DIAGRAMMES

FRANÇOIS FOLTZ

Sur l'existence d'espaces affinés à groupes de translations non commutatifs

Diagrammes, tome 6 (1981), exp. n° 1, p. F1-F6

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__6__A1_0>

Diagrammes, Vol. 6, 1981.

SUR L'EXISTENCE D'ESPACES AFFINES A GROUPES DE TRANSLATIONS NON COMMUTATIFS.

François Foltz

Dans {1} , E.ARTIN pose le problème de trouver un plan affine dont le groupe des translations soit non commutatif. Si tel est le cas, les translations ont une unique direction. D.HILBERT a donné des exemples d'espaces affines (au moins plans) dont les translations ont une unique direction, mais, même dans ces exemples, le groupe des translations est cependant commutatif (cf. les géométries non arguésiennes, voir {2}).Si l'on suppose que le groupe des translations opère simplement transitivement sur chaque droite de la direction unique de translations prévue, le problème de l'existence de plans affines à groupes de translations non commutatifs revient à celui de la construction de "précorps" (K,+,.) tels que le groupe sous-jacent (K,+) ne soit pas abélien.

Nous indiquons une construction de tels précorps. Il s'agit de"structures localement libres" au sens de {3} et {4} . La construction suivante est donc celle d'une structure localement libre associée à un magma/groupe libre (M,+,.), où la stratégie de construction est déterminée par le souci de plonger (M,+,.) dans un précorps (K,+,.).

I) Précorps et plans affines.

Définition. Un précorps $(K,+,.)$ est la donnée d'un groupe $(K,+)$ et d'un magma $(K,.)$ vérifiant:

i) quel que soit le couple (d_1,d_2) d'éléments de K, avec $d_1 \neq d_2$, et quel que soit l'élément c de K, il existe un unique élément a de K tel que:

$$-d_1.a + d_2.a = c \qquad (E_1)$$

ii) quel que soit le couple (a_1,a_2) d'éléments de K, avec $a_1 \neq a_2$, et quel que soit l'élément b de K, il existe un unique élément d de K tel que:

$$d.a_1 - d.a_2 = b \qquad (E_2)$$

Remarques. i) On conserve la notation additive pour le groupe $(K,+)$ sous-jacent à un précorps $(K,+,.)$, bien qu'a priori ce groupe puisse être non commutatif !

ii) On maintient dans les notations le principe de prépondérance usuel qui prévaut entre l'addition et la multiplication.

Soit $(K,+,.)$ un précorps ayant plus d'un élément. Posons:

$$D_a^{\infty} = \{(a,x) \;/\; x \in K\} \qquad D_c^d = \{(x,d.x+c) \;/\; x \in K\}$$

$$D_{\bullet}^{\infty} = \{D_a^{\infty}\}_{a \in K} \qquad D_{\bullet}^d = \{D_c^d\}_{c \in K}$$

$$P = K^2 \quad \text{et} \quad D = D_{\bullet}^{\infty} \cup \Big(\bigcup_{d \neq o} D_{\bullet}^d\Big)$$

Proposition. Le couple (P,D) est un plan affine, pour la relation d'incidence évidente. Son groupe des translations $(T,+)$ admet $(K,+)^{op}$ pour sous-groupe. Deplus, $(T,+) = (K,+)^{op}$ si $(K,+)$ est non commutatif.

Nous vérifions successivement les axiomes d'incidence et l'axiome d'EUCLIDE pour (P,D) .

a) Les ensembles $D_{\bullet}^{\infty}$ et $D_{\bullet}^{d}$ définissent des faisceaux distincts de droites ; en effet, si $a_1 \neq a_2$, alors $D_{a_1}^{\infty} \cap D_{a_2}^{\infty} = \emptyset$, et si $c_1 \neq c_2$, $D_{c_1}^{d} \cap D_{c_2}^{d} = \emptyset$. De plus, si $d_1 \neq d_2$, l'équation (E_1) assure que $D_{c_1}^{d_1} \cap D_{c_2}^{d_2}$ est réduit à un élément. Enfin D_a^{∞} et D_c^d se rencontrent en $p = (a, d.a + c)$.

b) La droite $D_{b - d.a}^{d}$ est la seule droite parallèle à D_c^d et passant par le point (a,b).

c) Etant donnés les points $p_1 = (a_1, b_1)$ et $p_2 = (a_2, b_2)$ avec $a_1 \neq a_2$, seule la droite D_c^d , notée encore p_1p_2 , passe par p_1 et p_2 , où on a posé :

$$c = - d.a_1 + b_1 = - d.a_2 + b_2 ,$$

d étant l'unique élément de K satisfaisant , d'après (E_2) :

$$d.a_1 - d.a_2 = b_1 - b_2 .$$

Si $a_1 = a_2 = a$, alors $p_1p_2 = D_a^{\infty}$, bien sûr !

d) Posons $t_d(a,b) = (a, b + d)$. Alors la relation suivante:

$$d.a_1 - d.a_2 = b_1 - b_2 = (b_1 + d) - (b_2 + d)$$

assure que les droites p_1p_2 et $t_dp_1t_dp_2$ sont parallèles.

II) <u>Construction d'un précorps</u> $(K,+,.)$ <u>tel que</u> $(K,+)$ <u>soit non abélien.</u>

On construit par récurrence trois familles :

$(F_n,+,.)$, $(G_n,+,.)$ et $(H_n,+,.)$, telles que soient satisfaits les 7 points suivants, désignés de a) à g) :

a) On a les inclusions suivantes:

$$F_n \subset G_n \subset H_n \subset F_{n+1} \quad \text{quel que soit} \quad n \geqq 1 .$$

b) Les lois de composition, pour les structures suivantes, sont partielles : $(F_n,.)$, $(G_n,+)$, $(H_n,.)$.

c) $(F_1,+)$ est un groupe libre; aucun composé pour la loi "." n'est défini.

d) Description du morphisme (injectif): $(F_n,+,.) \longrightarrow (G_n,+,.)$: $(G_n,.)$ est le magma libre engendré par $(F_n,.)$, ce qui signifie qu' on ajoute "librement" les composés nécessaires pour rendre la loi "." totale, alors qu'elle ne l'est pas dans F_n ! Les composés pour la loi "+" dans G_n sont exclusivement ceux qu'on avait dans F_n.

e) Description du morphisme (injectif) : $(G_n,+,.) \longrightarrow (H_n,+,.)$: $(H_n,+)$ est le groupe libre engendré par $(G_n,+)$, c'est-à dire le quotient du groupe libre engendré par G_n par les seules relations qui font de $(F_n,+)$ un groupe (F_n est identifié à une partie de G_n). Les seuls composés pour la loi "." sont ceux de $(G_n,.)$.

f) Description du morphisme (injectif) : $(H_n,+,.) \longrightarrow (F_{n+1},+,.)$: Considérons l'ensemble A'_n des triplets (a,b,c) d'éléments de H_n tels que $a \neq b$ et que l'équation $-a.x + b.x = c$ n'ait pas de solution dans $(H_n,+,.)$. On remarque que si (a,b,c) est élément de A'_n , alors $(b,a,-c)$ est encore élément de A'_n. On définit, de même, l'ensemble B'_n des triplets (a,b,c) d'éléments de H_n tels que $a \neq b$ et que l'équation $x.a - x.b = c$ n'ait pas de solution dans $(H_n,+,.)$. Nous remarquons encore que (a,b,c) et $(b,a,-c)$ sont, simultanément, éléments de B'_n ou non. Désignons par A_n (resp. B_n) un ensemble équipotent par α (resp. β) à A'_n (resp. B'_n) tels que A_n, B_n, H_n soient disjoints. Soit r la relation définie par:

$$\alpha(a,b,c) \quad r \quad \alpha(b,a,-c)$$
$$\beta(a,b,c) \quad r \quad \beta(b,a,-c)$$

On choisit une section s_n (resp. t_n) de la surjection canonique $A_n \longrightarrow A_n/r$ (resp. $B_n \longrightarrow B_n/r$) et on pose $C_n = \mathrm{Im}(s_n)$ (resp. $D_n = \mathrm{Im}(t_n)$).

Pour tout élément de C_n (resp. D_n) , on définit les composés formels suivants :

$$a.\alpha(a,b,c) \quad (\text{resp. } \beta(a,b,c).b)$$

qui forment l'ensemble $\overline{C}_n$ (resp. $\overline{D}_n$).

Alors, on définit $(F_{n+1},+)$ comme étant le quotient du groupe libre engendré par $H_n \cup C_n \cup D_n \cup \overline{C}_n \cup \overline{D}_n$ par les seules relations qui font de $(H_n,+)$ un groupe, de sorte que H_n s'injecte bien dans F_{n+1}.

Les composés pour la loi "." dans F_{n+1} sont ceux de $(H_n,.)$, $\overline{C}_n$, $\overline{D}_n$, et par définition :

$$b.\alpha(a,b,c) = a.\alpha(a,b,c) + c \quad , \text{ pour tout } \alpha(a,b,c) \text{ de } C_n$$

$$\beta(a,b,c).a = c + \beta(a,b,c).b \quad , \text{ pour tout } \beta(a,b,c) \text{ de } D_n.$$

g) Les solutions des équations du type (E_1) et du type (E_2), si elles existent dans $(F_{n+1},+,.)$, sont uniques.

Par suite, le résultat est aussi vrai pour $(G_{n+1},+,.)$ et pour $(H_{n+1},+,.)$.

Alors, la réunion commune K des F_n , G_n , H_n est naturellement munie d'une structure de précorps $(K,+,.)$, et le groupe sous-jacent $(K,+)$ est non commutatif puisqu'il contient un sous-groupe non commutatif (par exemple $(F_1,+)$).

Remarque. La méthode générale indiquée en {3} consisterait à remplacer le couple $((F_n,+,.),(G_n,+,.))$ par un "groupe/magma" libre $(M_n,+,.)$ engendré par $(H_{n-1},+,.)$ avec la préoccupation que $(M_1,+)$

se plonge dans $(K,+)$. Plus précisément, il s'agit de "forcer" tout f ,qui ne décomposerait d'aucun des deux côtés dans le diagramme ci-dessous, à se décomposer à gauche :

$$\begin{tikzcd}
 & GM(3) \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[dd, "f"] & \\
GM(4)/_{E_1 \cap E_2} \arrow[dr] & & GM(2) \arrow[dl] \\
 & (M_n,+,.) &
\end{tikzcd}$$

où $GM(i)$ désigne le "groupe/magma" libre à i générateurs.

<u>Bibliographie.</u>

{1} E. ARTIN — Algèbre géométrique, "Cahiers Scientifiques", Fasc. XXVII , Gauthiers-Villars.

{2} D. HILBERT — Les fondements de la géométrie, "Edition critique" , Dunod.

{3} R. GUITART, C. LAIR — Existence de diagrammes localement libres, Diagrammes 6, Paris 1981. (Conférence de R. GUITART à Gummersbach, International Conference of Category Theory 5-10 Juillet 1981.

{4} R.GUITART, C. LAIR — Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes, Diagrammes 4, 1981.