DIAGRAMMES

GUIDO PALIAS

Structures quasi-métriques

Diagrammes, tome 6 (1981), exp. nº 6, p. P1-P24
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__6__A6_0>

Diagrammes, Vol.6, 1981.

STRUCTURES QUASI-METRIQUES.

(Généralités. Exemples. Applications)

par

Guido Palias

Introduction.

On sait que tout groupe topologique possède des structures uniformes sous-jacentes (par exemple, la structure uniforme gauche). Dans le cas de la structure plus générale de catégorie topologique, il n'y a pas de telle structure uniforme sous-jacente, mais il y a par contre une structure "quasi-uniforme" (introduite en {2}). Une telle structure sur un ensemble E consiste en la donnée d'une partition $(E_i)_{i\in I}$ de E et d'une application φ de I dans l'ensemble des filtres sur $E \times E$ telle que le filtre $\varphi(i)$ définisse par restriction à $E_i \times E_i$ une structure uniforme ; de plus, les filtres $\varphi(i)$ satisfont entre eux un axiome de "corrélation".

Dans le cas d'une catégorie topologique "microtransitive" Ψ-stricte (voir {2}), la structure quasi-uniforme sous-jacente se construit explicitement. Si de plus il s'agit d'un groupoïde, les E_i sont exactement les "fibres" Hom(A,B) et I n'est autre que l'ensemble des couples (A,B) d'objets de la catégorie.

Si $I = \{i\}$, la quasi-uniformité se réduit à une uniformité (cas des groupes topologiques). Si par contre la partition est celle des singletons $(\{x\})_{x \in E}$, alors la quasi-uniformité devient une topologie "pure et simple" (cas des catégories discrètes).

La notion de filtre de Cauchy s'étend au cas des structures quasi-uniformes. L'existence d'une complétion séparée d'une quasi-uniformité a été établie en {2}. Ici, on donne à ce sujet quelques précisions, et on construit explicitement la complétion d'une quasi-uniformité séparée satisfaisant une condition supplémentaire.

De même que l'uniformité généralise la structure métrique, la quasi-uniformité "stipule" l'existence de structure quasi-métrique. Effectivement, ce type de structure est introduit dans {3}. La topologie sous-jacente d'un espace quasi-métrique est accessible et les filtres de la quasi-uniformité sous-jacente sont à bases dénombrables. Inversement, si ces propriétés "nécessaires" sont vérifiées par une quasi-uniformité à partition finie, et présentant une certaine symétrie de cohésion, alors on peut construire explicitement un espace quasi-métrique dont la quasi-uniformité sous-jacente soit celle donnée (Théorème 1).

Des exemples "non triviaux" et "intéressants" de structures quasi-métriques sont présentés ici. Quelques applications aux espaces fonctionnels usuels sont envisagées. Finalement, on définit une structure quasi-métrique naturelle sur l'espace des applications d'un ensemble X quelconque dans un espace quasi-métrique.

Je tiens à exprimer ici ma reconnaissance à Laurent Coppey et Christian Lair pour les échanges fructueux et stimulants que j'ai pu avoir avec eux.

I. Définitions des structures quasi-métriques et exemples.

Les définitions qui suivent diffèrent un peu des définitions originelles (voir {3}) , mais de façon inessentielle.

Définition 1.m . Un quasi-écart (en abrégé Qé) sur un ensemble E est la donnée d'un triplet $s = ((E_i)_{i \in I}, \partial, \epsilon)$ où :

- $(E_i)_{i \in I}$ est une partition de E ,
- $\partial = (\partial_i)_{i \in I}$ est une famille d'applications partielles de $E \times E$ dans l'ensemble $\overline{\mathbb{R}}^+$,
- ϵ est une application d'une partie de $I \times I$ dans $\overline{\mathbb{R}}^+$,

ces données étant soumises aux axiomes suivants :

(Qé 1) (Axiome de stabilité des domaines).

- Pour tout $i \in I$, le domaine $\mathrm{dom}(\partial_i)$ est symétrique et contient la diagonale de E_i , que nous noterons $//E_i$.
- La diagonale $//I$ est contenue dans le domaine $\mathrm{dom}(\epsilon)$, et nous noterons ϵ_i la valeur de ϵ en (i,i).
- Pour qu'un couple (j,i) , avec $j \neq i$, soit dans $\mathrm{dom}(\epsilon)$, il faut et il suffit qu'il existe dans E_j au moins un point x tel que $\partial_i(x,x) \leq \epsilon_i$, et nous noterons ϵ_{ji} la valeur de ϵ en (j,i). Pour un tel couple (j,i) , $\partial_i^{-1}(0,\epsilon_i) \circ \partial_j^{-1}(0,\epsilon_{ji})$ doit être contenu dans $\mathrm{dom}(\partial_i)$.

(Qé 2) Pour tout $i \in I$ et pour tout $x \in E_i$, $\partial_i(x,x) = 0$.

(Qé 3) (Axiome de symétrie). Pour tout $i \in I$ et pour tout $(x,y) \in \mathrm{dom}(\partial_i)$, on a l'égalité : $\partial_i(x,y) = \partial_i(y,x)$.

(Qé 4) (Axiome de Q-triangularité). Si les conditions de petitesse suivantes sont satisfaites :

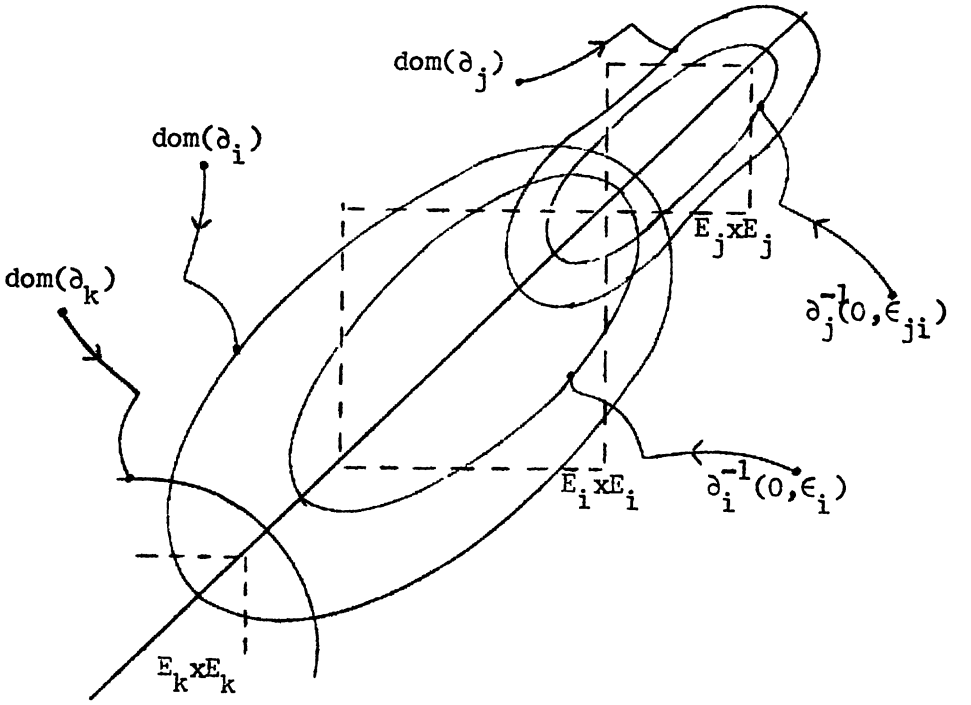
$$\partial_i(x,y) \leq \epsilon_i \quad \text{et} \quad \partial_j(y,z) \leq \epsilon_{ji} ,$$

alors on a l'inégalité :

$$\partial_i(x,z) \leq \partial_i(x,y) + \partial_j(y,z) .$$

(Remarquons que $(x,z) \in \mathrm{dom}(\partial_i)$ est une conséquence de Qé 1)
Nous faisons aussi la convention, dans l'énoncé de cet axiome, que lorsque $i = j$, alors ϵ_{ii} n'est autre que ϵ_i !

Voici une figure destinée à mieux "mémoriser" cette relativement longue définition:



<u>Légende</u>.

$(j,i) \in \mathrm{dom}(\epsilon)$

$(i,k) \notin \mathrm{dom}(\epsilon)$

$(k,i) \in \mathrm{dom}(\epsilon)$

$//E_i \cap \mathrm{dom}(\partial_k) = \emptyset.$

Définition 2.m . Une quasi-métrique (en abrégé Qm) est un quasi-écart $s = ((E_i)_{i\in I}, \partial, \epsilon)$ vérifiant en outre les deux conditions suivantes :

(i) pour tout $i \in I$ et pour tout $(x,y) \in \mathrm{dom}(\partial_i)$, on a $\partial_i(x,y) < \infty$.

(ii) si $\partial_i(x,y) = 0$ et si $x \in E_i$, alors $x = y$.

Conventions. Si l'inégalité $\epsilon_{ji} \geq \sup(\partial_i)$ est satisfaite quel que soit (j,i) dans le domaine de ϵ, les restrictions imposées dans (Qé 4) n'ont plus de raison d'être et on peut omettre carrément ϵ de la notation. Si $\epsilon_{ji} = \epsilon_i$ quel que soit $j \in I$, on peut considérer ϵ comme une application de I dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Evidemment, un quasi-écart $s = ((E_i)_{i\in I}, \partial, \epsilon)$ détermine une topologie sous-jacente sur $E = \bigcup_{i\in I} E_i$, celle dont le filtre des voisinages du point $x \in E_i$ est engendré par les boules $B_i(x,\frac{1}{n}) = \{y \mid \partial_i(x,y) < \frac{1}{n}\}$, où $n = 1,2,3,\ldots$. Ainsi, le filtre des voisinages de tout point admet une base dénombrable. Le quasi-écart s admet une quasi-uniformité sous-jacente, soit $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$, dont les filtres $\varphi(i)$ sont engendrés par les ensembles $\{\partial_i^{-1}(0,\frac{1}{n})\}$, où $n = 1,2,3,\ldots$; donc, tout filtre $\varphi(i)$ de la quasi-uniformité sous-jacente admet une base dénombrable.

Proposition 1. La topologie sous-jacente d'une structure quasi-métrique $s = ((E_i)_{i\in I}, \partial, \epsilon)$ est accessible.

Preuve. Pour tout $x \in E$, il existe $i \in I$ tel que $x \in E_i$. Soit $y \in E$, avec $y \neq x$. Si $(x,y) \in \mathrm{dom}(\partial_i)$, alors $\partial_i(x,y) = r > 0$ et par conséquent la boule $B_i(x,r)$ est un voisinage ouvert de x ne contenant pas y. Si, au contraire, $(x,y) \notin \mathrm{dom}(\partial_i)$, alors la boule $B_i(x,1)$ est un voisinage ouvert de x ne contenant pas y.

<u>Exemple d'espace Qm non séparé.</u>

Soit $E = E_o \cup E_1 \cup E_2$, où

$E_o = [0 , 1]$, $E_1 =]1 , 2[$ et $E_2 = \{2\}$.

Prenons $\mathrm{dom}(\partial_o) = (E_o \cup E_1)^2$, $\mathrm{dom}(\partial_1) = E_1^2$, et enfin $\mathrm{dom}(\partial_2) = (E_1 \cup E_2)^2$. En ce qui concerne les valeurs, on pose:

$\partial_o(x,y) = \min\{|x - y| , |x - 2 + y|\}$et $\partial_1(x,y) = \partial_2(x,y) = |x - y|$.

Enfin, choisissant $\epsilon \geq 2$, nous constituons un espace quasi métrique non séparé, car tout voisinage de 0 rencontre tout voisinage de 2 !

Tout espace métrique (E,d) peut être considéré comme un espace quasi-métrique trivial (E, ∂ , ϵ) dans lequel la partition est triviale (i.e. n'a qu'un seul élément E !), où $\partial = d$ et où $\epsilon \geq \sup(d)$. Mais, par contre, il existe des espaces quasi-métriques de ce genre $(E , \partial , \epsilon)$, où la partition sous-jacente est triviale, où $\mathrm{dom}(\partial) = E^2$, et qui ne sont pourtant pas des espaces métriques . En voici un exemple: $(\mathbb{R} , \partial , 1/2)$, avec

$$\begin{aligned} \partial(x,y) &= |x - y| \text{ si } |x - y| \leq 1 \\ &= (x - y)^2 \text{ si } |x - y| \geq 1 . \end{aligned}$$

C'est bien un espace Qm, mais non un espace métrique, car l'axiome de l'inégalité triangulaire n'est que localement vérifié. La topologie sous-jacente est toujours la topologie naturelle de $\mathbb{R}$. Cependant, un tel espace Qm $(E , \partial , \epsilon)$ est séparé et admet un espace métrique (E,d) qui lui est uniformément équivalent,i.e. admettant la même uniformité sous-jacente : supposant l'espace Qm normalisé, il suffit de prendre $d(x,y) = \partial(x,y)$, si $(x,y) \in \mathrm{dom}(\partial)$ et $\partial(x,y) < \epsilon$, et $d(x,y) = 1$ autrement.

Plus généralement, tout sous-espace E_i d'un espace quasi-métrique $s = ((E_i)_{i\in I} , \partial , \epsilon)$ admet un espace métrique (E_i,d_i) équivalent dont l'uniformité sous-jacente est engendrée par les ensembles $\{\partial_i^{-1}(0,\frac{1}{n}) \cap E_i \times E_i\}_{n \geq 1}$, et tel que

$$d_i(x,y) = \partial_i(x,y) \quad \text{si} \quad (x,y) \in \text{dom}(\partial_i) \quad \text{et} \quad \partial_i(x,y) \leq \epsilon_i.$$

Exemples spécifiques. Les exemples les plus "intéressants" d'espaces quasi-métriques sont bien sûr des espaces non métrisables , a fortiori non "écartisables", i.e. ceux dont la topologie n'est pas définissable par un écart.

Il faut donc chercher

(I) soit du côté des uniformités n'admettant pas de bases dénombrables

(II) soit du côté des espaces topologiques carrément non uniformisables.

Dans l'étude qui suit, nous nous servons des propositions classiques suivantes de topologie générale (voir {1}) :

Proposition B1 . Pour un espace métrisable (ou écartisable) E , il est équivalent de dire que E est de type dénombrable ou que E a un sous-espace dénombrable dense dans E.

Proposition B2 . Un espace topologique E est métrisable si et seulement si il est séparé et admet une uniformité à base dénombrable.

Proposition B3 . Tout ensemble totalement ordonné dont la topologie est engendrée soit par les intervalles ouverts, soit par les intervalles semi-ouverts à gauche, soit par les intervalles semi-ouverts à droite, est un espace complètement normal.

Exemple du genre (I). Soit $E = [0,1]$ muni de la topologie "D" engendrée par les intervalles semi-ouverts à droite ; alors, les ensembles $E \cap [x, x + 1/n[$, avec $n = 1,2,3,\ldots$, constituent une base dénombrable de voisinages de x . Cette topologie, plus fine que la topologie naturelle sur E , est donc séparée. Est-elle uniformisable ? D'après la proposition B3 ci-dessus, l'espace est complètement normal, et par conséquent uniformisable. L'espace est-il métrisable ? Constatons que les rationnels dans E forment une partie partout dense, aussi bien pour la topologie naturelle de E que pour la topologie "D". Donc, d'après la proposition B1, si notre espace est métrisable, il doit admettre une base dénombrable pour sa topologie ! Or ceci est manifestement faux : supposons que $\{[a_n,b_n[\ ,\ a_n < b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ soit une base dénombrable de "D"; comme E est non dénombrable, il existe $x \in E$, distinct des a_n et des b_n , $x \neq 1$, de sorte que l'intervalle $[x,y[$, avec $x < y \leq 1$, n'est pas engendré par cette base, d'où la contradiction. Ainsi notre espace n'est pas métrisable, et par conséquent, toute uniformité compatible avec sa topologie n'admet pas non plus de base dénombrable, vu la proposition B2. Par le même raisonnement, aucun sous-espace non dénombrable de E n'est métrisable. Par contre, toujours par le même raisonnement, tout sous-espace dénombrable de E est métrisable. Remarquons enfin que notre espace (E,D) n'est ni compact, ni même localement compact.

Munissons alors E de la structure suivante: $s = ((\{x\})_{x\in E},\partial)$ où $\mathrm{dom}(\partial_x) = [x,1]^2$ et $\partial_x(y,z) = |y - z|$. Est-ce une structure Qm ? Manifestement les axiomes d'une structure Qm sont bien vérifiés, en particulier l'axiome de Q-triangularité est "globalement" vérifié, ainsi que l'axiome de stabilité des domaines . La topologie sous-jacente à cette structure Qm est bien la topologie D, car le filtre des voisinages du point x est engendré par les "boules" $B_x(x,1/n)$ qui coïncident avec les intervalles semi-ouverts $[x,x+1/n[$. Existe-t-il d'autres structures Qm sur E dont la partition sous-jacente ne soit pas celle des singletons ? Quoiqu'il en soit, l'espace étant séparé, chaque E_i doit être métrisable. Donc, vu la remarque ci-dessus, les E_i sont au plus dénombrables et ne peuvent, en particulier, contenir d'intervalle.

Le même genre d'exemples peut être fourni par un ensemble totalement ordonné non dénombrable, par exemple la section des ordinaux de 0 à aleph_1.

<u>Exemple du genre</u> (II). Considérons la droite réelle $\mathbb{R} = E_o \cup E_1$ où E_o est l'ensemble des rationnels et E_1 l'ensemble des irrationnels. Pour les points de E_o nous maintenons les voisinages usuels, tandis que nous "raréfions" les voisinages des points de E_1 en y enlevant les points de E_o. Nous obtenons ainsi une topologie sur $\mathbb{R}$ plus fine que la topologie usuelle, et pour la quelle l'ensemble E_1 des irrationnels est manifestement ouvert, et donc l'ensemble E_o des rationnels se trouve être un fermé. Comme on ne peut pas séparer un irrationnel de E_o, il s'en suit que cet espace n'est pas quasi-régulier, et que sa topologie n'est donc pas uniformisable !

Soit $s = ((E_i)_{i=o,1}, \partial)$, où $\text{dom}(\partial_o) = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\partial_o(x,y) = |x - y|$, et $\text{dom}(\partial_1) = E_1 \times E_1$, avec $\partial_1(x,y) = |x - y|$ aussi. Ceci définit bien une structure Qm sur $\mathbb{R}$ dont la topologie est bien celle décrite plus haut.

Voici un autre exemple du même genre. L'ensemble sous-jacent: $E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} E_m$ où $E_0 = \underset{-}{Z}$, et $E_m = \{\underline{+}\, k/_p n\}$, avec $n > 0$, k entier > 0, p étant le $m^{\text{ième}}$ nombre premier et non facteur dans k. Nous définissons ensuite $\partial = (\partial_m)_{m \geq 0}$, en posant $\text{dom}(\partial_m) = (E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_m)^2$ et $\partial_m(x,y) = |x - y|$. Alors $s = ((E_m)_{m \geq 0}, \partial)$ est manifestement une structure Qm et sa topologie sous-jacente est plus fine que la topologie naturelle induite sur E par celle de $\mathbb{R}$. Cependant, cet espace E n'est pas quasi-régulier (donc non uniformisable !) : en effet, E_0 est un ouvert (donc $E - E_0$ est un fermé) et un point n de E_0 ne peut être séparé du fermé $E - E_0$, car celui-ci a pour unique voisinage l'espace tout entier E !

On peut multiplier les exemples de ces deux genres, en effectuant simplement des petites perturbations des topologies des espaces usuels.

II. Quasi-uniformités .

Définition 0. On appelle quasi-uniformité sur E la donnée d'un couple $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$, dans lequel $(E_i)_{i\in I}$ est une partition de E et φ une application de I dans l'ensemble des filtres de $E \times E$ vérifiant :

(A) Si $i \in I$, tout $U \in \varphi(i)$ contient la diagonale $//E_i$, et tout filtre $\varphi(i)$ admet une base symétrique.

(B) Pour tout $U \in \varphi(i)$, il existe un $V \in \varphi(i)$ symétrique tel que les conditions "$k \in I$ et $V \cap //E_k \neq \emptyset$" entraînent l'existence d'un $W \in \varphi(k)$ pour lequel $V \circ W \subset U$.

Notons tout de suite les deux cas extrêmes:
(i) $I = \{i\}$; alors $\varphi(i)$ est une uniformité sur $E = E_i$.
(ii) Si T est une topologie sur E , et, si pour tout $x \in E$, $\varphi(x)$ est le filtre ayant pour base l'ensemble des $V(x) \times V(x)$, où $V(x)$ parcourt une base de voisinages de x , alors $((\{x\})_{x\in E}, \varphi)$ est une structure quasi-uniforme sur E que l'on notera $\gamma(T)$.

On notera Qu pour "structure quasi-uniforme" ou "quasi-uniformité".

Une Qu $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$ sur E induit une topologie $\tau(u)$ sur E , dont le filtre des voisinages d'un point $x \in E_i$ est l'ensemble des $U(x)$, $U \in \varphi(i)$, où on a posé $U(x) = \{y/(x,y) \in U\}$.

On dira qu'une structure Qu est "séparée (resp. compacte,..) selon que la topologie sous-jacente $\tau(u)$ est séparée (resp. compacte,..).

Evidemment, la restriction du filtre $\varphi(i)$ à $E_i \times E_i$ définit sur E_i une uniformité.

<u>Définition 1</u>. Soient $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$ et $v = ((F_j)_{j\in J}, \psi)$ des quasi-uniformités sur les ensembles E et F respectivement. On dit que (v,f,u) est une <u>application quasi-uniforme</u> si f est une application de E dans F telle que, pour tout $i \in I$, il existe $j\in J$ satisfaisant:

(1) $f(E_i) \subset F_j$,

(2) quel que soit $W \in \psi(j)$, il existe $V \in \varphi(i)$ tel que $(f\times f)(V) \subset W$.

Revenant aux cas extrêmes ci-dessus, nous voyons que:

- si u et v se réduisent à des uniformités, f n'est autre qu'une application uniforme,
- si les partitions associées à u et v se réduisent aux singletons, f est simplement une application continue.

<u>Définition 2</u>. Soit $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$ une Qu sur E et soit F un sous ensemble de E. La <u>sous-Qu "induite" par</u> u <u>sur</u> F est donnée par $v = ((F_j)_{j\in J}, \psi)$ où $J = \{j \in I \ / \ F \cap E_j = F_j \neq \emptyset\}$ et $\psi(j)$ est la restriction de $\varphi(j)$ à $F \times F$.

<u>Proposition 2</u>. Tout filtre $\varphi(i)$ admet une base symétrique $\mathcal{B}(i)$ telle que, quel que soit $U \in \mathcal{B}(i)$ et $(x,y) \in U$, alors (x,x) et $(y,y) \in U$.

<u>Preuve</u>. Soit $U \in \varphi(i)$. L'axiome (B) des Qu assure l'existence d'un V symétrique, $V \in \varphi(i)$, $V \subset U$, satisfaisant $V \circ V \subset U$. On a alors les inclusions suivantes : $V \subset \overset{\approx}{V} \subset U$, où, pour tout

$W \in \varphi(i)$, $\overset{\prime}{W}$ est défini en ajoutant à W les couples (z,z) tels qu'il existe x pour lequel (x,z) ou $(z,x) \in W$. L'ensemble $\mathcal{B}(i)$ des $\overset{\prime}{U}$, où U parcourt l'ensemble des éléments symétriques de $\varphi(i)$ est bien une base symétrique de $\varphi(i)$ ayant la propriété voulue .

Définition 3. Une quasi-uniformité $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$ est dite stricte si, pour tout $i \in I$, le filtre $\varphi(i)$ admet une base formée d'éléments U ayant la propriété suivante :

quel que soit $(y,z) \in U$, il existe $x \in E_i$ tel que (y,x) et $(z,x) \in U$.

Dans les deux cas "extrêmes" ci-dessus (uniformités et topologies) la structure Qu est stricte. La catégorie Qu des applications quasi-uniformes entre Qu est à projections dans la sous-catégorie pleine Qus ayant pour objets les Qu strictes : soit $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$ une Qu sur E ; l'application Q-uniforme de "projection" $u \longrightarrow v$ a pour application sous-jacente l'identité, et la structure Qus v est définie par $v = ((E_i)_{i\in I}, \psi_s)$ où, pour tout $i \in I$, $\psi_s(i)$ est le filtre engendré par les éléments de la forme $\bigcup_{x \in E_i} (V(x) \times V(x))$, où $V(x)$ est un voisinage de x pour la topologie sous-jacente à u .

Définition 4. Une base $\mathcal{B}(i)$ de $\varphi(i)$ sera dite connectée si elle satisfait l'axiome des Qu strictes (cf. définition 3) et la condition indiquée dans la proposition 2 .

Convention. Dans la suite, sauf mention explicite du contraire, les structures Qu considérées sont censées être des Qus et toute base des $\varphi(i)$ est supposée connectée.

Avant de passer à la construction d'un Qé associé à une Qu convenable, voici quelques propositions et définitions supplémentaires dont nous aurons besoin par la suite, de toute façon.

Proposition 3. Soit $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$ une Qu sur E et soit $T \subset E_i \times E_i$. Alors la fermeture de T est donnée par :

$$\overline{T} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}(i)} (U \circ T \circ U)$$

et tout $U \circ T \circ U$ est voisinage de T , où $\mathcal{B}(i)$ est une base (connectée) de $\varphi(i)$.

Preuve. Notons d'abord que $U \circ T \circ U = \bigcup_{(x,y)\in T} U(x) \times U(y)$ pourvu que U soit symétrique, et ainsi, lorsque $U \in \mathcal{B}(i)$, $U \circ T \circ U$ est bien un voisinage de T car $U(x) \times U(y)$ est un voisinage de (x,y).

Soit alors $(a,b) \in \bigcap_{U\in \mathcal{B}(i)} U \circ T \circ U$.

Pour tout $U \in \mathcal{B}(i)$, il existe $(x,y) \in T$ tel que (a,x) et $(y,b) \in U$; comme $\{U(a) \times U(b)\}_{U\in \mathcal{B}(i)}$ est une base de voisinages du point (a,b) , il s'en suit que $(a,b) \in \overline{T}$. L'inclusion inverse est évidente .

Corollaire 1. Soit $i \in I$, alors $/\!/E_i = \bigcap_{U\in \mathcal{B}(i)} U \circ U = \bigcap_{V\in \mathcal{B}(i)} V$.

Preuve. La proposition 3 établit que $/\!/E_i = \bigcap_{U\in \mathcal{B}(i)} U \circ /\!/E_i \circ U$.

Il est clair que, pour tout $U \in \mathcal{B}(i)$, on a: $U \circ /\!/E_i \circ U \subset U \circ U$, d'où une première inclusion. Réciproquement, soit $U \in \mathcal{B}(i)$; on sait qu'il existe $V \in \mathcal{B}(i)$ tel que $V \subset U$ et $V \circ V \subset U$; soit $(a,b) \in V \circ V$; il existe $x \in E_i$ tel que (a,x) et $(x,b) \in V \circ V$;

alors, on a :

$$(a,b) = (a,x) \circ (x,x) \circ (x,b) \in (V \circ V) \circ /\!/E_i \circ (V \circ V) \subset U \circ /\!/E_i \circ U ,$$

de sorte que $V \circ V \subset U \circ /\!/E_i \circ U$, ce qui montre l'inclusion dans l'autre sens.

Comme dans le cas uniforme , le filtre $\varphi(i)$ est moins fin que le filtre des voisinages de $/\!/E_i$, soit $\mathcal{V}_i$: ceci résulte immédiatement de ce qui précède. Dans certains cas, il peut y avoir coïncidence, comme le prouve la proposition :

<u>Proposition 4</u>. Soit $u = ((E_i)_{i \in I}, \varphi)$ une Qu telle que E_i soit quasi-compact. Alors les filtres $\varphi(i)$ et $\mathcal{V}_i$ coïncident.

<u>Preuve</u>. Soit toujours $\mathcal{B}(i)$ une base (connectée) de $\varphi(i)$ et soit $\Omega \in \mathcal{V}_i$. Pour tout $x \in E_i$, il existe $U_x \in \mathcal{B}(i)$ tel que $U_x(x) \times U_x(x) \subset \Omega$; pour chaque $x \in E_i$, soit $V_x \in \mathcal{B}(i)$ tel que $V_x \subset U_x$ et $V_x \circ V_x \subset U_x$. Comme la famille $\{V_x(x)\}_{x \in E_i}$ recouvre le quasi-compact E_i , il existe une famille finie extraite des V_x , soit $\{V_a\}_{a \in F}$, $F \subset E_i$, F fini, telle que les $V_a(a)$, $a \in F$, recouvrent encore E_i . Enfin, il existe $W \in \mathcal{B}(i)$ tel que $W \circ W \subset V_a$, quel que soit $a \in F$. Montrons alors l'inclusion $W \subset \Omega$; soit $(x,y) \in W$; d'une part il existe $z \in E_i$ tel que (x,z) et $(z,y) \in W$; d'autre part il existe $a \in F$ tel que $z \in V_a(a)$, soit encore (a,z) et $(z,a) \in V_a$; ainsi, on a:

$$(x,y) = (x,z) \circ (z,a) \circ (a,z) \circ (z,y) \in V_a^4 \subset U_a^2 ,$$

mais $U_a^2 \subset U_a(a) \times U_a(a) \subset \Omega$, de sorte que $W \subset \Omega$ et $\Omega \in \varphi(i)$.

Notons que si u est séparée , alors $\bigcap_{U \in \mathcal{B}(i)} (U \cap (E_i \times E)) = /\!/E_i$; en effet, si $(a,x) \in E_i \times E$, avec $a \neq x$, il existe $V \in \mathcal{B}(i)$

tel que $x \notin V(a)$, de sorte que $\bigcap_{U \in \mathcal{B}(i)} (U \cap (E_i x E)) \subset //E_i$, d'où en fait l'égalité.

<u>Définition 5</u>. Soit $u = ((E_i)_{i \in I}, \varphi)$ une structure Qu sur E. On dira que l'indice j est <u>bien connecté</u> à l'indice i lorsque pour tout $U \in \varphi(i)$ l'intersection $U \cap //E_j$ est non vide .

Une suite $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n)$ est dite <u>Q-connexe</u> si chaque indice est bien connecté à l'indice précédent (sauf pour i_0!). Dans ce cas, on dit que i_n est connecté à i_0.

Une suite $(i_0, i_1, i_2, \ldots, i_n)$ sera dite <u>trans-connexe</u> si elle est Q-connexe et si chaque indice $i_1, i_2, \ldots, i_n$ est bien connecté à i_0. La suite sera dite <u>pleinement trans-connexe</u> si toutes les suites $(i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n)$, avec $k = 1,2,\ldots,n-1$, sont trans-connexes.

<u>Proposition 5</u>. Soit $u = ((E_i)_{i \in I}, \varphi)$ une structure Qu sur E. Si tout voisinage de E_i rencontre E_j , alors l'indice j est bien connecté à l'indice i . L'hypothèse n'est cependant pas nécessaire (contre-exemple), mais toutefois elle devient nécessaire si l'on suppose E_i quasi-compact.

<u>Preuve</u>. Soit $V \in \mathcal{B}(i)$, base (connectée) de $\varphi(i)$. Alors, la réunion Ω des $V(x)$, lorsque x parcourt E_i , est un voisinage de E_i , et, par hypothèse, il existe $z \in \Omega \cap E_j$; par conséquent, il existe $x \in E_i$ tel que $(x,z) \in V$, d'où $(z,z) \in V$. Comme V est quelconque dans une certaine base de $\varphi(i)$, nous en concluons que j est bien connecté à i .

Le contre-exemple suivant montre que l'hypothèse portant sur les voisinages n'est pas nécessaire. Prenons une partition de $E = [0,2]-\{1\}$ en deux éléments ouverts disjoints $E_1 = [0,1[$ et $E_2 =]1,2]$; prenons $\varphi(1) = \varphi(2)$ = le filtre des entourages de la structure uniforme naturelle induite par la structure uniforme usuelle de $\mathbb{R}$ associée à la valeur absolue. Chacun des deux indices est bien connecté à l'autre, cependant E_1 et E_2 qui sont ouverts ne se rencontrent pas ! Enfin, si E_i est quasi-compact , on sait, par la proposition 4 , que $\varphi(i)$ est le filtre des voisinages de $//E_i$, ce qui achève la preuve.

Proposition 6. Soit $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ une suite Q-connexe. Si pour toute suite $(U_1,U_2,\ldots,U_n)$, avec $U_k \in \varphi(i_k)$, il existe une suite de points $(x_0,x_1,\ldots,x_n)$ satisfaisant $(x_0,x_1) \in U_1$, $(x_1,x_2) \in U_2$,..., $(x_{n-1},x_n) \in U_n$, alors la suite $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ est pleinement trans-connexe.

Preuve. Soient k et p des entiers tels que $0 \leq k < k+p \leq n$, et soit $U \in \mathcal{B}(i_k)$, base (connectée) du filtre $\varphi(i_k)$. Comme i_{k+1} est bien connecté à i_k , il existe $W_0 \in \mathcal{B}(i_k)$ et $V_1 \in \mathcal{B}(i_{k+1})$ tels que $W_0 \circ V_1 \subset U$ (axiome B) . De proche en proche, on définit une suite $W_0 \circ W_1, W_2, \ldots, W_{p-1}, W_p = V_p$, où $W_q \in \mathcal{B}(i_q)$ et telle que $W_0 \circ W_1 \circ \ldots \circ W_{p-1} \circ W_p \subset U$. De l'hypothèse résulte l'existence d'une suite $(x_{-1},x_0,\ldots,x_p)$ satisfaisant $(x_{-1},x_0) \in W_0$, $(x_0,x_1) \in W_1$, ... , $(x_{p-1},x_p) \in W_p$. Comme les bases sont connectées , il existe $y \in E_{i_{k+p}}$ tel que $(x_{p-1},y) \in W_p$; alors $(x_{-1},y) \in U$, d'où $(y,y) \in U$ et $U \cap //E_{i_{k+p}} \neq \emptyset$. Il s'en suit que i_{k+p} est bien connecté à i_k .

Venons-en alors au résultat principal de cette partie :

Théorème 1. Soit $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$ une structure Qu satisfaisant les trois conditions suivantes :

(I) I est fini .

(II) Tout filtre $\varphi(i)$ admet une base dénombrable.

(III) La relation de "bonne connection" entre indices est symétrique.

Alors , il existe un Qé $s = ((E_i)_{i\in I}, \partial, \in)$ dont la structure Qu sous-jacente est u .

Démonstration. Nous allons construire explicitement un quasi-écart sur E compatible avec u .

Existence de "bonnes" bases de filtres.

La condition (II) assure l'existence, pour tout $i \in I$, d'une base emboitée de $\varphi(i)$, soit $T^i_0 \supset T^i_1 \supset T^i_2 \supset \ldots$
Nous allons en extraire une base $(U^i_n = T^i_{k_n})_{n \geq 0}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

(b1) $U^i_0 \cap /\!/E_j = \emptyset$ si et seulement si j est bien connecté à i,

(b2) Si (i,j,k) est une suite Q-connexe à trois termes, alors

$$U^i_{n+1} \circ U^j_{n+1} \circ U^k_{n+1} \subset U^i_n \quad .$$

Soit n_{ij} le plus petit entier tel que $T^i_{n_{ij}} \cap /\!/E_j = \emptyset$, s'il en existe, et $n_{ij} = 0$ autrement. Posons $m_i = \sup_{j\in I} n_{ij}$; alors la suite $(T^i_{m_i+n})_{n \geq 0}$ est une base de $\varphi(i)$ satisfaisant (b1).
Extrayons de $(T^i_{m_i+n})_{n \geq 0}$ une base "intermédiaire" $(U'^i_n)_{n \geq 0}$ satisfaisant, outre (b1), la propriété suivante:

(b'2) Si j est bien connecté à i , alors

$$U'^i_{n+1} \circ U'^j_{n+1} \subset U'^i_n \; ;$$

à cet effet, prenons $U'^i_0 = T^i_{m_i}$ et supposons $U'^i_n = T^i_{m_i+n_i}$ déjà construit ; d'après l'axiome (B) des Qu , il existe un plus petit entier p_i tel que $T^i_{m_i+n_i+p_i}$ ait la propriété suivante :

pour tout j convenable (voir l'axiome B), et c'est le cas si j est bien connecté à i , il existe $V \in \mathcal{B}(j)$ tel que

$$T^i_{m_i+n_i+p_i} \circ V \subset U'^i_n \; ;$$

ces p_i étant choisis , définissons p_{ij} , lorsque j est bien connecté à i , comme le plus petit entier pour lequel :

$$T^i_{m_i+n_i+p_i} \circ T^j_{m_j+n_j+p_{ij}} \subset U'^i_n = T^i_{m_i+n_i} \quad ;$$

autrement, on prend $p_{ij} = 0$; posons alors

$$q_i = \sup (p_i , \sup_{j\in I} p_{ij}) \quad \text{et} \quad U'^i_{n+1} = T^i_{m_i+n_i+q_i} .$$

La famille de bases $(U'^i_n)_{n\geq 0}$ ainsi extraites satisfait donc (b1) et (b'2) . Pour avoir les "bonnes" bases, i.e. celles qui satisfont (b1) et (b2) , il suffit de prendre $U^i_n = U'^i_{2n}$.

<u>Définition des "distances non symétriques"</u> $\partial'_i : U^i_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+$.

Pour tout $i \in I$, soit $d_i : U^i_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ défini par

$d_i(x,y) = 1/_2n$ s'il existe $n \geq 0$ tel que $(x,y) \in U^i_n - U^i_{n+1}$,
$\qquad = 0$ si non .

Définissons alors des $\partial'_i : U^i_0 \longrightarrow \mathbb{R}^+$ par la condition suivante:

$$\partial'_i(x,y) = \inf\{ \sum_{j=0}^{n-1} d_{\alpha(j)}(z_j,z_{j+1})\} \quad ,$$

où $\alpha(0) = i$, $\alpha(1)$, $\alpha(2)$, ... , $\alpha(n-1)$ est une suite Q-connexe d'indices de I ,
où $(z_j,z_{j+1}) \in U^{\alpha(j)}_0$ pour $j = 0,1,2,\dots,n-1$, avec $z_0 = x$ et $z_n = y$,
où, enfin, la borne inférieure est prise sur l'ensemble des sommes que l'on peut constituer ainsi .

<u>L'inégalité fondamentale.</u>

Montrons que $d_i(x,y) \geq \partial'_i(x,y) \geq 1/2 \; d_i(x,y)$.

La première inégalité est évidente. Quant à la seconde, elle est manifestement vraie pour $\partial'_i(x,y) \geq 1/2$ car $d_i(x,y) \leq 1$.

Nous supposons donc $r = \sum_{j=0}^{n-1} d_{\alpha(j)}(z_j, z_{j+1}) < 1/2$,

et nous établissons, par récurrence sur n , les trois points suivants :

(a) $(x, z_j) \in U_1^i$, pour $j = 1, 2, \ldots, n$;

(b) $\alpha(j)$ est bien connecté à $\alpha(0) = i$, pour $j = 1, 2, \ldots, n-1$;

(c) $r \geq 1/2\ d_i(x,y)$.

Ces points sont manifestement vérifiés pour $n = 1$. Supposons-les vérifiés pour $m < n$, et reprenons les notations précédentes pour les établir à l'ordre n ; il existe un indice h pour lequel:

$$\sum_{j<h} d_{\alpha(j)}(z_j, z_{j+1}) \leq r/2 \quad \text{et} \quad \sum_{j<h+1} d_{\alpha(j)}(z_j, z_{j+1}) > r/2 ,$$

d'où $\sum_{j>h} d_{\alpha(j)}(z_j, z_{j+1}) \leq r/2$. L'hypothèse de récurrence entraîne aussitôt que :

$$\left.\begin{array}{l} (x, z_j) \in U_1^i , \\ \alpha(j-1) \text{ est bien connecté à } \alpha(0) = i \\ d_i(x, z_j) \leq 2(r/2) = r , \end{array}\right\} \text{ pour } j = 1, 2, \ldots h.$$

§ Montrons d'abord que $\alpha(h)$ est bien connecté à i , et puis que $(x, z_{h+1}) \in U_1^i$. Comme $d_{\alpha(h)}(z_h, z_{h+1}) < 1/2$, on a $(z_h, z_{h+1}) \in U_2^{\alpha(h)}$, et il existe $a \in E_{\alpha(h)}$ tel que $(z_h, a) \in U_2^{\alpha(h)}$. D'autre part, $d_{\alpha(h-1)}(z_h, z_h) \leq d_{\alpha(h-1)}(z_{h-1}, z_h) \leq r/2 < 1/4$, d'où il suit que $(z_h, z_h) \in U_3^{\alpha(h-1)}$; alors on a :

$$(z_h, a) = (z_h, z_h) o (z_h, a) \in U_3^{\alpha(h-1)} o\ U_2^{\alpha(h)} \subset U_1^{\alpha(h-1)} .$$

Vu que $d_i(x, z_h) \leq r < 1/2$, on a $(x, z_h) \in U_2^i$, et par conséquent:

$$(x, a) = (x, z_h) o (z_h, a) \in U_2^i \ o\ U_1^{\alpha(h-1)} \subset U_0^i \ ;$$

alors $(a,a) \in U_0^i$ et $\alpha(h)$ est bien connecté à i, d'après (bl).

On peut écrire alors , en vertu de (b2) :

$$(x,z_{h+1}) = (x,z_h)o(z_h,z_{h+1}) \in U_2^i o\, U_2^{\alpha(h)} \subset U_1^i$$

§ Continuons la démonstration de (a),(b) et (c) au rang n .
En appliquant l'hypothèse de récurrence à $\sum_{j=h+1}^{n-1} d_{\alpha(j)}(z_j,z_{j+1}) \leq r/2$

nous voyons que :

$$\left.\begin{array}{l} (z_{h+1},z_j) \in U_1^{\alpha(h+1)} \quad , \\ \alpha(j-1) \text{ est bien connecté à } \alpha(h+1) \\ d_{\alpha(h+1)}(z_{h+1},z_j) \leq 2(r/2) = r < 1/2 \end{array}\right\} \text{ pour } j = h+2,\ldots,n.$$

-S'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $(z_j,z_{j+1}) \in U_k^{\alpha(j)} - U_{k+1}^{\alpha(j)}$, alors il existe $a_j \in E_{\alpha(j)}$ tel que $(z_j,a_j) \in U_k^{\alpha(j)}$; comme $d_{\alpha(h+1)}(z_{h+1},z_{h+2}) + \ldots + d_{\alpha(j)}(z_j,a_j) \leq r/2$, l'hypothèse de récurrence s'applique et donne , en particulier :

$$d_{\alpha(h+1)}(z_{h+1},a_j) \leq 2(r/2) < 1/2 \quad .$$

-Si , par contre, un tel k n'existe pas, i.e. si $d_{\alpha(j)}(z_j,z_{j+1}) = 0$, on peut quand même trouver un $a_j \in E_{\alpha(j)}$ tel que $d_{\alpha(h+1)}(z_{h+1},a_j) < 1/2$ de la manière suivante : on choisit m assez grand pour avoir $2^{-m+1} < 1/2 - r$, puis on prend $a_j \in E_{\alpha(j)}$ de sorte que $(z_j,a_j) \in U_m^{\alpha(j)}$; alors , puisque $d_{\alpha(h+1)}(z_{h+1},z_{h+2}) + \ldots + d_{\alpha(j)}(z_j,a_j)$ est inférieur ou égal à $r/2 + 2^{-m}$, l'hypothèse de récurrence s'applique encore et donne , en particulier :

$$d_{\alpha(h+1)}(z_{h+1},a_j) \leq 2(r/2 + 2^{-m}) = r + 2^{-m+1} < 1/2 \ .$$

Dans tous les cas, de tels a_j existent , pour $h+1 < j < n$, ce qui permet d'établir que $\alpha(j)$ est bien connecté à i : en effet, posant $c = a_j$ ou z_{j+1} , on a :

$$(x,c) = (x,z_h)o(z_h,z_{h+1})o(z_{h+1},c) \in U_2^i \text{ o } U_2^{\alpha(h)} \text{ o } U_2^{\alpha(h+1)} \subset U_1^i \ ;$$

ainsi, d'une part, $(a_j, a_j) \in U_1^i$ et donc $\alpha(j)$ est bien connecté à i d'après (b1), et, d'autre part, $(x, z_{j+1}) \in U_1^i$, pour $h+1 < j < n$. Notons au passage que $(z_j, z_k) = (z_j, x) o (x, z_k)$ est élément de $U_1^i \circ U_1^i \subset U_0^i$, pour $0 \leq j \leq k \leq n$, et que la suite α est pleinement trans-connexe.

Enfin, nous savons que :

- $d_i(x, z_h) < 1/2$, $d_{\alpha(h)}(z_h, z_{h+1}) < 1/2$, $d_{\alpha(h+1)}(z_{h+1}, y) < 1/2$

- et que $(i, \alpha(h), \alpha(h+1))$ est une suite Q-connexe ; soit k le plus petit entier tel que $2^{-k} \leq r$ (k est ≥ 2) ; alors on a :

$$(x, z_h) \in U_k^i \quad , \quad (z_h, z_{h+1}) \in U_k^{\alpha(h)} \quad \text{et} \quad (z_{h+1}, y) \in U_k^{\alpha(h+1)}.$$

Par conséquent, d'après (b2), il vient :

$$(x, y) = (x, z_h) o (z_h, z_{h+1}) o (z_{h+1}, y) \in U_k^i \circ U_k^{\alpha(h)} \circ U_k^{\alpha(h+1)} \subset U_{k-1}^i ,$$

d'où $d_i(x, y) \leq 2^{-k+1} \leq 2r$.

Vérification des axiomes des Qé et définition des ∂_i.

- Les ∂_i' satisfont (Qé 2) car $//E_i \subset U_n^i$, pour tout $n \geq 0$, d'où $\partial_i'(x, x) = 0$ si $x \in E_i$.

- Montrons que (Qé 4) (axiome de Q-triangularité) est satisfait, en choisissant ϵ constant et égal à $1/4$. Soient i et $j \in I$, $(x, y) \in U_0^i = \mathrm{dom}(\partial_i')$ et $(y, z) \in U_0^j = \mathrm{dom}(\partial_j')$, avec

$$\partial_i'(x, y) \leq 1/4 \quad , \quad \partial_j'(y, z) \leq 1/4 \quad \text{et} \quad \partial_i'^{-1}(0, 1/4) \cap //E_j \neq \emptyset ,$$

(d'après (b1) j est alors bien connecté à i).

Soient α et β des suites Q-connexes, de longueurs respectives n et m , telles que $\alpha(0) = i$ et $\beta(0) = j$. Soient aussi des suites $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ et $y = y_0, y_1, \ldots, y_m = z$, satisfaisant $(x_p, x_{p+1}) \in U_0^{\alpha(p)}$, pour $p < n$, et $(y_q, y_{q+1}) \in U_0^{\beta(q)}$, pour $q < m$. Par définition des ∂_i' , on a :

$$r = \sum_{j=0}^{n-1} d_{\alpha(j)}(x_j,x_{j+1}) \geq \partial_i'(x,y) \quad ,$$

et

$$t = \sum_{j=0}^{m-1} d_{\beta(j)}(y_j,y_{j+1}) \geq \partial_j'(y,z) \ .$$

Il suffit de montrer alors que $r + t \geq \partial_i'(x,z)$. Distinguons 2 cas:

<u>1^{er} cas.</u> $r \geq 2\partial_i'(x,y)$; alors $d_i(x,y) \leq 2\partial_i'(x,y) \leq r$, et comme $(i,\beta(0),\beta(1),\ldots)$ est une suite Q-connexe , il vient :

$$r + t \geq d_i(x,y) + d_{\beta(0)}(y,y_1) + \ldots + d_{\beta(m-1)}(y_{m-1},z) \geq \partial_i'(x,z)$$

<u>2^{ème} cas.</u> $r < 2\partial_i'(x,y)$; on montre que j est bien connecté à $\alpha(n-1)$ (en passant par i !) . On a :

$$d_{\alpha(n-1)}(x_{n-1},y) < 1/2$$

$$d_i(y,y) \leq d_i(x,y) \leq 2\partial_i'(x,y) < 1/2$$

et $\quad d_j(y,z) \leq 2\partial_j'(y,z) < 1/2$.

On a donc $(x_{n-1},y) \in U_1^{\alpha(n-1)}$, $(y,y) \in U_1^i$ et $(y,z) \in U_1^j$; il existe $b \in E_j$ tel que $(y,b) \in U_1^j$. En utilisant l'hypothèse (III) de l'énoncé (c'est le seul endroit !) , on voit que i est bien connecté à $\alpha(n-1)$ et on en déduit que $(\alpha(n-1), i , j)$ est une suite Q-connexe ; on peut alors écrire :

$$(x_{n-1},b) = (x_{n-1},y)o(y,y)o(y,b) \in U_1^{\alpha(n-1)} \circ U_1^i \circ U_1^j \subset U_0^{\alpha(n-1)} \ ,$$

d'où $(b,b) \in U_0^{\alpha(n-1)}$ et par conséquent , j est bien connecté à $\alpha(n-1)$. Ainsi, la suite obtenue en juxtaposant α et β est Q-connexe , et, par définition de $\partial_i'(x,z)$, on a cette fois encore : $r + t \geq \partial_i'(x,z)$.

Les deux inégalités qu'on vient d'établir signifient encore : $U_k^i \subset \partial_i'(0,2^{-k}) \subset U_{k-1}^i$, d'où il suit que $\{\partial_i'^{-1}(0,2^{-k}) \ / \ k > 1\}$

engendre bien le filtre $\varphi(i)$ de base symétrique . Cependant, rien ne garantit que les ∂'_i eux-mêmes soient symétriques. Pour remédier à ce défaut , on définit les ∂_i par l'égalité suivante :

$$\partial_i(x,y) \;=\; 1/2(\partial'_i(x,y) + \partial'_i(y,x)) \text{ , où } (x,y) \in U_0^i \text{ et } i \in I.$$

Les propriétés qu'on vient d'établir concernant les ∂'_i sont manifestement encore vraies pour les ∂_i , avec en plus la symétrie, cette fois. Quant à l'axiome de stabilité des domaines , l'application constante ϵ = 1/4 suffit aussi . Alors $((E_i)_{i\in I}, \partial, 1/4)$ est un Qé et la Qu sous-jacente est celle du départ : u .

Si u est accessible , alors s est un espace Qm .

<u>La preuve est achevée.</u>

Voici encore deux définitions qui vont nous permettre d'énoncer une hypothèse (I') plus faible que (I) dans l'énoncé du théorème précédent.

<u>Définition 8</u>. Soit $u = ((E_i)_{i\in I}, \varphi)$ une Qu . Si $i \in I$, on dit que $V \in \varphi(i)$ est un <u>connecteur pour</u> $\varphi(i)$ si la condition $V \cap /\!/E_j \neq \emptyset$ entraîne que j est bien connecté à i . On dit que u est <u>connectif</u> si , pour tout $i \in I$, $\varphi(i)$ admet des connecteurs .

<u>Définition 9</u>. Une structure Qu sera dite <u>finiment connectée</u> si, d'une part, tout indice $i \in I$ n'est bien connecté qu'à un nombre fini d'indices et, d'autre part , tout indice $j \in I$ n'a qu' un nombre fini d'indices qui lui soient bien connectés.

On peut alors généraliser le théorème 1 en remplaçant (I) par (I') :

(I') u est connectif et finiment connecté .

(à suivre ...)

Bibliographie.

{1} N. Bourbaki, Topologie générale, Eléments de Mathématiques, Livre III, Hermann, 1951.

{2} C. Ehresmann, Catégories topologiques, Koninkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen, Series A, 69, No. 1 et Indag Math. 28 , No. 1 , 1966.

{3} G. Palias, Sur la catégorie des applications quasi-uniformes, Thèse de 3ème Cycle, Paris, 1967.