C. LAIR

Catégories modelables et catégories esquissables

Diagrammes, tome 6 (1981), exp. nº 5, p. L1-L20
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__6__A5_0>

Diagrammes, Vol. 6 , Paris 1981.

CATEGORIES MODELABLES ET CATEGORIES ESQUISSABLES

C. Lair

Introduction.

On sait caractériser intrinsèquement les catégories de réalisations d'esquisses projectives (voir (E.T.S.A.)): ce sont exactement les catégories présentables (voir (L.P.L.G.)). De même, on sait caractériser intrinsèquement les catégories de réalisations d'esquisses mixtes pour lesquelles les seules limites inductives distinguées sont des sommes: ce sont exactement les catégories localisables (voir (C.A.L.O.) et (C.M.F.I.)).
Dans ce travail, nous fournissons une caractérisation intrinsèque des catégories de réalisations d'esquisses mixtes quelconques.

1. Terminologie - Notations.

On dit que $/\!/\underline{S}/\!/ = (\underline{S}, \mathbb{P}, \mathbb{I})$ est une esquisse (mixte) si, et seulement si:

- $\underline{S}$ est une catégorie petite,

- $\mathbb{P}$ est un ensemble de limites projectives petites distinguées dans $\underline{S}$,

- $\mathbb{I}$ est un ensemble de limites inductives petites distinguées dans $\underline{S}$.

Une <u>réalisation</u> de $/\!/\underline{S}/\!/$ est un foncteur $F: \underline{S} \longrightarrow$ Ens transformant les limites distinguées dans $\underline{S}$ en des limites de Ens . On note alors $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont les seuls objets sont ces réalisations, que l'on notera désormais $F: /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow$ Ens .

Soit a un cardinal.

On dit qu'un ensemble E est a-<u>petit</u> et l'on note $E < a$ si, et seulement si, son cardinal est strictement inférieur au cardinal a.

On dit qu'une catégorie $\underline{C}$ est a-<u>petite</u> et l'on note $\underline{C} < a$ si, et seulement si, le cardinal de son ensemble $\mathrm{Fl}\underline{C}$ de flêches est strictement inférieur à a .

On dit qu'un foncteur $G: \underline{C} \longrightarrow$ Ens est a-<u>petit</u> et l'on note $G < a$ si, et seulement si, $G(C) < a$ pour tout objet C de la catégorie (quelconque) $\underline{C}$.

Enfin, on dit qu'une esquisse mixte $/\!/\underline{S}/\!/$ est a-<u>petite</u> et l'on note $/\!/\underline{S}/\!/ < a$ si, et seulement si:

- $\underline{S} < a$, $\mathbb{P} < a$, $\mathbb{I} < a$,

- pour toute limite projective $(p_I: S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$, appartenant à $\mathbb{P}$, on a $\underline{I} < a$,

- pour toute limite inductive $(s_J: S'_J \longrightarrow S')_{J \in \underline{J}}$, appartenant à $\mathbb{I}$, on a $\underline{J} < a$.

Soit $\underline{C}$ une catégorie localement petite, $\underline{D}$ et $\underline{D}'$ deux catégories petites, $\partial: \underline{D} \longrightarrow \underline{C}$ et $\partial': \underline{D}' \longrightarrow \underline{C}$ deux foncteurs (encore appelés, pour la circonstance, <u>diagrammes</u>).

On dit que ∂' est un <u>petit diagramme limite inductive locale de</u> ∂ si, et seulement si:

- $\varprojlim_{D\in\underline{D}^{op}} \mathrm{Hom}(\partial D,C) \;\underset{\sim}{\sim}\; \varinjlim_{D'\in\underline{D}'^{op}} \mathrm{Hom}(\partial' D',C)$, naturellement en tout objet C de $\underline{C}$ (voir (C.M.F.I.)).

Soit $U\colon \underline{C} \longrightarrow \underline{C}'$ un foncteur entre catégories localement petites, C' un objet de $\underline{C}'$ et $\partial'\colon \underline{D}' \longrightarrow \underline{C}$ un foncteur (encore appelé diagramme) où $\underline{D}'$ est petite.
On dit que ∂' est un <u>petit diagramme localement libre sur</u> C' <u>(relativement à</u> U) si, et seulement si:

- $\varinjlim_{D'\in\underline{D}'^{op}} \mathrm{Hom}(\partial' D',C) \;\underset{\sim}{\sim}\; \mathrm{Hom}(C',UC)$, naturellement en tout objet C de $\underline{C}$ (voir (C.M.F.I.)).

Soit θ un ordinal inaccessible (c'est donc un cardinal particulier) et $\underline{L}$ une catégorie localement petite.
On dit que $\underline{L}$ est θ-<u>esquissable</u> si, et seulement si, il existe une esquisse mixte $/\!/\underline{S}/\!/$ telle que:

(E1). $\underline{L}$ et $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ sont équivalentes;

(E2). $/\!/\underline{S}/\!/$ est θ-petite.

On dit que $\underline{L}$ est θ-<u>modelable</u> si, et seulement si, il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ et une sous-catégorie pleine $\underline{L}' < \theta$ de $\underline{L}$ tels que:

(M1). $\underline{L}$ possède toutes les limites inductives petites β-filtrantes;

(M2). les objets de $\underline{L}'$ sont des objets β-présentables de $\underline{L}$;

(M3). pour tout objet L de $\underline{L}$, la catégorie $\underline{L}'/L$ (comma des deux foncteur $\underline{L}' \longrightarrow \underline{L} \longleftarrow \{L\}$) est β-filtrante;

(M4). $\underline{L}'$ est dense dans $\underline{L}$.

2. <u>Les catégories θ-modelables sont θ-esquissables.</u>

Dans tout ce §2, nous notons θ un ordinal inaccessible et $\underline{L}$ une catégorie θ-modelable au sens du §1 dont nous reprenons les notations.

Nous avons tout d'abord:

<u>Lemme</u> 1. <u>Tout foncteur</u> $\partial : \underline{D} \longrightarrow \underline{L}'$, <u>tel que</u> $\underline{D} < \beta$, <u>admet un petit diagramme limite inductive locale</u> $\partial' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{L}'$ <u>tel que</u> $(\underline{L} \longleftarrow \underline{L}').\partial'$ <u>soit aussi un petit diagramme limite inductive locale de</u> $(\underline{L} \longleftarrow \underline{L}').\partial$.

<u>Preuve</u>. Notons $\underline{D}'$ la catégorie (évidemment petite) dont les objets sont les cônes inductifs $D' = (1'_D : \partial D \longrightarrow L')_{D \in \underline{D}}$ de $\underline{L}'$ et dont les morphismes $d' : D' \longrightarrow D''$ sont les flèches $d' : L' \longrightarrow L''$ de $\underline{L}'$ telles que $d'.1'_D = 1''_D$, pour tout objet D de $\underline{D}$. Notons alors $\partial' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{L}'$ le foncteur défini par $\partial'(D') = L'$.
Il est trivial de constater que ∂' est bien un petit diagramme limite inductive locale (appelé <u>canonique</u>) de ∂ .
Pour prouver que $(\underline{L} \longleftarrow \underline{L}').\partial'$ est également un petit diagramme limite inductive locale de $(\underline{L} \longleftarrow \underline{L}').\partial$, il suffit d'utiliser l'axiome de filtration (M3).
(On pourra consulter utilement (C.M.F.I.) pour plus de détails sur le calcul des limites inductives locales.) //

Désormais, on ne choisit qu'une catégorie $\underline{D}$ par composante connexe dans le sous-groupoïde de Cat des foncteurs inversibles. Il est immédiat de constater alors que:

<u>Lemme</u> 2. <u>L'ensemble</u> V <u>des foncteurs</u> $\partial : \underline{D} \longrightarrow \underline{L}'$ <u>tels que</u> $\underline{D} < \beta$ <u>est</u> θ-<u>petit</u>. <u>De plus, pour tout élément</u> ∂ <u>de</u> V , <u>son petit diagramme limite inductive locale canonique</u> $\partial' : \underline{D}' \longrightarrow \underline{L}'$ <u>vérifie</u> $\underline{D}' < \theta$.

Désignons, maintenant, par $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{L}}$ dont les objets sont:

- d'une part les foncteurs $\mathrm{Hom}_{\underline{L}}(L',-)$, dès que L' est objet de $\underline{L}'$,

- d'autre part les foncteurs

$$U_\partial = \varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{L}}(\partial D,-)$$

dès que $\partial : \underline{D} \longrightarrow \underline{L}'$ est élément de V .
Par construction, on a:

<u>Lemme</u> 3. <u>La catégorie</u> $\underline{S}$ <u>est</u> θ-<u>petite</u>.

<u>Preuve</u>. Du lemme 1 , on déduit facilement que, si ∂ est élément de V et si ∂' en est son petit diagramme limite inductive locale canonique, alors

$$U_\partial = \varinjlim_{D' \in \underline{D}'^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{L}}(\partial' D',-) \quad .$$

Ceci permet d'exprimer les $\mathrm{Hom}_{\underline{S}}(S',S'')$ (pour deux objets quelconques S' et S'' de $\underline{S}$) en fonction des seuls $\mathrm{Hom}_{\underline{L}'}(L',L'')$ (où L' et L'' sont des objets variant dans la catégorie θ-petite $\underline{L}'^{op}$, identifiée par le plongement de Yoneda à une sous-catégorie pleine de $\underline{S}$).
Il suffit, alors, d'utiliser le lemme 2 pour conclure. //

Dans la catégorie $\underline{S}$, nous distinguons:

- les limites projectives (calculées point par point)

$$U_\partial = \varprojlim_{D\in \underline{D}^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{L}}(\partial D,-) \quad ,$$

- les limites inductives (calculées point par point)

$$U_\partial = \varinjlim_{D'\in \underline{D}'^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{L}}(\partial' D',-) \quad ,$$

dès que ∂ est élément de V et ∂' en est son petit diagramme limite inductive locale canonique. On définit ainsi une esquisse mixte $/\!/\underline{S}/\!/$.
Si l'on désigne par $y\colon \underline{L}'^{op} \longrightarrow \underline{S}$ la restriction du plongement de Yoneda, il est alors évident que, par construction:

<u>Lemme</u> 4. <u>Deux réalisations de</u> $/\!/\underline{S}/\!/$ <u>qui égalisent</u> y <u>sont équivalentes</u>.

De plus, des lemmes 2 et 3 résulte immédiatement:

<u>Lemme</u> 5. <u>L'esquisse mixte</u> $/\!/\underline{S}/\!/$ <u>est</u> θ-<u>petite</u>.

Enfin, pour toute réalisation $F\colon /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$, notons $H(F)^{op}$ la catégorie comma des deux foncteurs

$$\underset{0\,\mapsto\,1}{\underline{1} \longrightarrow \mathrm{Ens}} \xleftarrow[F.y]{} \underline{L}'^{op}$$

et par $h(F)^{op} : H(F)^{op} \longrightarrow \underline{L}'^{op}$ le foncteur projection canonique. On a:

<u>Lemme</u> 6. <u>Pour toute réalisation</u> F <u>de</u> $/\!/\underline{S}/\!/$, <u>la catégorie</u> H(F) <u>est</u> β-<u>filtrante</u>.

<u>Preuve</u>. Il suffit d'utiliser le lemme 1 puis le fait que F est bien une réalisation. //

Nous sommes, maintenant, en mesure de prouver:

Proposition 1. Toute catégorie θ-modelable est θ-esquissable.

Preuve. Vu le lemme 5, il suffit d'établir que $\underline{L}$ et $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$ sont équivalentes.

A tout objet L de $\underline{L}$, on associe le foncteur

$$\begin{aligned} F_L : \underline{S} &\longrightarrow Ens \\ S &\longmapsto S(L) \ . \end{aligned}$$

C'est évidemment une réalisation de $/\!/\underline{S}/\!/$ puisque les petites limites tant projectives qu'inductives (distinguées dans $\underline{S}$) se calculent point par point dans $Ens^{\underline{L}}$.

A toute réalisation $F: /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow Ens$, on associe l'objet

$$L_F = \varinjlim \ (H(F) \xrightarrow[h(F)]{} \underline{L}' \longrightarrow \underline{L})$$

qui existe bien, vu le lemme 6 et l'axiome (M1).

En utilisant (M4), on établit immédiatement que $L_{F_L} \simeq L$, naturellement en tout objet L de $\underline{L}$.

De même, en utilisant (M2) et le lemme 6, un raisonnement classique permet d'établir que $F_{L_F} \simeq F$, naturellement en tout objet F de $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$. //

3. Les catégories θ-esquissables sont θ-modelables.

Dans toute la suite de ce §2, θ désigne encore un ordinal inaccessible et l'on suppose que $/\!/\underline{S}/\!/ = (\underline{S}, \mathbb{P}, \mathbb{I})$ est une esquisse mixte θ-petite.

Nous notons:

- i la borne supérieure des cardinaux $\overline{\overline{Fl\underline{I}}}$ des bases $\underline{I}$ des limites projectives $(p_I : S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$ appartenant à $\mathbb{P}$,

- α l'ordinal régulier w_{i+1} d'indice $i+1$,
- s le cardinal de $\mathrm{Fl}\underline{S}$,
- i' le cardinal de $\mathbb{P}$,
- j la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\underline{J}}$ des bases $\underline{J}$ des limites inductives $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ appartenant à $\mathbb{I}$,
- j' le cardinal de $\mathbb{I}$,
- β l'ordinal régulier $w_{\sup(\alpha,s,i',j,j')+1}$.

Puisque θ est inaccessible, il est évidnet que:

Lemme 7. L'ordinal régulier β est strictement inférieur à l'ordinal inaccessible θ .

Prouvons, maintenant, que:

Lemme 8. La catégorie $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ possède toutes les limites inductives petites β-filtrantes et le foncteur d'inclusion $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ commute avec ces limites.

Preuve. La catégorie $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ possède évidemment toutes les limites inductives petites et elles s'y calculent point par point.

Les limites inductives petites β-filtrantes commutent dans Ens d'une part avec toutes les limites inductives petites et d'autre part avec les limites projectives β-petites. Comme les limites inductives appartenant à $\mathbb{I}$ sont petites et comme les limites projectives appartenant à $\mathbb{P}$ sont β-petites (car elles sont certainement α-petites et $\alpha < \beta$), on conclut facilement. //

Notons $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})_\beta$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ dont les objets sont les réalisations $F' : /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$

telles que $F' < \beta$. Comme θ est inaccessible, $\beta < \theta$ et $\underline{S} < \theta$, il est trivial de constater:

<u>Lemme</u> 9. <u>La catégorie</u> $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})_\beta$ <u>est équivalente à une sous-catégorie pleine</u> θ-<u>petite, notée</u> $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})'_\beta$.

Etablissons, aussi, que:

<u>Lemme</u> 10. <u>Les objets de</u> $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})'_\beta$ <u>sont des objets</u> β-<u>pré-sentables de</u> $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$.

<u>Preuve</u>. Supposons que $F' : /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un objet de $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})'_\beta$ (et donc, en particulier, que $F' < \beta$) et que $F = \varinjlim_{J \in \underline{J}} F_J$ est une limite inductive petite β-filtrante dans $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$.

Nous avons, successivement:

- $\mathrm{Hom}(F', \varinjlim_J F_J) = \int_S \mathrm{Hom}(F'S, (\varinjlim_J F_J)(S))$,

la catégorie $\underline{S}$ étant petite,

- $\mathrm{Hom}(F', \varinjlim_J F_J) = \int_S \mathrm{Hom}(F'S, \varinjlim_J (F_J(S)))$,

vu le lemme 8 ,

- $\mathrm{Hom}(F', \varinjlim_J F_J) = \int_S (\varinjlim_J F_J(S))^{F'(S)}$

$$= \int_S (\varinjlim_J F_J(S)^{F'(S)}) ,$$

puisque, pour tout objet S de $\underline{S}$, on a $F'(S) < \beta$ et les limites inductives petites β-filtrantes commutent dans Ens avec les limites projectives β-petites,

$$- \ \mathrm{Hom}(F', \varinjlim_{J} F_J) = \varinjlim_{J} \left(\int_S (F_J(S)^{F'(S)}) \right)$$

$$= \varinjlim_{J} \left(\int_S \mathrm{Hom}(F'(S), F(S)) \right)$$

$$= \varinjlim_{J} \mathrm{Hom}(F', F_J) \quad ,$$

puisque les limites petites β-filtrantes commutent dans Ens avec les limites projectives β-petites et, $\underline{S}$ étant β-petite, sa catégorie subdivision l'est aussi.
On peut donc conclure. //

Montrons, maintenant, que:

<u>Lemme 11. Pour tout objet</u> F <u>de</u> Ens $^{//\underline{S}//}$, <u>la catégorie</u> $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})^{\bullet}_{\beta}/F$ <u>(comma des deux foncteurs</u>

$$(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})^{\bullet}_{\beta} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longleftarrow \{F\} \quad)$$

<u>est</u> β-<u>filtrante</u>.

<u>Preuve</u>. Soit

$$\begin{aligned} f: \underline{J} &\longrightarrow (\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})^{\bullet}_{\beta}/F \\ J &\longmapsto (f_J : F^{\bullet}_J \longrightarrow F) \end{aligned}$$

un foncteur où $\underline{J}$ est β-petite.
Le foncteur

$$\underline{J} \xrightarrow[f]{} (\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})^{\bullet}_{\beta}/F \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$$

admet une limite inductive, calculée point par point, $(g_J : F_J \longrightarrow G')_{J \in \underline{J}}$.
Par conséquent, on a donc $G' < \beta$ et il existe une unique flèche $g: G' \longrightarrow F$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ telle que, pour tout objet J de $\underline{J}$, on ait $g.g_J = f_J$.

En conséquence (voir l'Appendice), le foncteur projection canonique

$$G'/(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$$

est un petit diagramme localement libre sur G', relativement au foncteur d'inclusion $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$.
Nous en déduisons qu'il existe au moins un objet F' de $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta$ et deux flèches $g'\colon G' \longrightarrow F'$ et $g''\colon F' \longrightarrow F$ tels que $g = g''.g'$.
On conclut alors facilement. //

Notons $(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})_\beta$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont les objets sont les foncteurs $G'\colon \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ tels que $G' < \beta$. Elle est évidemment équivalente à une de ses sous-catégories pleines θ-petite $(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})'_\beta$ contenant $(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta$.
Nous avons alors:

<u>Lemme</u> 12. <u>Pour tout objet</u> F <u>de</u> $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, <u>le foncteur d'inclusion</u>

$$(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta/F \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})'_\beta/F$$

<u>est final</u>.

<u>Preuve</u>. Il suffit d'utiliser le fait que tout objet G' de $(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})'_\beta$ admet (voir l'Appendice)

$$G'/(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})'_\beta$$

pour petit diagramme localement libre, relativement à l'inclusion $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$. //

Nous en déduisons:

<u>Lemme</u> 13. <u>Le foncteur d'inclusion</u>

$$(\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//})'_\beta \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$$

<u>est dense</u>.

Preuve. Le plongement de Yoneda $Y\colon \underline{S}^{op} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ est évidemment dense. De plus, comme $\underline{S} < \beta$, le foncteur

$$Y(S)\colon \underline{S} \longrightarrow Ens$$

est, pour tout objet S de $\underline{S}$, un foncteur β-petit.
Il en résulte que $(Ens^{\underline{S}})'_{\beta}$ est également dense dans $Ens^{\underline{S}}$.
On conclut donc en utilisant le lemme 12. //

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer:

Proposition 2. Toute catégorie θ-esquissable est θ-modelable.

Preuve. C'est exactement ce que signifient les lemmes 8,9,10,11 et 13 lorsque l'on pose:

- $\underline{L} = Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$,
- $\underline{L}' = (Ens^{/\!/\underline{S}/\!/})'_{\beta}$. //

4. Commentaires.

De la définition des catégories θ-modelables du §1 et des résultats de (C.M.L.L.), on déduit immédiatement que les catégories de modèles de Π^0_n-théories sont esquissables (ce qui justifie la terminologie adoptée). On retrouve ainsi "globalement" un résultat de (C.F.P.O.) qui y est établi directement.

On peut montrer que les catégories θ-modelables sont aussi les catégories localement petites $\underline{L}$ pour lesquelles il existe un ordinal régulier $\beta < \theta$ vérifiant:

- $\underline{L}$ possède toutes les limites inductives petites β-filtrantes,
- $\underline{L}$ possède les petits diagrammes limites inductives locales d'objets β-présentables et ils sont constitués d'objets β-présentables,

- $\underline{L}$ possède un ensemble générateur propre constitué d'objets β-présentables,

- si $\underline{L}_\beta$ désigne la sous-catégorie pleine de $\underline{L}$ dont les objets sont tous les objets β-présentables de $\underline{L}$, alors $\underline{L}_\beta$ est équivalente à une de ses sous-catégories pleines $\underline{L}'$ qui est θ-petite.

Il s'agit donc d'une définition tout à fait analogue à celle des catégories β-présentables (de (L.P.L.G.)) ou β-localisables (de (C.A.L.O.)). Si nous avons opté pour la présentation qui en est fournie au §1 c'est parce qu'elle nous a semblé mieux adaptée aux preuves des §§2 et 3 que nous avions en vue et parce qu'elle souligne explicitement le lien avec les catégcries de modèles (compte tenu des résultats de (C.M.L.L.) signalés plus haut).

Si $/\!/\underline{S}/\!/ = (\underline{S}, \mathbb{P}, \Pi)$ est une esquisse mixte (pour laquelle nous reprenons les notations du §2) et si $Y: \underline{S}^{op} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ désigne le plongement de Yoneda, alors, pour tout objet S de $\underline{S}$, le foncteur $Y(S): \underline{S} \longrightarrow Ens$ possède (voir l'Appendice) un petit diagramme localement libre relativement à l'inclusion $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$.
Il convient de remarquer, dans ces conditions, que:

- si Π est vide (cas des catégories α-présentables), ce diagramme peut être choisi discret et même réduit à un objet (théorème du faisceau associé) qui est alors α-présentable dans $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$,

- si Π n'est constitué que de sommes (cas des catégories α-localisables) ce diagramme peut être encore choisi discret (mais pas toujours réduit à un objet) et ses objets sont encore α-présentables dans $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$,

- si Π n'est ni vide ni constitué que de sommes, ce diagramme ne peut pas toujours être choisi discret et ses objets ne sont plus nécessairement α-présentables dans $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ (avec les notations précédentes, on peut seulement affirmer qu'ils sont β-présentables) dans $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$.

Ceci justifie l'intervention de l'ordinal inaccessible θ .

<u>Appendice.</u>

Dans toute la suite de cet Appendice, on suppose que $/\!/\underline{S}/\!/ = (\underline{S}, \mathbb{P}, \mathbb{I})$ est une esquisse mixte. On note (comme au §3):

- i la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\underline{I}}$ des bases $\underline{I}$ des limites projectives appartenant à $\mathbb{P}$,
- α l'ordinal régulier w_{i+1} ,
- s le cardinal de $\mathrm{Fl}\underline{S}$,
- i' le cardinal de $\mathbb{P}$ et j' le cardinal de $\mathbb{I}$,
- j la borne supérieure des cardinaux $\overline{\mathrm{Fl}\underline{J}}$ des bases $\underline{J}$ des limites inductives appartenant à $\mathbb{I}$,
- β l'ordinal régulier $w_{\sup(\alpha,s,i',j,j')+1}$.

Pour tout ordinal régulier $\beta' > \beta$, on note $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})_{\beta'}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/}$ dont les objets sont les réalisations β'-petites et $(\mathrm{Ens}^{/\!/\underline{S}/\!/})^{\bullet}_{\beta'}$ une de ses sous-catégories pleines petites qui lui est équivalente (il en existe au moins une car $\underline{S}$ est petite).

Etablissons, tout d'abord, le lemme qui suit:

<u>Lemme</u>. <u>Pour tout ordinal régulier</u> $\beta' \geq \beta$, <u>tout sous-foncteur</u> <u>β'-petit</u> $G'': \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ <u>d'une réalisation</u> $F: /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ <u>est sous-foncteur d'(au moins) une</u> <u>sous-réalisation</u> <u>β'-petite</u> $F'': /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ <u>de</u> F.

<u>Preuve</u>. Désignons par K(F) la catégorie comma des deux foncteurs

$$\underset{0 \longmapsto 1}{\underline{1} \longrightarrow \mathrm{Ens}} \xleftarrow[F]{\quad} \underline{S}$$

et par $k(F): K(F) \longrightarrow \underline{S}$ la projection canonique. Ainsi:

- les objets de K(F) sont les (x,S) tels que x appartient à $F(S)$,

- les flèches de $K(F)$ sont les

$$((x,S),s\colon S \longrightarrow S',(x',S'))\colon (x,S) \longrightarrow (x',S')$$

tels que $F(s)(x) = x'$.

La catégorie comma $K(G")$ associée à $G"$ est donc une sous-catégorie pleine de $K(F)$ et il s'agit de "saturer" $K(G")$ dans $K(F)$ en une sous-catégorie pleine qui soit effectivement de la forme $K(F")$, où $F"$ est une réalisation. Pour ce faire, pour toute limite inductive $(s_J\colon S_J \longrightarrow S)_{J\in \underline{J}}$ appartenant à Π , tout élément x de $F(S)$ et tout ordinal $\lambda < \alpha$ non limite:

(c). On choisit un objet $J(\lambda)$ de $\underline{J}$ et un élément $x(\lambda)$ de $F(S_{J(\lambda)})$ tels que $F(s_{J(\lambda)})(x(\lambda)) = x$ (un tel couple existe nécessairement puisque, F étant une réalisation, on a

$$F(S) = \varinjlim_{J} F(S_J) \qquad),$$

(c'). Pour tout indice J et tout élément x' de $F(S_J)$ tels que $F(s_J)(x') = x$, on choisit un zigzag de $\underline{J}$

$$J = J_1 \xleftarrow[j_1]{} J_2 \xrightarrow[j_2]{} J_3 \longleftarrow \cdots \qquad \cdots\longrightarrow J_{2p-1} \xleftarrow[j_{2p-1}]{} J_{2p} \xrightarrow[j_{2p}]{} J_{2p+1} = J(\lambda)$$

et une famille $(x'_k)_{1 \leq k \leq 2p+1}$ appartenant à $\prod_{1\leq k\leq 2p+1} F(S_{J_k})$ tels que:

+ $x'_1 = x'$ et $x'_{2p+1} = x(\lambda)$,

+ $F(s_{J_k})(x'_k) = x$, pour tout $1 \leq k \leq 2p+1$,

+ $F(S_{j_k})(x'_k) = x'_{k+1}$, pour tout entier pair k tel que $2 \leq k \leq 2p$,

$+ \quad F(S_{j_k})(x'_{k+1}) = x'_k$, pour tout entier impair k tel que $1 \leq k \leq 2p-1$,

(un tel zigzag et une telle famille existent nécessairement puisque $F(S) = \varinjlim_{J} F(S_J)$) .

On construit alors la suite $(K(G")_\lambda)_{\lambda \leq \alpha}$ de sous-catégories pleines de $K(F)$, qui contiennent $K(G")$, de la manière qui suit.

On pose, tout d'abord, $K(G")_0 = K(G")$.

Si $\lambda < \alpha$ est un ordinal admettant un prédecesseur λ' et si $K(G")_{\lambda'}$ est défini, on note $K_1(G")_\lambda$ la plus petite sous-catégorie pleine de $K(F)$ contenant $K(G")_{\lambda'}$ et telle que:

(i). Si $(p_I : S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$ est une limite projective appartenant à $\mathbb{P}$, si x est élément de $F(S)$ et si, pour tout objet I de $\underline{I}$, $(F(p_I)(x), S_I)$ est objet de $K(G")_{\lambda'}$, alors (x,S) est objet de $K_1(G")_\lambda$,

(ii). Si $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ est une limite inductive appartenant à $\mathbb{I}$, si (x,S) est objet de $K(G")_{\lambda'}$, alors $(x_{J(\lambda)}, S_{J(\lambda)})$ est objet de $K_1(G")_\lambda$ (en reprenant les notations de (c)),

(ii'). Si $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ est une limite inductive appartenant à $\mathbb{I}$, si (x,S) est objet de $K(G")_{\lambda'}$, si J est objet de $\underline{J}$, si (x',S_J) est objet de $K(G")_{\lambda'}$ et si $F(s_J)(x') = x$, alors, pour tout entier $1 \leq k \leq 2p+1$, le couple (x'_k, S_{J_k}) est objet de $K_1(G")_\lambda$ (en reprenant les notations de (c')).

On note alors $K(G")_\lambda$ la plus petite sous-catégorie pleine de

$K(F)$ contenant $K_1(G")_\lambda$ et telle que:

(iii). Si (x,S) est objet de $K_1(G")_\lambda$ et si $s: S \longrightarrow S'$ est flèche de $\underline{S}$, alors $(F(s)(x),S')$ est objet de $K(G")_\lambda$.

Si, maintenant, $\lambda \leq \alpha$ est un ordinal limite et si $K(G")_{\lambda'}$ est défini pour tout ordinal $\lambda' < \lambda$, on pose

$$K(G")_\lambda = \bigcup_{\lambda' < \lambda} K(G")_{\lambda'} .$$

On vérifie, alors, facilement que $K(G")_\alpha$ est bien de la forme $K(F")$, où $F": \underline{S} \longrightarrow Ens$ est bien une réalisation de $/\!/\underline{S}/\!/$ qui, de plus, est β'-petite. //

Nous pouvons, alors, énoncer:

Théorème. Si $\beta' \geq \beta$ est un ordinal régulier, tout foncteur $G': \underline{S} \longrightarrow Ens$ qui est β'-petit possède

$$G'/(Ens^{/\!/\underline{S}/\!/})'_{\beta'} \longrightarrow Ens^{/\!/\underline{S}/\!/}$$

pour petit diagramme localement libre relativement à l'inclusion $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$ (et en notant $G'/(Ens^{/\!/\underline{S}/\!/})'_{\beta'}$, la catégorie comma des deux foncteurs

$$\{G'\} \longrightarrow Ens^{\underline{S}} \longleftarrow (Ens^{/\!/\underline{S}/\!/})'_{\beta'}).$$

Preuve. Supposons, en effet, que $F: /\!/\underline{S}/\!/ \longrightarrow Ens$ soit une réalisation et que $n: G' \longrightarrow F$ soit une transformation naturelle.

Notons $G": \underline{S} \longrightarrow Ens$ le foncteur image de n (calculée point par point). On a évidemment $G" < \beta'$ et l'on peu t donc appliquer le lemme précédent. On en déduit une factorisation

$$\begin{tikzcd} G' \arrow[rr, "n"] \arrow[dr] & & F \\ & F" \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où F'' est une réalisation β'-petite.
Si l'on dispose de deux factorisations de n :

$$\begin{tikzcd}
 & F''_1 \arrow[dr] & \\
G'' \arrow[ur] \arrow[rr, "n"'] \arrow[dr] & & F \\
 & F''_2 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

au moyen de deux réalisations F''_1 et F''_2 qui sont β'-petites, on peut construire les images respectives G''_1 et G''_2 de F''_1 et F''_2 dans F (elles sont calculées point par point).
On a donc $G''_1 < \beta'$ et $G''_2 < \beta'$. Le plus petit sous-foncteur G''' de F possédant G''_1 et G''_2 comme sous-foncteurs est donc également β'-petit. On peut donc lui appliquer le lemme précédent, ce qui permet de conclure. //

De ce Théorème, nous déduisons immédiatement:

<u>Corollaire</u>. <u>Tout foncteur</u> $G: \underline{S} \longrightarrow Ens$ <u>possède un petit diagramme localement libre relativement au foncteur d'inclusion</u> $Ens^{/\!/\underline{S}/\!/} \longrightarrow Ens^{\underline{S}}$.

<u>Preuve</u>. En effet, il existe toujours un ordinal régulier β' tel que $\beta' \geq \beta$ et G soit β'-petit. //

Bibliographie.

(C.A.L.O.) Y. Diers, Catégories localisables, Thèse, Paris 1977 .

(C.F.P.O.) R. Guitart et C. Lair, La continuité pour représenter les formules du 1er ordre, à paraître.

(C.M.F.I.) R. Guitart et C. Lair, Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4 , Paris 1980 .

(C.M.L.L.) J. Rosicky, Categories of models of languages $L_{K,\lambda}(\mu)$, multigraphié, 1980 .

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types des structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iaşi, XIV,1968.

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally α-presentable and locally α-generated categories, Lect. Notes in Math. 195, 1971.