DIAGRAMMES

L. VAN DEN BRIL

Objets Kar-initiaux

Diagrammes, tome 9 (1983), exp. nº 2, p. VD1-VD32
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1983__9__A2_0>

Diagrammes, Volume 9, Paris 1983.

OBJETS KAR-INITIAUX

L. Van den Bril

On donne une version catégorique de la propriété suivante: un A-module est projectif de type fini ssi il est plat et de présentation finie, en caractérisant les modules projectifs de type fini au moyen de la notion d'objet Kar-initial, intèrmédiaire entre faiblement initial et initial (Kar pour Karoubi ou idempotent) déjà utilisée par R. Börger et W. Tholen (sous la forme des foncteurs semi-adjoints).
Un objet Kar-initial sera un objet faiblement initial muni d'une structure représentant le défaut d'unicité.
On retrouve et on complète la caractérisation des Ens-distributeurs ayant un adjoint à droite (Gouzou-Grunig et Paré). Ainsi, un distributeur $\underline{1} \relbar\!\!+\!\!\rightarrow A$ a un adjoint à droite ssi c'est une section d'un représentable c'est-à-dire une colimite absolue de représentables et un distributeur $B \relbar\!\!+\!\!\rightarrow A$ a un co-adjoint ssi c'est une extension absolue de représentables.
En passant au cas additif, on montre que la catégorie des A-modules projectifs de type fini est la Cauchy-complétion additive de l'anneau A , ce qui éclaire leur intervention dans la théorie de Morita classique.
Enfin, on montre comment les équivalences dans la bi-catégorie des distributeurs sont engendrées par les foncteurs pleinement et co-pleinement fidèles.

Introduction.

Un A-module à gauche peut être défini de manière équivalente comme:

1) un foncteur additif $A \longrightarrow Ab$,

2) Un foncteur additif MatA $\longrightarrow$ Ab.

On rappelle que si A est une Ab-catégorie, la catégorie des matrices de A , MatA , a pour objets les suites finies d'objets de A et comme morphismes $(a_1,\dots,a_n) \xrightarrow{R} (b_1,\dots,b_m)$ les A-matrices m x n . MatA est additive, d'objet nul la suite vide.

3) Un foncteur MatA $\longrightarrow$ Ens commutant aux produits finis (si A est un anneau, MatA est la théorie algébrique des A-modules).

A tout A-module MatA $\xrightarrow{M}$ Ab , on peut donc associer la catégorie produit croisé:

K(M) $\longrightarrow$ MatA , correspondant à MatA $\xrightarrow{M}$ Ab $\xrightarrow{\text{oubli}}$ ENS

Les objets de K(M) sont donc les suites finies d'éléments de M et les morphismes

$$u = (u_1,\dots,u_n) \longrightarrow y = (y_1,\dots,y_m)$$

sont les matrices R de type m x n vérifiant R x = y .

Donc, $a = (a_1,\dots,a_n)$ est une base de M ssi a est initial dans K(M).

Pour caractériser de façon analogue les modules P projectifs de type fini, on utilise le critère suivant:

- P possède un <u>systéme générateur</u> $a = (a_1,\dots,a_n)$ (i. e. un objet faiblement initial de K(P)) <u>muni d'un choix linéaire</u> c'est-à-dire pour tout objet y de K(P) , il existe $a \xrightarrow[\varphi(y)]{} y$ tel que pour $y \xrightarrow[\partial \in K(P)]{} z$, on ait

$$\partial . \varphi(y) = \varphi(z) .$$

Il suffit en effet de définir $\varphi(y)(j,i) = s_i(y_j)$, où $s_1,\dots,s_n$ sont les n formes linéaires $s_i : P \longrightarrow A$ correspondant à $(P = P) = P \xrightarrow[(s_i)]{} A^n \xrightarrow[a]{} P$.

En d'autres termes, si P est projectif de type fini, alors il existe un cône

$$\begin{tikzcd} KP \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & 1 \arrow[dl, "a"] \\ & KP \arrow[u, phantom, "\varphi"] & \end{tikzcd}$$

Réciproquement, pour tout $y \in P$ on définit $s_i(y) = \varphi(y).i$: $a \xrightarrow[1 \times n]{} y$. La linéarité résulte de celle des $\varphi(y)$ par rapport à y. En effet, pour tout $x,y \in P$, on obtient $\varphi(x,y) = (\varphi x, \varphi y)$, puis $\varphi(x+y) = \varphi x + \varphi y$:

$$\begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "\varphi x"'] \arrow[d, "\varphi(x,y)"] \arrow[dr, "\varphi y"] \arrow[dl, phantom, shift left=4, "="] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "="] & \\ x & (x,y) \arrow[l, "(1,0)"] \arrow[r, "(0,1)"'] & y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "(\varphi x, \varphi y)"'] \arrow[dr, "\varphi(x+y)"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ (x,y) \arrow[rr, "+ = (1,1)"'] & & x+y \end{tikzcd}$$

Enfin, on vérifie que $P \xrightarrow[(s_i)]{} A^n \xrightarrow[(a_i)]{} P = Id_P$.

<u>Definition.</u>

Un objet a de la catégorie C est <u>Kar-initial</u> s'il existe un cône $a^\wedge \xrightarrow[\pi]{} Id\ C$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr] \arrow[dr, equal] & & 1 \arrow[dl, "a"] \\ & C \arrow[u, phantom, "\varphi"] & \end{tikzcd} \qquad \text{c-à-d} \qquad \begin{tikzcd} & a \arrow[dl, "\varphi x"'] \arrow[dr, "\varphi y"] \arrow[d, phantom, "="] & \\ x \arrow[rr, "f"'] & & y \end{tikzcd}$$

pour tout $f : x \longrightarrow y \in C$, ou de manière équivalente une transformation naturelle $1^\wedge \Longrightarrow C(a,-) : C \longrightarrow ENS$.

a est <u>initial</u> si, de plus, une des conditions équivalentes ci-dessous est réalisée:

- φa est un épimorphisme,
- $\varphi(a) = Id$,
- φ est une extension,
- φ est une extension absolue (adjonction).

Dualement, on définit les objets <u>Kar-finaux</u>.

Donc P <u>est projectif de type fini ssi</u> $K(P)$ <u>possède un objet Kar-initial</u>.

Theorème.

Les conditions ci-dessous sont équivalentes.

1. a est un objet Kar-initial de C .

2. Il existe $C \longrightarrow a\downarrow C \xrightarrow[\text{proj}]{} C \ = \ C = C$

3. a est faiblement initial et il existe $q\colon B \longrightarrow a$ tel que, pour tous $f,g\colon a \longrightarrow x$, $f.q = g.q$.

4. a est faiblement initial et il existe $e\colon a \longrightarrow a$ tel que, pour tous $f,g\colon a \longrightarrow x$, $f.e = g.e$; e est alors idempotent.

5. Il existe un idempotent $e\colon a \longrightarrow a$ tel que (a,e) soit initial dans $\overline{C}$ (complétion idempotente de C : les objets de $\overline{C}$ sont les couples (x,u) , où $x \in \mathrm{Ob}\, C$ et $u\colon x \longrightarrow x$ est idempotent et les $\overline{C}$ - morphismes $f\colon (x,u) \longrightarrow (y,v)$ sont les C-morphismes $f\colon x \longrightarrow y$ tels que $f.u = f = v.f$ ou encore $v.f.u = f$).

6. Il existe un carré exact

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d, "J"] \\ 1 \arrow[r, "(a,e)"'] & \overline{C} \end{tikzcd}$$

où $\quad x \xrightarrow[f]{} y \overset{}{\underset{J}{\longmapsto}} (x,1) \xrightarrow[f]{} (y,1)$.

7. Il existe un idempotent $e\colon a \longrightarrow a$ tel que, pour tout objet x de C , il existe un <u>unique</u> $f\colon a \longrightarrow x$ tel que $f.e = f$.

8. Il existe $j\colon a \longrightarrow a$ tel que, pour tout objet x de C, il existe un unique $f\colon a \longrightarrow x$ tel que $f.j = f$.

Démonstration.

Il est clair que 1. et 2. sont équivalentes, de même que 4. et 3. et 7. et 8. .

La condition 1 implique la condition 4 puisque, si $\varphi : a^{\wedge} \longrightarrow Id_C$, $\varphi a : a \longrightarrow a$ vérifie $f.\varphi a = g.\varphi a = \varphi x$.
La condition 3 implique la 4 puisqu'il existe $s : a \longrightarrow b$ et $e = q.s$ vérifie $f.e = f.q.s = g.q.s = g.e$.
La condition 4 implique la 7 car il existe $g : a \longrightarrow x$ d'où $f : a \longrightarrow x$, avec $f = g.e$, de sorte que $f.e = g.e.e = g.e = f$.
L'unicité résulte de $f.e = f$ et $g.e = g$ ce qui implique $f = g$ car $f.e = g.e$.
La condition 7 implique la condition 5 car (a,e) est initial dans $\overline{C}$ puisque, pour tout (x,u) objet de $\overline{C}$, il existe $f : a \longrightarrow x$ tel que $f.e = f$, puis $g = u.f : (a,e) \longrightarrow (x,u)$ et g est unique.
La condition 5 implique la 6 puisque

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, equal] \arrow[d, "J"'] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & C \arrow[d, "J"] \\
\overline{C} \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & \overline{C} \arrow[d, equal] \\
1 \arrow[r, "(a,e)"'] & \overline{C}
\end{tikzcd}$$

La condition 6 implique la condition 1. En effet, on a $Ja = e : (a,1) \longrightarrow (a,e)$ est flèche de $\overline{C}$, d'où $Ja^{\wedge} \longrightarrow (a,e)^{\wedge} \longrightarrow J : C \longrightarrow \overline{C}$, c'est-à-dire $J.a^{\wedge} \longrightarrow J.Id_C$. On en déduit $\varphi : a^{\wedge} \longrightarrow Id_C$, car J est pleinement fidèle.
La condition 8 implique la condition 7. En effet, soit $e : a \longrightarrow a$ tel que $e.j = e$, alors $e^2 = e$ car $e^2.j = e^2$. Pour tout x , il existe $f : a \longrightarrow x$ tel que $f.j = f$ et $f.e = f$ résulte de $f.e.j = f.e$ et $f.j = f$. Enfin, si $f,g : a \longrightarrow x$ vérifient $f.e = f$ et $g.e = g$, alors $f.j = f.e.j = f.e = f$ et $g.j = g.e.j = g.e = g$, de sorte que $f = g$.

Remarques.

Si $j: b \longrightarrow a$ est flèche de C et a est Kar-initial, alors b est aussi Kar-initial car b est faiblement initial et $a \xrightarrow[e]{} a \xrightarrow[s]{} b$ vérifie $f.s.e = g.s.e$. Donc, si C possède un objet Kar-initial, faiblement initial équivaut à Kar-initial.

Deux objets Kar-initiaux (a,e) et (b,u) sont isomorphes dans $\overline{C}$, c'est-à-dire qu'il existe un unique couple $f: a \longrightarrow b$, $g: b \longrightarrow a$ tel que $f.g.f = f$, $g.f.g = g$, $g.f = e$ et $f.g = u$; autrement dit, f et g sont des inverses généralisés.

Notation et remarque.

E désignera la catégorie à un objet et deux morphismes 1 et 0, avec $0.0 = 0$, par exemple le monoïde associé au $\wedge$-treillis $0 \longrightarrow 1$.

La condition 7 devient alors:

- il existe un carré exact

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, equal] \arrow[d] & C \arrow[d, "\Delta"] \\ 1 \arrow[r, "(a,e)"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & C^E \end{tikzcd}$$

(C^E n'est pas la complétion idempotente de C).

On notera que sous cette forme, une généralisation semble possible.

Proposition.

Soit $e: a \longrightarrow a$ Kar-initial dans A et un foncteur $\partial: A \longrightarrow B$. ∂ est initial ssi $\partial e: \partial a \longrightarrow \partial a$ est Kar-initial dans B .

Démonstration.

Si $\partial e: \partial a \longrightarrow \partial a$ est Kar-initial et b est objet de B , il existe $t: a \longrightarrow x$ et ∂e égalise φa et $f.\partial t$:

$$\begin{tikzcd} \partial a \arrow[drr, "\varphi a"'] & & \partial a \arrow[ll, "\partial e"'] \arrow[rr, "\partial e"] \arrow[d] & & \partial a \arrow[rr, "\partial t"] \arrow[dll] & & \partial x \arrow[dllll, "f"] \\ & & b & & & & \end{tikzcd}$$

La réciproque est évidente.

Corollaire.

A possède un objet Kar-initial ssi il existe un foncteur initial $E \longrightarrow A$.

Démonstration.

En effet, 0 est Kar-initial dans E .

Proposition.

A possède un objet Kar-initial ssi il existe $A \xrightarrow{J} B \xrightarrow{P} A$ vérifiant $P.J = 1$ et B a un objet initial b.

Démonstration.

En effet, on obtient $k: b \longrightarrow JPb$ et $Pk: Pb \longrightarrow Pb$ est Kar-initial.

Exemples.

Dans une catégorie à un objet, e est Kar-initial ssi e est absorbant à droite.

Dans une catégorie à flèches nulles, tout $0: a \longrightarrow a$ est Kar-initial et Kar-final.

Si A possède un objet final 1 , tout $a \longrightarrow 1 \longrightarrow a$ est Kar-final.

Remarque.

Si A possède un objet Kar-final, A est arbitrairement cofiltrante, en ce sens que pour tout foncteur $F : I \longrightarrow A$ il existe $F \longrightarrow a^{\wedge}$ (en raison de $\varphi : Id_A \longrightarrow a^{\wedge}$).

<u>Définitions</u>.

Soit A et C des catégories.

Une A-<u>présentation de</u> C est un foncteur final $A \longrightarrow C$.

Si $\pi : X^{op} \longrightarrow ENS$ est un foncteur, une A-<u>présentation de</u> π est une A-présentation de $K'(\pi)$ (produit croisé), i. e. un foncteur final $A \longrightarrow K'(\pi)$, ou,de manière équivalente, un carré exact

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, dash] & 1 \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "Yoneda"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \hat{X}
\end{tikzcd}$$

car

$$\begin{tikzcd}
K'(\pi) \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "Yoneda"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & \hat{X}
\end{tikzcd}$$

est un carré comma (en raison des propriétés des Yoneda-Structures, π admet une A-présentation ssi π est une A-colimite de foncteurs représentables - ce qui justifie la terminologie).

Soit $\pi : Y \relbar\!\!\!+\!\!\!\longrightarrow X$ un distributeur. Une A-<u>présentation de</u> π est un carré exact

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "T"] \arrow[d, "S"'] & Y \arrow[d, "V"] \\
X \arrow[r, "U"'] \arrow[ur, phantom, "\Uparrow"] & B
\end{tikzcd}$$

où π U.V (π admet donc une A-présentation ssi il existe une extension ponctuelle

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, shift left=4, "\Rightarrow"] & Y \arrow[d, "\pi"] \\
X \arrow[r, "Yoneda"'] & \hat{X}
\end{tikzcd}$$

).

Théorème.

Si C est A-cofiltrante et admet une A-présentation, alors C possède un objet Kar-final.

Réciproquement, si C possède un objet Kar-final, C est A-cofiltrante pour toute catégorie A et admet une présentation finie.

En particulier, C possède un objet Kar-final ssi C est finiment cofiltrante et admet une présentation finie. C'est la version catégorique de l'équivalence:

" projectif de type fini"

équivaut à

" plat et de présentation finie"

car un R-module P est plat ssi la catégorie produit croisé associée au foncteur $\mathrm{Mat}R \xrightarrow[P]{} \mathrm{Ab} \xrightarrow[\text{oubli}]{} \mathrm{ENS}$ est finiment cofiltrante et admet une présentation finie ssi il existe une suite exacte

$R^m \longrightarrow R^n \longrightarrow P \longrightarrow 0$, c'est-à-dire P est une colimite finie de modules libres de types finis.

Démonstration.

Soit $\partial : A \longrightarrow C$ un foncteur final et supposons que C est A-cofiltrante. On en déduit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & 1 \arrow[d, equal] \\ C \arrow[r] & 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \arrow[d, equal] \\ C \arrow[r] \arrow[ur, equal] & 1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\partial"'] & 1 \arrow[d, "c"] \\ C \arrow[r, equal] & C \end{tikzcd}$$

d'où

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r] \arrow[d, equal] & 1 \arrow[d, "c"] \\ C \arrow[r, equal] & C \end{tikzcd}$$

et e est Kar-final.

<u>Remarques.</u>

Le theorème précédent généralise le théorème d'adjonction de Freyd assurant l'existence d'un objet final à partir d'un ensemble de solutions et d'hypothèses de complétude. Ainsi:

1. Si C possède une famille d'objets $(a_i)_{i\in I}$ <u>faiblement finale</u> (i. e. pour tout objet x de C, il existe $x \longrightarrow a_i$ et si tout diagramme $\longleftarrow \qquad \longrightarrow$ peut être complété en un carré commutatif) alors l'inclusion $A \longrightarrow C$ de la sous-catégorie pleine de C ayant pour objets les a_i est un foncteur final car

$$\begin{tikzcd}
 & x \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
a_i \arrow[dr] \arrow[ddr] & = & a_j \arrow[dl] \arrow[ddl] \\
= & y \arrow[d] & = \\
 & a_k &
\end{tikzcd} ;$$

en particulier, si α est un ordinal régulier tel que A soit α-petite et C soit α-cofiltrante, alors C possède un objet Kar-final.

2. Un foncteur final $A \longrightarrow C$ peut être interprèté comme un "<u>ensemble de solutions</u>" au niveau des objets mais aussi <u>au niveau des morphismes</u>: ainsi, l'inclusion (non nécessairement pleine) $(b \xrightarrow[r_i]{} a) \longrightarrow C$ est un foncteur final ssi, pour tout objet x de C, il existe $f: x \longrightarrow a$ et, pour toute paire $f,g: x \longrightarrow a$, on a $f = g$ ou encore il existe des suites finies $a_0, a_1, \dots, a_n : x \longrightarrow b$ et $r_0, r_1, \dots, r_{2n+1} : b \longrightarrow a$ telles que

$$f = r_0.a_0 \quad , \quad r_1.a_0 = r_2.a_1 \quad , \quad r_3.a_1 = r_4.a_2 \quad ,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$r_{2n-1}.a_{n-1} = r_{2n}.a_n \quad , \quad r_{2n+1} . a_n = g .$$

Proposition (équivalences dans DIST).

Soit $J: A \longrightarrow B$ un foncteur.

Les assertions suivantes sont équivalentes:

1 J est pleinement et copleinement fidèle ,

2. $J^\circ \longrightarrow\!\!\mid J \quad (\alpha,\beta)$ avec α et β des isomorphismes,

3. J est une équivalence entre A et B au niveau de la bicatégorie des distributeurs.

Démonstration.

On sait que $J \longrightarrow\!\!\mid J^\circ \quad (\varepsilon,\eta)$ et que J est pleinement (copleinement) fidèle ssi ε (η) est un isomorphisme.

Montrons que 1 implique 2. En effet, $J^\circ\eta \,.\, \varepsilon J^\circ = 1$ et $\eta J \,.\, J\varepsilon = 1$ impliquent $\varepsilon^{-1}J^\circ \,.\, J^\circ\eta^{-1} = 1$ et $J\varepsilon^{-1} \,.\, \eta^{-1}J = 1$, c'est-à-dire $J^\circ \longrightarrow\!\!\mid J \quad (\varepsilon^{-1},\eta^{-1})$.

Il est évident que 2 implique 3 .

La condition 3 implique la condition 2 car, si $J \longrightarrow\!\!\mid \sigma$, alors $\sigma \simeq J^\circ$.

Enfin, la condition 2 implique la 1 car $J^\circ \longrightarrow\!\!\mid J \quad (\alpha,\beta)$ implique $J \longrightarrow\!\!\mid J^\circ \quad (\beta^{-1},\alpha^{-1})$.

Proposition.

Un foncteur pleinement et copleinement fidèle préserve et réfèchit toutes les limites gauches et droites.

Démonstration.

Soit $J: A \longrightarrow B$ un foncteur pleinement et copleinement fidèle $F: I \longrightarrow A$ un foncteur de limite gauche $a^\wedge \xrightarrow{\varphi} F$ et $b^\wedge \xrightarrow{\psi} JF$. Il existe $b \xrightarrow{s} Jx \xrightarrow{q} b = Id_b$ d'où $Jx^\wedge \xrightarrow{q^\wedge} b^\wedge \xrightarrow{\psi} JF = J(x^\wedge \xrightarrow{\lambda} F)$ et $x \xrightarrow{t} a$ tel que $\varphi . t^\wedge = \lambda$. On en déduit $b \xrightarrow{s} Jx \xrightarrow{Jt} Ja$ tel que:

$J\varphi.Jt^\wedge.s^\wedge = J(\varphi.t^\wedge).s^\wedge = J\lambda.s^\wedge = \psi.q^\wedge.s^\wedge = \psi$.
Si $u,v\colon b \longrightarrow Ja$ sont tels que $J\varphi.u^\wedge = J\varphi.v^\wedge$, alors $J\varphi.u^\wedge.q^\wedge = J\varphi.v^\wedge.q^\wedge$. Si l'on pose $Jx \xrightarrow{q} b \xrightarrow{u} Ja = Jm$ et $Jx \xrightarrow{q} b \xrightarrow{v} Ja = Jn$, on a $J\varphi. Jm^\wedge = J\varphi. Jn^\wedge$ et $\varphi.m^\wedge = \varphi.n^\wedge$, où $m,n\colon x \longrightarrow a$. Il en résulte que $m = n$ et donc $u.q = v.q$, de sorte que $u = v$ (q étant un épimorphisme).
La démonstration pour les limites droites est identique.

Proposition.

Soit

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
X \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/"] & B
\end{tikzcd}$$

un carré commutatif dans CAT.
Ce carré est exact dès que s et v sont pleinement et copleinement fidèles (ou bien si t et u sont pleinement et copleinement fidèles).
Alors t et u ont les mêmes propriétés de continuité.

Démonstration.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "s"'] & Y \arrow[d, "v"] \\
X \arrow[r, "u"'] \arrow[ur, phantom, "/\!/"] \arrow[d, "u"'] & B \arrow[d, equal] \\
B \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\text{exact}"] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t"] \arrow[d, "t"'] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & Y \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, equal] \arrow[d, "v"'] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & Y \arrow[d, "v"] \\
B \arrow[r, equal] & B
\end{tikzcd}$$

Corollaire.

Si

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
A \arrow[rr] \arrow[d] & & Y \arrow[dr, "\varepsilon Y"] \arrow[d] \arrow[dll, phantom, "\varphi \curvearrowright"] & \\
X \arrow[rr, dash] \arrow[dr, "\varepsilon X"'] & & B \arrow[dr, "\varepsilon B"] \arrow[r, phantom, "="] & \bar{Y} \arrow[d] \\
& \bar{X} \arrow[rr] \arrow[ur, phantom, "="] & & \bar{B}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
A \arrow[rr] \arrow[dr, "\varepsilon A"] \arrow[dd] & & Y \arrow[dr, "\varepsilon Y"] \arrow[dl, phantom, "="] & \\
& \bar{A} \arrow[rr] \arrow[dd] \arrow[dl, phantom, "="] & & \bar{Y} \arrow[dd] \arrow[ddll, phantom, "\bar{\varphi} \curvearrowright"] \\
X \arrow[dr, "\varepsilon X"'] & & & \\
& \bar{X} \arrow[rr] & & \bar{B}
\end{tikzcd}
$$

et si εA , εX , εY et εB sont pleinement et copleinement fidèles, alors φ est exact ssi $\bar{\varphi}$ est exact.

Théorème.

La complètion idempotente $A \longrightarrow \bar{A}$ est pleinement et copleinement fidèle et le 2-foncteur associé $CAT \xrightarrow[\overline{(-)}]{} CAT$ préserve et réflèchit les carrés exacts.

Démonstration.

En effet, pour tout $(a,e) \in \mathrm{Ob}\,\bar{A}$, on a

$$(a,e) \xrightarrow{e} (a,1) \xrightarrow{e} (a,e) = Id_{(a,e)}$$

et on applique ensuite le corollaire précédent.

Considérons les distributeurs $1 \xrightarrow{\pi} A \xrightarrow{\sigma} 1$

c'est-à-dire $A^{op} \xrightarrow{\pi} ENS \xleftarrow{\sigma} A$.

On a $\pi \dashv \sigma$ (ε, η) ssi il existe un objet a de A ,

$m \in \pi a$, $n \in \sigma a$ et $\eta : \pi \times \quad \longrightarrow A(-,-) : A^{op} \times A \longrightarrow ENS$

vérifiant, pour tout $(x,r) \in \mathrm{Ob}K'\pi$ et $(y,s) \in \mathrm{Ob}\,K\sigma$,

$$
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "r"'] \arrow[dr, "m"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
\pi x & & \pi a \arrow[ll]
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dl, "n"'] \arrow[dr, "s"] \arrow[d, phantom, "="] & \\
\sigma a \arrow[rr] & & \sigma y
\end{tikzcd}
$$

$$x \xrightarrow{\eta(r,n)} a \qquad\qquad a \xrightarrow{\eta(m,s)} y$$

$$\pi x \times \sigma a \xrightarrow[\eta]{} (x,a) \qquad\qquad \pi a \times \sigma y \xrightarrow[\eta]{} (a,y)$$

$1 \xrightarrow{\sigma\pi} 1 = \int^a \pi a \times \sigma a$ = ensemble des composantes connexes de la catégorie $\pi \diamond \sigma$, schématisée par $f: (m,a,n) \longrightarrow (\overline{m},\overline{a},\overline{n})$ où $a \in \mathrm{Ob}\, A$, $m \in \pi a$, $n \in \sigma a$, $f: a \longrightarrow \overline{a} \in A$, $\pi(f)\, \overline{m} = m$, $\sigma(f)\, n = \overline{n}$.

Une présentation équivalente est donnée par la proposition qui suit.

Proposition.

On a $\pi \longrightarrow\!\!\!\mid \sigma \ (\varepsilon, \eta)$ ssi il existe:

1. $a \in \mathrm{Ob}\, A$, $m \in \pi a$, $n \in \sigma a$,
2. des transformations naturelles $\varphi : \pi \xrightarrow{\varphi} (-,a)$ et $\psi : \sigma \longrightarrow (a,-)$

vérifiant:

(i) $\pi \xrightarrow{\varphi} (-,a) \xrightarrow{\lambda^m} \pi = \mathrm{Id}_\pi$,

(ii) $\sigma \xrightarrow{\psi} (a,-) \xrightarrow{\lambda^n} \sigma = \mathrm{Id}_\sigma$,

(iii) $\varphi(a)\, m = \psi(a)\, n$.

Démonstration.

En effet, on passe d'une présentation à l'autre en posant:

$\varphi(x)\, r = \eta(x,a)(r,n)$, $\psi(y)\, s = \eta(a,y)(m,s)$ et

$\eta(x,y)(r,s) = \psi(y)\, s \,.\, \varphi(x)\, r$, $x \xrightarrow[\varphi(x)r]{} a \xrightarrow[\psi(y)s]{} y$.

Remarque.

Les associations $\eta \longleftrightarrow (\varphi,\psi)$ ne sont pas bijectives et " η est un isomorphisme " n'est pas équivalent à " φ et ψ sont des isomorphismes " .

Proposition.

Avec les notations de la proposition précédente, soit $a \in \mathrm{Ob}\, A$ et $m \in \pi a$. On obtient une bijection entre les transformations naturelles $\varphi : \pi \longrightarrow (-,a)$, vérifiant $\lambda^m . \varphi = \mathrm{Id}_\pi$,et les morphismes $e: (a,m) \longrightarrow (a,m)$, représentant (a,m) comme objet Kar-final de $K'(\pi)$, en posant:

1. $e = \varphi(a)(m)$;
2. Pour tout $x \in \mathrm{Ob}\,A$ et $r \in \pi x$, $\varphi(x)r : a \longrightarrow a$ est l' unique morphisme vérifiant, dans $K'\pi$,

$$(x,r) \xrightarrow{\varphi(x)r} (a,m) \xrightarrow{e} (a,m) = (x,r) \xrightarrow{\varphi(x)r} (a,m) .$$

Corollaire.

Soit $1 \overset{\pi}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+\;\,} A \overset{\sigma}{\longrightarrow\!\!\!\!\!+\;\,} 1$ des distributeurs.
On a $\pi \longrightarrow\!\!\!\!\!| \;\sigma$ ssi la catégorie $\pi \diamond \sigma$ possède un endomorphisme $(m,a,n) \xrightarrow{e} (m,a,n)$ (c'est-à-dire $m \in \pi a$, $n \in \sigma a$, $a \xrightarrow{e} a \in A$, $\pi(e)\, m = m$ et $\sigma(e)\, n = n$) tel que:

- $(a,m) \xrightarrow{e} (a,m)$ soit Kar-final dans $K'\pi$,
- $(a,n) \xrightarrow{e} (a,n)$ soit Kar-initial dans $K\sigma$.

Définition.

On dira qu'un foncteur $\sigma : A \longrightarrow \mathrm{ENS}$ est Kar-représentable ssi $K\sigma$ possède un objet Kar-initial.
Ainsi, en particulier, P est un R-module projectif de type fini ssi $\mathrm{Mat}\,R \longrightarrow \mathrm{Ab} \longrightarrow \mathrm{ENS}$ est Kar-représentable.

Théorème (cas particulier de distributeurs adjoints).

Soit $\sigma: A \longrightarrow \mathrm{ENS}$ un foncteur.
Les assertions suivantes sont équivalentes.

1. σ est Kar-représentable.

2. σ est une section d'un représentable, c'est-à-dire qu'il existe $\sigma \xrightarrow{\varphi} (a,-) \longrightarrow \sigma = \mathrm{Id}_\sigma$.

3. σ admet un adjoint à gauche dans la bicatégorie des distributeurs.

4. σ est isomorphe à la restriction d'un foncteur représentable de $\overline{A}$, c'est-à-dire

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\curvearrowright\sim"] & \bar{A} \arrow[dl, "{((a,e),-)}"] \\ & \mathrm{ENS} & \end{tikzcd} .$$

5. Il existe un carré exact

$$\begin{tikzcd} K\sigma \arrow[r, "\mathrm{Proj}"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ 1 \arrow[r, "{(a,e)}"'] \arrow[ur, phantom, "\curvearrowright"] & \bar{A} \end{tikzcd} .$$

6. σ est une colimite absolue de représentables.

7. Il existe un carré exact

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\mathrm{coYoneda}"] \\ 1 \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[ur, phantom, "\curvearrowright"] & \tilde{A} = (\mathrm{ENS}^{A})^{op} \end{tikzcd} .$$

En raison de 4. , σ a alors toutes les propriétés de continuité du représentable $((a,e),-)$. L'adjoint à gauche π de σ est, dans ces conditions, le sous-foncteur de $(-,a)$ tel que $\pi x = \{ f : x \longrightarrow a \ / \ e.f = f \}$.

<u>Démonstration.</u>

La condition 7 implique la condition 6 car toute E-colimite est une colimite absolue.
La condition 6 implique la 2 puisque si $\varphi : \partial \longrightarrow a^{\wedge} : I \longrightarrow A$ est une colimite absolue, il existe $a \longrightarrow \partial i \xrightarrow{\varphi i} a = \mathrm{Id}$.
La condition 2 implique la condition 7 car si l'on a $a \xrightarrow{p} e \xrightarrow{q} a = \mathrm{Id}_a$, alors a est une E-colimite (absolue) de $\partial : E \longrightarrow A$ tel que $\partial e = pq$.
La condition 5 équivaut à la condition 4 . En effet, un carré est $U\,S \xrightarrow{\varphi} V\,T$ est exact ssi $S\,T^{\circ} \xrightarrow{\Phi} U^{\circ}\,V$ est un isomorphisme.
La condition 5 implique la condition 3, puisque l'on a

$A \xrightarrow{\sigma}\!\!\!\!\!\!\!+\;\; 1 \quad A \xrightarrow{J}\!\!\!\!\!\!\!+\;\; \overline{A} \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; 1$, qui ont tous deux des adjoints à gauche dans DIST.

La condition 3 implique la 2, puisque l'on a montré que $\pi \dashv \sigma$ entraine l'existence de $\sigma \xrightarrow{\varphi} (a,-) \longrightarrow \sigma = Id_{\sigma}$.

La condition 2 implique la condition 1, car

$K\,\sigma \longrightarrow a \downarrow A \longrightarrow K\,\sigma = Id_{K\,\sigma}$, et, comme $a \downarrow A$ possède un initial, $K\,\sigma$ possède un Kar-initial.

La condition 1 implique la condition 5 puisque:

$$\begin{tikzcd}
K\,\sigma \arrow[r, equal] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & K\,\sigma \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & A \arrow[d] \\
1 \arrow[r] & \overline{K\,\sigma} \arrow[r] & \overline{A}
\end{tikzcd} .$$

Il reste à montrer que l'adjoint à gauche a la forme indiquée.

Soit $e\colon (a,n) \longrightarrow (a,n)$ Kar-initial dans $K\,\sigma$. Il en résulte que $(a,e) \xrightarrow{e} (a,e) \in K'\,\pi$. Il suffit alors de montrer que ce dernier morphisme est Kar-final dans $K'\,\pi$. Cela résulte de: $f\colon (b,f) \longrightarrow (a,e)$, pour tout $(b,f) \in \mathrm{Ob}\,K'\,\pi$, et, si $f,g\colon (b,f) \longrightarrow (a,e) \in K'\,\pi$, c'est-à-dire $\pi(f)\,e = \pi(g)\,e$, alors $e\,f = e\,g$.

Remarque.

Compte tenu des propriétés d'exactitude du 2-foncteur $\text{Ab-CAT} \xrightarrow{\text{Mat}} \text{Ab-CAT} \xrightarrow{\text{Oubli}} \text{CAT}$, on peut montrer que les modules projectifs de type fini sont ceux qui admettent un adjoint dans Ab-CAT.

Proposition (Lemme de Yoneda pour les foncteurs Kar-représentables).

- Tout idempotent de A , $e\colon a \longrightarrow a$, détermine un foncteur Kar-représentable contravariant

$$a_e\colon A \longrightarrow \overline{A} \xrightarrow{(-,(a,e))} \text{ENS}$$

c'est-à-dire que a_e est le sous-foncteur de $(-,a)$ tel que $a_e(x) = \{ f: x \longrightarrow a \ / \ e\, f = f \}$ et $e: (a,e) \longrightarrow (a,e)$ est Kar-final dans $K'(a,e)$.

- En raison du théorème précédent, tout foncteur Kar-représentable est isomorphe à un tel foncteur.

- Pour tout foncteur $\pi: A^{op} \longrightarrow ENS$, l'application $a_e \xrightarrow{\theta} \pi \xrightarrow{\ \Theta\ } \theta(a)\, e \in \pi\, a$ est une bijection entre les transformations naturelles $a_e \longrightarrow \pi$ et les points fixes de $\pi a \xrightarrow{\pi e} \pi a$, c'est-à-dire les $m \in \pi\, a$ tels que $\pi(e)\, m = m$.

La bijection réciproque $m \xrightarrow{\ \Theta\ } \theta$ telle que $\theta(x) f = \pi(f) m$ ($f: x \longrightarrow a$ vérifiant $e\, f = f$).

En particulier, les transformations naturelles $a_e \longrightarrow b_j$ sont en bijection avec les $f: a \longrightarrow b \in A$ tels que $j\, f\, e = f$.

- Par suite, les applications

$$(a,e) \xrightarrow{f} (b,j) \xrightarrow{\ \ \Theta\ \ } a_e \longrightarrow b_j$$

définissent une équivalence de catégories entre la complétion idempotente $\bar{A}$ et la sous-catégorie pleine de $\hat{A}$ formée des foncteurs Kar-représentables.

Corollaire.

Un A-module projectif à gauche de type fini P est, à isomorphisme près, une A-matrice idempotente $n \times m$, notée E, et une application linéaire $P \longrightarrow M$ équivaut à un système X de n éléments de M tel que $E\, X = X$.

Remarque.

Soit un foncteur $\pi: A^{op} \longrightarrow ENS$ de "type fini", c'est-à-dire que $K'(\pi)$ possède un objet faiblement final (a,n) ou $(-,a) \xrightarrow{\lambda^n} \pi$ est un épimorphisme.

Dans ces conditions, π est Kar-représentable ssi π est projectif dans la catégorie $\hat{A}$ des préfaisceaux sur A.

En effet, si $\varphi: \sigma \longrightarrow \tau : A^{op} \longrightarrow ENS$ est un épimorphisme et $\theta : a_e \longrightarrow \tau$ est quelconque, soit $n \in \sigma a$ tel que $\varphi(a)\, n = \theta(a)\, e$. Alors $\sigma(e)\, n \in \sigma(a)$ est un point fixe de $\sigma(e)$ et $\varphi(a)\, \sigma(e)\, n = \pi(e)\, \varphi(a)\, n = \pi(e)\, \theta(a)\, e = \theta(a)\, e$. D'où un unique $\psi : a_e \longrightarrow \sigma$ tel que $\psi(a)\, e = \sigma(e)\, n$. On en déduit que $\varphi . \psi = \theta$ car $\varphi a . \psi(a)\, e = \varphi(a)\, \sigma(e)\, n = \theta(a)\, e$. Réciproquement, comme $\lambda^n : (-,a) \longrightarrow \pi$ est un épimorphisme, il existe $\pi \longrightarrow (-,a) \longrightarrow \pi = Id_\pi$ et π est Kar-représentable.

<u>Théorème</u>.

Soit $S : A \longrightarrow B$ un foncteur.

Les conditions ci-dessous sont équivalentes.

1. $S^\circ : B \longrightarrow A$ a un adjoint à droite dans la bicatégorie des distributeurs.

2. Pour tout objet b de B , $S \Downarrow b$ a un objet Kar-final, c'est-à-dire un couple $\eta : Sa \longrightarrow b$, $e : a \longrightarrow a$ avec $\eta . Se = \eta$, vérifiant la propriété universelle suivante:
- pour tout $f : Sx \longrightarrow b$, il existe un unique $\hat{f} : x \longrightarrow a$ tel que $\eta . S\hat{f} = f$ et $e . \hat{f} = \hat{f}$ ($\eta . Su = \eta . Sv$, $e.u = u$ et $e.v = v$ entrainent donc $u = v$).

3. Pour tout objet b de B , il existe un carré exact:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "S"'] \arrow[ur, phantom, "\curvearrowright"] & B \end{tikzcd} .$$

4. Il existe un carré exact:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "S"] \arrow[d, equal] & B \arrow[d, "T"] \\ A \arrow[r, "J"'] \arrow[ur, phantom, "E"] & \bar{A} \end{tikzcd} .$$

5. $\bar{S} : \bar{A} \longrightarrow \bar{A}$ a un adjoint à droite.

6. Il existe un "foncteur non unitaire" $T : B \longrightarrow A$ et des transformations naturelles $\varepsilon : 1 \longrightarrow T\,S$, $\eta : S\,T \longrightarrow 1$ telles que:

- $T\eta \,.\, \varepsilon T = T(Id) = e$ et $\eta S \,.\, S\varepsilon = Id\, S$.

<u>Démonstration.</u>

La condition 1 implique la condition 2 puisque le distributeur composé $\pi = 1 \xrightarrow{b} B \underset{S^{op}}{\overset{+}{\longrightarrow}} A$ a un adjoint à droite, c'est-à-dire π est Kar-représentable ou $K'(\pi) = S \downarrow b$ admet un objet Kar-final.

Les conditions 2 et 3 sont équivalentes puisque la donnée d'un foncteur final $E \longrightarrow S\downarrow b$ équivaut à celle d'un carré exact de la forme indiquée.

La condition 3 implique la 4 qui est équivalente à la 6. En effet, pour tout objet b de B , on choisit un objet Kar-final $\tau b : (T\,b, \eta\,b) \xrightarrow{\;\cdot\;} (T\,b, \eta b)$ dans $S\downarrow b$. Pour toute flèche $u : b \longrightarrow c$ de B , il existe alors un unique $Tu : Tb \longrightarrow Tc$, appartenant à A , tel que

$\eta c.\, S\,T\,u = u\,.\,\eta b$ et $\tau c\,.\,T\,u = T\,u$.

Si $b \xrightarrow{u} c \xrightarrow{v} d$ appartient à B , on a $T(vu) = TvTu$

car $\eta d.\, STv \,.\, STu = v.\,\eta c \,.\, STu = v.u.\eta b = ST(vu).\eta b$,

$\tau d\, T(vu) = Tvu$ et $\tau d\, Tv\, Tu = Tv\, Tu$.

Mais $T(Id_b) = \tau b$, car $\eta b.ST(Id_b) = \eta b = \eta b.\, \tau b$,

$\tau b\, T(Id_b) = T(Id_b)$ et $\tau b \,.\, \tau b = \tau b$.

On obtient donc un foncteur non unitaire $T : B \longrightarrow A$ et une transformation naturelle $\eta : S\,T \longrightarrow 1$. En conséquence, T est un foncteur $B \longrightarrow \bar{A}$ tel que

$T(u : b \longrightarrow c\,) = (Tb, \tau b) \xrightarrow{Tu} (Tc, \tau c)$.

On définit, ensuite, pour tout objet a de A , $\varepsilon a : a \longrightarrow TSa$ au moyen de $\eta Sa.\, S\varepsilon a = Id_{Sa}$ et $\tau Sa \,.\, \varepsilon\, a = \varepsilon a$, de sorte que $Ja = (a,1) \xrightarrow{\varepsilon a} (TSa, \tau Sa)$. Alors, ε est naturelle et vérifie $T\eta b \,.\, \varepsilon T\, b = \tau\, b$.

Pour vérifier l'exactitude du carré ε , il suffit de montrer que les composés suivants sont exacts:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "{(Tb,\tau b)}"] \\ A \arrow[r, "J"'] \arrow[ur, phantom, "\curvearrowright"] & \bar{A} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} JTb \arrow[rr, "J\tau b"] \arrow[dr, "\tau b"'] & = & JTb \arrow[dl, "\tau b"] \\ & (Tb,\tau b) & \end{tikzcd} \quad .$$

Cela résulte aussitôt de

$(Tb,1) \xrightarrow{\tau b} (Tb,1) = (Tb,1) \xrightarrow{\tau b} (Tb,\ b) \xrightarrow{\tau b} (Tb,1)$

i. e. τb est scindé dans $\bar{A}$.

La condition 4 implique la condition 1 car $S^\circ \simeq J^\circ\ T$ et

$J^\circ \dashv J$.

La condition 4 implique la 5 car $(\bar{-})$ conserve les carrés exacts.

Enfin, la condition 5 implique la condition 4 puisque:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & A \arrow[r, "S"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}"] & \bar{A} \arrow[r, "\bar{S}"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{exact}\ \curvearrowright"] & \bar{B} \arrow[d] \\ A \arrow[r] & \bar{A} \arrow[r, equal] & \bar{A} \end{tikzcd} \quad .$$

<u>Remarque.</u>

Il résulte de 4 que S conserve toutes les limites droites et que S est un foncteur initial.

<u>Proposition.</u>

A possède un objet Kar-final ssi $A \longrightarrow 1$ possède un adjoint à droite dans la bicatégorie des distributeurs.

<u>Démonstration.</u>

Cela résulte aussitôt de la condition 4 précédente.

Remarque.

En raison des critères d'obtention d'un objet Kar-final, $S \downarrow b$ possède un objet Kar-final ssi il existe une catégorie I telle que:

1. $S \downarrow b$ soit I-filtrante, ce qui signifie

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "K"'] & 1 \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\varphi"] \\ A \arrow[r, "S"'] & B \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "K"'] & 1 \arrow[d, "a"] \arrow[r, equal] \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow"] & 1 \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\Rightarrow"] \\ A \arrow[r, equal] & A \arrow[r, "S"'] & B \end{tikzcd}$$

pour tout $\varphi: S\,K \longrightarrow b^{\wedge}$;

2. $S \downarrow b$ admet une I-présentation, c'est-à-dire qu'il existe un carré exact:

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r] \arrow[d, "F"'] & 1 \arrow[d, "b"] \arrow[dl, phantom, "\text{exact}\ \Rightarrow"] \\ A \arrow[r, "S"'] & B \end{tikzcd} .$$

Théorème (distributeurs adjoints).

Soit $\pi: Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\!\!\!\!\!\!\!\longrightarrow X$ un distributeur.

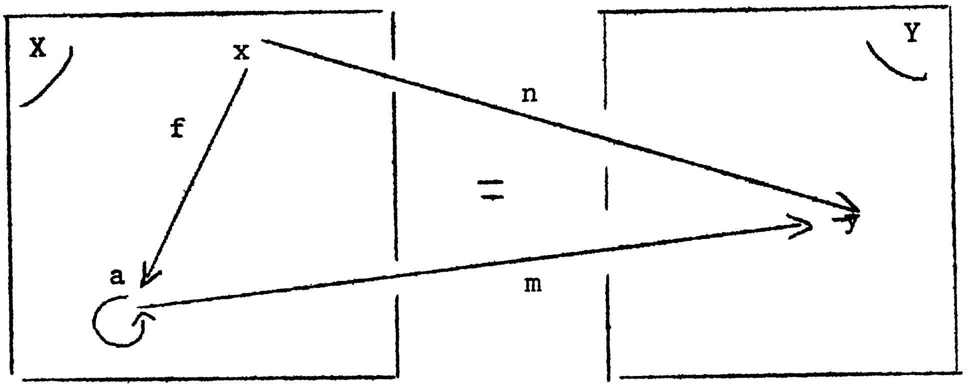
Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. π admet un adjoint à droite.

2. Pour tout objet y de Y, le distributeur composé $1 \xrightarrow{\ y\ } Y \xrightarrow{\ \pi\ } X$ a un adjoint à droite, c'est-à-dire $\pi(-,y): X^{op} \longrightarrow ENS$ est Kar-représentable, ou encore il existe un idempotent $e: a \longrightarrow a$ de X et $m \in \pi(a,y)$ avec $\pi(e,y)\, m = m$ vérifiant la propriété universelle suivante:

- pour tout objet x de X et tout $n \in \pi(x,y)$, il existe un unique $f: x \longrightarrow a$ tel que $\pi(f)\, m = n$ et $e\, f = f$;

Cela signifie également que, dans la catégorie joint de π on a:



3. Il existe un foncteur $V : Y \longrightarrow \overline{X}$ tel que $\pi \sim J^\circ V$,

$Y \xrightarrow{V} \overline{X} \xrightarrow{J^\circ} X$.

4. $\pi \sim U^\circ V$ et U° a un adjoint à droite.

5. $\pi \sim S\, T^\circ$ et T° a un adjoint à droite.

6. $\pi : Y \longrightarrow \widehat{X}$ est une extension absolue de représentables, c'est-à-dire qu'il existe un carré exact:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dl, phantom, shift left=3, "="] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "\text{Yoneda}"'] & \widehat{X} \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & \widehat{X} \end{tikzcd} .$$

<u>Démonstration.</u>

Il est évident que 1 implique 2.

La condition 2 implique la condition 4. En effet, si $X \xrightarrow{U} C \xleftarrow{V} Y$ représente le joint de π , la condition 2 signifie que, pour tout objet y de Y , $U \downarrow Vy$ possède un objet Kar-final. Comme U est pleinement fidèle, $U \downarrow Ux$ possède un objet final. Par suite U° possède un adjoint à droite et $\pi \sim U^\circ V$.

La condition 4 implique la condition 3 car, en raison du théorème précédent, $C \xrightarrow{U^\circ} X \sim C \xrightarrow{R} \overline{X} \xrightarrow{J^\circ} X$, de sorte que $\pi \sim U^\circ V \sim J^\circ R V$.

Il est clair que la condition 3 implique la condition 1.

La condition 4 implique la 5. En effet, on a:

$$\begin{tikzcd}
U\downarrow Vy \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{cartésien}"] & 1 \arrow[d, "y"] \\
A \arrow[r, "T"'] \arrow[d, "S"'] \arrow[dr, phantom, "\text{comma}"] & Y \arrow[d, "V"] \\
X \arrow[r, "U"'] & B
\end{tikzcd}$$.

Comme $U°$ possède un adjoint à droite, $U\downarrow Vy$ possède un objet Kar-final. Comme T est une cofibration, le carré cartésien supérieur est exact et $U\downarrow Vy \longrightarrow T\downarrow y$ est final, de sorte que $T\downarrow y$ possède aussi un objet Kar-final. Par suite, $T°$ possède un adjoint à droite.
La condition 5 implique la 6. En effet, soit $\pi \sim S\,T°$, où $T°$ a un adjoint à droite. Le diagramme ci-dessous

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{exact}"] & & 1 \arrow[d, "y"] \\
 & A \arrow[rr, "T"] \arrow[dl, "S"'] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl, "\pi"] \\
X \arrow[rr, "\text{Yoneda}"'] \arrow[r, phantom, "="] & & X &
\end{tikzcd}$$

représente une colimite, car le triangle inférieur est une extension ponctuelle. Or, toute E-colimite est une colimite absolue et, par suite, le triangle inférieur est une extension absolue.
La condition 6 implique la condition 2 car on remarque que $\pi(-,y)$ est une colimite absolue de représentables et est donc Kar-représentable.

<u>Proposition.</u>

On sait qu'un foncteur $J: X \longrightarrow Y$, pleinement et coplei-

nement fidèle, définit une équivalence $X \simeq Y$ dans la bicatégorie des distributeurs.
Réciproquement, si X et Y sont des catégories équivalentes dans DIST , alors il existe $X \xrightarrow{J} B \xleftarrow{K} Y$, où J et K sont pleinement et copleinement fidèles.
En général, si X et Y sont équivalentes dans DIST , cette équivalence n'est pas induite par un foncteur pleinement et copleinement fidèle $X \longrightarrow Y$ ou $Y \longrightarrow X$.

Démonstration.

Si $\pi : Y \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; X$ est une équivalence dans DIST , $\pi \simeq J^\circ V$, $Y \xrightarrow{V} \bar{X} \xrightarrow{J^\circ} X$, où V est un foncteur et J est pleinement et copleinement fidèle avec $J \dashv J^\circ \dashv J$.
Donc $\pi \simeq J^\circ V \dashv V^\circ J$ et, par suite, $J^\circ V V^\circ J \simeq 1$, d'où $J J^\circ V V^\circ J J^\circ \simeq J J^\circ$ ou $V V^\circ \simeq 1$. De même, $1 \simeq V^\circ J J^\circ V \simeq V^\circ V$. Finalement, on obtient $Y \xrightarrow{V} \bar{X} \xleftarrow{J} X$, où V et J sont pleinement et copleinement fidèles.
Pour construire un contre-exemple, il suffit de considérer une Ab-catégorie C contenant des objets a et b tels que les monoïdes (a,a) et (b,b) et $(a\oplus b, a\oplus b)$ soient deux à deux non isomorphes. Soit, alors X (resp. Y) la sous-catégorie pleine de C formée des objets a et $a\oplus b$ (resp. b et $a\oplus b$) et B la sous-catégorie pleine de C formée des objets a, b et $a\oplus b$. Il est immédiat que les inclusions $X \longrightarrow B \longleftarrow Y$ sont pleinement et copleinement fidèles, mais il n'existe pas de foncteur pleinement fidèle $X \longrightarrow Y$ ou $Y \longrightarrow X$.

Proposition (Gouzou-Grunig).

Les conditions ci-dessous sont équivalentes.
1. A est à idempotents scindés, c'est-à-dire E-cocomplète.
2. A est Cauchy-complète, c'est-à-dire que tout distributeur

$\pi : B \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\;\; A$ qui a un adjoint à droite est représentable, i. e. il existe un foncteur $K : B \longrightarrow A$ tel que $\pi \sim (-,K(-))$.

3. Tout foncteur $S : A \longrightarrow B$ tel que $B \xrightarrow{S^\circ} A$ possède un adjoint à droite dans la bicatégorie des distributeurs, possède un adjoint à droite T, i. e. $S \dashv T : B \longrightarrow A$.

4. Tout foncteur pleinement et copleinement fidèle $A \longrightarrow B$ est une équivalence de catégories.

Démonstration.

Il est évident que 2 implique 3, 3 implique 4 et 4 implique 1. La condition 1 implique la condition 2 car, si $\pi : B \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\;\; A$ a un adjoint à droite, on a montré que $\pi \sim J^\circ V$, où $B \xrightarrow{V} \bar{A} \xleftarrow{J} A$. Comme J est une équivalence, $J \dashv J^\circ \sim K : \bar{A} \longrightarrow A$, de sorte que $\pi \sim K V$.

Remarque.

Si A est une Ab-catégorie (additive), alors $\bar{A}$ est une Ab-catégorie (additive).

Si (a,e) et (b,j) sont objets de $\bar{A}$ et

$$a \underset{p}{\overset{m}{\rightleftarrows}} e \underset{q}{\overset{n}{\leftrightarrows}} b$$

est un biproduit dans A, alors

$$(a,e) \underset{ep}{\overset{me}{\rightleftarrows}} (c, m e p + n j q) \underset{jq}{\overset{nj}{\leftrightarrows}} (b,j)$$

est un biproduit dans $\bar{A}$.

Lemme.

Soit $\pi : B \longrightarrow\!\!\!\!\!\!+\;\; A$ un Ab-distributeur.

Si B est additive et si π est représentable dans CAT, c'est-à-dire s'il existe un foncteur $S: B \longrightarrow A$ et un isomorphisme de ENS-distributeurs $\varphi: \pi \longrightarrow A(-,S(-))$, alors S est un foncteur additif et les $\varphi(a,b)$ sont des isomorphismes de groupes, i. e. π est représentable dans Ab-CAT.

Démonstration.

On remarque, en effet, que, pour tout objet a de A , $A(a,S(-)) \sim \pi(a,-)$ est un foncteur additif $B \longrightarrow Ab$ et que $\varphi(a,b \oplus c) = \varphi(a,b) \oplus \varphi(a,c)$.

Proposition (Cauchy-complétude dans Ab-CAT).

Si A est Cauchy-complète dans Ab-CAT , alors A est Cauchy-complète dans CAT.
Si A est une catégorie additive (Ab-catégorie à biproduits), alors A est Cauchy-complète dans Ab-CAT ssi A est Cauchy-complète dans CAT.
Donc $\overline{\text{Mat } A}$ est Cauchy-complète dans CAT et Ab-CAT.

Démonstration.

Supposons A Cauchy-complète dans Ab-CAT. Comme $J: A \longrightarrow \bar{A}$ est pleinement et copleinement fidèle dans CAT et, a fortiori, dans Ab-CAT , il existe un Ab-foncteur $K: \bar{A} \longrightarrow A$ tel que $J^{\circ} \sim (-,K(-))$ dans Ab-DIST et, par suite, aussi dans ENS-DIST. Donc A et $\bar{A}$ sont équivalentes dans CAT.
Supposons A additive et Cauchy-complète dans CAT. Soit un Ab-distributeur $\pi: B \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; A$ tel que $\pi \dashv \sigma$ dans la bicatégorie des Ab-distributeurs. Comme $J \dashv J^{\circ}: B \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; \text{Mat } B$, on a encore $\pi J^{\circ} \dashv J\sigma : A \longrightarrow\!\!\!\!\!\!\!+\;\; \text{Mat } B$. Comme A et Mat B sont additives, $\pi J^{\circ} \dashv J\sigma$ dans la bicatégorie des ENS-distributeurs. Comme A est Cauchy-complète dans CAT, πJ° est représentable dans CAT et, en raison du lemme précédent, dans Ab-CAT , autrement dit il existe un foncteur additif

S: $\mathrm{Mat}\ B \longrightarrow A$ tel que $\pi J^\circ \sim S$ et, par suite, $\pi \sim \pi J^\circ J \sim S J$, de sorte que π est représentable dans Ab-CAT.

Théorème (Cauchy-complétude dans Ab-CAT - suite).

Soit A une Ab-catégorie.
Les conditions ci-dessous sont équivalentes.
1. A est Cauchy-complète dans Ab-CAT.
2. A est additive (à biproduits) et à idempotents scindés.
3. $A \longrightarrow \overline{\mathrm{Mat}\ A}$ est une équivalence de catégories dans CAT ou Ab-CAT.
4. Tout Ab-foncteur $K: A \longrightarrow X$ plein et copleinement fidèle dans Ab-CAT est une équivalence dans Ab-CAT ou CAT .

Démonstration.

Il résulte immédiatement de la proposition précédente que la condition 3 implique la condition 1.
La condition 1 implique la condition 4 car un foncteur K pleinement et copleinement fidèle dans Ab-CAT vérifie $K \dashv K^\circ \dashv K$ dans Ab-DIST .
La condition 4 implique la condition 3 car $A \longrightarrow \overline{\mathrm{Mat}\ A}$ est pleinement et copleinement fidèle dans Ab-CAT (mais pas dans CAT).

Corollaire.

Le Ab-foncteur $A \longrightarrow \overline{\mathrm{Mat}\ A}$ est la Cauchy-complétion de A dans Ab-CAT.
On a établi, par ailleurs, que $\overline{\mathrm{Mat}\ A}$ est équivalente aux foncteurs Kar-représentables, $\mathrm{Mat}\ A^{op} \longrightarrow \mathrm{Ab} \xrightarrow{\text{oubli}} \mathrm{ENS}$, correspondant aux A-modules (généralisés) à droite, projectifs, de type fini. Il en résulte que la Cauchy-complétion dans Ab-CAT d'un anneau A s'identifie à la catégorie des A-modules à droite projectifs et de type fini.

Théorème (Morita).

Soit A et B deux Ab-catégories.

Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. A et B sont équivalentes dans la bicatégorie Ab-DIST .
2. $\overline{\text{Mat A}}$ et $\overline{\text{Mat B}}$ sont équivalentes dans Ab-CAT .
3. Il existe un Ab-foncteur pleinement et copleinement fidèle $A \longrightarrow \overline{\text{Mat B}}$ (ou $B \longrightarrow \overline{\text{Mat A}}$) dans Ab-CAT .
4. Il existe $A \xrightarrow{J} X \xleftarrow{K} B$, où J et K sont pleinement et copleinement fidèles dans Ab-CAT .
5. $\overline{\text{Mat A}}$ et $\overline{\text{Mat B}}$ sont équivalentes dans CAT .
6. Mat A et Mat B sont équivalentes dans la bicatégorie des ENS-distributeurs.
7. Il existe un foncteur pleinement et copleinement fidèle Mat A $\longrightarrow \overline{\text{Mat B}}$ (ou Mat B $\longrightarrow \overline{\text{Mat A}}$) dans CAT.

Démonstration.

La condition 1 implique la condition 2 car on a $\overline{\text{Mat A}} \sim A \sim B \sim \overline{\text{Mat B}}$ dans Ab-DIST et l'équivalence $\overline{\text{Mat A}} \sim \overline{\text{Mat B}}$ est représentable, puisque $\overline{\text{Mat A}}$ et $\overline{\text{Mat B}}$ sont Cauchy-completes.

La condition 2 implique la 3 puisque $A \longrightarrow \overline{\text{Mat A}} \longrightarrow \overline{\text{Mat B}}$ est alors pleinement et copleinement fidèle dans Ab-CAT .

Il est évident que 3 implique 4 et que 4 implique 1 .

La condition 2 équivaut à la condition 5 . En effet, une équivalence dans Ab-CAT est une équivalence dans CAT . La réciproque est vraie car $\overline{\text{Mat A}}$ et $\overline{\text{Mat B}}$ sont additives, de sorte qu'une équivalence dans CAT est un foncteur additif.

Les conditions 5 , 6 et 7 sont équivalentes: c'est la propriété analogue non additive de l'équivalence des conditions 1, 2 et 3 et elle se démontre de la même façon.

Théorème (l'existence d'objets Kar-initiaux est une propriété de nature homologique).

Si A est une petite catégorie, le foncteur constant sur $\underline{Z}$

$\underline{Z}^*: A \longrightarrow Ab$ est projectif dans la catégorie abélienne des foncteurs $A \longrightarrow Ab$ (ou encore $EXT(\underline{Z}^*, \pi) = 0$, pour tout π) ssi chaque composante connexe de A possède un objet Kar-initial.

<u>Démonstration.</u>

Soit $A = \coprod_i A_i$ la décomposition de A en ses composantes connexes et, pour tout i, soit a_i un objet Kar-initial de A_i, au moyen de $\theta_i: a_i^* \longrightarrow Id_{A_i}$.

Alors $\underline{Z}^* \xrightarrow[\varepsilon]{} \sigma \underset{\lambda}{\twoheadleftarrow} \pi$ détermine

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, "r_i"] \arrow[dr, "\varepsilon a_i"'] & {} \arrow[d, phantom, "="] & \pi a_i \arrow[dl, "\lambda a_i"] \\ & \sigma a_i & \end{tikzcd}$$

pour tout i, car $\underline{Z}$ est projectif dans Ab .

Pour tout objet x de A, on définit ensuite

$$\varphi x : \underline{Z} \longrightarrow \pi x = \underline{Z} \xrightarrow[r_i]{} \pi a_i \xrightarrow[\pi(\theta_i x)]{} \pi x$$

lorsque x est objet de A_i .

On vérifie, alors, que φ est naturelle et que $\lambda . \varphi = \varepsilon$.

Supposons, maintenant, que $\underline{Z}^*$ est projectif.

On considère le foncteur

$$A \xrightarrow{\pi} Ab = A \xrightarrow{A\downarrow -} CAT \xrightarrow{Ob} ENS \xrightarrow{L} Ab ,$$

où le premier foncteur du second membre est le foncteur comma

$$a \xrightarrow{f} b \in A \xrightarrow{\Theta} A\downarrow a \xrightarrow{A\downarrow f} A\downarrow b \in CAT$$

et le dernier foncteur du second membre est le foncteur groupe abélien libre. Ainsi, on a:

$\pi(f)(z_1u_1 + \dots + z_nu_n) = z_1fu_1 + \dots + z_nfu_n$, lorsque, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $z_i \in \underline{Z}$ et $x_i \xrightarrow[u_i]{} a \xrightarrow[f]{} b \in A$.

Comme $Ob(A\downarrow a)$ est non vide pour tout a, on obtient un épimorphisme $\lambda: \pi \twoheadrightarrow \underline{Z}^*$ tel que:

$$\lambda(a)(z_1u_1 + \dots + z_nu_n) = z_1 + \dots + z_n .$$

Il existe donc $\varphi : \underline{Z}^{\wedge} \longrightarrow \pi$ tel que $\lambda . \varphi = \mathrm{Id}$.
Pour tout objet a de A , notons $V(a) = \{ u_1 , \dots , u_n \}$ l'ensemble des morphismes figurant dans $a = z_1 u_1 + \dots + z_n u_n$. On remarque que $V(a)$ n'est pas vide et que, pour toute flèche $f : a \longrightarrow b$ de A :

(✱) l'application

$$\begin{array}{ccc} V(a) & \longrightarrow & V(b) \\ u : x \longrightarrow a & \xrightarrow{\ \theta\ } & fu : x \longrightarrow b \end{array}$$

est une application partielle surjective.

Alors, si a est un objet arbitraire de A et $u : x \longrightarrow a$ appartient à $V(a)$, x est faiblement initial dans la composante connexe de a. En effet, soit un chemin

$$a \longrightarrow b_1 \longleftarrow b_2 \longrightarrow b_3 \longleftarrow b_4 \ \dots \quad ;$$

on choisit alors $l_1 \in V(b_1)$, $l_3 \in V(b_3)$, $l_5 \in V(b_5)$ ... et en utilisant la propriété (✱) on obtient:

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & \cdot \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[d, "l_1"] \arrow[dr] & & \cdot \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[d, "l_3"] \arrow[dr] & & \cdot \arrow[dl] \arrow[d, "l_5"] \\
a \arrow[r] & b_1 & b_2 \arrow[l] \arrow[r] & b_3 & b_4 \arrow[l] \arrow[r] & b_5 \cdots ;
\end{tikzcd}$$

on raisonne de même pour un chemin $a \longleftarrow \cdot \longrightarrow \dots$
Après avoir choisi dans chaque composante connexe A_i un objet faiblement initial a_i , on construit un nouveau foncteur $A \xrightarrow{\ \pi\ } Ab = A \longrightarrow ENS \xrightarrow{\ L\ } Ab$, où le premier foncteur du second membre est défini au moyen de $A_i \xrightarrow{\ inf\ } A \longrightarrow ENS = A_i \xrightarrow[(a_i,-)]{} ENS$.
En d'autres termes, si $x \in A_i$, πx est le groupe abélien libre sur l'ensemble (a_i, x) . Ces ensembles étant non vides, on obtient encore un épimorphisme $\lambda : \pi \longrightarrow\!\!\!\!\!\to \underline{Z}^{\wedge}$, tel que: $\lambda(x)(z_1 u_1 + \dots + z_n u_n) = z_1 + \dots + z_n$, où $u_j : a_i \longrightarrow x \in A$ et $z_j \in \underline{Z}$, et par suite $\varphi : \underline{Z}^{\wedge} \longrightarrow \pi$ tel que $\lambda . \varphi = \mathrm{Id}$.

Montrons qu'en fait a_i est Kar-initial dans A_i .
Soit $\varphi a_i = z_1u_1+ \dots +z_nu_n$, où $u_j: a_i \longrightarrow a_i$. Donc $z_1 + \dots + z_n = 1$, car $\lambda.\varphi = \mathrm{Id}$ et $\pi(u_j)\varphi a_i = \varphi a_i$, pour tout $j = 1, \dots , n$, car φ est naturelle.
Il en résulte que la composition définit une loi de groupe sur $\{u_1, \dots ,u_n\}$. Dans ces conditions, si u_k est l'élément neutre de ce groupe, la relation $z_1u_ju_1+ \dots + z_nu_ju_n = z_1u_1+ \dots +z_nu_n$ entraine que $z_k = z_j$ et , par suite, $z_1 = \dots = z_n$.
Comme $z_1+ \dots + z_n = 1$, on a $n = 1$ et $\varphi a_i = 1e_i$, où $e_i: a_i \longrightarrow a_i$. Pour tout objet x de A_i , $\varphi x: \underline{Z} \longrightarrow \pi x$ est donc aussi réduit à un morphisme $a_i \longrightarrow x$, affecté du coefficient 1 , car pour tout $t: a_i \longrightarrow x$ on a l'égalité $\varphi x = \pi(t).\varphi a = t\, e_i$. Cela montre aussi que $e_i: a_i \longrightarrow a_i$ est Kar-initial dans A_i .

REFERENCES.

M.-F. Gouzou et R. Grunig, Distributeurs internes à une bicatégorie exacte, Séminaire J. Bénabou de Théorie des Catégories, 1974.

R. Guitart et L. Van Den Bril, Calcul des satellites et présentation des bimodules à l'aide des carrés exacts, à paraitre.

R. Paré, exposé au Séminaire de Catégories, Oberwolfach, Juillet 1973.

R. Börger et W. Tholen, Absehwächungen das adjunktions begriffs, Preprint, Fernuniversität, Hagen.