DIAGRAMMES

G. BOURDAUD

Quelques aspects de la dualité en analyse fonctionnelle

Diagrammes, tome 5 (1981), exp. nº 2, p. B1-B12
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1981__5__A2_0>

Diagrammes, Vol. 5 , 1981.

QUELQUES ASPECTS DE LA DUALITE EN ANALYSE FONCTIONNELLE

G. Bourdaud

Sont rassemblés ici quelques exemples particulièrement significatifs de dualité; certains - telles les diverses extensions de la dualité de Gelfand - sont maintenant classiques; d'autres sont inédits, d'importants problèmes y restant ouverts.

Je n'insisterai pas sur les aspects purement catégoriques de la dualité: ces questions ont été souvent et excellemment abordées durant la dernière décennie; je pense notamment au travail de synthèse de Porst (18), où le lecteur trouvera une bibliographie détaillée.

On rencontrera systématiquement la situation suivante. Soient $\underline{A}$ et $\underline{B}$ deux catégories, T un foncteur de $\underline{A}^{op}$ vers $\underline{B}$, admettant un adjoint S ; on dispose alors de transformations naturelles canoniques u: $Id_{\underline{A}} \dashrightarrow ST$, v: $Id_{\underline{B}} \dashrightarrow TS$; on appellera ici objet <u>réflexif</u> de $\underline{A}$ (resp. $\underline{B}$) tout X tel que u_X (resp. v_X) soit un isomorphisme. S et T induisent alors une dualité entre les objets réflexifs de $\underline{A}$ et ceux de $\underline{B}$ (voir (18),§1.2).

1. <u>Les espaces localement convexes</u>.

Examinons d'abord la catégorie NOR des espaces normés complexes. D'une part NOR est munie d'un "bon" foncteur Hom-interne, d'autre part le théorème de Hahn-Banach assure qu'il y a suffisamment d'éléments dans Hom(X,$\underline{C}$) . On étudie donc, dans un premier temps, le foncteur contravariant T : NOR ---> NOR défini par $T(X) = \mathrm{Hom}(X,\underline{C})$; ce foncteur est son propre adjoint; le morphisme naturel u_X de X dans $T^2(X)$ est, dans le langage classique, le plongement de X dans son bidual. Les "objets réflexifs" de NOR sont alors les espaces de <u>Banach réflexifs</u> au sens usuel; on peut légitimement estimer qu'il y a trop peu de tels objets.

Essayons de nous en sortir en plongeant NOR dans la catégorie ELCS des espaces localement convexes séparés: le résultat est encore plus catastrophique, cette catégorie ne possédant pas de "bon" foncteur Hom-interne.

Une solution satisfaisante est obtenue en remplaçant ELCS par la catégorie EVQT des espaces vectoriels quasi-topologiques. Rappelons qu'une <u>quasi-topologie</u> ("convergence structure"chez de nombreux auteurs (1)) sur un ensemble X est la donnée, pour chaque $x \in X$, d'une famille de filtres, appelés "<u>filtres convergeant vers x</u>", satisfaisant les axiomes:
- Si F converge vers x, tout filtre plus fin que F converge aussi vers x.
- Si deux filtres convergent vers x, leur intersection converge aussi vers x.
- L'ultrafiltre des sur-ensembles de $\{x\}$ converge vers x.

La catégorie QTOP des espaces quasi-topologiques - les morphismes étant les <u>applications continues</u>, dont le lecteur aura certainement deviné la définition - est <u>cartésienne fermée</u>; on peut en effet munir Hom(X,Y) d'une quasi-topologie canonique appelée la <u>convergence continue</u> (1).

Si un espace quasi-topologique E est muni d'une structure vectorielle complexe telle que l'addition E x E --->E et la multiplication E x $\underline{C}$ --->E soient continues, on dit que E "est" un <u>espace vectoriel quasi-topologique</u> ("pseudo-topologique", suivant Frölicher et Bucher (15)). Les morphismes de EVQT étant, on s'en doute, les applications linéaires continues, on obtient un foncteur Hom-interne canonique en munissant Hom(E,F) de la convergence continue.

Assertion n° 1 : (Binz et Kutzler (12)) Sur la catégorie EVQT, l'endofoncteur Hom(-,$\underline{C}$) est son propre adjoint; un espace vectoriel topologique est alors réflexif si et seulement si il est localement convexe, séparé et complet.

Ajoutons que Binz a déterminé (4) l'image de la sous-catégorie ELCCS (des espaces localement convexes complets séparés) par le foncteur Hom(-,$\underline{C}$): elle est formée des espaces pseudo-topologiques(au sens de Choquet) qui sont séparés par leur dual, localement compacts et localement disqués. Le problème de la dualité est donc entièrement résolu pour la catégorie ELCCS.

Autre remarque importante: l'assertion n° 1 est la reformulation d'un résultat classique de Grothendieck sur le complété d'un e.l.c.s. (voir (19), chap. VI, th.3); ce théorème, a priori un peu technique, reçoit ici une interprétation particulièrement simple; preuve, s'il en était besoin, qu'une vision catégorique de l'Analyse est parfois utile.

Dans la théorie générale des e.v.q.t. le principal problème ouvert est le suivant:

Problème n° 1 : Tout dual est-il réflexif ?

La réponse est positive pour les duaux d'espaces vectoriels topologiques, même non localement convexes (4).

Signalons enfin qu'il existe une autre caractérisation des duaux d'espaces localement convexes, ce sont les espaces compactologiques convexes réguliers de Buchwalter (10); évidemment, la catégorie obtenue se plonge canoniquement dans EVQT.

2. Les espaces métriques.

Dans le paragraphe précédent les objets réflexifs sont, en un sens, des espaces complets, ce fait est plus frappant encore – et plus élémentaire – quand on étudie les espaces métriques.

Soit METP la catégorie dont les objets sont les espaces métriques pointés (c'est-à-dire dans lesquels on distingue un point) et les morphismes les applications lipschitziennes On définit un foncteur contravariant Lip sur METP, à valeurs – provisoirement – dans la catégorie des espaces de Banach réels, de la façon suivante.

Lip(X) est l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de X dans $\underline{\mathbb{R}}$, muni de la norme:

$$\| f \| = |f(x_0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|f(x)-f(y)|}{d(x,y)}$$

(où x_0 est le point de X et d sa distance). A tout $x \in X$ on associe l'évaluation en x, notée e(x), élément du dual de Lip(X). L'énoncé suivant peut introduire à la dualité de METP :

Assertion n°2 (Bourdaud (6)): L'application e : X ---> Lip(X)' est une isométrie; le complété de X (via e) est l'ensemble des formes linéaires u sur Lip(X) telles que u(1) = 1 et u(sup A) = sup u(A) pour toute partie bornée A de l'espace normé Lip(X).

L'assertion n°2 suggère de modifier sensiblement la catégorie où Lip prend ses valeurs. Lip(X) est en effet un espace vectoriel ordonné, archimédien, possédant un disque absorbant qui est un treillis complet pour l'ordre induit (muni de la jauge de ce disque, Lip(X) est automatiquement un espace de Banach). Le problème de la dualité, pour les espaces métriques complets, peut donc se formuler:

Problème n°2 : Caractériser les espaces de fonctions lipschitziennes parmi les espaces vectoriels ordonnés décrits ci-dessus.

Il existe un lien entre ce paragraphe et le précédent. décrétons qu'un filtre sur Lip(X) converge vers f s'il converge simplement vers f et s'il contient une boule de Lip(X). L'espace vectoriel quasi-topologique $Lip(X)_q$ ainsi obtenu a deux propriétés remarquables: d'une part $Lip(X)_q$ est le dual d'un espace de Banach au sens du §1 , d'autre part les formes linéaires décrites dans l'assertion n°2 sont précisément celles qui sont continues sur $Lip(X)_q$ et satisfont les propriétés algébriques $u(1) = 1$, $u(|f|) = |u(f)|$.

3. Les algèbres localement convexes.

Soit $*$-$BALG_1$ la catégorie des algèbres de Banach sur $\underline{C}$, involutives, à élément unité; on désigne par C le foncteur de TOP vers $*$-$BALG_1$ qui à X associe l'algèbre des fonctions continues bornées de X dans $\underline{C}$, munie de la norme de la convergence uniforme et de l'involution $f \dashrightarrow \bar{f}$; C a pour adjoint le foncteur Spec qui à tout objet A de $*$-$BALG_1$ associe l'espace des homomorphismes de A dans $\underline{C}$ muni de la topologie faible $\sigma(A',A)$. Rappelons le théorème de Gelfand et Naimark:

Assertion n°3: Relativement au foncteur C les objets réflexifs de TOP sont les espaces compacts et les objets réflexifs de $*$-$BALG_1$ sont les C^*-algèbres - c'est-à-dire celles qui satisfont l'identité $\|x^* x\| = \|x\|^2$.

Afin d'élargir ce résultat, on peut se demander, par exemple, s'il n'existe pas une dualité entre les limites inductives, dans TOP, d'espaces compacts et les limites projectives (dans la catégorie des algèbres topologiques involutives) de C^*-algèbres; il n'en est malheureusement rien; pour obtenir un tel résultat, on est obligé:

- soit de modifier les limites projectives d'algèbres; c'est ce que font Dubuc et Porta en se plaçant dans la catégorie des algèbres de Kelley (14);
- soit de modifier les limites inductives d'espaces topologiques; c'est le point de vue de Schroder (7,20) qui se place dans la catégorie QTOP où - fait remarquable - les limites inductives d'espaces compacts sont exactement les espaces localement compacts. Là encore, le langage des compactologies donne un résultat parallèle (10).

Problème n°3: <u>Existe-t-il, dans des sur-catégories convenables, une dualité entre les limites projectives d'espaces compacts et les limites inductives de C^*-algèbres</u> ?

4. <u>Les espaces topologiques et consorts</u>.

Considérons, de façon générale, deux catégories concrètes $\underline{A}$ et $\underline{B}$, dont les foncteurs d'oubli soient représentables; si $T : \underline{A} \dashrightarrow B$ et $S : \underline{B} \dashrightarrow \underline{A}$ sont deux foncteurs contravariants établissant une dualité entre $\underline{A}$ et $\underline{B}$, on sait (voir (18) §1.1) que les foncteurs T et S sont eux-même"représentables"; plus précisément, il existe des cogénérateurs L et J de $\underline{A}$ et $\underline{B}$, respectivement, ayant le même ensemble sous-jacent, tels que les ensembles sous-jacents à S(X) et T(X) soient respectivement $\underline{B}(X,J)$ et $\underline{A}(X,L)$.

Soit, pour fixer les idées, une sous-catégorie $\underline{A}$ de QTOP. Pour traiter la dualité de $\underline{A}$, il faudra d'abord trouver un cogénérateur L de $\underline{A}$, ensuite structurer convenablement l'ensemble $\underline{A}(X,L)$. On s'aperçoit ainsi que la structure d'un espace <u>topologique</u> X est entièrement déterminée par les applications continues de X dans l'espace $\Omega = \{0,1\}$ où $\{1\}$

est le seul ouvert non trivial; de même, la structure d'un espace topologique <u>uniformisable</u> (sous-catégorie notée UTOP) est donnée par les applications continues de X dans $\underline{R}$.

Voici un troisième exemple, plus exotique. Un espace <u>semi-topologique</u> (ou "prétopologique" ou "espace à fermeture") est un espace quasi-topologique X tel que, pour chaque $x \in X$, il existe un plus petit filtre convergeant vers x ; ce filtre est appelé "<u>filtre des voisinages de x</u>" : la structure de X est alors entièrement déterminée par la donnée des couples (V,A), où V et A sont deux parties de X telles que V soit voisinage de chaque point de A ; ces couples sont en bijection avec les applications continues de X dans l'espace semi-topologique $\Lambda = \{0,1,2\}$ où les filtres de voisinages sont : $\underline{V}(0) = \{\Lambda\}$, $\underline{V}(1) = \{\Lambda\}$, $\underline{V}(2) = \{\Lambda , \{1,2\}\}$. On notera STOP la sous-catégorie pleine de QTOP dont les objets sont les espaces semi-topologiques.

Dans ces trois exemples, on constate un lien étroit entre le cogénérateur L et le plongement minimal de la catégorie $\underline{A}$ dans une catégorie fermée:

Assertion n°4 (Antoine, Machado, Bourdaud (8)): <u>La plus petite sous-catégorie de</u> QTOP <u>contenant respectivement</u> TOP, UTOP, STOP, <u>stable par le foncteur Hom-interne et par construction de structures initiales</u>, <u>est formée des objets</u> X <u>de</u> QTOP <u>dont la structure est initiale pour l'application canonique</u> X $\dashrightarrow$ Hom(Hom(X,L),L), L <u>désignant respectivement</u> Ω, $\underline{R}$ et Λ.

Dès lors les problèmes de dualité pourraient se traiter comme suit:

a) <u>Cas des espaces topologiques uniformisables</u>:
Le foncteur C = Hom(-,$\underline{R}$) , défini sur QTOP, prend ses valeurs dans la catégorie $QTALG_1$ des algèbres quasi-topologiques à

élément unité; l'adjoint de C est le foncteur Spec qui, à tout objet A de $QTALG_1$, associe l'espace de tous les homomorphismes continus de A dans $\underline{R}$, muni de la quasi-topologie de la convergence continue.

Assertion n°5 (Binz(2)): Pour un objet X de QTOP, les deux énoncés suivant sont équivalents:

(i) L'application canonique $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\ C(X)$ est un homéomorphisme.

(ii) L'algèbre C(X) sépare les points de X et la quasi-topologie de X est initiale pour l'application $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\ C(X)$.

Grâce à ce théorème, la classe des objets réflexifs de QTOP est particulièrement vaste - elle contient notamment les espaces topologiques complètement réguliers. Par ailleurs, j'ai donné une description explicite des espaces quasi-topologiques X initiaux pour l'application canonique $X \longrightarrow \mathrm{Spec}\ C(X)$ (8); cette description a été ultérieurement simplifiée par Schroder (21). Sur les objets réflexifs de $QTALG_1$, on ne possède, à ma connaissance, que des résultats partiels (3).

b) Cas des espaces topologiques:

Soit X un espace topologique (ou, plus généralement, un espace d'Antoine (8)); à l'aide de l'application $f \longmapsto f^{-1}(1)$, on identifie $\mathrm{Hom}(X,\Omega)$ avec l'ensemble $\Omega(X)$ des ouverts de X ; de ce fait, outre sa structure quasi-topologique, $\Omega(X)$ possède une structure de treillis complet; de plus, pour tout $x \in X$, l'évaluation en x : $\Omega(X) \longrightarrow \Omega$ est compatible avec les bornes inférieures finies et les bornes supérieures quelconques. Essayons de préciser les conditions pour que X soit réflexif. Par hypothèse, la structure de X est initiale pour l'application e : $X \longrightarrow \Omega^2(X)$; par ailleurs on vérifie aisément l':

Assertion n°6 : <u>L'application</u> e <u>est injective si et seulement</u> X <u>satisfait l'axiome de séparation</u>:

(T?) <u>Pour tous</u> $x,y \in X$, <u>si</u> $x \in \overline{\{y\}}$ <u>et</u> $y \in \overline{\{x\}}$, <u>alors</u> $x = y$.

Enfin, et c'est le gros morceau, on devra s'assurer de la propriété suivante: "<u>Pour toute application continue</u> f : $\Omega(X) \dashrightarrow \Omega$, <u>compatible avec les bornes inférieures finies et les bornes supérieures quelconques</u>, <u>il existe</u> $x \in X$ <u>tel que</u> $f = e(x)$".

Pour déterminer les objets duaux, on devra non seulement caractériser les treillis d'ouverts parmi les treillis complets (un théorème de Büchi répond à cette question (16)), mais encore préciser l'articulation entre la quasi-topologie et la structure de treillis sur $\Omega(X)$ (Qu'est-ce-qu'un "treillis quasi-topologique?).

5. Les espaces uniformes.

Notons UNIF la catégorie des espaces uniformes. Il existe, me semble-t-il, plusieurs façons d'approcher la dualité de cette catégorie.

a) Le théorème de Buchwalter et Pupier ((9),(11)) indique qu'on peut considérer - canoniquement - le complété d'un espace uniforme comme un ensemble des caractères de l'algèbres des fonctions uniformément continues bornées sur X.

b) On peut encore considérer un espace uniforme comme une limite projective d'espaces "écartisables"; on se ramène alors à la dualité des espaces métriques (§2).

c) On cherchera enfin à plonger UNIF dans une catégorie fermée. L'une des candidates possibles est la catégorie des espaces quasi-uniformes de Cook et Fischer (13,22); j'en propose une autre, qui met en valeur la notion d'uniforme équicontinuité.

Soient X et Y deux espaces uniformes et B une partie de Hom(X,Y), munie de la structure uniforme de la convergence uniforme; l'application d'évaluation B x X ---> Y est alors uniformément continue si et seulement si B est uniformément équicontinue. Cet énoncé classique suggère l'extension suivante de la notion d'espace uniforme.

Un espace <u>bornologique-uniforme</u> est un espace bornologique X (17) où chaque borné est muni d'une structure uniforme; l'axiome de cohérence est le suivant: si B' est un borné et si $B \subset B'$, la structure uniforme de B est induite par celle de B'. Un morphisme de X vers un autre espace bornologique-uniforme Y est une application bornée f telle que, pour tout borné B de X, la restriction f : B ---> f(B) soit uniformément continue. On obtient ainsi une catégorie BUNIF. On plonge UNIF dans BUNIF en munissant tout espace uniforme X de la bornologie triviale - où X lui-même est un borné.

Assertion n°7: <u>La catégorie</u> BUNIF <u>est cartésienne fermée</u>.

Décrivons la structure de Hom(X,Y) dans BUNIF. Une partie B de Hom(X,Y) est dite <u>bornée</u> si, pour tout borné A de X :
(i) B(A) est un borné de Y,
(ii) l'ensemble B/A des restrictions à A des éléments de B est une partie uniformément équicontinue de UNIF(A,B(A)).

B est alors muni de la structure uniforme initiale déterminée par toutes les restrictions B ---> UNIF(A,B(A)) (où A parcourt l'ensemble des bornés de X et UNIF(A,B(A)) est muni de la convergence uniforme).

Assertion n°8: <u>La plus petite sous-catégorie pleine de</u> BUNIF <u>contenant</u> UNIF , <u>stable par le foncteur Hom-interne et par contruction de structures initiales est formée des objets</u> X <u>de</u> BUNIF <u>dont la structure est initiale pour l'application cano-</u>

<u>nique</u> X $\dashrightarrow$ Hom(Hom(X,$\underline{R}$),$\underline{R}$) .

La preuve de l'assertion n°8 est tout-à-fait analogue à celle de l'assertion n°4; il suffit de remarquer que tout espace uniforme X est l'espace initial déterminé par les applications canoniques X $\dashrightarrow$ UNIF(B,$\underline{R}$) (où B parcourt l'ensemble des parties uniformément équicontinues de UNIF(X,$\underline{R}$)).

<u>Références</u>:

(1) BINZ E., Continuous convergence in C(X), Lecture notes n°469.
(2) ------ , Zu den Beziehungen zwischen c-einbettbaren Limesraümen, Math. Ann. 181, 45-52 (1969).
(3) ------ , Notes on a Characterization of Function Algebras, Math. Ann.186, 314-326 (1970).
(4) BINZ E., BUTZMANN H.P., KUTZLER K., Über den c-Dual..., Math. Zeit. 127, 70-74 (1972).
(5) BIRKHOFF G., Lattice Theory, AMS (1948).
(6) BOURDAUD G., Sur les espaces de fonctions lipschitziennes, inédit (Paris 1977).
(7) ---------- , Sur la dualité des algèbres localement convexes, C.R.A.S., t.281, 1011-1014 (1975).
(8) ---------- , Some cartesian closed category of convergence spaces, Categorical Topology, Lecture notes N°540.
(9) ---------- , Sur le théorème de complétion de Buchwalter-Pupier, Cah. Top. Géom. Diff. XVII, 3 (1976).
(10) BUCHWALTER H., Topologies et compactologies, Pub. Dep. Math. Lyon t.6-2 (1969).
(11) BUCHWALTER H. et PUPIER R., C.R.A.S., t.273, 96-98 (1971).
(12) BUTZMANN H.P., Über die c-Reflexivität von $C_c(X)$, Comm. Math. Helvet., 47-1, 92-101 (1972).

(13) COOK C.H. et FISCHER H.R., Uniform convergence structures, Math. Ann. 173, 290-306 (1967).

(14) DUBUC E.J. et PORTA H., Convenient Categories of topological Algebras..., J. Pure Appl. Algebra 1, 281-316 (1971).

(15) FRÖLICHER A. et BUCHER W., Calculus in Vector Spaces without Norm, Lecture notes n°30.

(16) HOFFMANN R.E., Topological Spaces admitting a "Dual", Categorical Topology, Lecture notes n°719.

(17) HOGBE-NLEND H., Théorie des Bornologies et applications, Lecture notes n°213.

(18) PORST H.E., A Survey of the Categorical Treatment of Dualities, Math. Arbeit. n°18 (Bremen 1979).

(19) ROBERTSON A. P., Topological Vector Spaces, Cambridge U.P. (1966).

(20) SCHRODER M., Continuous Convergence in a Gelfand Theory..., Pub. Univ. Waikato n°9 , Hamilton, New-Zealand (1971).

(21) ---------- , Marinescu structures and C-spaces (Manuscrit remis à l'auteur).

(22) WYLER O., Function Spaces in topological Categories, Categorical Topology, Lecture notes n°719.

Université Paris VII
U.E.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5^{me} étage
2 place Jussieu
75221 PARIS CEDEX 05