe des voisinages ouverts (ordinaires) V' de x_0 dans Spec X et V de 0 dans $\mathbb{R}^n$ tels que $EV' \simeq EV$ ou encore tels que $A_{V'} \simeq C^\infty V$. Les voisinages V' recouvrant Spec X = Spec A, A est issue d'une variété C^∞ de dimension n.

n°2 . En géométrie algébrique

0. Plaçons nous dans un topos $\mathcal{E}$ de k-algèbres de type fini où k est un corps algébriquement clos (voir définition au Chapitre 0, §2). Nous allons voir que l'axiome d'inversion locale (voir §1, n°3, 4) ne peut être satisfait par l'anneau canonique R (i.e. $R = k[X]^{op}$) .

1. Montrons, pour commencer, une proposition préliminaire de portée générale [elle est valable dant tout topos $\mathcal{E}$ construit sur un site concret (voir définition au Chapitre II, §2, n°1)].

Soit P(x) une formule du langage $\mathcal{L}(\mathcal{E})$ (décrit au Chapitre 0, §1, n°4, 2) à une variable x de sorte X (où X est un objet de $\mathcal{E}$) alors :

$\mathcal{E} \models \exists x \in X(P(x))$ ssi, il existe une section globale $x_0 : 1 \to X$ telle que $\mathcal{E} \models P(x_0)$.

Preuve : Par le Chapitre 0, §1, n°4, 8 , si $\mathcal{E} \models \exists x \in X(P(x))$ il existe un recouvrement $(S_i \to 1)$ et des sections globales $a_i : 1 \to S_i^* X$ dans $\mathcal{E}/S_i$ telles que $\mathcal{E}/S_i \models S_i^* P(a_i)$. Mais la famille $(\Gamma S_i \to 1)_i$ étant surjective (voir Chapitre II, §2, n°1), il existe un indice i tel que $\Gamma S_i \neq \emptyset$. Soit alors $p_i : 1 \to S_i$ une des sections globales de S_i . On a donc $\mathcal{E} \models p_i^* \, S_i^* P(p_i^* a_i)$ ou encore $\mathcal{E} \models P(p_i^* a_i)$ dans laquelle, $p_i^* a_i : 1 \to X$ est bien une section globale de X. La réciproque est évidente.

2. Nous pouvons maintenant montrer que : $\mathcal{E}$ ne vérifie pas (IL_1) c'est-à-dire

$\mathcal{E} \not\models \forall f : R \to R \;\; \forall x \in R \; (\frac{\partial f}{\partial x}(x) \neq 0 \to$ "f loc. inversible en x").

où "f loc. inversible en x" (défini au §1, n°3,1) signifie :

$\exists V \subset R^n$ (V vois. de $x \wedge f V$ vois. de $fx \wedge f_V$ injective)

Preuve : Considérons un polynôme f(x) à une variable, envisagé comme flèche $R \to R$ dans $\mathcal{E}$, et x_0 un élément de k, regardé comme section globale $1 \to R$

tel que $f'(x_0) \neq 0$. Si $\mathcal{E} \models (IL_1)$ on devrait avoir $\mathcal{E} \models$ "f loc. inversible en x_0" . Or "f loc. inversible en x_0" est une formule du type $\exists x \in X(P(x))$ ou $P(x)$ est une formule à une variable libre (ici $X = \Omega^R$). Par suite, en utilisant le 1, il existe donc une section globale $v_0 : 1 \to \Omega^R$ telle que $\mathcal{E} \models (v_0$ vois. de $x_0 \wedge fv_0$ vois. de $fx_0 \wedge f_{v_0}$ injective). En clair, il existe donc un sous-objet $V_0 \rightarrowtail R$ qui est un voisinage intrinsèque de x_0 tel que son image par f (noté V_0') soit un voisinage intrinsèque de fx_0 et pour lequel la restriction de f à $V_0 \to V_0'$ est un isomorphisme. En appliquant la proposition 4 du §2, n°3, on voit qu'il existe deux voisinages ouverts (ordinaires) U et U' resp. de x_0 et fx_0 dans $Spm(k[X])$ pour lesquels la restriction de f (considéré comme morphisme entre schémas) à $U \to U'$ est un isomorphisme. Mais l'exemple "classique" où k est de caractéristique zéro, $f(X) = X^2$ et $x_0 = 1$ montre qu'il ne peut en être ainsi (sinon l'application $\sqrt{-}$ serait rationnelle !).

3. (Remarque) a) On aurait pu se placer en fait dans un topos de k-algèbres (sans nécessairement la condition d'être de type fini) car les recouvrements $(X_i \to 1)_i$ eux restent de type fini (voir construction de ces topos au Chapitre 0, §2). Cependant on ne peut plus utiliser la proposition 4 du §2, n°3. On la remplace alors, par la proposition 3 du §3, n°4 en utilisant à nouveau le 1.

b) Le théorème d'inversion locale n'étant pas valide dans les topos de k-algèbres, il est clair qu'il ne peut y avoir pour ces topos une proposition analogue à la proposition 2 du n°1 . En effet la formule suivante (qui est la formule (a) du n°1, 2) ...

$$\forall x \in X \ \ \forall f : \neg\neg\{x\} \to R \ \ \exists g : X \to R \ (g_{\neg\neg\{x\}} = f)$$

... ne peut être satisfaite car elle signifierait pour $X = R^n$ (en utilisant la proposition 5 du Chapitre II, §3, n°3) que toute série formelle est la série de Taylor d'un polynome !! (même exprimée localement cette formule resterait fausse car toute série formelle n'est pas non plus la série de Taylor d'une fraction rationnelle). Cependant, il en va tout autrement pour la formule (b) du n°1, 2 , comme nous allons le voir maintenant.

4. Plaçons-nous, encore une fois, dans un topos $\mathcal{E}$ de k-algèbres de type fini,

où k est un corps algébriquement clos. Soit alors A une k-algèbre de type fini et X son objet dual dans $\mathcal{E}$, alors la formule suivante est satisfaite :

$$\forall x \in X \ \forall f : X \to R \ \ (\neg\neg\{x\} \subset f^{-1}\{0\} \to f^{-1}\{0\} \text{ vois. de } x)$$

<u>Preuve</u> : Démontrons pour cela le lemme suivant :

<u>Lemme</u> : Soient A une k-algèbre de type fini, $\mathfrak{a}$ un idéal de A et f un élément de A. On suppose, de plus que toutes ces données sont telles que dans le topos $\mathcal{E}$, la flèche composée suivante est "constante sur zéro" (i.e. elle factorise la flèche $0 : 1 \to R$),

$$\neg\neg(A/\mathfrak{a})^{op} \rightarrowtail A^{op} \xrightarrow{f} R$$

alors il existe un ouvert (ordinaire) U dans Spm A tel que $A/\mathfrak{a}^{op} \subset EU$ et la restriction de f à EU est nulle.

<u>Preuve du lemme</u> : Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal de A contenant $\mathfrak{a}$. Comme

$$(A/\mathfrak{m}^{op} \rightarrowtail A^{op}) \subset (A/\mathfrak{a}^{op} \rightarrowtail A^{op})$$

on a aussi $\neg\neg(A/\mathfrak{m}^{op} \rightarrowtail A^{op}) \subset \neg\neg(A/\mathfrak{a}^{op} \rightarrowtail A^{op})$

Appliquons maintenant l'identité suivante : $\neg\neg(A/\mathfrak{m})^{op} = \bigcup_n (A/\mathfrak{m}^n)^{op}$ démontrée au Chapitre II, §3, <u>1</u> . On déduit donc de l'hypothèse que la restriction de $f : A^{op} \to R$ à $(A/\mathfrak{m}^n)^{op} \rightarrowtail A^{op}$ est nulle, pour tout entier n. C'est-à-dire que f (considéré cette fois comme élément de A) appartient à $\mathfrak{m}^n$, pour tout n. Or $\bigcap_n \mathfrak{m}^n$ est le noyau de l'homomorphisme $A \to A_{\mathfrak{m}}$, donc l'image de f dans $A_{\mathfrak{m}}$ est nulle. Par suite il existe un élément $a_{\mathfrak{m}}$ de A tel que $a_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$ et l'image de f dans $A[a_{\mathfrak{m}}^{-1}]$ est nulle. Soit alors $Q \rightarrowtail A^{op} = \bigcup_{\mathfrak{m} \supset \mathfrak{a}} (A[a_{\mathfrak{m}}^{-1}]^{op} \rightarrowtail A^{op})$. On vient de voir que $\Gamma(A/\mathfrak{a}^{op}) \subset \Gamma Q$ (puisque les sections globales de $A/\mathfrak{a}^{op}$ correspondent aux idéaux maximaux de A contenant $\mathfrak{a}$). Donc $A/\mathfrak{a}^{op} \subset Q$ (puisque d'après le Chapitre II, §2, n°2; <u>4</u>, c et le Chapitre III, §2, n°3, <u>3</u> on a $E\Gamma Q = Q$). D'autre part la restriction de $f : A^{op} \to R$ à $Q \rightarrowtail A^{op}$ est évidemment nulle, ce qui achève de montrer ce lemme (en fait $Q = EU$ ou U qui est égal à ΓQ est un ouvert de Spm A).

Preuve de la proposition (suite) : Soient Y un autre objet représentable de $\mathcal{E}$ (Y est donc de la forme B^{op} où B est elle-même une k-algèbre de type fini) et dans $\mathcal{E}/Y$ une section globale $a : 1 \to Y^*X$ et une flèche $f : Y^*X \to Y^*R$ pour lesquels $\neg\neg\{a\} \subset f^{-1}\{0\}$. Notons C la B-algèbre $B \otimes_k A$. Les données précédentes reviennent à considérer un B-homomorphisme $C \to B$ et un élément f de C tel que le composé ci-dessous soit nul dans $\mathcal{E}$.

$$\neg\neg(B^{op}) \rightarrowtail C^{op} \xrightarrow{f} R$$

Mais comme $C \to B$ est surjectif, B est isomorphe à un quotient de C. On peut donc appliquer ici le lemme précédent. On a alors

$$\neg(B^{op}) \cup EU = C^{op}$$

pour un certain ouvert U de Spm C tel que la restriction de f à EU soit nulle (il suffit de le vérifier au niveau des sections globales car on n'utilise que des ouverts). Mais comme $EU \subset f^{-1}\{0\}$ on en conclut que

$$\neg\{a\} \cup f^{-1}\{0\} = Y^*X$$

ce qui achève de montrer que $f^{-1}\{0\}$ est un voisinage intrinsèque de a dans Y^*X.

5. Nous reviendrons au chapitre suivant sur les conséquences qu'on peut tout de même tirer de la proposition précédente. Pour le moment contentons nous de constater que le théorème d'inversion locale (formulé au §1, n°3, 4) n'est pas conforme à ce que nous en attendions. En effet, bien qu'étant valide en géométrie différentielle (dans le topos de Dubuc) il cesse de l'être en géométrie algébrique, même dans le topos étale !! (on se souvient que Grothendieck a précisement introduit la topologie étale pour forcer un tel théorème à être vrai..) Il va donc falloir maintenant réexaminer le concept de "locale inversion" qui semble finalement beaucoup trop fort.
Nous allons voir, au chapitre suivant qu'on peut, encore une fois, grace à l'outil logique remédier à ces difficultés.

CHAPITRE IV

BIJECTION LOCALE

§0. Introduction.

N°1. Au cours des chapitres précédents, nous avons vu comment, une application $R^n \to R^n$ de jacobien non-nul en un point x_0, pouvait s'inverser sur un domaine de plus en plus étendu autour de x_0. Cependant, en géométrie algébrique, le passage de l'infinitésimal au local nous a posé quelques difficultés (voir chapitre III, §4, n°2). On sait d'ailleurs que ce sont ces mêmes difficultés (mais formulées autrement) qui ont conduit Grothendieck à introduire la topologie étale. Ici, par contre, il n'est pas question de toucher à la topologie (dont est munie la catégorie des k-algèbres) car c'est une donnée a priori (puisqu'on peut se placer dans un topos de notre choix). C'est donc le concept même d'isomorphisme local" que l'on va devoir réviser. Disons, qu'en attachant à l'idée de "voisinage intrinsèque" une trop grande importance (qui est pourtant justifiée en topologie générale puisque tous les autres concepts se construisent à partir de celui-là) on n'a fait que retranscrire la définition traditionnelle d'isomorphisme local. Il nous faut maintenant nous demander s'il n'est pas possible de décrire directement ce qu'on entend par isomorphisme local (ou plutôt, comme nous allons le voir, par bijection locale) à l'aide de "l'outil" logique.

N°2. De même que le concept de bijection (qui coïncide avec celui d'isomorphisme dans un topos) peut se décrire élémentairement (i.e. par la logique du 1er ordre, c'est-à-dire uniquement avec des variables prises dans le domaine ou le codomaine de cette application), on peut se demander s'il ne serait pas possible, de la même façon, de décrire celui de "bijection locale". En tous cas, intuitivement, cela semble clair. Localement bijectif se décomposant en localement injectif et localement surjectif, on peut dire, dans le premier cas, qu'une application $f : X \to Y$ est localement injective en un point x_0 de X si, pour tout couple d'éléments x et x' de X "près de x_0"(1) on a l'implication (classique) $fx = fx' \to x = x'$. Dans le second cas, on peut aussi dire que f est localement surjective en un point x_0 de X si, pour tout élément y de Y "près de fx_0"(2) il existe un élément x de X "près de x_0"(3) pour lequel $fx = y$. Encore faut-il interpréter ce qu'on entend par "près de...". Le chapitre précédent nous apporte déjà une partie de la réponse (pour le (1) et (2)) car nous avons vu que la phrase "pour tout x, près de x_0 tel que..." pouvait encore s'écrire :

$\forall x\ (x \neq x_0 \vee \ldots)$ [que l'on peut concevoir plus précisément en disant "ou x est discernable de x_0 ou bien, (dans le cas contraire) on a..."]. Il nous reste à donner un sens à la phrase "il existe x près de x_0 tel que ...". Hélas, telle quelle, on ne peut (encore) lui donner de formulation (on le sait seulement en remplaçant "près" par "infiniment près"). Par contre, nous allons pouvoir formuler la phrase, plus complète : "pour tout y près de y_0, il existe x près de x_0 tel que $P(x,y)$" que l'on écrira :

$$\forall y(y \neq y_0 \vee \exists x[(y = y_0 \to x = x_0) \wedge P(x,y)])$$

(l'implication $(y = y_0 \to x = x_0)$ pouvant se concevoir de la façon suivante : "lorsque y tend vers y_0, x tend vers x_0"). Les concepts d'injection et de surjection locale en un point x_0 peuvent donc resp. se formuler ainsi :

$$\forall x \in X \quad \forall x' \in X\ [(x,x') \neq (x_0,x_0) \vee (fx = fx_0 \to x = x_0)]$$

$$\forall y \in Y\ (y \neq fx_0 \vee \exists x \in X\ [fx = y \wedge (y = fx_0 \to x = x_0)]).$$

N°3. Nous allons voir, dans le courant de ce chapitre, que cette définition est bien conforme à ce qu'on en attendait :

1. En topologie, en géométrie différentielle et en géométrie algébrique elle s'identifie aux différents "morphismes étales" déjà définis dans chacune de ces branches des mathématiques.

2. Dans le cas général, les bijections locales ont de "bonnes" propriétés qui correspondent à ceux de leurs homologues de la topologie générale.

3. Et enfin, le théorème d'"inversion locale" alors reformulé devient valide dans le topos étale, tout en restant faux dans celui de Zariski, ce qui justifie bien (a posteriori) le passage à la topologie étale.

§1. Généralités.

N°1. Injection, surjection et bijection locales.

1. Dans tout ce paragraphe on se placera dans un topos fixé.

Définition. (voir [34]) Soit $f : X \to Y$ une application quelconque et x_0 un élément de X. On dit que :

a) f est (intrinsèquement) localement injective en x_0 si elle satisfait la formule suivante :

$$\forall x \in X \quad \forall x' \in X\ [(x,x') \neq (x_0,x_0) \vee (fx = fx' \to x = x')]$$

b) f est (intrinsèquement) localement surjective en x_0 si elle satisfait la formule suivante :

$$\forall y \in Y\ (y \neq fx_0 \vee \exists x \in X\ [fx = y \wedge (y = fx_0 \to x = x_0)])$$

c) f est (intrinsèquement) localement bijective en x_0 si elle est, à la fois, (intrinsèquement) localement injective et (intrinsèquement) localement surjective en x_0.

d) f est (intrinsèquement) localement injective (resp. surjective, bijective) si elle est (intrinsèquement) localement injective (resp. surjective, bijective) en tout point de X.

Dans la suite, lorsqu'il sera clair qu'on travaille "intrinsèquement" on omettra le plus souvent ce qualificatif encombrant.

2. Nous verrons dans le paragraphe suivant des exemples spécifiques de telles applications, mais déjà la proposition suivante va nous fournir des cas particuliers souvent identifiables dans les modèles [par exemple en utilisant le théorème d'inversion locale dans le topos de Dubuc (voir chapitre III, §4, n°1)].

3. Soit $f : X \to Y$ une application et x_0 un élément de X. Alors :

a) f est localement injective ssi elle satisfait la formule (plus simple) suivante :

$$\forall x \in X\ \forall x' \in X\ [x \neq x' \vee (fx = fx' \to x = x')]$$

b) Si, de plus, f est injective, on a :

f est loc.surjective (ou bijective) en x_0 ssi $X \to Y$ (en tant que sous-objet) est un voisinage de x_0.

c) On a toujours les implications (iii) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (i) où

(i) f est infinitésimalement inversible en x_0 (voir définition au chapitre II, §1, n°2,1).

(ii) f est localement bijective en x_0.

(iii) f est localement inversible en x_0 (voir définition au chapitre III, §1, n°3,1).

Preuve : a) car on a toujours $\neg(x = x') \to \neg(x = x_0 \wedge x' = x_0)$.

b) Immédiat.

c) (iii) $\Rightarrow$ (ii) : Soit V un voisinage de x_0 pour lequel fV est un voisinage de fx_0 et la restriction f_V de f à V est injective. Soient aussi x et x', des éléments quelconques de X alors, comme V est un voisinage de x_0 on a $x \neq x_0 \vee x \in V^{(1)}$ de même, $x' \neq x_0 \vee x' \in V^{(2)}$. Donc $(1) \wedge (2) \to x \neq x_0 \vee x' \neq x_0 \vee (x,x' \in V)$. Mais comme f_V est injective$^{(3)}$ on a toujours $(x,x' \in V) \to (fx = fx' \to x = x')$ finalement $(1) \wedge (2) \wedge (3) \to x \neq x_0 \vee x' \neq x_0 \vee (fx = fx' \to x = x')$. D'où la formule cherchée.

- Soit maintenant y un élément de Y. Alors, comme fV est un voisinage de fx_0 on a $y \neq fx_0 \vee y \in fV^{(4)}$, mais $y \in fV \leftrightarrow \exists x \in X(fx = y \wedge x \in V)$ et comme f_V est injective, $x \in V \to (fx = fx_0 \to x = x_0)$. Finalement on a :

$$(3) \wedge (4) \to y \neq fx_0 \vee \exists x \in X\, [fx = y \wedge (y = fx_0 \to x = x_0)]$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Soient x et x' deux éléments de $\neg\neg\{x_0\}$ tels que $fx = fx'$. Comme f est loc.injective en x_0, on a $\neg[(x,x') = (x_0,x_0)] \vee (fx = fx' \to x = x')$. Mais comme on a $(x,x') \sim (x_0,x_0)$, c'est-à-dire $\neg\neg[(x,x') = (x_0,x_0)]$ (voir chapitre II, §1, n°1,4), on ne peut avoir que l'éventualité $(fx = fx' \to x = x')$. Or par hypothèse $fx = fx'$ donc $x = x'$.

- Soit maintenant y un élément de $\neg\neg\{fx_0\}$. Comme f est local-surjective en x_0 on a $y \neq fx_0 \vee \exists x\ (fx = y \wedge (y = fx_0 \to x = x_0))$. Mais comme on a aussi

$\neg(y \neq fx_0)$ on ne peut avoir que $\exists x(fx = y \wedge (y = fx_0 \rightarrow x = x_0))$. Soit donc x un tel élément. De l'hypothèse : $\neg\neg(y = fx_0)$ on tire donc

$$(y = fx_0 \rightarrow x = x_0) \wedge \neg\neg(y = fx_0) \rightarrow \neg\neg(x = x_0)$$

Par suite on a montré que $\exists x \in \neg\neg\{x_0\}\ \ (fx = y)$.

4. (Remarque). Signalons qu'aucune des réciproques du 3,c, n'est valide dans le cas général. Pour la non-implication (i) $\not\Leftrightarrow$ (ii) il suffit de considérer le cas où f est injectif (voir alors la remarque 5 au chapitre III, §1, n°1) quand à (ii) $\not\Leftrightarrow$ (iii) cela résultera du théorème de la bijection locale en géométrie algébrique (voir le §2 de ce chapitre).

5. Etudions maintenant un peu plus en détail la condition de locale injectivité. Tout d'abord constatons que si $f : X \rightarrow Y$ est une application quelconque les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) $X \rightarrowtail X \underset{Y}{\times} X$ est un ouvert intrinsèque.

(b) $\forall y \in Y\ (f^{-1}\{y\}$ est discret) (voir la définition d'objet discret au chapitre III, §1, n°2,1).

(c) $\forall x \in X \quad \forall x' \in X\ [fx = fx' \rightarrow (x \neq x' \vee x = x')]$.

Preuve : Immédiate.

6. Soit maintenant $f : X \rightarrow Y$ une application localement surjective. Alors les conditions (a), (b) et (c) précédentes sont équivalentes à la locale injectivité de f.

Preuve : La locale injectivité entraînant toujours la condition (c) (sans condition nécessaire sur f) il reste à montrer la réciproque. Soient x et x' deux éléments de X. Comme f est localement surjective, on a :
$fx \neq fx' \vee \exists x'' \in X\ [fx'' = fx \wedge (fx = fx' \rightarrow x'' = x')]$. Plaçons nous dans le cas où il existe un tel x". Dans ce cas, appliquons (c). On a donc $x'' \neq x \vee x'' = x$. Mais, dans un premier temps :

$$[fx'' = fx \wedge (fx = fx' \rightarrow x'' = x')] \wedge (x'' \neq x) \rightarrow (x' \neq x)$$

En effet, si $x' = x$ alors $fx = fx'$. Mais comme $(fx = fx' \rightarrow x'' = x')$ on a $x'' = x'$. Or $x'' = x$ donc $x' = x$ ce qui est contraire à l'hypothèse, donc $x' \neq x$.

Dans un deuxième temps :

$$[fx'' = fx \wedge (fx = fx' \rightarrow x'' = x')] \wedge (x'' = x) \rightarrow (fx = fx' \rightarrow x = x').$$

Par suite, la condition de locale surjectivité entraîne donc que :

$$fx \neq fx' \vee \exists x'' \in X \, [x' \neq x \vee (fx = fx' \rightarrow x = x')]$$

Mais comme $fx \neq fx' \rightarrow x \neq x'$ et que x'' n'apparait plus dans le "crochet" on a déduit la condition cherchée.

N°2. <u>Propriétés de stabilité</u>.

<u>1</u>. Considérons le triangle commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

et soit x_0 un élément de X. Alors :

a) Si f est loc.inj. (resp. loc. surj.) en x_0 et g est loc.inj. (resp. loc.surj.) en fx_0 alors h est loc.inj. (resp. loc.surj.) en x_0.

b) Si h est loc.inj. en x_0 alors f est loc.inj. en x_0

c) si h est loc.inj. en x_0 et f est loc.surj. en x_0 alors g est loc.inj. en fx_0.

d) si h est loc.surj. en x_0 alors g est loc.surj. en fx_0.

e) si h est loc.surj. en x_0 et g est loc.inj. en fx_0 alors f est loc. surj. en x_0.

<u>Preuve</u> : a) - Soient x et x' deux éléments de X. Par hypothèse, on a respectivement :

$$(x,x') \neq (x_0,x_0) \vee (fx = fx' \rightarrow x = x') \qquad (1)$$

$$(fx,fx') \neq (fx_0,fx_0) \vee (gfx = gfx' \rightarrow fx = fx') \qquad (2)$$

Mais comme on a $(fx,fx') \neq (fx_0,fx_0) \to (x,x') \neq (x_0,x_0)$ et que, très généralement, on a aussi $(P \vee Q) \wedge (P \vee Q') \leftrightarrow P \vee (Q \wedge Q')$ on en déduit que :

$$(1) \wedge (2) \to (x,x') \neq (x_0,x_0) \vee [(gfx = gfx' \to fx = fx') \wedge (fx = fx' \to x = x')]$$

d'où la formule cherchée.

- Soit maintenant z un élément de Z. Comme g est loc.surj. en fx_0 on a :

$$z \neq gfx_0 \vee \exists y \in Y\, [gy = z \wedge (z = gfx_0 \to y = fx_0)] \qquad (3)$$

Plaçons nous dans la situation de l'existence d'un tel y de Y et utilisons la locale surjectivité de f. On a alors

$$y \neq fx_0 \vee \exists x \in X\, [fx = y \wedge (y = fx_0 \to x = x_0)] \qquad (4)$$

Or, de la première éventualité $y \neq fx_0$ on tire $z \neq gfx_0$, et de la seconde (l'existence d'un "certain" x...) on en déduit que :
$gfx = z \wedge (z = gfx_0 \to x = x_0)$. Finalement des formules (3) et (4), après commutation du $\exists$ avec le $\vee$, on obtient :

$$z \neq gfx_0 \vee \exists y \in Y\ \exists x \in X\, [gfx = z \wedge (z = gfx_0 \to x = x_0)].$$

D'où la formule cherchée (car il n'y a plus la variable y "entre crochet").

b) Immédiat car $(hx = hx' \to x = x') \to (fx = fx' \to x = x')$.

c) Soient y et y' deux éléments de Y. Comme f est loc.surj. en x_0, on a :

(1) $y \neq fx_0 \vee \exists x \in X\, [fx = y \wedge (y = fx_0 \to x = x_0)]$

(2) $y' \neq fx_0 \vee \exists x' \in X\, [fx' = y' \wedge (y' = fx_0 \to x' = x_0)]$

Mais, très généralement, comme de $P \vee Q$ et $P' \vee Q'$ on peut déduire $P \vee P' \vee (Q \wedge Q')$ on voit que

$(1) \wedge (2) \to y \neq fx_0 \vee y' \neq fx_0 \vee \exists x \in X\ \exists x' \in X(F)$ où F est la formule appropriée. Plaçons nous donc sous les conditions de l'existence de tels éléments x et x' et utilisons la locale injectivité de h, on a alors :

(3) $(x,x') \neq (x_0,x_0) \vee (gfx = gfx' \rightarrow x = x')$. De la première éventualité $(x,x') \neq (x_0,x_0)$, on tire $(y,y') \neq (fx_0,fx_0)$, quant à la seconde $(gfx = gfx' \rightarrow x = x')$ on en déduit que $(gy = gy' \rightarrow y = y')$. Finalement

$$(1) \wedge (2) \wedge (3) \rightarrow (y,y') \neq (fx_0,fx_0) \vee \exists x \exists x' \, [(y,y') \neq (fx_0,fx_0) \vee (gy = gy' \rightarrow y = y')].$$

D'où la formule cherchée, puisque x et x' ne figurent pas "entre crochet".

d) Immédiat.

e) Soit y un élément de Y. Comme h est loc.surj. en x_0 on a :

$$gy \neq gfx_0 \vee \exists x \in X \, [gfx = gy \wedge (gy = gfx_0 \rightarrow x = x_0)].$$

Plaçons nous dans la situation de l'existence d'un tel x de X et utilisons la locale injectivité de g, on a alors :
$(fx,y) \neq (fx_0,fx_0) \vee (gfx = gy \rightarrow fx = y)$. Or des deux éventualités $(fx,y) \neq (fx_0,fx_0)$ et $(gfx = gy \rightarrow fx = y)$ on tire resp. que $y \neq fx_0$ et $(fx = y) \wedge (y = fx_0 \rightarrow x = x_0)$. Finalement, les hypothèses entraînent donc :
$gy \neq gfx_0 \vee \exists x \in X \, [y \neq fx_0 \vee (fx = y \wedge (y = fx_0 \rightarrow x = x_0))]$ d'où la formule cherchée.

2. Cette proposition admet, sous les mêmes hypothèses, le corollaire suivant :

a) si f est loc.bij. en x_0 et g loc.bij. en fx_0 alors h est loc.bij. en x_0,

b) si h est loc.bij. en x_0 et g est loc.inj. en fx_0 alors f est loc. bij. en x_0,

c) si h est loc.bij. en x_0 et f est loc.surj. en x_0 alors g est loc. bij. en fx_0.

3. Sous les mêmes hypothèses on a encore le corollaire :

a) si f et g sont loc.inj. (resp. surj., bij.) il en est de même de h.

b) si h est loc.inj. alors f est loc.inj.

c) si h est loc.surj. (resp. bij.) et g est loc.inj. alors f est loc. surj. (resp. bij.).

d) si h est loc.surj. et f est surjective alors g est loc.surj.

e) si h est loc.inj. (resp. bij.) et f est surj. et loc.surj. alors g est loc.inj. (resp. bij.).

4. Considérons le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{a} & X' \\ f\downarrow & & \downarrow f' \\ Y & \xrightarrow{b} & Y' \end{array}$$

et l'élément x_0 de X. Dans ces conditions, si f' est loc.inj. (resp. surj., bij.) en ax_0 alors f est loc.inj. (resp. surj., bij.) en x_0.

Preuve : a) Soit x_1 et x_2 deux éléments de X. Alors, comme f' est loc.inj. en ax_0, on a :

$$(ax_1,ax_2) \neq (ax_0,ax_0) \vee [f'ax_2 = f'ax_1 \rightarrow ax_2 = ax_1]$$

donc : $(x_1,x_2) \neq (x_0,x_0) \vee [bfx_2 = bfx_1 \rightarrow ax_2 = ax_1]$

mais la condition "entre crochet" entraîne que
$fx_2 = fx_1 \rightarrow ax_2 = ax_1 \wedge fx_2 = fx_1$ et comme $X = Y \underset{Y'}{\times} X'$ on a aussi
$ax_2 = ax_1 \wedge fx_2 = fx_1 \rightarrow x_2 = x_1$, d'où la formule cherchée.

b) Soit y un élément de Y. Comme f' est local.surj. en ax_0 on a :

$$by \neq f'ax_0 \vee \exists x' \in X' [f'x' = by \wedge (by = f'ax_0 \rightarrow x' = ax_0)].$$

Plaçons nous alors dans la situation de l'existence d'un tel x' de X'. Comme $X = Y \underset{Y'}{\times} X'$ et que f'x' = by, il existe aussi un x de X tel que : $fx = y \wedge ax = x' \wedge (by = f'ax_0 \rightarrow x' = ax_0)$. Mais cette dernière formule entraîne que $y = fx_0 \rightarrow x = x_0$ car on a $ax = ax_0 \wedge fx = fx_0 \rightarrow x = x_0$. Finalement, des hypothèses on arrive à la formule suivante :

$$by \neq f'ax_0 \vee \exists x \in X [fx = y \wedge (y = fx_0 \rightarrow x = x_0)]$$

d'où la formule cherchée, puisque $f'ax_0 = bfx_0$.

5. La proposition précédente admet pour corollaire le fait que :
Les applications loc.inj. (resp. surj.,bij.) sont stables par changement de base.

6. Soient I un objet, $(f_i : X_i \to Y)_{i \in I}$ une famille d'applications indéxée par I, i_0 un indice de I et x_0 un point de X_{i_0}. Notons $f : \coprod_{i \in I} X_i \to Y$ l'application $(x,i) \mapsto f_i x$. Dans ces conditions,

a) si f_{i_0} est loc.surj. en x_0 alors f est loc.surj. en (x_0, i_0)

b) si f_{i_0} est loc.inj. en x_0 et I est discret alors f est loc.inj. en (x_0, i_0).

Preuve : a) Résulte du 1,d.

b) Résulte du 1,c car $X_i \to \coprod_i X_i$ est ouverte (voir chapitre III, §1, n°2, 4).

7. Sous les mêmes hypothèses on a le corollaire suivant :

a) Si pour tout indice i de I, f_i est loc.surj. alors f est loc.surj.

b) Si I est discret et si, pour tout indice i de I, f_i est loc.inj. (resp.bij.) alors f est loc.inj. (resp.bij.).

8. Voici maintenant une première conséquence des propositions précédentes : Toute application loc.surjective est ouverte [où une application $f : X \to Y$ est appellée ouverte si elle satisfait la formule : $\forall x \in X \ \forall V \subset X$ (V vois. de x dans X $\to$ fV vois. de fx dans Y), une application ouverte satisfait donc aussi la formule :

$$\forall U \subset X \quad (U \text{ ouvert de } X \to fU \text{ ouvert de } Y)]$$

Preuve : Soit x un élément de X et V un voisinage de x dans X, alors l'injection $V \rightarrowtail X$ est loc.surj. en x donc, le composé $V \rightarrowtail X \to Y$ est loc.surj. en x (voir proposition 1,a). Considérons alors la décomposition suivante :

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, tail] \arrow[dr, two heads] & X \arrow[r] & Y \\ & fV \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

En appliquant à nouveau la proposition 1, on en déduit que l'injection $fV \rightarrowtail Y$ est loc.surj. en fx, c'est-à-dire que fV est un voisinage de fx dans Y.

9. Cette dernière proposition admet pour corollaire :
Toute application localement bijective $f : X \to Y$ satisfait les deux conditions suivantes :

a) f est ouverte (voir définition au 8)

b) la diagonale $X \rightarrowtail X \underset{Y}{\times} X$ est ouverte.

Preuve : le (b) résulte du n°1,6.

10. Voici une autre conséquence des propositions précédentes :

Soient $f : X \to Y$ une application et $(U_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts recouvrant X. Dans ces conditions :

f est loc.bij. ssi, pour tout indice i la restriction de f à U_i est loc.bij.

Preuve : Résulte du 1,c et 1,d.

11. Nous pouvons maintenant donner une réciproque à la proposition 3,c du n°1 :

Soit $f : X \to Y$ une application où X est tel que "$X \times X$ a la topologie produit" [c'est-à-dire, comme nous l'avons dit au chapitre III, §1, n°2,7, il vérifie la formule :

$$\forall x \in X\ \forall x' \in X\ \forall V \subset X \times X\ [V \text{ vois. de } (x,x') \to \exists W \subset X\ \exists W' \subset X$$

$$(W \text{ vois. de } x \wedge W' \text{ vois. de } x' \wedge W \times W' \subset V)]$$. Alors :

f est loc.bij. en x_0 ssi f est loc.inversible en x_0 (voir la définition de loc.inv. au chapitre III, §1, n°3,1).

Preuve : Grâce à la proposition 3 du n°1 il suffit de montrer que loc.bij. $\Rightarrow$ loc.inv. Soit $V = \{(x,x') \in X \times X / fx = fx' \to x = x'\}$ alors, f étant loc.inj. en x_0, V est un voisinage de (x_0,x_0) dans $X \times X$. Par suite, puisque $X \times X$ a la topologie produit, il existe un voisinage W de x_0 dans X tel que $W \times W \subset V$. On voit alors facilement que la restriction de f à W est injective. De plus, comme f est loc.surj. en x_0, fV est un voisinage de fx_0 (voir proposition 8) donc f est loc.inv. en x_0.

12. Enfin, comme pour les sous-objets ouverts les applications loc.injectives, loc.surjectives et loc.bijectives sont stables par image inverse de morphisme géométrique [i.e. si $p : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est un morphisme géométrique entre topos et

$f : X \to Y$ une flèche de $\mathcal{E}'$ alors, si f est loc. inj. (resp. surj., bij.) dans $\mathcal{E}'$ il en est de même de $p^*f : p^*X \to p^*Y$ dans $\mathcal{E}$].

Preuve : a) Supposons, tout d'abord, f loc.injective. Alors, on a :

$$\neg \mathrm{Diag}_X \cup \mathrm{Val}(fx = fx' \to x = x' \ ; (x,x')) = X \times X$$

où Diag_X désigne la diagonale de X. Par suite, comme p^* préserve les produits et les "unions" on a : $p^*(\neg \mathrm{Diag}_X) \cup p^*\mathrm{Val}(fx = fx' \to x = x' \ ; (x,x')) = p^*X \times p^*X$. Mais $p^*(\neg \mathrm{Diag}_X) \subset \neg p^*\mathrm{Diag}_X = \neg \mathrm{Diag}_{p^*X}$ et

$$p^*\mathrm{Val}(fx = fx' \to x = x' \ ; (x,x')) \subset \mathrm{Val}((p^*F)x = (p^*f)x' \to x = x' ; (x,x'))$$

car, plus généralement $p^*(F \to G) \subset (p^*F \to p^*G)$. Finalement on a :

$$\neg \mathrm{Diag}_{p^*X} \cup \mathrm{Val}((p^*f)x = (p^*f)x' \to x = x' \ ; (x,x')) = p^*X \times p^*X$$

ce qui achève de prouver que p^*f est loc.injective dans $\mathcal{E}$.

b) De la même façon, si f est loc.surjective on a :

$$X \times Y = \neg \mathrm{Grf} \cup \exists_\pi[\mathrm{Val}(fx = y \ ; (x,x_0,y)) \cap \mathrm{Val}(y = fx_0 \to x = x_0,(x,x_0,y))]$$

où Grf désigne le graphe de f et $\pi : X \times X \times Y \to X \times Y$ est la projection $(x,x_0,y) \mapsto (x_0,y)$. Comme p^* préserve les $\varprojlim$ finies, les "unions" et les "images" on a :

$$p^*X \times p^*Y = p^*(\neg \mathrm{Grf}) \cup \exists_{p^*\pi}[\mathrm{Val}((p^*f)x = y \ ; (x,x_0,y)) \ \cap \ldots$$

$\ldots \cap \ p^*\mathrm{Val}(y = fx_0 \to x = x_0 \ ; (x,x_0,y))]$. Mais comme précédemment $p^*(\neg \mathrm{Grf}) \subset \neg \mathrm{Gr}p^*f$ et $p^*\mathrm{Val}(y = fx_0 \to x = x_0 \ ; (x,x_0,y)) \subset$
$\subset \ \mathrm{Val}(y = (p^*f)x_0 \to x = x_0 \ ; (x,x_0,y))$. D'où l'identité cherchée.

N°3. Fibrés localement triviaux.

1. Définition. Une application $f : X \to Y$ est appellée fibré trivial s'il existe (Attention, cette existence, comme toutes les autres de ce §1, est prise dans son sens interne) une application $\phi : Y \times X \to X$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\forall x \in X \quad \forall y \in Y \quad (f\phi(y,x) = y)$

(ii) $\forall x \in X \ (\phi(fx,x) = x)$

(iii) $\forall y \in Y \quad \forall y' \in Y \ \forall x \in X \ (\phi(y',\phi(y,x)) = \phi(y',x))$.

2. Soit $f : X \to Y$ une application telle que Y ait au moins un élément (i.e. elle satisfait la formule $\exists y \in Y \ (y=y)$). Alors f est un fibré trivial ssi elle satisfait la formule :

$$\exists y_0 \in Y \ \exists \gamma : Y \times f^{-1}\{y_0\} \to X \quad (\gamma \text{ bijectif} \wedge f \circ \gamma = \text{proj})$$

[ce qui signifie que f est (à iso. près) une projection].

Preuve : Si f est un fibré trivial, comme Y admet au moins un élément, soit y_0 cet élément et γ la restriction de ϕ à $Y \times f^{-1}\{y_0\}$. On vérifie que γ est la bijection cherchée. Réciproquement, soit $\phi : Y \times X \to X$ l'application définie par $\phi(y,x) = \gamma(y,\pi x)$, en notant π le composé $X \xrightarrow{\gamma-1} Y \times f^{-1}\{y_0\} \xrightarrow{\text{proj}} f^{-1}\{y_0\}$. On vérifie facilement que ϕ satisfait les trois conditions demandées.

3. Soit $f : X \to Y$ une application, notons $R \subset Y \times Y$ la relation définie par :

$$R(y,y') \leftrightarrow \exists \gamma : f^{-1}\{y\} \to f^{-1}\{y'\} \quad [\gamma \text{ bijectif} \wedge (y = y' \to \gamma = \text{Id})].$$

Alors, si f est un fibré trivial, la relation R est "triviale" (i.e. $\forall y \in Y \ \forall y' \in Y \ R(y,y')$).

Preuve : Soit $\gamma : f^{-1}\{y\} \to f^{-1}\{y'\}$ l'application $x \mapsto \phi(y',x)$. On vérifie que γ est la bijection cherchée.

4. On dit qu'une relation $R \subset Y \times Y$ est localement triviale en un point y_0 de Y si R est un voisinage de (y_0,y_0) dans $Y \times Y$. En particulier, on dit qu'une application $f : X \to Y$ est un fibré localement trivial au point y_0 de Y si la relation $R \subset Y \times Y$ définie au 3 est loc.triviale au point y_0. Enfin, on dit que f est un fibré localement trivial si c'est un fibré loc.trivial en tout point.

5. Soit $f : X \to Y$ une application et x_0 un point de X.

a) si f est un fibré trivial alors f est un fibré loc.trivial,

b) si f est un fibré loc.trivial en fx_0 alors f est loc.surjectif en x_0.

Preuve : a) d'après le 3.

b) Soit y un élément de Y. Comme f est un fibré loc.trivial en fx_0, on a la formule

$$y \in Y\ (y \neq fx_0 \vee \exists\gamma : f^{-1}\{fx_0\} \to f^{-1}\{y\}\ [\gamma \text{ bij.} \wedge (y = fx_0 \to \gamma = \mathrm{Id})]).$$

Dans la situation de l'existence d'un tel γ comme x_0 appartient à $f^{-1}\{fx_0\}$, soit l'élément x de $f^{-1}\{y\}$ défini par $x = \gamma(x_0)$. Alors évidemment $fx = y$. De plus si $y = fx_0$, comme dans ce cas $\gamma = \mathrm{Id}$ on a $x = x_0$.

6. Considérons le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "b"] & Y' \end{tikzcd}$$

et l'élément y_0 de Y. Alors :

a) Si f' est un fibré loc.trivial en by_0, il en est de même de f en y_0.

b) Réciproquement, b étant loc.bij. en y_0, si f est un fibré loc.trivial en y_0, il en est de même de f' en by_0.

Preuve : a) Soient y_1 et y_2 deux éléments de Y. Comme f' est un fibré loc. trivial en by_0 on a :

$$(by_1,by_2) \neq (by_0,by_0) \vee \exists\gamma : f'^{-1}\{by_1\} \to f'^{-1}\{by_2\}[\gamma \text{ bij.} \wedge (by_1 = by_2 \to \gamma = \mathrm{Id})]$$

Plaçons nous dans l'éventualité d'un tel γ. Alors, comme $f^{-1}\{y_1\}$ et $f^{-1}\{y_2\}$ sont canoniquement isomorphes resp. à $f'^{-1}\{by_1\}$ et $f'^{-1}\{by_2\}$, il existe une bij. $\delta : f^{-1}\{y_1\} \to f^{-1}\{y_2\}$, et lorsque $y_1 = y_2$, on a évidemment $\gamma = \mathrm{Id}$, grâce aux hypothèses faites sur γ ; donc $\delta = \mathrm{Id}$. Enfin, comme de l'autre éventualité : $(by_1,by_2) \neq (by_0,by_0)$ on en déduit que $(y_1,y_2) \neq (y_0,y_0)$, on arrive donc à la condition cherchée.

b) Soient maintenant y_1' et y_2' deux éléments de Y', comme b est loc.surj. en y_0 on a, en regroupant les conditions pour y_1' et pour y_2' ;

$$y_1' \neq by_0 \vee y_2' \neq by_0 \vee \exists y_1 \in Y \ \exists y_2 \in Y \ (F)$$

où F est la formule $by_1 = y_1' \wedge by_2 = y_2' \wedge (y_1' = by_0 \to y_1 = y_0) \wedge$ $\wedge \ (y_2' = by_0 \to y_2 = y_0)$. Plaçons nous dans la "meilleure" situation, c'est-à-dire l'existence de tels y_1 et y_2. Alors, comme f est un fibré loc.trivial en y_0 on a :

$$(y_1,y_2) \neq (y_0,y_0) \vee \exists\gamma : f^{-1}\{y_1\} \to f^{-1}\{y_2\} \ [\gamma \text{bij.} \wedge (y_1 = y_2 \to \gamma = \mathrm{Id})].$$

Or, dans le "meilleur" cas, c'est-à-dire lorsqu'un tel γ existe, il existe aussi une bij. $\delta : f'^{-1}\{y_1'\} \to f'^{-1}\{y_2'\}$ puisque $by_1 = y_1'$ et $by_2 = y_2'$. Mais comme b est loc.inj. en y_0 on a : $(y_1,y_2) \neq (y_0,y_0) \vee (by_1 = by_2 \to y_1 = y_2)$ et, là encore, dans le "meilleur" cas, c'est-à-dire lorsque $by_1 = by_2 \to y_1 = y_2$ on obtient l'implication $y_1' = y_2' \to \delta = \mathrm{Id}$. Il reste à étudier les "mauvais" cas. Or on a : $y_1' \neq by_0 \vee y_2' \neq by_0 \to (y_1',y_2') \neq (by_0,by_0)$ et $(y_1,y_2) \neq (y_0,y_0) \to (y_1',y_2') \neq (by_0,by_0)$ car on a $y_1' = by_0 \to y_1 = y_0$ et $y_2' = by_0 \to y_2 = y_0$. Finalement, en regroupant les "conclusions" on en déduit la condition cherchée (on utise la commutation du $\exists$ avec le $\vee$ et on retire le quantificateur $\exists$ là où la variable correspondante ne figure pas).

7. (Corollaire) a) Les fibrés loc.triviaux sont stables par changement de base.

b) Soient $f : X \to Y$ une application et $(b_i : Y_i \to Y)$ une famille surjective (i.e. l'application cano. $\amalg Y_i \to Y$ est surjective) de bijections locales. Alors, si pour tout indice i, $b_i^* X \to Y_i$ est un fibré loc.trivial, f est lui-même un fibré loc.trivial.

8. Considérons deux "objets" $X_1 \xrightarrow{f_1} Y$ et $X_2 \xrightarrow{f_2} Y$ au-dessus de Y et soit $X \xrightarrow{f} Y$ leur produit au dessus de Y (i.e. $X = X_1 \underset{Y}{\times} X_2$). Alors, y_0 étant un élément de Y, si f_1 et f_2 sont des fibrés loc.triviaux en y_0, il en est de même de f.

<u>Preuve</u> : Se montre sans difficulté comme précédemment.

N°4. Nouvelle version du théorème d'"inversion" locale.

0. Nous sommes maintenant en mesure de formuler le théorème de la bijection locale (et non "d'inversion locale" comme nous l'avons déjà dit). Mais ce n'est qu'au paragraphe suivant que nous verrons que ce théorème est valide dans tous les modèles désirés contrairement à son homologue du chapitre III (voir plus précisément le §4, n°2 de ce chapitre). Enfin, comme aux chapitres précédents, on définit un concept de variété "modelé" sur celui de "bijection locale".

1. (Enoncé de l'axiome de bijection locale). R étant un corps de fraction, de type ligne et micro-linéaire, on peut considérer, pour chaque entier n, la formule :

$$(BL_n) \qquad \forall f : R^n \to R^n \quad \forall x_0 \in R^n \ (\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0 \to f \text{ loc.bijective en } x_0).$$

Il est clair que $(IL_n) \Rightarrow (BL_n) \Rightarrow (II'_n)$ (voir les énoncés des deux autres axiomes au chapitre II, §1, n°5 et au chapitre III, §1, n°3 ; quant aux implications, elles résultent de la proposition 3 du n°1). Dans la suite de ce sous-paragraphe, R satisfera la condition (BL_n) pour tout n.

2. (Théorème des fonctions implicites). Soit $f : R^m \times R^n \to R^n$ une application Si (a,b) est un couple de points de $R^m \times R^n$ tel que f(a,b) = 0 et $\frac{\partial f(a,-)}{\partial x}(b) \neq 0$ alors l'application $\pi = (f^{-1}\{0\} \rightarrowtail R^m \times R^n \xrightarrow{proj} R^m)$ est loc.bij. au point (a,b).

Preuve : Soit $F : R^m \times R^n \to R^m \times R^n$ l'application $(x,y) \mapsto (x,f(x,y))$. Comme $\frac{\partial F}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f(a,-)}{\partial x}(b)$, F est loc.bij. en (a,b). Or on a le produit fibré suivant :

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}\{0\} & \xrightarrow{\pi} & R^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^{m+n} & \xrightarrow{F} & R^{m+n} \end{array}$$

par suite π est loc.bij. au point (a,b) (voir le n°2,4).

3. (Remarque). Ici, contrairement à la proposition 5 du chapitre III, §1, n°3 la fonction définie par l'équation $f(x,y) = 0$ n'a pas pu être "explicitée" sur un voisinage de b. Nous verrons, cependant au §2 en quoi une telle proposition (ou plutôt son corollaire) peut, tout de même, être utile.

4. La proposition 2 précédente admet pour corollaire :

Soit $f : R^m \times R^n \to R^n$ une application quelconque, et g l'application $(x,y) \mapsto \frac{\partial f(x,-)}{\partial x}(y)$. Alors l'application composée suivante est localement bijective :

$$f^{-1}\{0\} \cap g^{-1}(\text{Inv } R) \rightarrowtail R^m \times R^n \xrightarrow{\text{proj}} R^n$$

où Inv R désigne l'ensemble des éléments inversibles de R.

Preuve : Pour tout couple (a,b) de $f^{-1}\{0\} \cap g^{-1}(\text{Inv } R)$ l'application $f^{-1}\{0\} \rightarrowtail R^m \times R^n \to R^n$ est loc.bij. donc, par composition avec le sous-objet ouvert $f^{-1}\{0\} \cap g^{-1}(\text{Inv } R) \rightarrowtail f^{-1}\{0\}$, l'application cherchée est loc.bij. en (a,b) (voir la proposition 1,a du n°2 et la proposition 3,b du n°1).

5. Soit M un objet quelconque. On dit que M est une variété de type quasi-local de dimension n, si pour tout point x_0 de M il existe une relation $F \subset M \times R^n$ pour laquelle les deux projections canoniques $F \to M$ et $F \to R^m$ sont loc.bij. en $(x_0,0)$.

On vérifie facilement les implications (par le n°1,3)

variété de type local (voir définition au chapitre III, §1,n°3,6)

$\Downarrow$

variété de type quasi-local

$\Downarrow$

variété de type infinitésimal (voir définition au chapitre II, §1,n°3,2)

$\Downarrow$

1-variété (voir définition au chapitre I, §2,n°5,4).

6. (Montré aussi par M. Bunge). Soit $f : R^n \to R^m$ une application et $M = f^{-1}\{0\}$. Si en tout point de M la matrice jacobienne de f est de rang $\geq m$ alors M est une variété de type quasi-local de dimension n-m.

Preuve : Sensiblement la même qu'au chapitre II, §1,n°5,3. La relation $F \subset M \times R^{n-m}$ cherchée est alors simplement le graphe de l'application composée :

$$M \xrightarrow{\phi} P \xrightarrow[\sim]{} R^{n-m}$$

7. Soit M un objet et $(U_i)_i$ un recouvrement de M où tous les U_i sont à la fois des ouverts intrinsèques de M et des variétés de type quasi-local de dimension n. Alors, M est une variété de même type et de même dimension.

Preuve : Immédiat.

8. Soit $f : N \to M$ une bijection locale et M une variété de type quasi-local de dimension n alors N est aussi une variété de même type et de même dimension.

Preuve : Résulte des propositions 1 et 4 du n°2.

§2. Exemples.

N°1. En topologie et géométrie différentielle.

0. Afin d'étudier les bijections locales dans les modèles de la topologie et de la géométrie différentielle, nous allons nous placer, plus généralement, dans des sites topologiques d'un certain type. Plus précisément :

Soit $\mathcal{T}$ un site topologique (voir définition au chapitre III, §2, n°1) tel que le foncteur Spec : $\mathcal{T} \to \mathcal{T}op$ préserve les produits finis (évidemment cette hypothèse n'est pas satisfaite par les sites de la géométrie algébrique). On notera $\mathcal{E}$ son topos de faisceaux.

1. Soit $f : X \to Y$ une flèche entre objets représentables. Alors, si SpecX et SpecY sont séparés, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est loc.bijective dans $\mathcal{E}$,

ii) f est loc.inversible dans $\mathcal{E}$ (voir définition au chapitre III, §1, n°3,1),

iii) Pour tout point p de SpecX, il existe deux voisinages ouverts V de p dans SpecX et W de $\Gamma f(p)$ dans SpecY tels que $\Gamma f(V) \subset W$ et la restriction de f à $EV \to EW$ est un isomorphisme (où, rappellons le, $EV(Z) = \{Z \to X / \Gamma Z \to \Gamma X \text{ factorise } V \rightarrowtail \Gamma X\}$.

Preuve : (ii)$\Longrightarrow$(i) : Déjà montré au §1, n°1,3.

(i)$\Longrightarrow$(ii) : Résulte de la proposition 11 du §1, n°2, de ce chapitre et des propositions 7 et 8 du chapitre III, §3, n°1.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) : Il suffit d'appliquer la proposition 1 du chapitre III, §4, n°2 et la proposition 4 du chapitre III, §3, n°3.

(iii)$\Longrightarrow$(i) : On utilise la proposition 10 du §1, n°2, en remarquant que d'une famille d'objets (X_i) de $\mathcal{E}$ indexée par un ensemble (externe) I on peut en faire une famille d'objets de $\mathcal{E}$ indexée par un objet de $\mathcal{E}$ (i.e. $\coprod_{i\in I} X_i \to \coprod_{i\in I} 1$).

2. (Corollaire "en topologie"). Soit $f : X \to Y$ une application continue entre espaces topologiques séparés, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) f est loc.bijective dans $\mathbb{T}$op (voir définition de ce topos au chapitre 0, §2)

ii) f est loc.inversible dans $\mathbb{T}$op

iii) f est un homéomorphisme local (ordinaire).

3. (Corollaire "en géométrie différentielle"). Soit $h : A \to B$ un homéomorphisme entre anneaux lisses de type fini, alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

i) $h^{op} : B^{op} \to A^{op}$ est loc.bij. dans $\mathbb{D}$ (voir définition de ce topos au chapitre 0, §2)

ii) $h^{op} : B^{op} \to A^{op}$ est loc.inversible dans $\mathbb{D}$,

iii) Pour tout point p de B il existe des voisinages ouverts V de p dans SpecB, et W de Spech(p) dans SpecA tel que $\mathrm{Spech}(V) \subset W$ et la restriction $A_W \to B_V$ est un isomorphisme.

Preuve : Voir aussi la caractérisation du foncteur E dans $\mathbb{D}$ au chapitre II, §2, n°2,4,b.

4. Supposons maintenant, en plus, que la classe $\mathcal{U}$, dont est muni $\mathcal{T}$, est formée uniquement de monomorphismes. Soit $f : X \to Y$ une flèche entre objets représentables telle que SpecY soit séparé, alors :

f est un fibré loc.trivial dans $\mathcal{E}$ ssi, il existe une famille couvrante $(Y_i \overset{u_i}{\rightarrowtail} Y)$ et une famille d'objets représentables F_i telles que $Y_i \underset{Y}{\times} X \simeq Y_i \times F_i$ dans $\mathcal{E}$.

Preuve : y et y' étant des variables de sorte Y, notons R(y,y') la formule $\exists\gamma : f^{-1}\{y\} \to f^{-1}\{y'\}[\gamma \text{ bij.} \wedge (y = y' \to \gamma = \mathrm{Id})]$. Alors, si f est un fibré loc.trivial dans $\mathcal{E}$ on doit avoir : $\neg\mathrm{Diag}\,Y \cup \mathrm{Val}(R(y,y') \; ; \; (y,y')) = Y \times Y$, où Diag_Y désigne la diagonale de Y. Donc, il existe une famille (Q_i) de sous-objets de $Y \times Y$ appartenant à $\mathcal{U}$ telle que $\mathrm{Diag}_Y \subset \bigcup_i Q_i \subset \mathrm{Val}(R(y,y');(y,y'))$ (on procède comme dans la proposition 4 du chapitre III, §2, n°3). Mais, dans ce cas, comme pour chaque indice i, $Q_i \subset \mathrm{Val}(R(y,y') \; ; \; (y,y'))$, il existe aussi une famille couvrante $(Q_{ij} \rightarrowtail Q_i)$ et des isomorphismes $\gamma_{ij} : \pi_{ij}^{*}X \to \pi_{ij}^{\prime *}X$ dans $\mathcal{E}/Q_{ij}$ tels que la flèche

$\delta^*_{ij}\gamma_{ij} : \delta^*_{ij}\pi^*_{ij}X \to \delta^*_{ij}\pi'^*_{ij}X$ s'identifie à l'identité. En notant π_{ij} (resp. π'_{ij}) le composé $Q_{ij} \rightarrowtail Q_i \rightarrowtail Y \times Y \to Y$, où $Y \times Y \to Y$ désigne la première (resp. la seconde) projection, et $\delta_{ij} : Q'_{ij} \rightarrowtail Q_{ij}$ est l'égalisateur des deux flèches π_{ij} et π'_{ij}. Comme on a $\mathrm{Diag}_{\Gamma Y} \subset \bigcup_{ij} \Gamma Q_{ij}$ et que le foncteur Spec : $\mathcal{T} \to \mathcal{C}\mathrm{op}$ préserve les produits, alors pour tout point p de SpecY il existe un sous-objet Q de Y, appartenant à $\mathcal{U}$ tel que $p \in \Gamma Q$ et $Q \times Q$ est contenu dans l'un des Q_{ij}. Par suite, il existe un isomorphisme $\gamma : Q \times f^{-1}Q \to f^{-1}Q \times Q$ rendant les deux diagrammes suivants commutatifs :

$$\begin{tikzcd} Q \times f^{-1}Q \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\mathrm{Id} \times f"'] & & f^{-1}Q \times Q \arrow[dl, "f \times \mathrm{Id}"] \\ & Q \times Q & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & f^{-1}Q \arrow[dl, "(f,\mathrm{Id})"'] \arrow[dr, "(\mathrm{Id},f)"] & \\ Q \times f^{-1}Q \arrow[rr, "\gamma"] & & f^{-1}Q \times Q \end{tikzcd}$$

Il suffit alors de faire un changement de base le long de la flèche $(\mathrm{Id},p) : Q \to Q \times Q$ pour obtenir un isomorphisme entre $Q \times f^{-1}\{p\}$ et $f^{-1}Q$ au-dessus de Q. Les sous-objets Q recouvrant Y, lorsque $p \in$ SpecY varie, on voit que f vérifie la condition cherchée.

Réciproquement, il suffit d'utiliser les propositions 2 et 7 du §1, n°3.

5. (Corollaire "en topologie"). Soit $f : X \to Y$ une application continue (ordinaire) telle que Y soit séparé. Alors, f est un fibré loc.trivial dans $\mathbb{T}\mathrm{op}$ ssi f est un fibré loc.trivial (ordinaire).

6. (Corollaire "en géométrie différentielle"). Soient $h : A \to B$ un homomorphisme entre anneaux lisses de type fini et f = Spech : SpecB → SpecA. Alors, $h^{op} : B^{op} \to A^{op}$ est un fibré loc.trivial dans le topos $\mathbb{D}$ ssi il existe un recouvrement (U_i) de SpecA et des anneaux lisses de type fini C_i tels que $B_{f^{-1}U_i} \simeq A_{U_i} \otimes C_i$ au-dessous de A_{U_i}.

N°2. En géométrie algébrique.

0. Nous allons tout d'abord nous intéresser au "théorème de la bijection locale" (et non "d'inversion locale") dans les différents topos de la géométrie algébrique. Cela nous permettra alors, dans un deuxième temps, de caractériser plus généralement les bijections locales entre objets représentables dans le topos étale et le topos "plat".

1. Décomposons le "théorème de la bijection locale" en deux parties. Tout d'abord :

Soit $\mathcal{E}$ un topos de k-algèbre où k désigne un anneau commutatif unitaire, et R son anneau canonique (i.e. $R = k[X]^{op}$). Alors, R satisfait, pour chaque entier n, la formule suivante :

$$\forall f : R^n \to R^n \quad \forall x_0 \in R^n \quad (\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0 \to f \text{ est loc.}\underline{\text{injectif}} \text{ en } x_0).$$

Preuve : La démonstration que nous allons faire est purement intuitionniste. La seule chose que nous utilisons est que R est un corps de fraction qui est un anneau local (voir chapitre I, §1, n°2) de type ligne (voir chapitre I, §2, n°2) et de Fermat (voir chapitre I, §3, n°2).

Soit $f : R^n \to R^n$ une application quelconque et x_0 un élément de R^n tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0$. Comme R est un anneau de Fermat, il existe une application $g : R^n \times R^n \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ telle que :

a) $\forall x,x' \in R^n \quad (fx' - fx = g(x,x').(x'-x))$

b) $\forall x \in R^n \quad (g(x,x) = (\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x))_{ij})$

(voir chapitre I, §3, n°1,6). Or, si det g(x,x') est inversible, g(x,x') est une matrice inversible (voir chapitre I, §1, n°1) donc on a nécessairement l'implication $(fx' = fx \to x' = x)$. D'autre part l'ensemble $U = \{(x,x') \in R^n \times R^n / \det g(x,x') \text{ inversible}\}$ est un ouvert de $R^n \times R^n$ car c'est l'image réciproque de l'ensemble des inversibles de R, par l'application $(x,x') \mapsto \det g(x,x')$. Enfin $(x_0,x_0) \in U$ car $\det g(x_0,x_0)$ qui est égal à $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0)$ (par le (b)), est inversible puisque R est un corps de fraction. Donc U est un voisinage de (x_0,x_0). Finalement f est loc.injective en x_0 car, comme nous l'avons vu, $\{(x,x') \in R^n \times R^n / fx' = fx \to x' = x\}$ contenant U est lui-même un voisinage de (x_0,x_0).

2. Voici maintenant la deuxième partie du théorème (montrée dans [34]) :

Soit $\mathcal{E}$ l'un des quatres topos $\mathbb{E}t_k$, $\mathbb{E}t_k^{(pf)}$, $\mathbb{P}\ell_k$ et $\mathbb{P}\ell_k^{(pf)}$ (définis au chapitre 0, §2) où k est toujours un anneau commutatif unitaire quelconque. Alors, l'anneau canonique R de $\mathcal{E}$ satisfait, pour chaque entier n, la formule (BL_n) (voir §1, n°4) suivante :

$$\forall f : R^n \to R^n \quad \forall x_0 \in R^n \quad (\tfrac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0 \to f \text{ est loc.}\underline{\text{bijective}} \text{ en } x_0).$$

<u>Preuve</u> : a) Il nous reste donc à montrer la "locale" surjectivité. Tout d'abord, comme on l'a signalé plusieurs fois, puisque pour toute k-algèbre A, $\mathcal{E}/A^{op}$ est lui-même un topos de A-algèbre, il suffit de montrer que : Pour toute flèche $f : R^n \to R^n$ et toute section globale $x_0 : 1 \to R^n$ si $\mathcal{E} \models \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \neq 0$ alors $\mathcal{E} \models$ "f est loc.surj. en x_0". D'autre part, en utilisant une des remarques signalées dans la preuve de la proposition précédente, il nous suffit de montrer que, moyennant la présence de la fonction $g : R^n \times R^n \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ on a :

$$\mathcal{E} \models \forall y \in R^n \; (y \neq fx_0 \vee \exists x \in R^n \; [fx = y \wedge \det g(x,x_0) \text{ inversible}])$$

car "$\det g(x,x_0)$ inversible $\to (fx = fx_0 \to x = x_0)$". Ou encore, puisque très généralement on a $\bigvee_i \neg P_i \to \neg \bigwedge_i P_i$ et que "x inversible $\to x \neq 0$",

$$\mathcal{E} \models \forall y \in R^n (\bigvee_{i=1}^{n} (y_i - fx_0 \text{ inversible}) \vee \exists x \in R^n \; [fx = y \wedge \det f(x,x_0) \text{ inversible}]).$$

Or cette dernière formule est <u>cohérente</u> (voir définition dans [27]). Il nous reste donc à formuler des hypothèses elles-même cohérentes pour n'avoir à faire la preuve que <u>dans les ensembles</u> (voir [27]).

b) Pour commencer, on sait que R dans les topos de l'hypothèse, est un anneau strictement hensélien (voir [19])cette dernière propriété étant elle-même cohérente . D'autre part comme $\mathrm{Hom}(R^n,R^n) \simeq k[x_1,\dots,x_n]^n$ et $\mathrm{Hom}(1,R^n) \simeq k^n$, les flèches f et g sont, en fait, des fonctions polynomiales à coefficients dans R et les dérivées partielles $\partial f_i/\partial x_j$ peuvent s'écrire uniquement à l'aide des coefficients des f_i (il n'est donc plus nécessaire de supposer que R est de type ligne ou de Fermat qui sont des propriétés non-cohérentes). Quant à g il suffit de signaler les équations qui le lient à f. Finalement les hypothèses peuvent se formuler ainsi : On suppose qu'on a un anneau R strictement hensélien, $a = (a_1,\dots,a_n) : 1 \to R^n$ une section globale, $(f_i)_{i\leq n}$ une famille de polynômes de $R[\vec{X}]$ où $\vec{X} = (X_1,\dots,X_n)$ et $(g_{ij})_{i,j\leq n}$ une autre famille de polynômes, telles que :

$$f_i\vec{Y} - f_i\vec{X} = \sum_{j=1}^{n} g_{ij}(\vec{X},\vec{Y})(Y_j - X_j) \qquad i=1,\dots,n$$

et

$$\frac{\partial f_i}{\partial X_j}(\vec{X}) = g_{ij}(\vec{X},\vec{X}) \qquad i,j=1,\dots,n$$

Enfin, on suppose évidemment que $\det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))$ est inversible. Comme nous l'avons dit, toutes ces hypothèses sont bien cohérentes.

c) Il nous reste donc à montrer que le topos $\mathbb{E}$ns satisfait la formule (que l'on désignera par F pour simplifier) qui a été énoncée à la fin du (a). Notons alors k le corps résiduel de l'anneau strictement hensélien (donc local) R, $\bar{x}$ la classe d'équivalence dans k d'un élément quelconque x de R, de même que $\bar{P}(\vec{X})$ l'image de $P(\vec{X})$ par l'homomorphisme $R[\vec{X}] \to k[\vec{X}]$. Alors, la formule F précédente peut encore s'écrire :

$$\forall y \in R^n(\bigvee_{i=1}^{n}(\bar{y}_i - \bar{f}_i(\bar{a}) \neq 0) \vee \exists x \in R^n[fx = y \wedge \det \bar{g}(\bar{x},\bar{a}) \neq 0])$$

ou encore, en utilisant la logique booléenne de $\mathbb{E}$ns,

$$\forall y \in R^n(\bar{y} = \bar{f}(\bar{a}) \to \exists x \in R^n[fx = y \wedge \det \bar{g}(\bar{x},\bar{a}) \neq 0]).$$

Pour la montrer, utilisons la propriété classique suivante des anneaux henséliens (donnée, par exemple, dans [28]) :

- Soit $P_1, \ldots, P_n \in R[X_1,\ldots,X_n]$, si il existe $a = (a_1,\ldots,a_n) \in k^n$ tel que $\bar{P}_i(a) = 0$, $i=1,\ldots,n$ et $\det((\partial\bar{P}_i/\partial X_j)(a)) \neq 0$, alors il existe $b \in R^n$ tel que $\bar{b} = a$ et $P_i(b) = 0$, $i=1,\ldots,n$.

- Il nous suffit donc ici de poser $P_i(\vec{X}) = y_i - f_i(\vec{X})$, pour en déduire l'existence d'un élément x de R^n tel que $f_i(x) = y_i$, $i=1,\ldots,n$ et $\bar{x} = \bar{a}$ puisque $\det(\frac{\partial f_j}{\partial x_j}(\bar{a})) \neq 0$. Mais alors, on a : $\det \bar{g}(\bar{x},\bar{a}) = \det \bar{g}(\bar{a},\bar{a}) = \det(\frac{\partial \bar{f}_j}{\partial x_j}(\bar{a}))$, ce dernier étant différent de zéro par hypothèse, ce qui achève bien de prouver que $\mathbb{E}$ns $\models$ F.

3. Par contre, dans le cas d'un corps k de caractéristique nulle, l'anneau canonique R du topos $\mathbb{Z}ar_k$ (voir chapitre 0, §2) ne satisfait pas la formulè (BL_n) de bijection locale (voir §1, n°4).

Preuve : Montrons le pour n=1. Soit $f : R \to R$ une flèche (c'est-à-dire un polynôme à coefficients dans k) et $x_o : 1 \to R$ une section globale (donc un élément de k) tel que $\mathbb{Z}ar_k \models f'(x_o) \neq 0$ (c'est-à-dire, tout simplement, tel que $f'(x_0) \neq 0$ puisque k est un corps). Alors, si $\mathbb{Z}ar_k$ satisfait la formule de locale surjectivité en x_0, cela signifie qu'il existe, dans un voisinage de Zariski de fx_0, une section rationnelle s de f telle que $s(fx_0) = x_0$. Or, comme nous l'avons déjà dit, si on prend pour f le polynôme X^2, il vérifie les hypothèses au point 1 et cependant il ne peut admettre de section rationnelle, même localement.

4. Une conséquence importante du théorème 2 va être la caractérisation des bijections locales dans les topos étales et plats (déjà montrée dans [34]) :

k désignant un anneau commutatif unitaire, soit $A \to B$ un k-homomorphism entre k-algèbres de présentation finie. Alors, si B est une A-algèbre étale, la flèche $B^{op} \to A^{op}$ est localement bijective dans les topos de la proposition 2.

Preuve : a) Montrons le tout d'abord pour les algèbres étales standards (voir définition dans [35]). Rappellons qu'une A-algèbre C est appellée étale standard si elle est de la forme $B[b^{-1}]$ où $B = A[X]/(P)$ (P désignant un polynôme quelconque) et où b est un élément de B tel que $P'(x)$ soit inversible dans $B[b^{-1}]$ (en notant x l'image de X dans $B[b^{-1}]$).

A étant supposé de présentation finie, c'est un quotient de $k[X_1,\dots,X_n]$ donc $A^{op} \subset R^n$ et $A[X]^{op} = A^{op} \times R \subset R^{n+1}$ (car $A[X] = A \underset{k}{\otimes} k[X]$). D'autre part, à tout polynôme P de A[X] correspond une flèche $A^{op} \times R \to R$ restriction d'une flèche (notée encore) $P : R^{n+1} \to R$. On voit alors qu'on a les produits fibrés suivant dans le topos.

$$\begin{tikzcd}
B[P'(x)^{-1}]^{op} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & B^{op} \arrow[r, tail] \arrow[d, tail] & A[X]^{op} \arrow[r] \arrow[d, tail] & A^{op} \arrow[d, tail] \\
\frac{\partial^{-1} P}{\partial x_{n+1}}(\mathrm{Inv}\, R) \cap P^{-1}\{0\} \arrow[r, tail] & P^{-1}\{0\} \arrow[r, tail] & R^{n+1} \arrow[r, "\mathrm{proj}"'] & R^{n}
\end{tikzcd}$$

où B et x sont comme précédemment. Par suite, la flèche horizontale inférieure étant loc.bijective (par la prop. 2 et le §1, n°4, 4) il en est de même de la flèche horizontale supérieure. Enfin, pour un $b \in B$ du type précédent, comme on a la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ B[b^{-1}] & & B[P'(x)^{-1}] \arrow[ll, dashed] \end{tikzcd}$$

et que $B[P'(x)^{-1}]^{op} \rightarrowtail B^{op}$ est un ouvert intrinsèque, $B[b^{-1}]^{op} \rightarrowtail B[P'(x)^{-1}]^{op}$ en est un aussi et par composition, la flèche canonique $C^{op} \to A^{op}$ est local. bijective.

b) Revenons maintenant au cas général. Comme tout morphisme étale est localement étale standard (voir par exemple [28]) il suffit d'appliquer la proposition 10 du §1, n°2 sur le recollement des applications loc.bijectives, pour achever la preuve de notre proposition.

5. k étant maintenant un corps algébriquement clos, soit $h : B \to A$ un k-homomorphisme entre k-algèbres de type fini. Notons $X = A^{op}$, $Y = B^{op}$ et $f = h^{op}$ leurs objets ou flèche duaux dans un topos $\mathcal{E}$ de k-algèbres de type fini. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) h est non-ramifié (voir définition, par exemple, dans [28])

ii) $X \to X \underset{Y}{\times} X$ est un ouvert intrinsèque dans $\mathcal{E}$

iii) La formule suivante est satisfaite dans $\mathcal{E}$:

$$\forall x \in X \; (\neg\neg\{x\} \to \neg\neg\{fx\} \text{ est injectif})$$

Preuve : (i) $\Leftrightarrow$(ii) car ces deux propriétés sont équivalentes au fait que $\mathrm{Spm}A \to \mathrm{Spm}(A \underset{B}{\otimes} A)$ est une immersion ouverte [la première équivalence est connue pour les morphismes non-ramifiés) (voir, par exemple, [28]) quant à la seconde, elle résulte du chapitre III, §2, n°5, 3].

L'implication (ii)$\Rightarrow$(iii) se vérifiant facilement "intuitionnistement" il reste à vérifier l'implication (iii)$\Rightarrow$(ii). Remarquons tout d'abord que dans la situation présente, comme A est de type fini, son objet dual X est un sous-objet d'un certain R^n. Remarquons aussi que $X \underset{Y}{\times} X$ est représentable par l'objet dual d'une k-algèbre de type fini. Nous pouvons maintenant raisonner entièrement de façon intuitionniste. Soient x_0 un élément de X et $g : X \underset{Y}{\times} X \to R^n$ l'application définie par $g(x,x') = x - x'$. Il est clair que l'hypothèse (iii) entraîne que $\neg\neg\{(x_0,x_0)\} \subset g^{-1}\{0\}$. Par suite, on peut appliquer la proposition 4 du chapitre III, §4, n°2. $g^{-1}\{0\}$ est donc un voisinage de (x_0,x_0) pour tout point x_0 de X, ce qui signifie qu'on a la condition (ii).

6. Plaçons-nous sous les hypothèses de la proposition 5 précédente. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) h est étale,

ii) $f : X \to Y$ est infinitésimalement inversible dans $\mathcal{E}$.

Preuve : (ii) $\Rightarrow$(i) : Par la proposition 5 on sait que h est non-ramifié. Soit alors $m : 1 \to X$ une section globale (i.e. un élément $\mathfrak{m}$ de SpmA). Comme f est infinitésimalement inversible dans $\mathcal{E}$ la flèche canonique $\neg\neg\{m\} \longrightarrow \neg\neg\{fm\}$ est un isomorphisme. Mais, par la proposition 4 du chapitre II, §3, n°3, cela entraîne que le k-homomorphisme canonique:

$\hat{B}_{\mathfrak{n}} \to \hat{A}_{\mathfrak{m}}$ est un isomorphisme, où $\mathfrak{n}$ est l'idéal maximal $h^{-1}(\mathfrak{m})$. Par suite, h, qui est non-ramifié est étale au point $\mathfrak{m}$, pour tout $\mathfrak{m}$ de SpecA (voir, par exemple, [30]) il est donc étale (tout court).

(i) $\Rightarrow$(ii). Nous avons vu dans la proposition 4 que si h était étale, la flèche $f : X \to Y$ correspondante était une bijection locale dans les topos de la proposition 2. f est donc aussi, à fortiori, inf.inversible (voir proposition 3 du §1, n°1) dans les mêmes topos. Or la négation (et donc aussi la double négation) est la même dans tous les topos de k-algèbres de type fini où k est algébriquement clos (car Γ et E ne dépendent pas de la topologie du site sous-jacent au topos), par suite f est encore inf.inversible dans tous ces topos.

7. Plaçons-nous pour finir dans un des deux topos $\mathbb{E}t_k^{(pf)}$ ou $\mathbb{P}\ell_k^{(pf)}$ où k est un corps algébriquement clos, et soit $h : A \to B$ un k-homomorphisme entre k-algèbres de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) h est étale

ii) $h^{op} : B^{op} \to A^{op}$ est infinitésimalement inversible dans $\mathcal{E}$,

iii) $h^{op} : B^{op} \to A^{op}$ est localement bijective.

Preuve : L'équivalence (i)$\Leftrightarrow$(ii) ayant été montré au 6, il nous reste à montrer que (i) $\Rightarrow$(iii) et (iii) $\Rightarrow$(ii), mais ces deux dernières implications ont déjà été établies resp. au 4 et au §1, n°1, 3.

APPENDICE : TOPOS C^∞

§1. Anneaux C^∞.

N°0. L'essentiel de ce qui sera abordé dans cet Appendice est dûe à E. Dubuc (voir [10], [11] et [12]). Son principal but est de traiter la gémétrie différentielle avec les mêmes méthodes que ceux de la géométrie algébrique, afin de construire un modèle pour la géometrie différentielle synthétique. Ce modèle est d'ailleurs l'un des exemples de base qui sera étudié tout au long des quatre chapitres de ce travail.

N°1. Anneaux C^∞.

0. Nous allons décrire une structure qui joue, pour la géométrie différentielle, le même rôle que celle d'anneau commutatif unitaire pour la géométrie algébrique. Pour cela, remarquons qu'un anneau commutatif unitaire peut être vu comme : un ensemble A muni, pour chaque polynôme P de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$, d'une loi de composition n-aire $\bar{P} : A^n \to A$; ces lois étant liées entre elles par autant d'axiomes de la forme :

$$\bar{P}(\bar{Q}_1(a_1,\dots,a_n),\dots,\bar{Q}_k(a_1,\dots,a_n)) = \bar{R}(a_1,\dots,a_n) \text{ où } a_1,\dots,a_n \in A$$

qu'il y a d'équations polynomiales du type $P(Q_1(X_1,\dots,X_n),\dots,Q_k(X_1,\dots,X_n))=$ $= R(X_1,\dots,X_n)$. [On retrouve, bien entendu, l'existence de l'addition et de la multiplication pour A, en considérant les polynômes X + Y et X.Y].

Fort de cette présentation, nous pouvons maintenant donner la définition d'anneaux C^∞ suivante due à Lawvere.

1. Un anneau C^∞ est la donnée d'un ensemble A muni, pour chaque application C^∞ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (n étant un entier variable) d'une loi de composition n-aire $\bar{f} : A^n \to A$, ces lois étant liées entre elles par autant d'axiomes de la forme :

$$\bar{f}(\bar{g}_1(a_1,\ldots,a_n),\ldots,\bar{g}_k(a_1,\ldots,a_n)) = \bar{h}(a_1,\ldots,a_n) \text{ où } a_1,\ldots,a_n \in A$$

qu'il y a d'équations du type $f(g_1(x_1,\ldots,x_n),\ldots,g_k(x_1,\ldots,x_n)) =$ $= h(x_1,\ldots,x_n)$ où $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}$.

- Un morphisme entre anneaux C^∞ A et B est la donnée d'une application $h : A \to B$ qui fait commuter tous les diagrammes du type :

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "h^n"] \arrow[d, "\bar{f}"'] & B^n \arrow[d, "\bar{f}"] \\ A \arrow[r, "h"] & B \end{tikzcd}$$

où $\bar{f}$ est la loi n-aire de A et B correspondant à l'application C^∞ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

2. Remarque : Comme précédemment on voit facilement qu'un anneau C^∞ peut être canoniquement muni d'une structure des $\mathbb{R}$-algèbre et qu'un morphisme d'anneaux C^∞ est aussi un homomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres.

3. Avant de passer aux exemples disons tout de suite que la proposition suivante, qui peut paraître étonnante à première vue, va fournir une multitude d'exemples, à bon marché, d'anneaux C^∞.

Proposition : Soit A un anneau C^∞ et I un idéal (au sens usuel) de cet anneau. Alors A/I est muni d'une et une seule structure d'anneau C^∞ telle que l'application canonique $A \to A/I$ soit un morphisme C^∞.

Preuve : Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, il faut montrer qu'on a la factorisation :

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ (A/I)^n \arrow[r, dotted] & A/I \end{tikzcd}$$

Pour cela on utilise le lemme de Hadamard (à n variables).

<u>Lemme</u>. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Alors il existe n fonctions $g_1,\dots,g_n \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n},\mathbb{R})$ telles que :

$$fx - fy = \sum_{i=1}^{n} g_i(x,y).(x_i-y_i).$$

En effet, soit $a = (a_1,\dots,a_n)$ et $a' = (a'_1,\dots,a'_n)$ deux éléments de A^n tels que, pour tout $1 \leq i \leq n$, $a_i - a'_i \in I$ alors $\bar{f}a - \bar{f}a' = \sum_{i=1}^{n} \bar{g}_i(a,a').(a_i-a'_i) \in I$ car l'équation entre fonctions C^∞, donnée par le lemme de Hadamard, devient ici un axiome des anneaux C^∞ .

<u>4</u>. <u>Exemples</u> : 1) L'anneau C^∞ libre à n générateurs est l'anneau $C^\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ que l'on notera pour simplifier $C^\infty\mathbb{R}^n$ ou encore $\mathbb{R}\{X_1,\dots,X_n\}$ par analogie avec l'anneau $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ qui est l'anneau libre à n générateurs [Dans le cas présent X_i est la ième projection $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$].

2) Plus généralement si M est une variété C^∞, l'anneau $C^\infty M = C^\infty(M,\mathbb{R})$ est C^∞.

3) Si x est un point d'une variété M, l'anneau $C^\infty_x(M,\mathbb{R})$ [que l'on notera simplement $C^\infty_x M$] des germes, en x, de fonctions lisses de M dans $\mathbb{R}$, est encore un anneau C^∞.

4) La $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[\varepsilon] = \mathbb{R}[X]/(X^2)$ des nombres duaux est un anneau C^∞ [On montre, plus généralement, dans [10] que toute algèbre de Weil est un anneau C^∞].

5) La $\mathbb{R}$-algèbre des séries formelles à n indéterminées $\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]]$ est enfin un anneau C^∞.

<u>Preuve</u> : Les deux premiers exemples sont immédiats, quant aux trois derniers il résultent de la proposition précédente car :

a) $C^\infty_x M = C^\infty M/I^\omega(x)$ où $I^\omega(x) = \{f \in C^\infty M / f_x = 0\}$, en notant f_x le germe de la fonction f au point x,

b) $\mathbb{R}[\varepsilon] = C^\infty\mathbb{R}/(Id^2)$ (On utilise encore le lemme Hadamard),

c) $\mathbb{R}[[X_1,\dots,X_n]] = C^\infty\mathbb{R}^n/I^\infty$ où $I^\infty = \{f \in C^\infty\mathbb{R}^n / \forall\alpha \in \mathbb{N}^n\ (\partial^\alpha f(0) = 0)\}$

en notant $\partial^\alpha f = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} f$ où $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. [Ceci est une conséquence du théorème de Borel (voir par exemple [38]) .

5. Un anneau C^∞ A est dit de type fini, s'il existe un entier n et un idéal I de $C^\infty \mathbb{R}^n$ pour lesquels on ait un isomorphisme :

$$A \simeq C^\infty \mathbb{R}^n/I$$

Notons $\mathcal{B}'$ la catégorie des anneaux C^∞ de type fini.

6. Avant d'étudier les propriétés de cette catégorie donnons une autre présentation de la duale de $\mathcal{B}'$. Soit donc $\mathcal{B}'^*$ la catégorie dont :

- les objets, sont des couples (n,I) où n est un entier et I un idéal de $C^\infty \mathbb{R}^n$,
- les flèches $(n,I) \to (m,J)$, sont des classes d'équivalence d'applications C^∞ $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ telles que :

$$\forall \phi \in C^\infty \mathbb{R}^m \ (\phi \in J \Rightarrow \phi \circ f \in I)$$

pour la relation d'équivalence suivante :

$$f \sim g \quad \text{ssi } \mathrm{proj}_i \circ f - \mathrm{proj}_i \circ g \in I, \text{ pour tout } i \leq n$$

où $\mathrm{proj}_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ désigne la ième projection canonique.

L'équivalence $\mathcal{B}'^* \to \mathcal{B}'^{op}$ est le foncteur défini de façon évidente sur les objets et qui, à une flèche $\overline{f} : (n,I) \to (m,J)$ de $\mathcal{B}'^*$ fait correspondre l'unique factorisation

$$\begin{tikzcd} C^\infty \mathbb{R}^m \arrow[r, "f^*"] \arrow[d] & C^\infty \mathbb{R}^n \arrow[d] \\ C^\infty \mathbb{R}^m/J \arrow[r, dotted] & C^\infty \mathbb{R}^n/I \end{tikzcd}$$

[En notant f^* l'application "composition par f" : $g \mapsto g \circ f$]

Preuve : On utilise la propriété universelle de $C^\infty \mathbb{R}^m$.

7. Remarque : Dans la suite, nous raisonnons plutôt avec la catégorie $\mathcal{D}'$ qu'avec $\mathcal{D}'^*$ car il arrive parfois qu'on utilise des anneaux C^∞ de type fini qui ne soient pas sous la forme canonique (penser, par exemple aux anneaux $\mathbb{R}[\varepsilon]$ où $\mathbb{R}[[X]]$ mais nous en verrons d'autres).

8. La catégorie $\mathcal{D}'$ est à limites inductives finies. Plus précisément les limites sont données comme suit :

a) objet initial : $C^\infty \mathbb{R}^0 \simeq \mathbb{R}$

b) Sommes finies (noté $\otimes'$ par analogie avec le cas des anneaux) :

$$C^\infty \mathbb{R}^n/I \otimes' C^\infty \mathbb{R}^m/J \simeq C^\infty \mathbb{R}^{n+m}/p^*I + q^*J$$

où $p : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ et $q : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ sont les projections et p^*I est l'idéal image de I par le morphisme $p^* : C^\infty \mathbb{R}^n \to C^\infty \mathbb{R}^m$ de "composition par p".

c) co-égalisateurs : $\text{coég}[f^*,g^* : C^\infty \mathbb{R}^n/I \rightrightarrows C^\infty \mathbb{R}^m/J] = C^\infty \mathbb{R}^m/K$ où K est l'idéal $J + (\text{proj}_1 \circ (f-g),\ldots,\text{proj}_n \circ (f-g))$

Preuve : On utilise la dualité précédente.

9. Une conséquence immédiate de la dualité 6 est la bijection suivante :

$$\mathcal{D}'(C^\infty \mathbb{R}^n/I,\mathbb{R}) \simeq \mathcal{D}^*((0,\{0\}),(n,I)) \simeq ZI,$$

où ZI désigne l'ensemble des "zéros" de I, c'est-à-dire l'ensemble des x de $\mathbb{R}^n$ dont l'image s'annule par toute fonction appartenant à I. C'est pourquoi nous pouvons appeller point d'un anneau C^∞ A un morphisme C^∞ de A dans l'objet initial $\mathbb{R}$ [Dans le cas algébrique ZI est l'ensemble des points de la variété algébrique définie par l'idéal I].

N°2. Idéaux de caractère local.

0. Nous verrons au §2 que les anneaux C^∞ de type fini ont de "mauvaises propriétés locales" (voir plus précisément le n°3, 2 du §2) c'est pourquoi il est préférable de se restreindre à une sous-classe de ceux-ci qui cependant est suffisamment générale pour contenir tous les exemples souhaitables. Cette sous-classe repose sur le concept d'idéal de caractère local que nous

allons étudier ici.

1. Munissons $C^\infty \mathbb{R}^n$ de la topologie initiale pour la famille des espaces discrets $C^\infty U$, où U parcourt les ouverts bornés de $\mathbb{R}^n$. Cette topologie a pour base de voisinages en $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$ les ensembles de la forme $V(f,U) = \{g \in C^\infty \mathbb{R}^n / g_U = f_U\}$ (où f_U désigne la restriction de la fonction f à l'ouvert U) $C^\infty \mathbb{R}^n$ muni de cette topologie devient un anneau topologique et même un anneau C^∞ topologique (c'est-à-dire que les lois de composition sont toutes continues).

2. f étant un élément de $C^\infty \mathbb{R}^n$, notons $Df = \mathbb{R}^n - Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n / fx \neq 0\}$. Df est clairement un ouvert. Soit maintenant (f_i) une famille d'éléments de $C^\infty \mathbb{R}^n$. On dit qu'elle est localement finie ssi la famille (Df_i) est localement finie. En fait :

Une famille (f_i) est localement finie ssi elle est sommable (pour la topologie envisagée ici). Dans ce cas $(\sum\limits_i f_i)(x) = (\sum\limits_{i \in J_x} f_i)(x)$ où $J_x = \{i / f_i x \neq 0\}$ (qui est toujours fini).

Preuve : a) Si (f_i) est sommable, soit V un voisinage d'un point x de $\mathbb{R}^n$ (on peut toujours le supposer borné) alors, par définition de la sommabilité, il existe une partie finie J de l'ensemble d'indices telle que, pour tout $j \notin J$, $\sum\limits_{i \in J} f_i$ et $\sum\limits_{i \in J \cup \{j\}} f_i$ ait même restriction à V. Par suite $(f_j)_V = 0$ et donc $\{i / Df_i \cap V \neq \emptyset\} \subset J$ qui est fini.

b) Réciproquement, soit $\sum f_i = f$ la fonction C^∞ définie par $fx = \sum\limits_{i \in J_x} f_i x$, et U un ouvert borné quelconque. Alors pour chaque $x \in \bar{U}$, il existe un voisinage ouvert V_x de ce point tel que l'ensemble $J'_x = \{i / Df_i \cap V_x \neq \emptyset\}$ soit fini. La famille (V_x) recouvrant $\bar{U}$ qui est compact, il existe donc un nombre fini de points $x_1, \dots, x_k$ tels que $\bar{U} \subset V_{x_1} \cup \dots \cup V_{x_k}$. Soit donc $J = J'_{x_1} \cup \dots \cup J'_{x_k}$. On vérifie alors facilement que J est la partie finie cherchée.

3. I étant un idéal de $C^\infty \mathbb{R}^n$, notons $\bar{I}$ son adhérence pour la topologie envisagée ici. Nous allons maintenant donner une série de critères plus commodes pour reconnaitre quand une fonction $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$ est ou non adhérente à

l'idéal I. En fait, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in ZI$ $(f_x \in I_x)$. (En notant I_x l'idéal, dans $C_x^\infty \mathbb{R}^n$, des germes de fonctions de I).

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $(f_x \in I_x)$.

(iii) Il existe un recouvrement ouvert (U_i) pour lequel $f_{U_i} \in I_{U_i}$, pour tout i (où I_U désigne l'idéal engendré, dans $C^\infty U$, par les restrictions à U des fonctions de I).

(iv) Il existe une partition de l'unité (ϕ_i) telle que $\phi_i.f \in I$, pour tout i.

(v) Il existe une famille (f_i) localement finie, de fonctions de I, telle que $f = \sum f_i$,

(iv) $f \in \bar{I}$.

<u>Preuve</u> : (i) $\Rightarrow$ (ii) : car pour tout $x \notin ZI$, $I_x = C_x^\infty \mathbb{R}^n$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) : car si $f_x \in I_x$, f_x ne dépend, en fait, que d'un nombre fini d'élémentsde I, par suite on peut trouver un voisinage ouvert V_x de x pour lequel $f_{V_x} \in I_{V_x}$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) : Soit (U_i) un recouvrement tel que $f_{U_i} \in I_{U_i}$, et soit (ϕ_α) une partition de l'unité plus fine que (U_i), alors $\overline{D\phi_\alpha} \subset U_{i(\alpha)}$. Or $f_{U_{i(\alpha)}} = \sum_j \lambda_j^\alpha.(g_j^\alpha)_{U_{i\alpha}}$ où $g_i^\alpha \in I$ et $\lambda_j^\alpha \in C^\infty U_{i(\alpha)}$. Considérons alors les fonctions $\mu_j^\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définies par :

$$\mu_j^\alpha(x) = \lambda_j^\alpha(x).\phi_\alpha(x) \text{ si } x \in U_{i\alpha}$$

$$\mu_j^\alpha(x) = 0 \qquad \text{sinon.}$$

On voit que $\mu_j^\alpha \in C^\infty \mathbb{R}^n$ (car μ_j^α est C^∞ sur $U_{i\alpha}$ et $\mathbb{R}^n - \overline{D\phi_\alpha}$ qui forment un recouvrement de $\mathbb{R}^n$) et $f.\phi_\alpha = \sum_j \mu_j^\alpha g_j^\alpha$ (il suffit de le vérifier sur $U_{i\alpha}$ et $\mathbb{R}^n - \overline{D\phi_\alpha}$), par suite $f.\phi_\alpha \in I$ pour tout α.

(iv) $\Rightarrow$ (v) : la famille $(\phi_i.f)$ est évidemment localement finie.

(v) $\Rightarrow$ (vi) : d'après le 2

(vi) $\Rightarrow$ (i) : il suffit d'écrire la définition de $f \in \bar{I}$ pour un voisinage de la forme $V(f,V)$ où V est un voisinage ouvert d'un élément de ZI.

4. Définition : On dira qu'un idéal I de $C^\infty \mathbb{R}^n$ est de caractère local s'il est fermé pour "notre" topologie (celle définie au 1).

Nous allons voir (au n°3) qu'il y a de très nombreux exemples d'idéaux de caractère local. Mais avant, donnons en une propriété essentielle :

5. (Théorème des zéros) : Si $I \subset C^\infty \mathbb{R}^n$ est un idéal de caractère local alors :

$$ZI = \emptyset \text{ ssi } I = C^\infty \mathbb{R}^n$$

Preuve : Si $ZI = \emptyset$ la formule $\forall x \in ZI\ (1_x \in I_x)$ est évidemment satisfaite, donc $1 \in I$. La réciproque est immédiate.

N°3. Exemples et contre-exemples d'idéaux de caractère local.

1. Une première série d'exemples est donnée par les idéaux fermés pour la topologie [dite de Whitney : voir par exemple [38]] suivante :

Elle a une base de voisinages à l'origine, formée des ensembles suivants :

$$W(K,\varepsilon,m) = \{f \in C^\infty \mathbb{R}^n / \forall x \in K\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ (|\alpha| < m \Rightarrow |\partial^\alpha f(x)| < \varepsilon)\}$$

(en notant $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ pour $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$) où K, ε et m parcourent respectivement, l'ensemble des parties compactes de $\mathbb{R}^n$, des réels strictement positifs et des entiers naturels.

Cela résulte du fait que la topologie de Whitney est moins fine que "notre" topologie (voir n°2,1). En effet, pour tout triplet (K,ε,m) du type précédent, on a $V(0,B) \subset W(K,\varepsilon,m)$ où 0 est la fonction nulle et B est une boule ouverte contenant K.

Dans ces exemples on peut faire rentrer les idéaux de la forme :

a) $I^\circ(F) = \{f \in C^\infty \mathbb{R}^n / f_F = 0\}$

b) $I^{\infty}(F) = \{f \in C^{\infty}\mathbb{R}^n / \forall\alpha \in \mathbb{N}^n (\partial^{\alpha} f_F = 0)\}$

où F parcourt l'ensemble des parties fermées de $\mathbb{R}^n$.

2. Une autre classe importante d'idéaux de caractère local est celle des idéaux de type fini.

Montrons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme. Si I et J sont deux idéaux de caractère local de $C^{\infty}\mathbb{R}^n$, il en est de même de I + J.

Preuve du lemme. Soit $f \in \overline{I+J}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$; $f_x \in (I+J)_x$. Ou encore $f_x = (g^x)_x + (h^x)_x$ pour un certain $g^x \in I$ et un certain $h^x \in J$. Dans ce cas, soit V_x un voisinage de x tel que $f_{V_x} = (g^x+h^x)_{V_x}$ et soit (ϕ_{α}) une partition de l'unité plus fine que (V_x), (c'est-à-dire $\overline{D\phi_{\alpha}} \subset V_{x(\alpha)}$). Posons maintenant $g = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}.g^{x(\alpha)}$ et $h = \sum_{\alpha} \phi_{\alpha}.h^{x(\alpha)}$. Comme $\phi_{\alpha}g^{x(\alpha)} \in I$ et $\phi_{\alpha}.h^{x(\alpha)} \in J$ alors $g \in I$ et $h \in J$ car I et J sont de caractère local. Mais $f = g+h$ car $\phi_{\alpha}.[f-(g^{x(\alpha)}+h^{x(\alpha)})] = 0$ sur $V_{x(\alpha)}$ et $\mathbb{R}^n - \overline{D\phi_{\alpha}}$ et de ce fait $\sum_{\alpha} \phi_{\alpha}.[f-(g^{x(\alpha)}+h^{x(\alpha)})] = 0$. Ainsi $f \in I + J$.

Preuve du 2 (suite) : il reste donc a prouver notre proposition pour les idéaux principaux. Soit I = (h) un tel idéal et $f \in \overline{I}$. Alors (par le n°2,3) il existe un recouvrement ouvert (U_i) de $\mathbb{R}^n$ tel que $f_{U_i} \in I_{U_i}$. Ainsi

$f_{U_i} = \lambda_i.h_{U_i}$ où $\lambda_i \in C^{\infty}U_i$. Soit (ϕ_{α}) une partition de l'unité plus fine que (U_i) et soit λ la fonction définie par $\lambda(x) = \sum_{\alpha\in J_x} \phi_{\alpha}(x).\lambda_{i(\alpha)}(x)$ avec $J_x = \{\alpha / x \in D\phi_{\alpha}\}$ (qui est un ensemble fini). Clairement λ est C^{∞}. De plus, pour tout x on a : $\lambda(x).h(x) = \sum_{\alpha\in J_x} \phi_{\alpha}(x).(\lambda_{i(\alpha)}(x).h(x)) = \sum_{\alpha\in J_x} \phi_{\alpha}(x).f(x) = f(x).\sum_{\alpha\in J_x} \phi_{\alpha}(x) = f(x)$. Ainsi f, qui est égal à $\lambda.h$ appartient à I, ce qui achève de prouver que I est de caractère local.

3. Remarque. Il ne faudrait pas croire que tout idéal de type fini est fermé pour la topologie de Whitney. En effet si $h \in C^\infty \mathbb{R}^n$ est plate en un point, (h) n'est pas fermé pour cette topologie.

4. Signalons, pour terminer comme exemples d'idéaux de caractère local, les idéaux de germes, c'est-à-dire les idéaux de la forme :

$$I^\omega(F) = \{f \in C^\infty \mathbb{R}^n / \forall x \in F(f_x = 0)\}$$

où F est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$.

5. Il serait faux de croire que tout idéal est de caractère local, comme le montrent les contre-exemples suivants :

a) L'idéal I des fonctions de $C^\infty \mathbb{R}^n$ à support compact,

b) L'idéal $I' = p^* I^\omega(0)$ où $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est la première projection.

Preuve : a) On a $ZI = \emptyset$ et pourtant $I \neq C^\infty \mathbb{R}^n$

b) En fait $f \in I'$ ssi il existe un voisinage V de zéro dans $\mathbb{R}$ tel que, $f_{V \times \mathbb{R}} = 0$. Pour trouver une fonction $f \notin I$ mais cependant telle que : pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f_{(x,y)} \in I'_{(x,y)}$ il suffit de considérer une fonction C^∞ valant exactement zéro sur l'ensemble : $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 . y^2 \leq 1\}$.

N°4. Anneaux lisses de type fini.

1. Définition. Nous dirons qu'un anneau C^∞ A est un anneau lisse de type fini s'il est isomorphe à un anneau C^∞ de la forme $C^\infty \mathbb{R}^n / I$ où I est un idéal de caractère local.

Un anneau lisse de type fini est donc un anneau C^∞ de type fini, la réciproque étant évidemment fausse (voir n°3,5).

2. Remarque. On pourrait définir plus généralement le concept d'anneau lisse, sans imposer qu'il soit de "type fini". C'est d'ailleurs ce que fait E. Dubuc sous le nom d'anneau ${}_\infty C^\infty$ (voir [12]). Il ne nous a pas semblé nécessaire ici, de rentrer dans de telles considérations générales, puisque les seuls anneaux lisses que nous aurons à considérer seront toujours de type fini (ils sont déjà fort nombreux).

3. Soit $\mathcal{D}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{D}'$ formée des anneaux lisses de type fini.

L'inclusion $\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{D}'$ admet un adjoint à gauche G.

Preuve : Si $A \simeq C^{\infty}\mathbb{R}^n/I \in |\mathcal{D}'|$ alors $GA \simeq C^{\infty}\mathbb{R}^n/\bar{I}$ où $\bar{I}$ est l'adhérence de I pour notre topologie (voir n°2,3).

4. Remarque. On a toujours $Z(\bar{I}) = ZI$.

Preuve : $Z\bar{I} \simeq \mathcal{D}'(C^{\infty}\mathbb{R}^n/\bar{I},\mathbb{R}) = \mathcal{D}(C^{\infty}\mathbb{R}^n/\bar{I},\mathbb{R}) \simeq \mathcal{D}'(C^{\infty}\mathbb{R}^n/I,\mathbb{R}) \simeq ZI$.

5. La catégorie $\mathcal{D}$ a des limites à droite finies. Plus précisément ces limites sont construites comme suit :

a) Objet initial : $C^{\infty}\mathbb{R}^{\circ} \simeq \mathbb{R}$

b) Sommes finies (notées $\otimes$) : $A \otimes B \simeq G\,(A \otimes' B)$. Concrètement

$$C^{\infty}\mathbb{R}^n/I \otimes C^{\infty}\mathbb{R}^m/J \simeq C^{\infty}\mathbb{R}^{n+m}/\overline{p^*I + q^*J}$$

où $p : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^n$ et $q : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ sont les projections

c) co-égalisateurs : ce sont les mêmes que dans $\mathcal{D}'$ (voir n°1,8).

Preuve : Le (c) résulte en fait du lemme du n°3,2. A part cela, cette proposition est une conséquence immédiate du 3 et du n°1,8.

6. Exemples. Grace au n°3 et à la preuve du n°1,4 on voit que les exemples (1) (3) (4) et (5) du n°1,4 sont des anneaux lisses de type fini. (Pour le (3), il suffit de remarquer que $C^{\infty}_x M \simeq C_x\mathbb{R}^m$ pour une variété M de dimension m). Nous allons nous intéresser maintenant à l'exemple (2) du n°1,4.

7. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ l'ensemble des zéros de p fonctions lisses $h_1,\dots,h_p \in C^{\infty}\mathbb{R}^n$ indépendantes (i.e. telles que la restriction de la fonction $(h_1,\dots,h_p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ à M soit une submersion). Alors l'application restriction

$$C^{\infty}\mathbb{R}^n/(h_1,\dots,h_k) \to C^{\infty}M$$

détermine un isomorphisme C^∞.

<u>Preuve</u> : 1) <u>Surjectivité</u> : Cela résultera du lemme suivant :

<u>Lemme</u>. Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$ et $f : F \to \mathbb{R}$ une application telle que, pour tout $x \in F$, il existe un voisinage V_x de x dans $\mathbb{R}^n$ et une fonction $g^x \in C^\infty V_x$ tels que $(g^x)_{F\cap V_x} = f_{F\cap V_x}$. Alors il existe une application $g \in C^\infty \mathbb{R}^n$ telle que $g_F = f$.

<u>Preuve du lemme</u> : On considère le recouvrement formé des V_x et de $\mathbb{R}^n - F$, puis on lui associe une partition de l'unité plus fine (ϕ_α). Enfin on définit g par $g = \sum_\alpha \phi_\alpha . g^{x(\alpha)}$ (car on peut toujours supposer les g^x partout définies).

2) <u>Injectivité</u> : Soit $f \in C^\infty \mathbb{R}^n$ tel que $f_M = 0$. Considérons un point a quelconque de M. Grâce au théorème d'inversion locale et au fait que $h = (h_1,\dots,h_p)$ est une submersion au point a, il existe une projection $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-p}$ pour laquelle l'application $H = (h,\pi) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p}$ soit un isomorphisme C^∞ au voisinage de a, c'est-à-dire qu'il existe deux voisinages V et W de a et Ha (qui est de la forme (0,b)) tels que la restriction $H : V \to W$ soit un isomorphisme C^∞, (on peut toujours supposer que W est un pavé, quitte à modifier V). Notons g l'application composée : $W \xrightarrow{H^{-1}} V \xrightarrow{f} \mathbb{R}$.
On a donc $g_{p^{-1}\{0\}\cap W} = 0$, en notant $p : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{n-p} \to \mathbb{R}^p$ la première projection.
Soit maintenant $y = (u,v)$ un élément quelconque de W. Notons $y' = (0,v)$. Comme W est un pavé y' est dans W et, d'après le lemme de Hadamard,

$gy - gy' = \sum_{i=1}^{p} \phi_i y . y_i$, pour une certaine famille de fonction (ϕ_i). Or $gy' = 0$ car $y' \in p^{-1}\{0\} \cap W$. Donc $gy = \sum_{i=1}^{p} \phi_i y . y_i$. Ainsi, pour un élément x quelconque de V, $f(x) = g \circ H(x) = \sum_i \phi_i \circ H(x).h_i(x)$. Donc f_a qui est égal à $(\sum_{i=1}^{p} \phi_i \circ H.h_i)_a$ appartient à l'idéal $(h_1,\dots,h_p)_a$, et ceci pour tout a de M. Donc f est dans $(h_1,\dots,h_p)$ (grâce au n°3,<u>2</u>).

<u>8</u>. Voici maintenant un corollaire de la proposition précédente, qui nous sera fort utile par la suite :

Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f une "fonction caractéristique" de U (i.e.

telle que $Df = U$). Alors, on a un isomorphisme :

$$C^\infty U \simeq C^\infty \mathbb{R}^{n+1}/(f \circ p.q - 1)$$

où $p : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ et $q : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ sont les projections canoniques.

Preuve : Posons $M = Z(f \circ p.q-1)$ et soit $\phi : U \to M$ l'application $x \mapsto (x,\frac{1}{fx})$. ϕ est un isomorphisme C^∞, donc $C^\infty U \simeq C^\infty M$. Or la famille formée de l'unique application $f \circ p.q - 1$ est indépendante, car sa matrice jacobienne au point $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, qui est : $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x).y,\ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x).y,f(x))$ a sa dernière composante nulle en un point x de U. Par suite, d'après la proposition précédente on a l'isomorphisme cherché.

9. Non seulement, comme nous venons de le voir, les anneaux C^∞ de la forme $C^\infty U$ sont des anneaux lisses de type fini, mais plus généralement : (Remarque de Lawvere) M étant une variété C^∞ quelconque, alors $C^\infty M$ est un anneau lisse de type fini.

Preuve : On sait que toute variété M est un rétracte C^∞ d'un ouvert U d'un certain $\mathbb{R}^n$. Notons $r : U \to M$ ce rétracte et $i : M \hookrightarrow U$ l'injection canonique. De l'égalité $r \circ i = id_M$ on en déduit par fonctorialité, la commutation du diagramme :

$$\begin{tikzcd} & C^\infty U \arrow[dr, "i^*"] & \\ C^\infty M \arrow[ur, "r^*"] \arrow[rr, "="'] & & C^\infty M \end{tikzcd}$$

dans la catégorie des anneaux C^∞. Par suite :

$$C^\infty M \simeq \text{Coég}(Id, r^* \circ i^* : C^\infty U \rightrightarrows C^\infty U)$$

dans cette même catégorie. Mais comme $C^\infty U$ appartient à $\mathcal{B}$ il en va de même de $C^\infty M$ (d'après le 5,c).

10. Exprimé en termes fonctoriels, on a un plongement de la catégorie $\mathbb{V}$ar des variétés C^∞ dans $\mathcal{B}^{op}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}\mathrm{ar} &\to \mathcal{D}^{op} \\ M &\mapsto C^{\infty}M \\ f &\mapsto f^{*} \end{aligned}$$

Preuve : On utilise la bijection $M \simeq \mathcal{D}(C^{\infty}M,\mathbb{R})$.

N°5. Anneaux lisses de fractions.

0. Par analogie avec l'algèbre commutative nous allons définir des "anneaux lisses de fractions". Anneau lisse : signifiant toujours, à partir de maintenant, anneau lisse de type fini (puisque aucune confusion n'est possible).

1. Soit A un anneau lisse et $S \subset A$. Suivant la nature de S nous allons voir qu'il peut exister un nouvel anneau lisse, dit de fractions et noté $A\{S^{-1}\}$ (la notation { } étant utilisé volontairement à la place de [ ] pour ne pas l'identifier avec l'anneau commutatif unitaire de fractions), satisfaisant la propriété universelle suivante :

$$\mathcal{D}(A\{S^{-1}\},B) \simeq \{h \in \mathcal{D}(A,B) / \ \forall a \in A \ (a \in S \Rightarrow h(a) \text{ inversible})\}$$

2. Soit $h : A \to B$ un morphisme entre anneaux lisses et S une partie de A telle que $A\{S^{-1}\}$ existe, alors $B\{h(S)^{-1}\}$ existe aussi et le carré suivant est une somme amalgamée dans $\mathcal{D}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & A\{S^{-1}\} \arrow[d] \\ B \arrow[r] & B\{h(S)^{-1}\} \end{tikzcd}$$

Les deux flèches horizontales sont les flèches canoniques résultant de la propriété universelle d'anneau lisse de fractions.

Preuve : Immédiat.

3. Passons maintenant à l'existence de l'anneau lisse de fractions. Considérons, tout d'abord, le cas où S est réduit à l'élément a de A. Alors l'anneau lisse $A\{a^{-1}\}$ (que l'on devrait noter $A\{\{a\}^{-1}\}$) existe toujours.

Preuve : Grâce à la proposition 2, il suffit de nous ramener au cas où A est libre (c'est-à-dire de la forme $C^\infty \mathbb{R}^n$). Mais alors :

$$C^\infty \mathbb{R}^n\{f^{-1}\} \simeq C^\infty \mathbb{R}^{n+1}/(f \circ p.q - 1) \simeq C^\infty U$$

où p et q sont resp. les projections $\mathbb{R}^n \leftarrow \mathbb{R}^{n+1} \to R$ et $U = Df$.

En effet, tout morphisme $h : C^\infty \mathbb{R}^n \to B$ tel que $h(f)$ soit inversible se prolonge en un unique morphisme $k : C^\infty \mathbb{R}^{n+1} \to B$ tel que $k(q) = h(f)^{-1}$ (car $C^\infty \mathbb{R}^{n+1} \simeq C^\infty \mathbb{R}^n \otimes C^\infty \mathbb{R}$ et $\mathcal{D}(C^\infty \mathbb{R},B) \simeq B$) par suite :

$$k(p^*f.q - 1) = k(p^*f).k(q) - 1 = h(f).h(f)^{-1} - 1 = 0$$

ce qui signifie que k se factorise par $C^\infty \mathbb{R}^{n+1}/(p^*f.q - 1)$. La réciproque est évidente car p^*f est inversible dans $C^\infty \mathbb{R}^{n+1}/(p^*f.q - 1)$. Enfin le second isomorphisme a déjà été montré au n°4,8.

4. Soit p un point de A (voir définition au n°1,9). Considérons alors l'ensemble $S(p) = \{a \in A/p(a) \neq 0\}$. Dans ce nouveau cas particulier, l'anneau lisse de fractions $A\{S(p)^{-1}\}$, que l'on note A_p (de nouveau, par analogie avec l'algèbre commutative) existe toujours.

Preuve : Comme pour le 3, la proposition 2 permet de nous ramener au cas où A est libre. Mais alors : $(C^\infty \mathbb{R}^n)_p \simeq C^\infty_p \mathbb{R}^n$ (si on fait l'identification : $\mathcal{D}(C^\infty \mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$). En effet, soit $h : C^\infty \mathbb{R}^n \to B$ un morphisme. Montrons qu'on a la factorisation :

$$\begin{tikzcd} & C^\infty \mathbb{R}^n \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ C^\infty_p \mathbb{R}^n \arrow[rr, dotted] & & B \end{tikzcd} \qquad \text{ssi } h(S(p)) \subset \mathrm{Inv}(B)$$

Comme tout élément de S(p) est inversible dans $C^\infty_p \mathbb{R}^n$, la factorisation proposée entraîne l'inclusion cherchée. Réciproquement, pour montrer la factorisation, soit $\phi \in C^\infty \mathbb{R}^n$ tel que $\phi_p = 0$. Il existe donc un voisinage ouvert V de p tel que $\phi_V = 0$. Soit alors ψ une fonction caractéristique de V (i.e. telle que $D\psi = V$). On a $\psi(p) \neq 0$ donc $\psi \in S(p)$ et, de ce fait, $h(\psi)$ est inversible. Mais $\psi.\phi = 0$ dans $C^\infty \mathbb{R}^n$, donc $h(\psi).h(\phi) = 0$, ce qui prouve que $h(\phi) = 0$. D'où la factorisation.

5. Remarques : a) Concrètement, si $A \simeq C^\infty \mathbb{R}^n/I$ et $p \in ZI$ (que l'on identifie à un point de A : voir n°1,9) alors, l'anneau lisse A_p s'écrit explicitement :

$$Ap \simeq C_p^\infty \mathbb{R}^n/I_p$$

b) Par contre, attention : $C^\infty \mathbb{R}^n/I\,\{f^{-1}\} \neq C^\infty U/I_U$ où $U = Df$.

Preuve : a) Car $C^\infty \mathbb{R}^n/I^\omega(p) + I \simeq C_p^\infty \mathbb{R}^n/I_p$

b) Car $p^*I + (p^*f.q - 1)$ n'est pas un idéal de caractère local.

6. Une conséquence immédiate de la définition des idéaux de caractère local est la propriété suivante des anneaux lisses :

- a étant un élément de A, on a l'équivalence :

$a = 0$ ssi pour tout point p de A, $a_p = 0$.

En notant a_p l'image de a par le morphisme canonique $A \to A_p$.

Preuve : Résulte de 5,a.

N°6. Anneaux lisses construits "point par point".

1. A étant un anneau lisse, notons SpecA = $\mathcal{D}(A,\mathbb{R})$ = "l'ensemble des points de A". Si A est présenté par $C^\infty \mathbb{R}^n/I$ on a donc une bijection canonique $ZI \xrightarrow{\sim}$ SpecA (voir n°1,9). Munissons alors SpecA de la topologie homéomorphe à celle de ZI (restriction de celle de $\mathbb{R}^n$). On vérifie facilement que cette topologie ne dépend pas du choix de la présentation de A. De même si $h : A \to B$ est un morphisme entre anneaux lisses notons Spech : Spec B $\to$ SpecA l'application canonique. On voit facilement, en utilisant une présentation de A et B, que Spech est toujours continue.

2. Soit maintenant P une partie de SpecA. Nous allons construire un nouvel anneau lisse A_P et un épimorphisme $A \to A_P$ vérifiant la propriété universelle suivante :

- Pour toute flèche $A \to B$ les deux factorisations (resp. dans $\mathcal{D}$ et $\mathbb{E}\mathrm{ns}$) suivantes, sont équivalentes :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & A \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_P \arrow[rr, dotted] & & B \end{tikzcd} \qquad \text{ssi} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathrm{Spec}\,A & \\ P \arrow[ur] & & \mathrm{Spec}\,B \arrow[ul] \arrow[ll, dotted] \end{tikzcd}$$

3. Remarque : Nous reprendrons cette propriété universelle au chapitre II dans un cadre beaucoup plus général (voir plus précisément le §2, n°2 du chapitre II).

4. a) On a toujours $\mathcal{D}(A_P,\mathbb{R}) \simeq P$.

b) Soit $h : A \to B$ un morphisme entre anneaux lisses, et P une partie de SpecA. Posons $Q = (\mathrm{Spec}h)^{-1}(P)$. Dans ces conditions, si A_P existe il en va de même de B_Q. De plus, on a la factorisation suivante :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_P \arrow[r, dotted] & B_Q \end{tikzcd}$$

et le carré obtenu est une somme amalgamée.

c) Soit $\mathcal{P}$ un ensemble ordonné connexe de parties de SpecA tel que A_P existe, pour tout $P \in \mathcal{P}$, ainsi que leur limite. Alors $A_{\cap \mathcal{P}}$ existe et :

$$A_{\cap \mathcal{P}} \simeq \varinjlim_{P \in \mathcal{P}} A_P$$

d) P étant une partie de SpecA et Q une partie de $\mathrm{Spec}(A_P)$. Alors, par l'injection $\mathrm{Spec}(A_P) \to \mathrm{Spec}A$, identifions Q à une partie de SpecA. Dans ce cas $(A_P)_Q$ existe aussi et $(A_P)_Q \simeq A_Q$.

Preuve : Obtenu par "manipulations fonctorielles".

5. Cherchons maintenant à construire les A_P. Considérons tout d'abord le cas particulier suivant :

Soit S une partie de A. Notons $D(S)$ l'ensemble des points p de A tels que $p(a) \neq 0$, pour tout $a \in S$ (lorsque $A = C^{\infty}\mathbb{R}^n$ et $S = \{f\}$ on retrouve la notation $D(f)$ donnée au n°2,2). Alors, si $A\{S^{-1}\}$ existe, il en va de même de $A_{D(S)}$ et on a :

$$A\{S^{-1}\} \simeq A_{D(S)}$$

Preuve : Pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme. Un élément a de A est inversible ssi $D(a) = \mathrm{Spec}A$.

Preuve du lemme : Soit $C^{\infty}\mathbb{R}^n/I$ une présentation de A et f un élément de $C^{\infty}\mathbb{R}^n$ dont la classe d'équivalence dans A est a. Il faut donc montrer que moyennant l'hypothèse $D(a) = \mathrm{Spec}A$, il existe un élément g de $C^{\infty}\mathbb{R}^n$ tel que $g.f - 1 \in I$. Dit plus simplement, il reste à établir que $1 \in I + (f)$. Mais l'idéal $I + (f)$ étant de caractère local (voir n°3,2 et son lemme) on peut lui appliquer le "théorème des zéros" voir n°2,5). Ainsi $1 \in I + (f)$ ssi $Z(I+(f)) = \emptyset$ ou encore, puisque $Z(I+(f)) = ZI \cap Z(f)$, ssi $ZI \subset \mathbb{R}^n - Z(f)$; qui peut encore s'écrire $\forall p \in ZI(f(p) \neq 0)$. Nous avons donc fini de montrer le lemme car cette dernière condition n'est qu'une autre formulation de l'hypothèse.

Preuve du 5 (suite): Soit $h : A \to B$ un morphisme entre anneaux lisses. Alors, h factorise $A \to A\{S^{-1}\}$ ssi h(a) est inversible dans B, pour tout $a \in S$, c'est à-dire (en utilisant le lemme) ssi pour tout point p de B et tout $a \in S$, $p(h(a)) \neq 0$ ou encore, ssi pour tout point p de B $p \circ h \in D(S)$ ce qui, par définition de $A_{D(S)}$ équivaut à dire que h factorise $A \to A_{D(S)}$.

6. La proposition précédente admet le corollaire suivant :

Pour tout ouvert U de SpecA, l'anneau lisse A_U existe.

Preuve : Soit $C^{\infty}\mathbb{R}^n/I$ une présentation de A. Alors, si on identifie SpecA à ZI, il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^n$ tel que $V \cap ZI = U$. Soit f une "fonction caractéristique" de V et a la classe d'équivalence de f dans A. Dans ces conditions $D(a) = U$. La proposition résulte alors de la précédente et du n°5, 3.

7. P étant une partie de SpecA, si l'un des trois anneaux lisses ci-dessous existe il en va de même des deux autres et on a :

$$A_P \simeq \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} A_U \simeq A\{S(P)^{-1}\}$$

où $\mathcal{U}$ est l'ensemble ordonné des ouverts de SpecA contenant P. De plus la limite ci-dessus est préservée par le foncteur d'oubli $\mathcal{D} \to \mathbb{E}\mathrm{ns}$.

Preuve : a) L'isomorphisme $A_P \simeq \varinjlim_{U \in \mathcal{U}} A_U$ résulte du 4,c et du fait que SpecA est séparé.

b) Montrons l'isomorphisme $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} A_U \simeq A\{S(P)^{-1}\}$. Soit $h : A \to B$ un homomorphisme entre anneaux lisses. Alors h factorise $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} A_U$ ssi pour tout $u \in \mathcal{U}$, h factorise A_U. Exprimé en termes d'anneau lisse de fractions cette dernière condition revient à dire que h factorise $A\{a^{-1}\}$, pour tout $a \in A$ tel que $P \subset D(a)$, ou encore que h(a) est inversible pour tout $a \in S(P)$, ce qui finalement équivaut au fait que h factorise $A\{S(P)^{-1}\}$.

c) Il reste donc à montrer que $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} A_U$ se calcule comme dans $\mathbb{E}\mathrm{ns}$. On va utiliser pour cela le lemme suivant :

Lemme. Soit p un point d'un anneau lisse A et $a \in A$ alors si $a_p = 0$, il existe un voisinage ouvert V de p dans SpecA tel que $a_V = 0$ (en notant a_V l'image de a dans A_V).

Preuve du lemme : Soit $C^\infty \mathbb{R}^n/I$ une présentation de A. Il existe donc un élément f de $C^\infty \mathbb{R}^n$ tel que $\hat{f} = a$ (en notant $\hat{f}$ la classe d'équivalence de f modulo I). Comme $a_p = \hat{f}_p$ car $A_p \simeq C^\infty_p \mathbb{R}^n/I_p$ (voir n°5,5), on en déduit que $f_p \in I_p$ et ainsi, qu'il existe un élément g de I tel que $f_p = g_p$. Par suite il existe un voisinage ouvert V de p dans $\mathbb{R}^n$ tel que $f_V = g_V$. Finalement $a_U = 0$, en notant $U = V \cap ZI$ car le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty \mathbb{R}^n & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty V & \longrightarrow & A_U \end{array}$$

<u>Fin de la preuve de la proposition</u> : Notons cette fois $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} A_U$ la limite ensembliste et montrons maintenant que la flèche canonique $\varinjlim_{U \in \mathcal{U}} A_U \to A_P$ est bijective. Comme elle est surjective puisque la flèche $A \to A_P$ l'est, il reste à montrer qu'elle est injective. Soit, alors, a un élément de A_U, U ouvert contenant P, tel que $a_P = 0$ et montrons qu'il existe dans ce cas un voisinage ouvert V de P contenu dans U tel que $a_V = 0$. Pour tout point p de P, $a_p = 0$. Par suite, à l'aide du lemme précédent, il existe un voisinage ouvert V_p dans $\mathrm{Spec}(A_U) = U$ tel que $a_{V_p} = 0$. Soit $V = \bigcup_{p \in F} V_p$. (c'est un voisinage ouvert de F contenu dans U). Comme $(a_V)_p = 0$, pour tout p de V on en conclut que $a_V = 0$ (voir n°5,<u>6</u>).

<u>8</u>. a) En particulier (d'après le n°5,<u>4</u>) pour une partie de SpecA réduite à un point p, $A_{\{p\}}$ existe toujours et $A_{\{p\}} = A_p$.

b) En fait plus généralement, si F est une partie fermée de SpecA, l'anneau lisse A_F existe encore.

<u>Preuve</u> : Pour cela nous utiliserons le lemme suivant :

<u>Lemme</u>. a) I étant un idéal de caractère local de $C^\infty \mathbb{R}^n$ et F un fermé de $\mathbb{R}^n$ alors :

$$I^\omega F \subset I \qquad \text{ssi} \quad ZI \subset F$$

b) $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ étant une application C^∞ et F une partie de $\mathbb{R}^n$, alors on a la factorisation suivante :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f^*} & C^\infty \mathbb{R}^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty \mathbb{R}^n / I^\omega F & \dashrightarrow & C^\infty \mathbb{R}^m / I^\omega f^{-1} F \end{array}$$

et le carré obtenu est une somme amalgamée.

<u>Preuve du lemme</u> : a) Pour montrer l'implication ($\Rightarrow$) il suffit de constater que $ZI^\omega F = F$ [On utilise la régularité de $\mathbb{R}^n$ et l'existence de "fonctions caractéristiques" pour montrer que pour tout point extérieur à F on peut

construire une fonction C^∞ définie sur $\mathbb{R}^n$ qui est inversible en ce point et qui s'annulle sur un voisinage de F]. Quant à l'autre implication elle résulte immédiatement du caractère local de I.

b) Cela revient à montrer que $I^\omega f^{-1}F = \overline{f^* I^\omega F}$ [On utilise la préservation des sommes amalgamées par le foncteur G : voir le n°4,3]. Comme, clairement $f^*(I^\omega F) \subset I^\omega f^{-1}F$ on a aussi $\overline{f^* I^\omega F} \subset I^\omega f^{-1}F$ (car $I^\omega f^{-1}F$ est de caractère local : voir n°3,4). Quant à l'autre inclusion elle résulte de (a) car $ZI^\omega f^{-1}F = f^{-1}F = Z\overline{f^* I^\omega F}$ [Pour la dernière égalité on peut utiliser la préservation des $\varprojlim$ par le foncteur $\mathcal{D}(-,\mathbb{R})$].

Preuve de la proposition : Grâce à la proposition 4,b on peut se restreindre au cas où A est libre (i.e. de ma forme $C^\infty\mathbb{R}^n$). Montrons dans ce cas que $A_F \simeq C^\infty\mathbb{R}^n/I^\omega F$. Soit donc $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ une fonction C^∞, et I un idéal de caractère local de $C^\infty\mathbb{R}^m$. Alors, le composé $C^\infty\mathbb{R}^n \xrightarrow{f*} C^\infty\mathbb{R}^m \to C^\infty\mathbb{R}^m/I$ factorise $C^\infty\mathbb{R}^n \twoheadrightarrow C^\infty\mathbb{R}^n/I^\omega F$ ssi $C^\infty\mathbb{R}^m \twoheadrightarrow C^\infty\mathbb{R}^m/I$ factorise $C^\infty\mathbb{R}^m \twoheadrightarrow C^\infty\mathbb{R}^m/I^\omega f^{-1}F$ (par le (b) du lemme) c'est-à-dire ssi $I^\omega f^{-1}F \subset I$. Mais nous avons vu au (a) du lemme que cette dernière condition équivaut au fait que $ZI \subset f^{-1}F$ ce qui n'est qu'une autre façon de dire que le spectre de : $C^\infty\mathbb{R}^n \xrightarrow{f*} C^\infty\mathbb{R}^m \twoheadrightarrow C^\infty\mathbb{R}^m/I$ factorise $F \subset \mathrm{Spec}C^\infty\mathbb{R}^n$.

9. Pour finir, considérons le cas des variétés. Soient M une variété, U un ouvert de celle-ci et p un de ces points, alors on a les isomorphismes suivants :

a) $C^\infty M_U \simeq C^\infty U$

b) $C^\infty M_p \simeq C^\infty_p M$

Preuve : a) Montrons le tout d'abord dans le cas où M est elle-même un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (notons le alors : V). Comme $U \subset V \subset \mathbb{R}^n$ on a, par fonctorialité la commutation du carré suivant :

$$\begin{array}{ccc} C^\infty\mathbb{R}^n & \longrightarrow & C^\infty V \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty U & \xrightarrow[=]{} & C^\infty U \end{array}$$

C'est aussi, clairement, une somme amalgamée. Par suite, comme $C^\infty U \simeq C^\infty\mathbb{R}^n_U$

(par la proposition 5 et le n°5,3) il suffit d'appliquer le 4 pour avoir l'isomorphisme cherché. Revenons maintenant au cas où M est une variété quelconque. Utilisons alors, la même démarche qu'au n°4,9. Comme M est le rétracte d'un ouvert V d'un certain $\mathbb{R}^n$ (on notera $r : V \to M$ une des rétractions possibles) soit $U' = r^{-1}(U)$. Alors, par des arguments de fonctorialité proches du n°4,9 on voit que le carré suivant est une somme amalgamée dans $\mathcal{B}$:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty V & \longrightarrow & C^\infty M \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty U' & \longrightarrow & C^\infty U \end{array}$$

Par suite, comme $C^\infty U' \simeq C^\infty V_{U'}$ on en déduit (toujours par le n°5,3) l'isomorphisme cherché.

b) Cela résulte des isomorphismes suivants (où U désigne un ouvert de M) :

$$C^\infty M_p \simeq \varinjlim_{p \in U} (C^\infty M)_U \simeq \varinjlim_{p \in U} C^\infty U \simeq C_p^\infty M$$

Le premier résultant des propositions 7 et 8,a et le second du (a).

§2. LE TOPOS DE DUBUC.

N°1. Espaces C^∞-annulés.

0. Nous allons maintenant nous intéresser aux propriétés locales des anneaux lisses. Pour cela, il nous faudra utiliser des faisceaux d'anneaux-C^∞ et montrer que le spectre de tout anneau lisse admet canoniquement un "faisceau structural".

1. a) X étant un espace topologique fixé, un faisceau d'anneaux-C^∞ $\mathcal{A}$ sur X est défini par la donnée pour tout ouvert U de X, d'un anneau-C^∞ $\mathcal{A}U$ et, pour toute inclusion d'ouvert $U' \subset U$, d'un morphisme d'anneaux-C^∞ (dit de restriction) $\mathcal{A}U \to \mathcal{A}U'$, $a \mapsto a_{U'}$. Ces données étant astreintes aux conditions de fonctorialité et de recollement habituelles (voir par exemple [16]).

b) Un morphisme $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ de faisceaux d'anneaux-C^∞ sur X est défini, par la donnée, pour chaque ouvert U de X d'un morphisme d'anneau-C^∞ $h_U : \mathcal{A}U \to \mathcal{B}U$ "commutant" avec les morphismes de restriction de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$.

2. Remarque : Dit de façon plus "fonctorielle", les faisceaux d'anneaux-C^∞ et les morphismes entre de tels faisceaux sont, en fait, resp. les "modèles" de la théorie des anneaux-C^∞ [c'est d'ailleurs une $\varprojlim$-théorie (voir [8]) i.e. définissable par limites projectives (voir [25])et les morphismes entre modèles dans le topos $\tilde{X}$ des faisceaux sur X.

3. Si $f : X \to Y$ est une application continue et $\mathcal{A}$ un faisceau d'anneaux C^∞ sur X on note $f_*\mathcal{A}$ le faisceau d'anneaux C^∞ sur Y défini par :

$$(f_*\mathcal{A})U = \mathcal{A}f^{-1}U$$

On construit ainsi un foncteur f_* entre les catégories de faisceaux d'anneaux-C^∞ resp. sur X et sur Y.

4. $\mathcal{A}$ étant un faisceau d'anneaux-C^∞ sur X et p un point de X, la fibre $\mathcal{A}_p$ de $\mathcal{A}$ au point p (i.e. $\mathcal{A}_p = \varinjlim_{p \in U} \mathcal{A}U$) peut elle-même être munie d'une

structure d'anneau-C^∞ et, si $h : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ est un morphisme entre faisceaux d'anneaux-C^∞, l'application canonique $\mathcal{A}_p \to \mathcal{B}_p$ est un morphisme d'anneau-C^∞.

<u>Preuve</u> : La théorie des anneaux-C^∞ étant une $\varprojlim$-théorie (voir remarque <u>2</u>) il suffit d'appliquer la commutation des $\varinjlim$ filtrantes avec les $\varprojlim$ finies.

<u>5</u>. <u>Remarque</u> : Grâce à la théorie des topos, le <u>3</u> et <u>4</u> peuvent être dits de la façon suivante :

a) $f : X \to Y$ étant une application continue entre espaces topologiques, le foncteur $f_* : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ image directe du morphisme géométrique $\tilde{X} \to \tilde{Y}$ déterminé par f, préserve les $\varprojlim$. Il préserve donc aussi les anneaux-C^∞ ainsi que les morphismes entre anneaux-C^∞ (voir remarque <u>2</u>) d'où le <u>3</u>. On peut faire un raisonnement analogue avec le foncteur f^* (adjoint à gauche de f_*) car il préserve les $\varprojlim$ finies.

b) De façon similaire comme $\mathcal{F}_p = p^*(\mathcal{F})$ pour un faisceau quelconque $\mathcal{F}$ sur X [p^* désignant l'image inverse du morphisme géométrique $\mathbb{E}\mathrm{ns} \simeq \tilde{1} \to \tilde{X}$ associé au point $p \in X$], on a les résultats du <u>4</u>.

<u>6</u>. a) Appelons maintenant <u>espace</u> C^∞-<u>annelé</u>, la donnée $(X, \mathcal{O}_X)$ d'un espace topologique X et d'un faisceau d'anneaux-C^∞ $\mathcal{O}_X$ sur X.

b) Un morphisme d'espace C^∞-annelé de $(X, \mathcal{O}_X)$ dans $(Y, \mathcal{O}_Y)$ est la donnée $(f, f^\#)$ d'une application continue $f : X \to Y$ et d'un morphisme de faisceau d'anneaux-C^∞ sur Y $f^\# : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$; lequel s'identifie à $f_* : f^* \mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ grâce à la remarque 5.

<u>8</u>. $(f, f^\#) : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ étant un morphisme entre espaces C^∞-annelés alors, pour tout point p de X l'application canonique $\mathcal{O}_{Y,fp} \to \mathcal{O}_{X,p}$ est elle-même un morphisme d'anneau-C^∞ [cette flèche est, en fait, le composé $\varinjlim_{fp \in U} \mathcal{O}_Y(U) \to \varinjlim_{fp \in U} \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \to \varinjlim_{p \in V} \mathcal{O}_X(V)$.]

<u>9</u>. Sous les mêmes hypothèses qu'au <u>8</u> le morphisme $(f, f^\#)$ est un isomorphisme ssi on a les conditions suivantes :

i) f est un homéomorphisme,

ii) pour tout point p de X, le morphisme canonique $\mathcal{O}_{Y,fp} \to \mathcal{O}_{X,p}$ est un isomorphisme.

Preuve : f étant un homéomorphisme, les morphismes $\varinjlim_{fp\in U} \mathcal{O}_X(f^{-1}U) \to$ $\to \varinjlim_{p\in V} \mathcal{O}_X(V)$ sont des isomorphismes. Par suite, les morphismes $(\mathcal{O}_Y)_{fp} \to (f_* \mathcal{O}_X)_{fp}$ sont aussi des isomorphismes pour tout point p de X. De ce fait, globalement la flèche $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ est un isomorphisme dans $\tilde{Y}$ ce qui achève notre proposition. [On aurait pu le voir, plus facilement encore, en constatant que, comme par hypothèse les morphismes $p^*f_{\#} : p^*(f^*\mathcal{O}_Y) \to p^*\mathcal{O}_X$ sont des isomorphismes (voir la remarque du 8) $f_{\#}$ est un isomorphisme, car $\tilde{X}$ a "assez de points"].

N°2. Exemples d'espaces C^∞-annelés.

0. Plus précisément, nous allons construire un plongement de $\mathcal{D}$ dans la catégorie des espaces C^∞-annelés.

1. (Théorème). Soit A un anneau lisse et X = SpecA. Considérons alors, pour chaque ouvert U de X l'anneau-C^∞ $\mathcal{A}U = A_U$ (voir le §1 n°6) et pour chaque inclusion $U' \subset U$ le morphisme canonique $\mathcal{A}U \to \mathcal{A}U'$ obtenu par la factorisation de $A \to A_{U'}$ par $A \to A_U$. Ces données déterminent un faisceau $\mathcal{A}$ sur X dont les fibres $\mathcal{A}_p$ ne sont autre que les A_p (définis au §1 n°5).

Preuve : a) La propriété universelle des A_U donnant immédiatement la fonctorialité de $\mathcal{A}$ passons à la condition de recollement. Soient (U_i) une famille d'ouverts de X et (a_i) une famille d'éléments appartenant à chacun des A_{U_i} telle que $(a_i)_{U_i \cap U_j} = (a_j)_{U_i \cap U_j}$ pour tout i et j. Il faut montrer qu'il existe un unique élément a de A_U (où $U = \bigcup_i U_i$) tel que $a_{U_i} = a_i$. Tout d'abord remarquons qu'on peut se restreindre au cas où U = X quitte à remplacer l'anneau lisse A par A_U. D'autre part si $C^\infty \mathbb{R}^n/I$ est une présentation de A on peut supposer que le recouvrement (U_i) de SpecA provient de la restriction d'un recouvrement (V_i) de $\mathbb{R}^n$ (sinon, on prolonge tout d'abord chaque U_i puis, on y ajoute l'ouvert $\mathbb{R}^n$-ZI). Considérons maintenant un point $p \in U_i \cap U_j$, alors on a toujours $(a_i)_p = (a_j)_p$. L'élément $(a_i)_p$ de A_p ne dépend donc pas de l'indice i, aussi est-il naturel de noter a(p) la valeur commune des $(a_i)_p$ pour chaque point p de A. Nous allons maintenant construire un élément $a \in A$ tel que $a_p = a(p)$ en tout point p de A. Soit f_i un élément de $C^\infty V_i$ dont la classe d'équivalence $\widetilde{f_i}$ dans A_{U_i} (qui est un quotient de $C^\infty V_i$) est a_i. Soit (W_α) un recouvrement localement fini plus fin que (V_i) (i.e. $\overline{W}_\alpha \subset V_{i(\alpha)}$). Notons alors g_α la restriction de $f_{i(\alpha)}$ à W_α. Alors, pour tout $p \in W_\alpha$, $\widetilde{(g_\alpha)_p} = a(p)$. Soit maintenant (ϕ_β) une partition de l'unité plus fine que (W_α) (i.e. $\overline{D\phi_\beta} \subset W_{\alpha(\beta)}$). Les fonctions $\ell_\beta = \phi_\beta . g_{\alpha(\beta)}$ qui sont définies globalement et C^∞, ont un support contenu dans $W_{\alpha(\beta)}$. Par suite, p étant un point de A, si $p \in W_{\alpha(\beta)}$, $\widetilde{(\ell_\beta)_p} = \widetilde{(\phi_\beta)_p}.a(p)$ et sinon $(\ell_\beta)_p = 0$. Delà la famille (ℓ_β) est localement finie (voir définition au §1,n°2). Nous pouvons donc poser $\ell = \sum_\beta \ell_\beta$ et $a = \widetilde{\ell}$. Alors, pour tout point p de A, on a :

$$a_p = \widetilde{(\sum_\beta \ell_\beta)_p} = \sum_{\beta \in J(p)} \widetilde{(\ell_\beta)_p} = a(p). \sum_\beta \widetilde{(\phi_\beta)_p} = a(p)$$

en notant $J(p) = \{\beta / p \in W_{\alpha(\beta)}\}$. Ainsi pour tout i, $a_{U_i} = a_i$ car, pour tout point p de A_{U_i}, $(a_i)_p = a(p) = a_p = (a_{U_i})_p$ (on utilise aussi la proposition 6 du §1, n°5). L'unicité de a se montre en utilisant la même proposition ce qui achève de montrer que $\mathcal{A}$ est un faisceau.

b) Interessons nous maintenant aux fibres de $\mathcal{A}$. Comme $\mathcal{A}_p = \varinjlim_{p \in U} \mathcal{A}U = \varinjlim_{p \in U} A_U$ on en conclut, par le §1, n°6,7 que $\mathcal{A}_p = A_p$.

2. Dans la proposition précédente, il est indispensable de supposer que l'anneau-C^∞ de type fini A est en fait lisse.

En effet si l'anneau-C^∞ $A = C^\infty \mathbb{R}^n / I$ est seulement supposé de type fini et si on considère le préfaisceau $\mathcal{A}$ défini sur l'espace ZI par $\mathcal{A}U = C^\infty U / I_U$ (qui est l'analogue de A_U pour les anneaux-C^∞ car il provient de la somme amalgamée suivante dans $\mathcal{D}'$:...)

$$\begin{array}{ccc} C^\infty \mathbb{R}^n & \longrightarrow & C^\infty \mathbb{R}^n/I \\ \downarrow & & \downarrow \\ C^\infty U & \longrightarrow & C^\infty U/I_U \end{array}$$

On voit facilement qu'il ne peut être un faisceau : [On prend, par exemple pour I, l'idéal des fonctions à support compact puis, on considère pour la famille (a_i) les classes d'équivalence d'une partition de l'unité]

3. L'application $A \mapsto (X, \mathcal{A})$ définie au 1 se prolonge en un foncteur, noté $\mathcal{S}$pec, de $\mathfrak{D}^{op}$ dans la catégorie des espaces C^∞-annelés (résulte immédiatement du §1, n°6,4,b). En fait ce foncteur est pleinement fidèle.

Preuve : Soient A et B deux anneaux lisses et $(f, f^{\#}) : \mathcal{S}pec(B) \to \mathcal{S}pec(A)$ un morphisme d'espace C^∞-annelé. Considérons le morphisme $h : (A \simeq A_U \xrightarrow{f^{\#}_U} B_{f^{-1}U} \simeq B)$ pour U = SpecA et montrons que h est l'unique morphisme $A \to B$ tel que $\mathcal{S}pec(h) = (f, f^{\#})$. Pour cela, notons $(g, g^{\#}) = \mathcal{S}pec(h)$. Tout d'abord, la donnée de ces deux morphismes $\mathcal{S}pec(B) \rightrightarrows \mathcal{S}pec(A)$ montre à l'aide de la proposition 1, que les deux diagrammes suivant commutent, pour tout point p de SpecB :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{fp} & \longrightarrow & B_p \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{h} & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_{gp} & \longrightarrow & B_p \end{array}$$

Donc $A \to A_{fp}$ et $A \to A_{gp}$ étant factorisés par le même point on a, nécessairement fp = gp, et ainsi f = g. D'autre part, il est clair que par naturalité on a aussi $f^{\#} = g^{\#}$. Enfin, l'unicité de h est évidente.

4. La proposition précédente admet l'important corollaire suivant :

(Théorème) : Soit $h : A \to B$ un morphisme d'anneaux lisses satisfaisant les deux conditions suivantes :

i) $\mathrm{Spec}(h) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$ (qu'on notera f) est un homéomorphisme,

ii) pour tout point p de Spec(B) le morphisme canonique suivant est un isomorphisme :

$$A_{fp} \to B_p$$

Alors, sous ces hypothèses, on en conclut que h est lui-même un isomorphisme.

Preuve : En plus de la proposition précédente il suffit d'appliquer la proposition 9 du n°1.

5. Nous allons maintenant laisser l'étude des espaces C^∞-annelés, ayant obtenu les résultats que nous désirions (essentiellement les théorèmes 1 et 4 de ce numéro). Signalons que, comme l'a fait E. Dubuc, les considérations précédentes permettent d'élargir la catégorie des anneaux lisses. En effet, toujours par analogie avec le cas de la géométrie algébrique, on peut alors considérer les espaces C^∞-annelés en anneaux-C^∞ locaux, puis définir les schémas-C^∞ comme de tels espaces obtenus par recollement d'anneaux lisses (pour plus de précisions voir [11]). Cependant il ne nous a pas paru nécessaire d'en arriver là car jusqu'à présent nous ne connaissons aucun schéma-C^∞ intéressant (c'est-à-dire séparé et paracompact) qui ne soit, en fait, un anneau lisse.

N°3. Construction du topos de Dubuc.

0. Nous allons munir la catégorie $\mathcal{D}^{op}$ (voir définition au §1,n°4,3) d'une certaine topologie sous-canonique (i.e. telle que tous les préfaisceaux représentables soient, en fait, des faisceaux) de telle sorte que le foncteur composé

$$\mathbb{V}\mathrm{ar} \hookrightarrow \mathcal{D}^{op} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{D}^{op}}$$

($\widetilde{\mathcal{D}^{op}}$ désignant le topos des faisceaux sur $\mathcal{D}^{op}$ pour cette topologie), qui est nécessairement pleinement fidèle, préserve les recouvrements ouverts. Il est alors naturel de prendre, comme topologie sur $\mathcal{D}^{op}$, précisément la topologie engendrée par les familles de la forme $((C^\infty U_i)^{op} \to (C^\infty \mathbb{R}^n)^{op})_i$ (l'écriture A^{op} désignant le même objet A, mais dans la catégorie duale) où les U_i sont des ouverts recouvrant $\mathbb{R}^n$.

1. En fait, plus précisément, les familles $(A \to A_{U_i})_i$, où A est un anneau lisse et les U_i des ouverts recouvrant SpecA, forment une prétopologie sous-canonique.

Preuve : Le fait qu'elles forment une pré-topologie résulte du §1,n°6,4. Quant à la sous-canonicité c'est une autre façon de formuler la proposition 1 du n°2.

2. Signalons qu'il n'aurait pas été possible de remplacer $\mathcal{D}$ par $\mathcal{D}'$ (voir définition au §1, n°1) car les familles $(C^\infty U_i^{op} \to C^\infty \mathbb{R}^{n\ op})_i$ ne sont pas épimorphes effectives universelles.

Preuve : La encore, c'est une autre façon de formuler la remarque 2 du n°2.

3. Notons $\mathbb{D}$ le topos des faisceaux sur $\mathcal{D}^{op}$ pour la pré-topologie définie au 1. (Dans la suite ce topos sera souvent appellé "topos de Dubuc" car c'est E. Dubuc qui l'a considéré pour la première fois dans [11]).

Le foncteur canonique $\mathcal{D}^{op} \to \mathbb{D}$ est pleinement fidèle, quant au composé

$$\mathbb{V}ar \hookrightarrow \mathcal{D}^{op} \longrightarrow \mathbb{D}$$

(qui est lui-même pleinement fidèle) il préserve, les recouvrements ouverts (c'est-à-dire qu'il envoie ces recouvrements sur des familles épimorphes.

Preuve : Pour la pleine fidélité cela provient du §1, n°4, 10, quant à la préservation des recouvrements ouverts, elle résulte de la proposition 1 et du §1, n°6,9.

REFERENCES.

[1] M. Artin, A. Grothendieck, J.L. Verdier : "Théorie des topos et cohomologie étale des Schémas" (SGA 4), Lecture Notes in Math. n°269, Springer.

[2] J. Bénabou : "Fibrations petites et localement petites" C.R. Acad. Sci. Paris 281 pp. 897-900 (1975).

[3] J. Bénabou : "Des catégories fibrées". Livre en préparation.

[4] A. Boileau : "Types versus Topos". Ph. D. Thèse, Université de Montréal (1975).

[5] N. Bourbaki : "Algèbre Commutative", Eléments de Math. Chap. III, Hermann, Paris.

[6] M. Bunge : "Synthetic aspects of C^{∞}-mappings" J. Pure and Applied Algebra, 28 pp. 41-63 (1983).

[7] M. Coste : "Logique d'ordre supérieur dans les topos élémentaires". Séminaire Bénabou, Université Paris-Nord (1974).

[8] M. Coste : "Une approche logique des théories définissables par limites projectives finies". Séminaire de théorie des catégories (J. Bénabou), Univ. Paris-Nord (1976).

[9] M. Demazure et A. Grothendieck : "Schémas en Groupes I" (SGA 3), Lecture Notes in Math. n°151, Springer.

[10] E.J. Dubuc : "Sur les Modèles de la Géométrie Différentielle Synthétique", Cahiers de Topo. et Géom. Diff. Vol. XX-3, (1979) pp. 231-279.

[11] E.J. Dubuc : "C^{∞}-schemes", Amer. J. Math. 103 (4), (1981).

[12] E.J. Dubuc : "Open covers and infinitary operations in C^{∞}-rings" Cahiers de Top. et Géom. Diff. 22, pp. 287-300 (1981).

[13] E.J. Dubuc et J. Penon : "Objets compacts dans les topos" Trabajos de Matematica n°60. I.A.M. c.c. 1727, 1000 Buenos Aires (1984).

[14] M. Dummet : "Elements of intuitionism" Clarendon Press-Oxford (1977).

[15] M. Fourman : "Joyal's proof that a provable function is provably continuous" Preprint (1979).

[16] R. Godement : "Topologie Algêbrique et Théorie des Faisceaux" Hermann, Paris (1958).

[17] R.J. Grayson : "Intuitionistic set theory", Ph.D. Thesis, (1978).

[18] A. Grothendieck : "Revêtements Etales et Groupe Fondamental" (SGA 1) Lecture Notes in Math. n°224, Springer.

[19] M. Hakim : "Topos annelés et schemas relatifs", Ergebnisse der Math. 64, Springer Verlag (1972).

[20] P.T. Johnstone : "Topos Theory". London Math. Society, Monographs n°10, Academic Press (1977).

[21] P.T. Johnstone : "Regular reflections of discrete locales" Conférence du Cambridge Summer Meeting In category Theory (1981).

[22] A. Kock : "Universal projective geometry via topos theory" J. Pure and Applied Algebra, 9 (1976), 1-24.

[23] A. Kock : "Synthetic Differential Geometry" London Math. Society, L.N.S. 51. Cambrige univ. press (1981).

[24] A. Kock and G.E. Reyes : "Manifolds in formal differential geometry", in Applications of Sheaves, Proceedings Durham 1977, Lecture Notes in Math. 753, Springer Verlag (1979).

[25] C. Lair : "Etude générale de la catégorie des esquisses" Esquisses Math. n°23, (1975).

[26] F.W. Lawvere : "Categorical Dynamics" Various Publication series 30, pp. 1-28. Matematisk Institut, Aarhus (1979).

[27] M. Makkai et G. Reyes : "First-Order Categorical Logic", Lecture Notes in Math. 611, Springer-Verlag (1977).

[28] J.S. Milne : "Etale Cohomology" Princeton University Press, n°33 (1980).

[29] I. Moerdijk and G.E. Reyes : "Smooth spaces versus continuous spaces in models for synthetic differential geometry" (1983) Report 83-02. Univ. of Amsterdam.

[30] J.P. Murre : "Lectures on an introduction to Grothendieck's theory of the fundamental Group" Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1967).

[31] G. Osius : "Logical and set theoretical methods in elementary topoï" Model Theory and Topoï. Springer Lecture Notes n°445 (1975).

[32] J. Penon : "Infinitesimaux et intuitionnisme", cahiers de Top. et Géom. Diff. 22 (1981), 67-72.

[33] J. Penon : "Topologie et intuitionnisme", Journées Faisceaux et Logique Mai 81, Univ. Paris-Nord, pré-publications math. (1982).

[34] J. Penon : Le "théorème d'inversion locale en géométrie algébrique", Journées Faisceaux et Logique, Mai 1982, Univ. Louvain La Neuve, pré-publications math. (1982).

[35] M. Raynaud : "Anneaux locaux henséliens". Lecture Notes in Math. n°169 Springer.

[36] G. Reyes (éditeur) "Analyse C^∞", Géométrie Différentielle Synthétique, Rapport de Recherches du Dépt. de Math. et de Stat. 80-12, Univ. de Montréal (1980).

[37] A. Robinson : "Non Standard Analysis" North-Holland (1966).

[38] J.C. Tougeron : "Idéaux de fonctions différentiables", Ergebnisse der Math, Springer Verlag (1972).

[39] A. Weil : "Théorie des points proches sur les variétés différentiables", in Colloq. Top. et Géom. Diff., Strasbourg (1953) pp. 111-117.