KAZEM LELLAHI

Construction de foncteurs topologiques

Diagrammes, tome 5 (1981), exp. nº 4, p. L1-L10
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__5__A4_0>

Diagrammes, Vol. 5, 1981.

CONSTRUCTION DE FONCTEURS TOPOLOGIQUES

Kazem Lellahi

Différents auteurs (2,3 et 4) ont étudié la notion de foncteur topologique avec des définitions presque semblables, sinon équivalentes. Dans ce travail, nous reprenons cette notion, d'un autre point de vue. Nous considérons la taille des catégories dans lesquelles nous travaillons et nous montrons d'une part que cela peut faciliter la démonstration de certains résultats, sans être pour autant indispensable, d'autre part qu'on peut construire de nouveaux foncteurs topologiques à partir de foncteurs topologiques déjà connus; ainsi, du simple fait que le foncteur d'oubli $\underline{\mathrm{Top}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Ens}}$ est topologique, nous déduisons que le foncteur d'oubli d'une catégorie "algébrico-topologique" vers la catégorie algébrique sous-jacente est topologique, dès lors que cette structure algébrique est définie par une esquisse projective (voir 1).

<u>Notations</u>.

Soient U et U' deux univers tels que $U \in U'$ et $U \subset U'$. Un élément de U s'appelle un <u>ensemble</u>, tandis qu'un élément de U' s'appelle une <u>classe</u>, dès lors qu'on ignore s'il est ou non élément de U. On usera implicitement du fait que U est supposé saturé dans U' par bijections, c'est-à-dire que toute classe en bijection avec un ensemble est elle-même un ensemble. On notera $\underline{C}/$ la classe sous-jacente d'une catégorie $\underline{C}$ et C_o sa classe d'objets. Si $\underline{C}/$ est un ensemble, on dit que $\underline{C}$ est <u>petite</u>. Si, pour tout couple (A,B) d'objets de $\underline{C}$, $\mathrm{Hom}(A,B)$ est un ensemble, on dit que $\underline{C}$ est <u>localement petite</u>. Pour qu'une catégorie localement petite soit petite, il faut et il suffit que sa classe d'objets soit un ensemble.

Dans la suite, tous les cônes et toutes les esquisses considérés sont projectifs. Une <u>esquisse</u> est <u>petite</u> si son graphe sous-jacent, les catégories sous-jacentes de ses cônes sont petits.

Soit σ une esquisse de graphe sous-jacent S.

<u>Lemme de transport</u>. Soit $R\colon S \longrightarrow \underline{A}$ une réalisation de σ dans une catégorie $\underline{A}$ (voir 1). Soit $g_s\colon R(s) \longrightarrow A_s$, $s \in S_o$, une famille d'isomorphismes de $\underline{A}$ indexée par l'ensemble S_o des unités de S. Cette famille détermine un isomorphisme de R vers R', où R' est la réalisation définie par:

- $R'(s) = A_s$, pour $s \in S_o$, et
- $R'(f) = g_{s'}.R(f).g_s^{-1}$, pour $f\colon s \longrightarrow s' \in S$.

§ La démonstration est évidente.§

Soit $F\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un foncteur et B un objet de $\underline{B}$. Considérons la classe $\underline{A}(B)$ formée des objets A de $\underline{A}$ tels que $F(A)$ soit isomorphe à B. On désigne par $\underline{A}/B/$ la classe quotient de $\underline{A}(B)$ par la relation d'isomorphisme dans $\underline{A}$. Nous posons alors la:

<u>Définition 1</u>. Un <u>foncteur</u> $F\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est dit <u>localement petit</u> si $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, et si, quel que soit l'objet B de $\underline{B}$, la classe $\underline{A}/B/$ est un ensemble .

<u>Proposition 1</u>. <u>Si $F\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur localement petit, et si S est un graphe multiplicatif petit, alors $F^S\colon \underline{A}^S \longrightarrow \underline{B}^S$ est un foncteur localement petit.</u>

§ D'abord, $\underline{A}^S$ est évidemment localement petite (pour une réciproque concernant ce seul point-ci, voir Diagrammes, Vol. 1, 1979, l'article de F.Foltz). Soit R': $S \longrightarrow \underline{B}$ un objet de $\underline{B}^S$. Posons $X = \underline{A}^S/R'/$ et choisissons une classe de représentants R_x: $S \longrightarrow \underline{A}$ des éléments x de X. Nous devons montrer qu'une telle classe est un ensemble. Par définition, les foncteurs R_x ne sont pas isomorphes deux à deux, mais les foncteurs $R'_x = F_0 R_x$ sont isomorphes à R'. Soit $s \in S_0$; dans la classe $\{R_x(s)\}_{x \in X}$ choisissons une famille complète de représentants non isomorphes deux à deux; elle est indexée alors par une certaine sous-classe X_s de X; cette classe X_s s'injecte naturellement dans l'ensemble $\underline{A}/R'(s)/$, et c' est donc un ensemble.

Soit $Y = \bigcup_{s \in S_0} X_s$; c'est un ensemble car S_0 et les X_s sont des ensembles. Reste à prouver que $X - Y$ est aussi un ensemble. Soit $\underline{C}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{A}$ ayant pour objets les $R_x(s)$, où $x \in Y$. Il est clair que $\underline{C}$ est une petite catégorie. Soit alors $x \in X - Y$; pour $s \in S_0$, il existe au moins un $y(x)$ élément de Y tel que $R_x(s)$ soit isomorphe à $R_{y(x)}(s)$, d'après le choix du début; prenons un tel isomorphisme $g_{x,s}$: $R_x(s) \longrightarrow R_{y(x)}(s)$. D'après le lemme de transport (appliqué à l'esquisse $(S,\emptyset)$) on fait ainsi correspondre à R_x un foncteur R'_x: $S \longrightarrow \underline{A}$, qui prend ses valeurs dans $\underline{C}$ et qui est isomorphe à R_x; il est défini par:

- $R'_x(s) = R_{y(x)}(s)$, pour $s \in S_0$, et
- $R'_x(f) = g_{x,s'} . R_x(f) . g^{-1}_{x,s}$, pour f: $s \longrightarrow s' \in S$.

Ceci définit une application de $X - Y$ dans $\mathrm{Fonct}(S,\underline{C})$; cette application est injective, car si $R'_x = R'_{x'}$, alors R_x et $R_{x'}$ sont isomorphes, et donc égaux, et $x = x'$. Comme $\underline{C}$ est petite, ainsi que S, $\mathrm{Fonct}(S,\underline{C})$ est un ensemble , donc $X - Y$ aussi.§

Corollaire. Si σ est une esquisse projective petite et si le foncteur F: $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est localement petit et commute aux limites projectives, alors, le foncteur F^{σ} : $\underline{A}^{\sigma} \longrightarrow \underline{B}^{\sigma}$ est encore localement petit.

Soit $F: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un foncteur et supposons que $\underline{A}/$ et $\underline{B}/$ soient des classes propres.

<u>Définition</u> <u>2</u>. On dit qu'un cône L, de base $R: S \longrightarrow \underline{A}$ et de sommet $A \in A_o$, est <u>F-initial</u> si et seulement si, pour tout autre cône N, de même base R et de sommet $A' \in A_o$, et pour toute flèche $u: FA' \longrightarrow FA$ satisfaisant $(FL)u = FN$, il existe une unique flèche $u': A' \longrightarrow A$ satisfaisant $Fu' = u$ et $Lu' = N$.

<u>Définition</u> <u>3</u>. On dit qu'un foncteur $T: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur <u>topologique</u> (comparer à 2 et 3) si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites:

(i) <u>Condition</u> <u>d'initialité</u>. Pour tout graphe S, petit ou non, pour tout foncteur $R: S \longrightarrow \underline{A}$ et pour tout cône M de base TR et de sommet $B \in B_o$, il existe un cône T-initial L, de base R et de sommet A, et un isomorphisme $h: B \longrightarrow TA$ tel que $(TL)h = M$.

(ii) <u>Condition</u> <u>de</u> <u>taille</u>. T est un foncteur localement petit.

<u>Exemples</u>. Les foncteurs d'oubli vers <u>Ens</u> des catégories de structures suivantes sont des foncteurs topologiques: espaces topologiques, espaces uniformes, σ-algèbres (ou tribus), espaces quasi topologiques (de toutes natures), ensembles préordonnés.

<u>Proposition</u> <u>2</u>. <u>Un</u> <u>foncteur</u> <u>topologique</u> <u>est</u> <u>fidèle</u> (voir 3, Théorème n° 3.1).

§ Soit $T: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un foncteur topologique. Soit v et $v': A \longrightarrow B$ deux morphismes distincts de $\underline{A}$ tels que $Tv = Tv' = w$. Considérons une catégorie discrète $S = S' \cup \{0\}$, où $0 \notin S'$ et où S' est une classe propre. Soit $R: S \longrightarrow \underline{A}$ le foncteur défini par $R(0) = A$ et $R(s) = B$ pour tout $s \in S'$. Définissons le cône M de base TR et de sommet TA par: $M_0 = 1_{TA}$ et $M_s = w$ pour tout $s \in S'$. Comme T est topologique, il existe un cône T-initial L, de base R et de sommet C, et un isomorphisme $h: TA \longrightarrow TC$ vérifiant $(TL)h = M$.

A tout élément s de S' on fait correspondre le cône L^s de base R et de sommet A, suivant : $L^s_0 = 1_A$, $L^s_t = v'$ pour tout $t \in S'$ et différent de s, et $L^s_s = v$. Comme L est T-initial, il existe un unique g_s tel que $Tg_s = h$ et $Lg_s = L^s$; si $s \neq s'$, on voit que $L^s \neq L^{s'}$ car, par exemple, $L^s_s = L_s g_s = v$ tandis que $L^{s'}_s = v'$; alors $g_s \neq g_{s'}$, d'où une injection de S' dans Hom(B,C), c'est-à-dire une contradiction puisque Hom(B,C) est un ensemble. La seule possibilité est donc: $v = v'$ et T est fidèle. §

<u>Proposition 3. Si T: $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est un foncteur topologique, alors tout cône limite dans $\underline{A}$ est T-initial</u> (voir 3, Théorème 5.1).

§ Soit L un cône limite, de base R: $S \longrightarrow \underline{A}$ et de sommet A_L. Comme T est topologique, il existe un cône T-initial N, de base R et de sommet A, et un isomorphisme h: $TA_L \longrightarrow TA$ tels que $(TN)h = TL$. La T-initialité de N entraîne l'existence de d: $A_L \longrightarrow A$ tel que $Nd = L$ et $T(d) = h$. Le fait que L soit un cône limite entraîne l'existence d'un unique d': $A \longrightarrow A_L$ tel que $Ld' = N$. Dans ce cas, $Ndd' = Ld' = N$ et $Ld'd = Nd = L$, et les conditions d'unicité, pour les notions de limite et d'initialité, entraînent aussitôt $d.d' = 1_A$ et $d'.d = 1_{A_L}$; ainsi d est inversible et la T-initialité de N se transmet à $Nd = L$. §

<u>Corollaire 1. Tout foncteur topologique T: $\underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ préserve les limites projectives.</u>

§ En effet, soit N un cône limite dans $\underline{A}$, de base R et de sommet A_N, et soit M un cône, de base TR et de sommet B. Comme T est topologique, il existe un cône T-initial L, de base R et de sommet A, et un isomorphisme h: $B \longrightarrow TA$ tel que $(TL)h = M$. Comme N est limite, il existe un unique g: $A \longrightarrow A_N$ tel que $Ng = L$. Alors, on a: $(TN)(Tg.h) = T(Ng).h = T(L)h = M$. Supposons qu'il existe une flèche k: $B \longrightarrow TA_N$ telle que $(TN)k = M$. Comme N est limite, donc T-initial, il existe une unique flèche $k_1: A \longrightarrow A_N$

telle que $Nk_1 = L$ et $T(k_1) = k.h^{-1}$; mais, puisqu'on a déjà $Ng = L$ et que N est limite, on voit que $k_1 = g$, d'où $Tk_1 = Tg = k.h^{-1}$ et donc $k = (Tg).h$, ce qui achève de prouver que TN est aussi cône limite. §

<u>Corollaire 2</u>. <u>Tout foncteur topologique</u> $T: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$, <u>dont le but</u> $\underline{B}$ <u>est à limites projectives, crée les limites projectives dans</u> $\underline{A}$.
§ En effet, soit $R: S \longrightarrow \underline{A}$ un foncteur; soit N un cône limite dans $\underline{B}$, de base TR et de sommet A_N; comme T est topologique, il existe un cône T-initial L, de base R et de sommet A, et un isomorphisme $h: TA \longrightarrow A_N$ tel que $Nh = TL$. Soit L' un autre cône dans $\underline{A}$, de base R et de sommet A'. Comme N est un cône limite dans $\underline{B}$, et que h est un isomorphisme, il en résulte que TL est aussi un cône limite, et donc qu'il existe une unique flèche k telle que $(TL)k = TL'$. Comme L est T-initial, on trouve une unique flèche k_1 telle que $Lk_1 = L'$ et $Tk_1 = k$; si k_2 est telle que $Lk_2 = L'$, on voit que $TL.Tk_2 = TL'$, de sorte que $Tk_2 = k$ et on peut conclure alors que $k_1 = k_2$, soit en invoquant la fidélité de T, soit, et c'est mieux, en utilisant une nouvelle fois la T-initialité de L. §

<u>Théorème</u>. <u>Si</u> $T: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ <u>est un foncteur topologique et si</u> $\underline{B}$ <u>est à petites limites projectives, alors, pour toute petite esquisse projective</u> σ, <u>le foncteur</u> $T^\sigma: \underline{A}^\sigma \longrightarrow \underline{B}^\sigma$ <u>est bien défini, et c'est encore un foncteur topologique</u>.

§§ D'après le corollaire 1 de la proposition 3, T préserve les limites projectives, donc T^σ envoie bien $\underline{A}^\sigma$ dans $\underline{B}^\sigma$ (par composition par T). D'après le corollaire de la proposition 1, la condition de taille (ii) pour un foncteur topologique est satisfaite par T^σ. Il reste donc à prouver que T^σ satisfait la condition d'initialité (i). C'est ce que nous montrons point par point.

Soit $R: S \longrightarrow \underline{A}^{\nabla}$ un foncteur et soit M un cône dans $\underline{B}^{\nabla}$, de base $T^{\nabla}R$ et de sommet X; X est donc une réalisation de ∇ dans $\underline{B}$, et pour chaque $s \in S_o$, M_s est une transformation naturelle de X vers $X_s = T \circ R(s)$. Désignons par U le graphe multiplicatif sous-jacent à l'esquisse ∇ ; à chaque unité $u \in U_o$ correspondent les évaluations en u: $\underline{A}^{\nabla} \longrightarrow \underline{A}$ et $\underline{B}^{\nabla} \longrightarrow \underline{B}$, d'où au niveau de T la situation suivante:

- un foncteur $R_u: S \longrightarrow \underline{A}$ défini par $R_u = R(-)(u)$, et
- un cône M^u, de base TR_u et de sommet $X(u)$, dont la valeur en $s \in S_o$ est la valeur de M_s en u.

Comme T est topologique, ce cône M^u se relève, à isomorphisme près, en un cône T-initial L^u, de base R_u et de sommet $Y(u)$; désignons par $h_u: TY(u) \longrightarrow X(u)$ l'isomorphisme en question, qui est tel que $(TR_u)h_u = TL^u$. Si $f: u \longrightarrow u' \in U$, $X(f)$: $X(u) \longrightarrow X(u')$ est telle que:

$$M^{u'}X(f) \;=\; TR(-)(f)\, M^u \;,$$

car les M_s, $s \in S_o$, sont des transformations naturelles de X vers les $X_s = T \circ R(s)$; comme L^u est T-initial, il existe une unique flèche, naturellement notée $Y(f): Y(u) \longrightarrow Y(u')$, telle que :

$$L^{u'}Y(f) \;=\; R_f\, L^u \text{ et } T(Y(f)) \;=\; h_{u'}^{-1}.X(f).h_u \;,$$

où on a posé $R_f = R(-)(f)$. L'unicité permet d'établir facilement que Y $(f \longmapsto Y(f))$ est un foncteur de U vers $\underline{A}$, que h $(u \longmapsto h_u)$ définit un isomorphisme naturel de TY vers X, et que L $(u \longmapsto L^u)$ est un cône de base R et de sommet Y. On doit encore vérifier que Y est bien une réalisation de ∇ dans $\underline{A}$. Soit donc P un cône projectif distingué de ∇, de base $G: I \longrightarrow U$, et de sommet u; il faut montrer que le cône YP dans $\underline{A}$, de base YG et de sommet Y(u), est un cône limite; soit N un cône dans $\underline{A}$, de même base YGet de sommet A; le cône TN a pour base TYG; mais , dans $\underline{B}$, le cône XP, de base XG et de som-

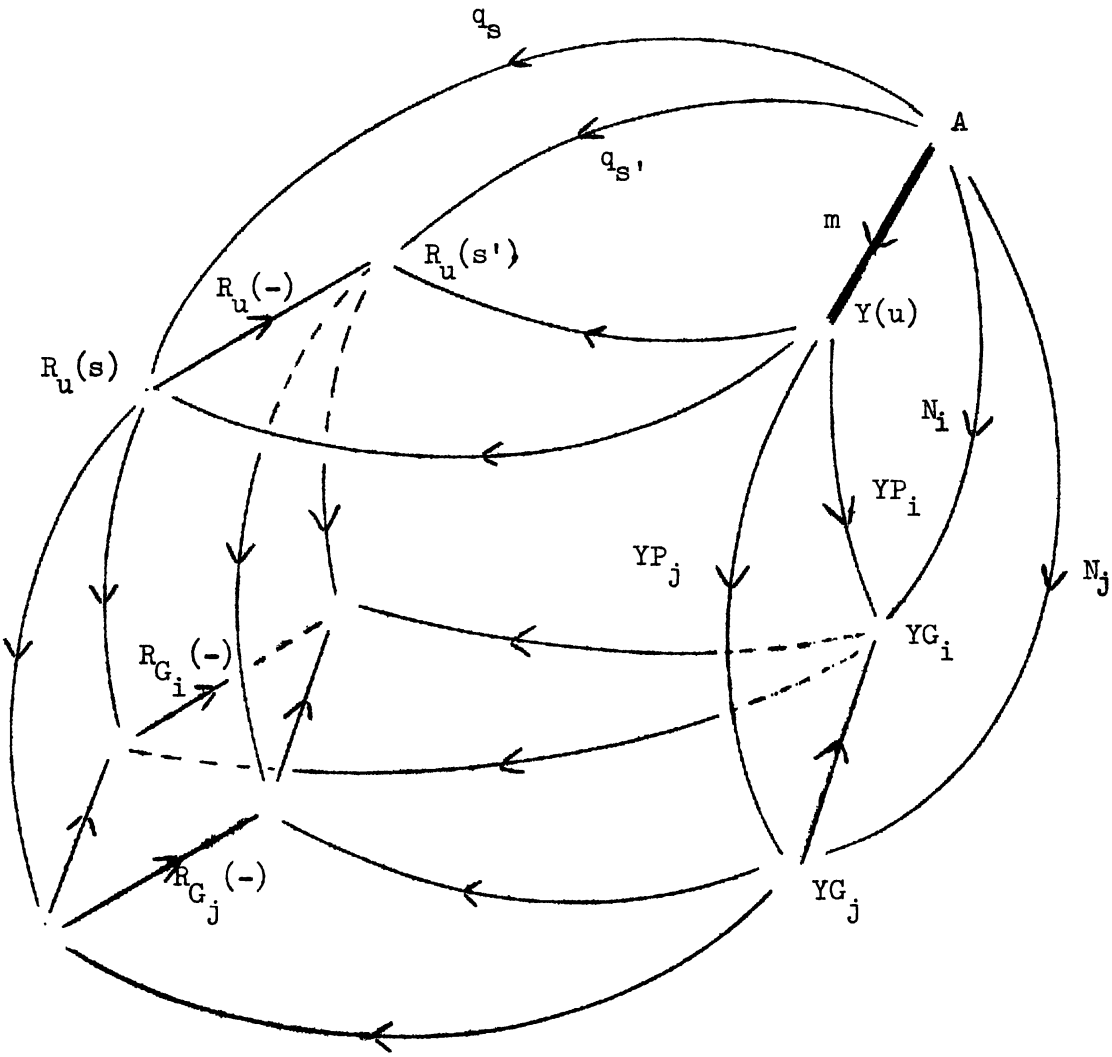

Diagramme visualisant la preuve du théorème.

Légende du diagramme.

met X(u) est un cône limite, car X est une réalisation de σ ; puisque h est un isomorphisme naturel, le cône TYP est aussi un cône limite, de sorte qu'il existe une unique flèche dans $\underline{B}$, soit $n: TA \longrightarrow TY(u)$, telle que $(TYP)n = TN$. Pour chaque unité $s \in S_o$, le cône $R(s)P$, de base $R(s)G$ et de sommet $R(s)(u)$, est un cône limite, de sorte qu'il existe une unique flèche , soit $q_s: A \longrightarrow R(s)(u) = R_u(s)$, satisfaisant:

$$\forall\, i \in I_o \ , \quad R_{P_i}.q_s \ = \ L_s^{G(i)}.N_i \ ;$$

l'unicité en question permet de montrer que l'application q qui à $s \in S_o$ fait correspondre q_s définit enfait un cône, de base R_u et de sommet A. Comme le cône M^u est T-initial, il existe une unique flèche $m: A \longrightarrow Y(u)$ telle que: $L^u.m = q$ et $T(m) = n$; on peut alors écrire, pour $i \in I_o$ fixé:

$$L^{G(i)}.Y(P_i).m \ = R_{P_i}.L^u.m \ = \ R_{P_i}.q \ = \ L^{G(i)}.N_i \ ,$$

et comme $T(YP_i.m) \ = \ TYP_i.Tm \ = \ TYP_i.n \ = \ (TN)_i \ = \ T(N_i)$, et que $L^{G(i)}$ est un cône T-initial, on voit que $Y(P_i).m = N_i$; on a donc bien une flèche $m: A \longrightarrow Y(u)$ telle que $(YP)m = N$; c'est l'unique flèche satisfaisant cette condition; en effet, supposons que $(YP)m' = N$; on voit d'une part que:

$$\forall\, i \in I_o, \quad L^{G(i)}.Y(P_i).m' = R_{P_i}.L^u.m' = L^{G(i)}.N_i = R_{P_i}.L^u.m,$$

et comme RP est un cône limite projective (point par point), cela entraîne $L^u.m' = L^u.m$; d'autre part, $Tm' = Tm$ est l'unique flèche n telle que $(TMP)n = TN$. La T-initialité de L^u permet de conclure que $m = m'$. Ainsi Y est bien une réalisation. Il reste à prouver que le cône L, de base R et de sommet Y est bien T^{σ}-initial, ce qui se fait aisément, point par point, sans avoir besoin d'utiliser la fidélité de T, mais en utilisant, une fois encore, la T-initialité des cônes L^u. §§

Commentaire. A plusieurs endroits, nous avons souligné que la fidélité de T permet de conclure "plus rapidement", mais qu'elle n'est pas indispensable. On aura remarqué aussi que la taille imposée aux classes A/B/ est relativement indépendante et de la fidélité et de la T-initialité. Il serait intéressant de mettre en évidence une propriété des foncteurs topologiques où les trois arguments (possibilité pour les bases des cônes T-initiaux d'être grandes, condition d'initialité et condition de taille) interfèreraient de façon essentielle !

Application. Du fait que Top $\longrightarrow$ Ens est topologique, on déduit que pour toute esquisse σ de structure algébrique, le foncteur d'oubli de la catégorie des structures "algébrico-topologiques" d'espèce σ (i.e. Top$^{\sigma}$) vers la catégorie des structures algébriques sous-jacentes (i.e. Ens$^{\sigma}$) est un foncteur topologique. En particulier, les oublis suivants:

- Groupes(abéliens) topologiques vers Groupes (abéliens).
- Anneaux topologiques vers Anneaux .
- Monoïdes topologiques vers monoïdes...

Certains résultats encore plus particuliers, par exemple concernant les sous-groupes des groupes topologiques, sont des conséquences immédiates de notre résultat.

Références.

1- C.EHRESMANN, -Introduction to the Theory of Structured Categories, Techn.Report 10,Univ.Kansas, 1966.
-Esquisses et Types de Structures Algébriques, Bul.Insti.Polit., Iaşi, XIV, 1968.

2- G.C.L.BRUMER and R.E.HOFFMANN, A charactrization of absolutly Topological Functors, Oberwolfach, 1975.

3- H.HERRLICH, Topological Functors, Gen. Topology Appl.4,1974.

4- R.E.HOFFMANN, Topological Functors Admitting Generalized Cauchy-Completions, Lectures Notes, Vol. 540,1976.