DIAGRAMMES

R. GUITART
C. LAIR

Calcul syntaxique des modèles et calcul des formules internes

Diagrammes, tome 4 (1980), p. GL1-GL106
<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1980__4__1_0>

Diagrammes, Vol. 4 , 1980.

CALCUL SYNTAXIQUE DES MODELES
ET
CALCUL DES FORMULES INTERNES

R. Guitart et C. Lair

INTRODUCTION

1. Deux points de vue connus sur modèles et logique.

Une théorie du premier ordre décrit des modèles. Ce premier point de vue n'est efficace que si:
- il permet un calcul des modèles, c'est-à-dire de déduire de la seule forme de la théorie considérée (donc de ses formules) les propriétés de ses modèles,
- il permet un calcul des théories, c'est-à-dire un calcul "logique" des formules.

Evidemment, logiciens et spécialistes de la Théorie des Modèles se sont largement employés à développer ces calculs.

Une petite catégorie $\underline{S}^{op}$ à limites inductives α-petites (resp. un site) décrit une catégorie essentiellement algébrique: celle, notée $Alg(\underline{S}^{op})$ (resp. $Fais(\underline{S})$), des foncteurs α-continus, ou réalisations, (resp. des faisceaux) de $\underline{S}$ (resp. sur $\underline{S}^{op}$) vers Ens . Ce deuxième point de vue n'est efficace que si:

- il permet un calcul des réalisations (resp. des faisceaux), c'est-à-dire de déduire de la seule forme de $\underline{S}$ les propriétés de $Alg(\underline{S}^{op})$ (resp. $Fais(\underline{S})$) ,
- il permet un calcul des catégories à limites inductives α-petites (resp. des sites), c'est-à-dire les constructions "formelles" de catégories de ce type à partir d'autres catégories de ce type.

Bien entendu, ce deuxième point de vue est une (possibilité de) traduction catégorique du premier point de vue, dans le cas où la théorie du premier ordre considérée est algébrique, c'est-à-dire lorsque ses formules sont (équivalentes à) des équations quantifiées universellement.
Le problème se pose donc d'étendre ce type de traduction à des classes plus larges de théories du premier ordre non nécessairement algébriques.

2. Quelques solutions déjà proposées.

Plusieurs réponses ont déjà été suggérées ou développées:

- C. Ehresmann propose en (E.T.S.A.) de passer du cas projectif (où $\underline{S}$, appelée esquisse projective, est munie de limites projectives - ou plus généralement de cônes projectifs distingués) au cas mixte (où $\underline{S}$, alors appelée simplement esquisse, est munie de cônes projectifs et inductifs distingués);

- Diers généralise en (C.A.L.O.) la notion de limite inductive en celle de limite inductive locale et donc celle de foncteur α -continu en celle de foncteur localement α-continu; on obtient ainsi des catégories localement algébriques;

- Andréka-Németi (et Sain), partant directement du "point de vue du logicien" (et non de la version catégorique des théories algébriques du premier ordre) intérprètent des formules d'un langage du premier ordre en termes de cônes projectifs à bases discrètes dans la catégorie des modèles de ce langage; la validité de ces cônes-formules en un modèle de ce langage est alors définie par une condition d'injectivité de ce modèle relativement à ce cône; on représente ainsi les sous-catégories pleines, dites axiomatisables, de la catégorie des modèles de ce langage (voir (F.A.U.C.));

- En (I.F.O.F.), Andréka-Németi proposent de généraliser le point de vue précédent en y substituant aux cônes projectifs discrets des arbres, la validité s'exprimant en termes d'existence d'une stratégie gagnante pour le jeu associé à l'arbre considére; on obtient ainsi toutes les catégories de modèles de formules du premier ordre;

- Enfin, si $\underline{S}^{op}$ est un site, plutôt que de considérer ses faisceaux dans Ens, on peut considérer ses modèles dans Ens , ou même dans un topos quelconque (voir (F.O.C.L.)).

3. Commentaires.

Comme dans le cas purement projectif (systématiquement développé) le point de vue mixte de C. Ehresmann devrait permettre le calcul des réalisations (i. e. des foncteurs transformant les cônes distingués en des limites) et ce par des arguments syntaxiques, c'est-à-dire ne portant que sur la forme de l'esquisse considérée. En tout cas, il permet effectivement le calcul des esquisses, c'est-à-dire les constructions formelles d'esquisses associées à d'autres (voir (E.G.C.E.)). Cependant, faute d'exemples suffisamment développés et à défaut d'avoir explicité les théories du premier ordre ainsi traduites, d'aucuns ont pu croire arbitraire cette conception.

A contrario, la proposition de Diers, notamment par ses nombreux exemples, est fort séduisante. Elle permet, premièrement, un calcul effectif et élégant des propriétés des catégories localement algébriques et, deuxièmement, un calcul des petites catégories à limites inductives locales α-petites ("constructions de catégories localisables" de (C.A.L.O.)). Cependant, ce deuxième calcul n'est qu'une **restriction du premier**. On peut également observer que, malgré les nombreuses théories supplémentaires (non algébriques) ainsi récupérées, on est encore assez loin de compte par rapport à la version de Andréka-Németi-Sain qu'il est, de plus, difficile d'englober ou d'intérpèter naturellement de ce point de vue.

L'optique proposée par Andréka-Németi-Sain permet également un calcul des modèles. Cependant, les conditions d'injectivité considérées apparaissent comme étant insuffisamment universelles (elles s'expriment en termes d'existence de flèches - non nécessairement uniques - par des "méta-formules" du premier ordre).

La même remarque vaut pour le point de vue de (F.O.C.L.), à ceci près, cependant, que les méta-formules considérées sont en réalité des formules intérprètables dans le langage d'un topos "engendré" par le site.

Résumons en un tableau comparatif:

	Ehresmann	Diers	Andréka Németi Sain	Modèles de sites
type d'injectivité	stricte	stricte	large	large
types de cônes	quelconques	discrets	discrets	discrets
présentation des cônes	abstraite	abstraite	concrète	abstraite
outils plus généraux	/	/	jeux dans des arbres	langage de topos (W. Mitchell)

4. Nos résultats.

Dans ce texte, nous prouvons que le point de vue des esquisses mixtes d'Ehresmann:

- englobe naturellement celui de Diers, c'est-à-dire que toute catégorie localisable est la catégorie des réalisations d'une esquisse mixte particulière dont la forme est caractérisée (Chap. I);

- est équivalent au point de vue de Andréka-Németi-Sain (et, par conséquent, à celui des sites), c'est-à-dire que toute catégorie axiomatisable au sens de (F.A.U.C.) est équivalente à la catégorie des réalisations d'une esquisse mixte et réciproquement; en conséquence, la validité en termes d'injectivité (large) pour les cônes projectifs à bases discrètes est équivalente à la validité en termes universels (i. e. stricte ou en termes de limites) pour des cônes projectifs à bases non nécessairement discrètes (Chap. II);

- permet un calcul effectif des réalisations (qu'il est justifié d'appeler aussi des modèles) d'un point de vue syntaxique (i. e. en n'utilisant que la forme de l'esquisse considérée); notamment, nous obtenons des critères syntaxiques de calcul "point par point" des limites, limites partielles et ultra-produits; nous obtenons également des criteres syntaxiques d'existence (et de calcul) des limites inductives locales et des structures localement libres (dans des sens étendant naturellement et raisonnablement ceux de Diers, de telle manière qu'ils puissent s'appliquer aussi aux catégories axiomatisables: il s'agit simplement de considérer des diagrammes - non nécessairement discrets - plutôt que des familles limites locales ou localement libres); cette méthode de calcul syntaxique prolonge ainsi la méthode analogue systématiquement utilisée dans le cas purement projectif (Chap. III);

- permet un calcul logique de "formules internes" (validité dans un modèle, implication sémantique ou syntaxique ...); une formule interne à $\underline{S}$ (intuitivement, exprimable dans le langage de $\underline{S}$ et significative pour les $\underline{S}$-préfaisceaux) est un "système inductif de cônes projectifs", c'est dire qu'on peut lui associer une esquisse mixte; l'intérêt de cette définition est de tenir compte de la réalité: en pratique, les esquisses mixtes sont découvertes "plongées" dans des catégories de modèles faibles, puis sont abstraites en utilisant des présentations des modèles intervenant dans sa description (au même titre que les variétés sont d'abord vues plongées puis abstraites, ce qui entraine un va-et-vient fécond entre le "calcul des cartes" et le "calcul intrinséque");

ainsi, ce calcul de formules internes précise le calcul formel (ou intrinsèque) des esquisses de (E.G.C.E.) (Chap. IV).

Du Chap. III résulte que le calcul syntaxique des modèles (d'une esquisse petite donnée) est équivalent à la conjonction des deux calculs suivants:

(i) celui des limites mixtes de Ens , i. e. des commutations de limites dans Ens,

(ii) celui des décompositions d'une catégorie petite en 2-limites inductives dans Cat et de la stabilié de ses sous-catégories dans ces décompositions.

Du Chap. IV ressort que le calcul des formules internes (à une esquisse petite donnée) est équivalent à la conjonction des deux calculs suivants:

(j) celui de l'exactitude des 2-carrés de Cat ,

(jj) celui des structures libres dans l'adjonction entre le foncteur "diagrammes" et le foncteur "produit croisé".

Les calculs (i) et (j) sont équivalents, de même que (ii) et (jj). Ainsi, les techniques du calcul des modèles sont identiques à celles du calcul des formules. Cela peut ne pas surprendre vu le "méta-"principe de traduction syntaxe - sémantique, c'est-à-dire le procédé d'association dialectique de tous ses modèles à une formule et de toutes les formules qu' il vérifie à un modele. Mais ceci résulte plus surement encore des constatations suivantes:

- une réalisation $F: \underline{S} \longrightarrow$ Ens (i. e. un modèle de l'esquisse $\underline{S}$) est aussi un morphisme particulier de la catégorie des esquisses (localement petites),

- une formule interne (concrète, au sens du Chap. IV) à l'esquisse $\underline{\underline{S}}$ est aussi un 2-triangle de la 2-catégorie des esquisses.

En conséquence, le calcul des modèles et le calcul des formules se déduisent des procédés de construction de morphismes dans la catégorie des esquisses. De même, l'association formules - modèles s'exprime par factorisations dans la catégorie des esquisses. Autrement dit, ces trois pratiques résultent d'une étude "générale" de la catégorie des esquisses, telle qu'elle est initiée dans (E.G.C.E.).

<u>Nota</u>. C. Ehresmann définit précisément une esquisse comme étant un <u>graphe multiplicatif</u> muni de cônes distingués. Nous partageons cette conception dont la plus grande finesse est plus efficace dans certains calculs. Néanmoins, pour ne pas alourdir le présent exposé théorique, nous nous limitons à appeler esquisse une <u>catégorie</u> munie de cônes distingués.

TERMINOLOGIE - NOTATIONS

Dans toute la suite, les catégories variables sont notées $\underline{A}$, $\underline{I}$, $\underline{X}$, $\underline{S}$ ... ; leurs objets sont notés A , I , X , S ... ; leurs classes d'objets sont notées $\mathrm{ob}\underline{A}$, $\mathrm{ob}\underline{I}$, $\mathrm{ob}\underline{X}$, $\mathrm{ob}\underline{S}$ ... ; leurs flèches sont notées $a\colon A \longrightarrow A'$, $i\colon I \longrightarrow I'$, $x\colon X \longrightarrow X'$, $s\colon S \longrightarrow S'$ ...
En général, les foncteurs sont notés $F\colon \underline{S} \longrightarrow \underline{A}$ ou encore $\varphi : \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$. Les transformations naturelles sont notées $n\colon F \longrightarrow G$ ou encore $\nu : \varphi \longrightarrow \psi$.

Si $\underline{X}$ est une catégorie et si $x\colon X \longrightarrow X'$ en est une flèche, on notera $X^c : \underline{I} \longrightarrow \underline{X}$ le foncteur constant sur X de la catégorie $\underline{I}$ (sur laquelle il n'y aura jamais ambiguïté) vers la catégorie $\underline{X}$; de même, on notera $x^c : X^c \longrightarrow X'^c$ la tranformation naturelle constante.

On notera F/G la catégorie comma de deux foncteurs $F\colon \underline{X} \longrightarrow \underline{A} \longleftarrow \underline{Y} : G$ et $F' \diagdown G'$ la catégorie co-comma de deux foncteurs $\underline{X} \longleftarrow \underline{A}\colon F'$, $G'\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{Y}$. On posera, plus particulièrement, $A^c/G = A/G$ et $F/A^c = F/A$.

Si $\underline{S}$ est une catégorie, on note $\mathrm{Yon}_{\underline{S}}\colon \underline{S} \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{\mathrm{op}}$ le plongement de Yoneda et, s'il n'y a pas ambiguïté, on posera, encore plus simplement, $\mathrm{Yon}_{\underline{S}} = \mathrm{Yon}$.

Si $\varphi : \underline{I} \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur, on dit que $(a_I\colon A \longrightarrow A_I = \varphi I)_{I \in \underline{I}}$ (resp. $(a_I\colon \varphi I = A_I \longrightarrow A)_{I \in \underline{I}}$) est un <u>cône projectif</u> (resp. <u>inductif</u>) <u>sur</u> φ , <u>dans</u> $\underline{A}$ et de <u>base</u> $\underline{I}$, si et seulement si, pour toute flèche $i : I \longrightarrow I'$, on a $\varphi(i).a_I = a_{I'}$ (resp. $\varphi(i).a_{I'} = a_I$). En général, on omettra de mentionner φ et l'on parlera seulement du <u>cône projectif</u> (resp. <u>inductif</u>) $(a_I\colon A \longrightarrow A_I)_{I \in \underline{I}}$ (resp. $(a_I\colon A_I \longrightarrow A)_{I \in \underline{I}}$) dans $\underline{A}$ de base $\underline{I}$, la donnée des $\varphi(i) = A_{i: I \to I'}$ étant supposée sans ambigüité et déterminée par la seule mention $I \in \underline{I}$, alors que I n'est qu'un objet de $\underline{I}$ et ne varie donc, en principe, que dans $\mathrm{ob}\underline{I}$. On ne confondra donc pas:

- le cône projectif (resp. inductif) $(a_I : A \longrightarrow A_I)_{I \in \underline{I}}$ (resp. $(a_I : A_I \longrightarrow A)_{I \in \underline{I}}$) de base $\underline{I}$,
- le cône projectif (resp. inductif) $(a_I : A \longrightarrow A_I)_{I \in \mathrm{ob}\underline{I}}$ (resp. $(a_I : A_I \longrightarrow A)_{I \in \mathrm{ob}\underline{I}}$, sous-jacent au précédent, mais de base discrète $\mathrm{ob}\underline{I}$.

Si un tel cône projectif (resp. inductif) est une limite projective (resp. inductive) dans $\underline{A}$, on notera aussi

$$A = \varprojlim_{I \in \underline{I}} A_I = \varprojlim_{I \in \underline{I}} \varphi I \quad (\text{resp. } A = \varinjlim_{I \in \underline{I}} A_I = \varinjlim_{I \in \underline{I}} \varphi I).$$

On ne confondra pas, non plus, ces limites avec

$$A' = \varprojlim_{I \in \mathrm{ob}\underline{I}} A_I = \prod_{I \in \mathrm{ob}\underline{I}} A_I \quad (\text{resp. } A' = \varinjlim_{I \in \mathrm{ob}\underline{I}} A_I = \coprod_{I \in \mathrm{ob}\underline{I}} A_I).$$

On appelle <u>esquisse</u> une catégorie $\underline{S}$ où sont <u>distingués</u> des cônes projectifs et des cônes inductifs. Une telle structure est notee $//\underline{S}//$, lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité sur les cônes distingués. Si seuls des cônes projectifs sont distingués, on dit qu'il s'agit d'une <u>esquisse</u> (<u>purement</u>) <u>projective</u> que l'on préfère alors noter $/\underline{S}/$. Ainsi, à toute esquisse $//\underline{S}//$ est associée son esquisse purement projective <u>sous-jacente</u> notée $/\underline{S}/$, obtenue en omettant de distinguer les cônes inductifs qui l'étaient dans $//\underline{S}//$.
On dit qu'une esquisse (resp. une esquisse projective) est <u>petite</u> si, et seulement si, sa catégorie sous-jacente est petite, les bases des cônes distingués sont petites et les cônes distingués forment un ensemble.

On appelle <u>réalisation</u> d'une esquisse $//\underline{S}//$ (resp. $/\underline{S}/$) vers une catégorie $\underline{A}$, et l'on note $F: //\underline{S}// \longrightarrow \underline{A}$ (resp. $F: /\underline{S}/ \longrightarrow \underline{A}$), tout foncteur $F: \underline{S} \longrightarrow \underline{A}$ transformant les cônes projectifs et les cônes inductifs (resp. les cônes projectifs) distingués en des limites de $\underline{A}$. On note alors $\underline{A}^{//\underline{S}//}$ (resp. $\underline{A}^{/\underline{S}/}$) la sous-catégorie pleine de $\underline{A}^{\underline{S}}$ dont les objets sont ces réalisations. Ainsi, si $//\underline{S}//$ est une esquisse et $/\underline{S}/$ est son esquisse projective sous-jacente, la catégorie $\underline{A}^{//\underline{S}//}$ est aussi sous-catégorie pleine de $\underline{A}^{/\underline{S}/}$.

Plus généralement, on appelle <u>morphisme</u> (ou encore <u>réalisation</u> !) d'une esquisse $//\underline{S}//$ vers une autre $//\underline{T}//$, et l'on note $//R//: //\underline{S}// \longrightarrow //\underline{T}//$, tout foncteur $R: \underline{S} \longrightarrow \underline{T}$ commutant aux cônes distingués.

Si $/\underline{S}/$ est une esquisse projective petite, alors on sait que:

- $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est à limites projectives petites et elles s'y calculent point par point (i. e. le foncteur injection canonique $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ commute avec ces limites),
- le foncteur injection canonique $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ admet un adjoint à gauche $Q: \mathrm{Ens}^{\underline{S}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ et donc $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est à petites limites inductives,
- le foncteur $\pi : \underline{S} \xrightarrow[\mathrm{Yon}_{\underline{S}}]{} (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \xrightarrow[Q^{op}]{} (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$ est une réalisation de $/\underline{S}/$,
- cette réalisation $\pi : /\underline{S}/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$ est <u>canonique</u> en ce sens que, naturellement en tout objet $F: /\underline{S}/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, on a $\mathrm{Hom}(\pi S, F) \simeq F(S)$,

- enfin, $\pi^{op} : \underline{S}^{op} \longrightarrow Ens^{/\underline{S}/}$ est dense, autrement dit, naturellement en tout objet $F: /\underline{S}/ \longrightarrow Ens$ de $Ens^{/\underline{S}/}$, on a

$$F = \varinjlim_{\substack{S \in \underline{S}^{op} \\ t \in \overline{F}(S)}} \pi(S)$$

dans $Ens^{/\underline{S}/}$.

De même, si $//\underline{S}//$ est une esquisse, le foncteur évaluation

$$\begin{array}{rl} ev: \underline{S} \longrightarrow & Ens^{(Ens^{//\underline{S}//})} \\ S \longmapsto & (ev_S : Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens\ ) \\ & \qquad\qquad F \longmapsto FS \end{array}$$

est également une réalisation.
Cette réalisation $ev: //\underline{S}// \longrightarrow Ens^{(Ens^{//\underline{S}//})}$ est dite <u>hyper-canonique</u> .

Rappelons que, à des questions de taille près (voir (F.O.S.A.)), si $\underline{A}$ est une catégorie, pour qu'elle soit <u>esquissable</u> (resp. <u>projectivement esquissable</u>), autrement dit, pour qu'elle soit équivalente à une catégorie $Ens^{//\underline{S}//}$ (resp. $Ens^{/\underline{S}/}$), il faut et il suffit que $\underline{A}$ soit équivalente à la catégorie de réalisations

$$Ens^{//Ens^{\underline{A}}//} \quad (\text{resp. } Ens^{/\underline{A}^{op}/}\ ) ,$$

où $//Ens^{\underline{A}}//$ (resp. $/\underline{A}^{op}/$) est obtenue en distinguant les limites projectives et inductives (resp. les limites projectives).

CHAPITRE I

CATEGORIES LOCALISABLES AU SENS DE DIERS ET CATEGORIES ESQUISSABLES AU SENS D'EHRESMANN

1. Esquissabilité des catégories localisables.

Dans tout ce §1 , on désigne par α un ordinal régulier et par $\underline{A}$ une catégorie α-localisable.

Par définition, ceci signifie donc que (voir (C.A.L.O.)):

(L1). $\underline{A}$ est à limites inductives petites α-filtrantes,

(L2). $\underline{A}$ est a limites inductives locales α-petites,

(L3). $\underline{A}$ possède un ensemble générateur propre formé d'objets α-présentables.

Si nous notons $\underline{A}_{\alpha}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{A}$ dont les objets sont tous les α-présentables, nous savons également que:

(P1). $\underline{A}_{\alpha}$ est petite et dense dans $\underline{A}$,

(P2). $\underline{A}_{\alpha}$ est à limites inductives locales α-petites et le foncteur inclusion $j\colon \underline{A}_{\alpha} \longrightarrow \underline{A}$ commute avec ces limites inductives locales,

(P3). le foncteur $\underline{A} \xrightarrow[\text{Yoneda}]{} \mathrm{Ens}^{\underline{A}^{op}} \xrightarrow[\mathrm{Ens}^{j^{op}}]{} \mathrm{Ens}^{\underline{A}_{\alpha}^{op}}$

est à valeurs dans la sous-catégorie pleine

$(\mathrm{Ens}^{\underline{A}_\alpha^{op}})_{\text{loc-cont}}$ des foncteurs qui sont localement α-continus et sa restriction

$$\underline{A} \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{A}_\alpha^{op}})_{\text{loc-cont}}$$

est une équivalence.

Dans ces conditions, nous notons $\underline{S}_{\underline{A}}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{A}}$ dont les objets sont:

- les foncteurs représentables $\mathrm{Hom}(A,-): \underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, dès que A est objet de $\underline{A}_\alpha$,
- les foncteurs $\coprod_{D \in \underline{D}} \mathrm{Hom}(A_D,-)$, dès que $(A_I \longrightarrow A_D)_{(I,D) \in \underline{I} \times \underline{D}}$ est une limite inductive locale α-petite dans $\underline{A}_\alpha$,
- les foncteurs $\varprojlim_{I \in \underline{I}} \mathrm{Hom}(A_I,-)$, dès que $(A_I \longrightarrow A_D)_{(I,D) \in \underline{I} \times \underline{D}}$ est une limite inductive locale α-petite dans $\underline{A}_\alpha$.

De cette construction, nous déduisons tout d'abord:

<u>Lemme</u> 1.1. <u>La catégorie</u> $\underline{S}_{\underline{A}}$ <u>est petite</u>.

<u>Preuve</u>. D'après (P1), la catégorie $\underline{A}_\alpha$ est petite. Il en résulte que la classe $\mathcal{C}$ des cônes inductifs α-petits $(A_I \longrightarrow A_D)_{I \in \underline{I}}$ de $\underline{A}_\alpha$ est également petite. Par conséquent, la classe des limites inductives locales α-petites $(A_I \longrightarrow A_D)_{(I,D) \in \underline{I} \times \underline{D}}$ de $\underline{A}_\alpha$ est aussi petite, puisqu'elle s'identifie à une partie de $\mathcal{P}(\mathcal{C})$. D'où la conclusion. //

De même, nous obtenons:

Lemme 1.2. Dès que $(A_I \longrightarrow A_D)_{(I,D) \in \underline{I} \times \underline{D}}$ est une limite inductive locale α-petite de $\underline{A}_\alpha$, il existe un isomorphisme canonique

$$\coprod_{D \in \underline{D}} \mathrm{Hom}(A_D,-) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{I \in \underline{I}} \mathrm{Hom}(A_I,-)$$

dans $\underline{S}_{\underline{A}}$.

Preuve. D'après (P3), pour tout objet A' de $\underline{A}$, le foncteur

$$\underline{A}_\alpha^{op} \hookrightarrow \underline{A}^{op} \xrightarrow[\mathrm{Hom}(-,A')]{} \mathrm{Ens}$$

est localement α-continu. On a donc par définition (voir (C.A.L.O.)) une bijection, naturelle en A',

$$\coprod_{D \in \underline{D}} \mathrm{Hom}(A_D,A') \simeq \varprojlim_{I \in \underline{I}} \mathrm{Hom}(A_I,A') \quad .$$

Comme les limites petites se calculent point par point dans $\mathrm{Ens}^{\underline{A}}$, on conclut. //

Nous munissons $\underline{S}_{\underline{A}}$ d'une structure d'esquisse petite, notée $//\underline{S}_{\underline{A}}//$, en distinguant dans la catégorie petite $\underline{S}_{\underline{A}}$:

- l'ensemble des limites projectives α-petites

$$\varprojlim_{I \in \underline{I}} \mathrm{Hom}(A_I,-) \qquad ,$$

- l'ensemble des sommes petites

$$\coprod_{D \in \underline{D}} \mathrm{Hom}(A_D,-) \qquad ,$$

dès que $(A_I \longrightarrow A_D)_{(I,D) \in \underline{I} \times \underline{D}}$ parcourt l'ensemble des limites inductives locales α-petites de $\underline{A}_\alpha$.

Il est alors trivial de constater que:

Lemme 1.3. Le foncteur injection $\underline{S}_{\underline{A}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{A}}$ est une réalisation de $//\underline{S}_{\underline{A}}//$.

Dès lors, nous sommes en mesure d'établir le théorème d'esquissabilité suivant:

Théorème 1.1. Si α est un ordinal régulier, toute catégorie α-localisable est esquissable à l'aide d'une esquisse petite où ne sont distinguées que des limites projectives α-petites et des sommes petites (plus précisément, $\underline{A}$ et $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}_{\underline{A}}//}$ sont équivalentes).

Preuve. Si A' est un objet de $\underline{A}$, nous lui associons le foncteur

$$F: \underline{S}_{\underline{A}} \hookrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{A}} \xrightarrow[\text{évaluation en } A']{} \mathrm{Ens} .$$

C'est bien une réalisation de $//\underline{S}_{\underline{A}}//$ car $\underline{S}_{\underline{A}} \hookrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{A}}$ est, en vertu du lemme 1.3 , une réalisation de $//\underline{S}_{\underline{A}}//$ et l'évaluation en A' commute aux petites limites qui se calculent point par point dans $\mathrm{Ens}^{\underline{A}}$.

Inversement, si $F: \underline{S}_{\underline{A}} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est une réalisation de $//\underline{S}_{\underline{A}}//$, nous lui associons le foncteur

$$\bar{F} : \underline{A}_{\alpha}^{op} \hookrightarrow \underline{S}_{\underline{A}} \xrightarrow[F]{} \mathrm{Ens} .$$

Il est évidemment localement α-continu, en vertu du lemme 1.2 . Comme, de plus, tout objet de $\underline{S}_{\underline{A}}$ qui n'est pas image par $\underline{A}_{\alpha}^{op} \hookrightarrow \underline{S}_{\underline{A}}$ d'un objet de la catégorie $\underline{A}_{\alpha}^{op}$ est à la fois (à un isomorphisme près) sommet d'une limite projective distinguée et sommet d'une limite inductive distinguée, on conclut à l'aide de (P3). //

2. Localisabilité de certaines catégories esquissables.

Nous supposons encore que α est un ordinal régulier. Nous désignons, de plus, par $//\underline{S}//$ une esquisse α-locale, c'est-à-dire une esquisse petite où ne sont distingués que des cônes projectifs à bases α-petites, des cônes inductifs à bases discrètes (et petites) et contenant une sous-catégorie pleine $\underline{P}$ telle que:

(E0). les cônes distingués de $//\underline{S}//$ sont des limites dans $\underline{S}$,

(E1). pour tout objet P de $\underline{P}$, le foncteur

$$\mathrm{Hom}(P,-): \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$$

est une réalisation de $//\underline{S}//$,

(E2). tout objet de $\underline{S}$ est isomorphe à une limite projective α-petite et à une somme petite, distinguées dans $//\underline{S}//$ et de bases dans $\underline{P}$,

(E3). tout diagramme α-petit de $\underline{P}$ possède une limite projective distinguée dans $//\underline{S}//$.

Etablissons, d'abord, les trois lemmes qui suivent:

Lemme 2.1. La catégorie (petite) $\underline{P}^{op}$ est à limites inductives locales α-petites.

Preuve. Si $\varphi : \underline{I} \longrightarrow \underline{P}^{op}$ est un foncteur pour lequel $\underline{I}$ est petite, le foncteur $\Psi : \underline{I}^{op} \xrightarrow[\varphi^{op}]{} \underline{P} \hookrightarrow \underline{S}$

possède, en vertu de (E3), une limite projective

$$(p_I : S \longrightarrow \Psi(I))_{I \in \underline{I}^{op}}$$

distinguée dans $//\underline{S}//$. En vertu de (E2), l'objet S est alors sommet d'une somme petite $(q_D : P_D \longrightarrow S)_{D \in \underline{D}}$ distinguée dans $//\underline{S}//$.

Dans ces conditions, on vérifie facilement, en utilisant (E1), que $(q_D . p_I : \Psi I \longrightarrow S \longrightarrow P_D)_{(I,D) \in \underline{I} \times \underline{D}}$ est, dans $\underline{P}^{op}$, une limite inductive locale. //

Lemme 2.2. La catégorie $(\mathrm{Ens}^{\underline{P}})_{loc-cont}$ des foncteurs localement α-continus de $\underline{P}$ vers Ens est α-localisable.

Preuve. Ceci résulte de (C.A.L.O.) . //

Lemme 2.3. Si $\underline{A}_\alpha$ désigne la sous-catégorie pleine de $\underline{A} = (\mathrm{Ens}^{\underline{P}})_{loc-cont}$ dont les objets sont les α-présentables, alors les catégories $\underline{A}_\alpha^{op}$ et $\underline{P}$ sont équivalentes.

Preuve. Comme $\underline{A} = (\mathrm{Ens}^{\underline{P}})_{loc-cont}$ est, d'après le lemme 2.2, α-localisable, la sous-catégorie pleine $\underline{A}_\alpha$ est à limites inductives locales α-petites. Le théorème 7.1. de (C.A.L.O.) affirme alors que les catégories $\underline{A}$ et $(\mathrm{Ens}^{\underline{A}_\alpha^{op}})_{loc-cont}$ sont équivalentes. Le théorème 7.3.0. de (C.A.L.O.) prouve donc que $\underline{P}$ et $\underline{A}_\alpha^{op}$ sont également équivalentes. //

Nous en déduisons:

Théorème 2.1. Les catégories de réalisations d'esquisses α-locales sont α-localisables.

Preuve. La catégorie $\underline{A} = (\mathrm{Ens}^{\underline{P}})_{loc-cont}$ étant, en vertu du lemme 2.2 , α-localisable, on sait, en reprenant les notations du §1 et en vertu du théorème 1.1, que $\underline{A}$ et $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}_{\underline{A}}//}$ sont équivalentes. Pour prouver l'assertion, il suffit (d'après (E0)) d'établir que $\underline{S}_{\underline{A}}$ et $\underline{S}$ sont équivalentes.

D'après le lemme 2.3, il existe une équivalence

$$G: \underline{P} \longrightarrow \underline{A}_{\alpha}^{op} \quad .$$

On peut d'autre part, en vertu de (E2), choisir pour tout objet S de $\underline{S}$ une limite projective α-petite

$$(p_I: S \longrightarrow P_I)_{I \in \underline{I}}$$

et une somme petite

$$(q_D: P_D \longrightarrow S)_{D \in \underline{D}} \quad ,$$

à bases dans $\underline{P}$, triviales si S est objet de $\underline{P}$, isomorphes à des limites distinguées (choisies) de $//\underline{S}//$ sinon. Posons donc $\overline{G}(S) = \varprojlim_{I \in \underline{I}} G(P_I)$, en choisissant une telle limite dans $\underline{S}_A$. On définit "Hom par Hom" un homomorphisme de graphes orientés $\overline{G}: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}_A$, prolongeant G, en constatant que, pour deux objets quelconques S et S' de $\underline{S}$, on a:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(S,S') &\simeq \varprojlim_{I' \in \underline{I}'} \varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} \mathrm{Hom}(P_D, P'_{I'}) \\ &\simeq \varprojlim_{I' \in \underline{I}'} \varprojlim_{D \in \underline{D}^{op}} \mathrm{Hom}(GP_D, GP'_{I'}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}(\overline{G}S, \overline{G}S') \quad . \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier par un pur "jeu de limites" que cet homomorphisme est aussi fonctoriel, i. e. que $\overline{G}$ est bien un foncteur définissant une équivalence (grâce à (E3)). //

3. <u>Remarques</u>.

3.1. Des §§1 et 2 , on peut conclure que pour qu'une catégorie $\underline{A}$ soit α-localisable, il faut et il suffit qu'il

existe une esquisse α-locale $//\underline{S}//$ telle que $\underline{A}$ et $Ens^{//\underline{S}//}$ soinet équivalentes.
On dispose ainsi de deux conduites pour prouver qu'une catégorie est α-localisable:
- la première, sémantique, consiste à montrer qu'elle vérifie les propriétés (L1) à (L3) du §1 ,
- la seconde (descriptive, ou syntaxique) consiste à la présenter (i. e. à présenter ses objets et ses morphismes) à l'aide de réalisations d'une esquisse α-locale convenable.

3.2. Comme cas particulier de la remarque 3.1, on déduit que, pour qu'une catégorie de réalisations $Ens^{//\underline{S}'//}$ d'une esquisse petite $//\underline{S}'//$ soit α-localisable, il faut et il suffit qu'il existe une (autre) esquisse α-locale $//\underline{S}//$ telle que $Ens^{//\underline{S}//}$ et $Ens^{//\underline{S}'//}$ soient équivalentes (et, en général, $//\underline{S}//$ n'a pas de raison d'être équivalente à $//\underline{S}'//$).
Dans ce cas, la méthode descriptive de 3.1 devient une méthode syntaxique de "modification de $//\underline{S}//$ en $//\underline{S}'//$ " .

3.3. On montrera au Chap. III que la possibilité d'esquisser par certains types d'esquisses (en particulier par des esquisses α-locales) permet de retrouver les propriétés des catégories de réalisations ainsi obtenues (en particulier, les propriétés des catégories localisables).

CHAPITRE II

CAREGORIES AXIOMATISABLES AU SENS DE ANDREKA-NEMETI-SAIN ET CATEGORIES ESQUISSABLES

1. Esquissabilité des catégories axiomatisables.

Désignons par $\underline{A}$ une catégorie localement petite et par $\mathcal{C} = (C_X = (a_{XD}: A_X \longrightarrow A_{XD})_{D \in \underline{D}_X})_{X \in \underline{X}}$ une famille petite (i. e. indexée par l'ensemble $\underline{X}$) de cônes projectifs de la catégorie $\underline{A}$, de bases $\underline{D}_X$ petites et discrètes.

En (F.A.U.C.), on dit qu'un objet A de $\underline{A}$ valide $\mathcal{C}$ si, et seulement si:

(VAL). pour tout élément X de $\underline{X}$ et toute flèche $a: A_X \longrightarrow A$, il existe un objet D de $\underline{D}_X$ et une fleche $a': A_{XD} \longrightarrow A$ tels que l'on ait $a'.a_{XD} = a$.

Il est facile de vérifier que:

Lemme 1.1. Pour que l'objet A de $\underline{A}$ valide $\mathcal{C}$, il faut et il suffit que, pour tout élément X de $\underline{X}$, on ait

$$\mathrm{Hom}(A_X,A) = \varinjlim_{D_1..D_n \in M(\underline{D}_X)} \mathrm{Hom}(A_{XD_1},A) \underset{\mathrm{Hom}(A_X,A)}{\times} \cdots\cdots\cdots\cdots \underset{\mathrm{Hom}(A_X,A)}{\times} \mathrm{Hom}(A_{XD_n},A)$$

où $M(\underline{D}_X)$ est la catégorie telle que:

- *ses objets sont les mots* $D_1 \dots D_n$, *de longueur finie non nulle tels que* $D_1 \leqslant \dots \leqslant D_n$, *formés avec les objets de* $\underline{D}_X$ (*muni d'un ordre total choisi arbitrairement*),
- *ses morphismes sont les*

$$i_1 \dots i_n : D_{i_1} \dots D_{i_n} \longrightarrow D_1 \dots D_m$$

tels que $1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_n \leqslant m$.

Notons $Val_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\underline{A}$ dont les objets sont ceux qui valident $\mathcal{C}$. On dira de $Val_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ qu'elle est *axiomatisable au sens de Andréka-Németi-Sain* (explicitant, ainsi, la terminologie suggérée en (F.A.U.C.)).
Cette appellation est justifiée par l'exemple suivant, signalé en (F.A.U.C.):

Exemple 1.1. Désignons par $\underline{A}$ la catégorie des modèles d'un langage du premier ordre. Alors, une famille de formules de ce langage peut s'identifier à une famille $\mathcal{C}$ de cônes projectifs à bases discrètes de $\underline{A}$ et $Val_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ est, ainsi, exactement la catégorie des modèles qui satisfont (i. e. valident) ces formules: elle est donc "axiomatisable par ces formules".

Supposons, de plus, que $\underline{A} = Ens^{/\underline{S}/}$ est la catégorie des réalisations dans Ens d'une esquisse purement projective petite $/\underline{S}/$ (dans l'exemple précédent, $/\underline{S}/$ représente le langage utilisé ou encore le type de similarité de la théorie considérée).
Dans ces conditions, nous avons:

Théorème 1.1. *Si* $/\underline{S}/$ *est une esquisse purement projective et si* $\mathcal{C}$ *est une famille petite de cônes projectifs à*

<u>bases discrètes et petites dans</u> $Ens^{/\underline{S}/}$, <u>il existe une esquisse petite</u> $//\underline{S}_{\mathcal{C}}//$ <u>telle que la sous-catégorie pleine</u> $Val_{Ens^{/\underline{S}/}}(\mathcal{C})$ <u>de</u> $Ens^{/\underline{S}/}$, <u>axiomatisable par</u> $\mathcal{C}$, <u>soit équivalente à</u> $Ens^{//\underline{S}_{\mathcal{C}}//}$.

<u>Preuve</u>. Comme $/\underline{S}/$ est petite, $Ens^{/\underline{S}/}$ est à limites inductives petites. En conséquence, pour tout X appartenant à $\underline{X}$ et tout objet $D_1 \dots D_n$ de $M(\underline{D}_X)$, nous disposons d'un objet

$$A_{XD_1 \dots D_n} = A_{XD_1} \underset{A_X}{+} \cdots \underset{A_X}{+} A_{XD_n}$$

dans $\underline{A} = Ens^{/\underline{S}/}$.

De plus, $/\underline{S}/$ étant petite et purement projective, on dispose également d'une réalisation canonique

$$\pi : /\underline{S}/ \longrightarrow (Ens^{/\underline{S}/})^{op}$$

telle que, naturellement en tout objet A de $\underline{A}$, on ait

$$A = \varinjlim_{\substack{S \in \underline{S}^{op} \\ t \in A(S)}} \pi S \quad .$$

On désigne alors par $\underline{S}_{\mathcal{C}}{}^{op}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{A}$ dont les objets sont:

- les $\pi(S)$, dès que S est objet de $\underline{S}$,
- les A_X , des que X appartient à $\underline{X}$,
- les $A_{XD_1 \dots D_n}$, dès que X appartient à $\underline{X}$ et $D_1 \dots D_n$ est objet de $M(\underline{D}_X)$.

Enfin, on distingue dans $\underline{S}_{\mathcal{C}}{}^{op}$:

(i) les cônes inductifs (qui sont des limites) duaux des images par π des cônes projectifs distingués dans $/\underline{S}/$,

(ii) les cônes inductifs (qui sont des limites canoniques)

$$(q_t : \Pi(S) \longrightarrow A = \varinjlim_{\substack{S \in \underline{S}^{op} \\ t \in A(S)}} \Pi(S))_{\substack{S \in \underline{S}^{op} \\ t \in A(S)}}$$

lorsque:

+ $A = A_X$ et X appartient à $\underline{X}$,

+ $A = A_{XD_1 \ldots D_n}$, X appartient à $\underline{X}$ et $D_1 \ldots D_n$ est objet de $M(\underline{D}_X)$,

(iii) le cône projectif (qui n'est pas nécessairement une limite)

$$(p_{XD_1 \ldots D_n} : A_X \longrightarrow A_{XD_1 \ldots D_n})_{D_1 \ldots D_n \in M(\underline{D}_X)}$$

(où $p_{XD_1 \ldots D_n} = \text{coproj}.a_{D_i}$, pour un quelconque $1 \leqslant i \leqslant n$), lorsque X est élément de $\underline{X}$ et $D_1 \ldots D_n$ est objet de $M(\underline{D}_X)$.

Par dualité, on obtient bien une esquisse petite $//\underline{S}_{\mathcal{C}}//$ et le lemme 1.1 permet alors de conclure. //

2. <u>Axiomatisabilité des catégories esquissables</u>.

Supposons tout d'abord que $\underline{A}$ est une catégorie localement petite, à petites limites inductives et que

$$C = (a_I : A_0 \longrightarrow A_I)_{I \in \underline{I}}$$

en est un cône projectif de base petite $\underline{I}$ non nécessairement discrète.

Nous désignons alors:

- pour tout entier non nul n , par z_n la catégorie "zigzag type"

$$1 \longleftarrow 2 \longrightarrow 3 \qquad\qquad 2n-1 \longleftarrow 2n \longrightarrow 2n+1 \;,$$

- pour tout couple (I,I') d'objets de $\underline{I}$, par $Z_{II'}(\underline{I})$ l'ensemble des zigzags de $\underline{I}$ reliant I à I' , i. e. l'ensemble des foncteurs $z\colon z_n \longrightarrow \underline{I}$, tels que $n > 0$, $z(1) = I$ et $z(2n+1) = I'$,

- pour tout couple (I,I') d'objets de $\underline{I}$, par

$$A_{II'} = A_I \underset{A_0}{+} A_{I'}$$

la somme fibrée dans $\underline{A}$ des objets A_I et $A_{I'}$,

- pour tout zigzag $z\colon z_n \longrightarrow \underline{I}$, par $A_z = \varinjlim_{p \in z_n} A_{z(p)}$

la limite inductive dans $\underline{A}$ du zigzag de $\underline{A}$

$$A_{z(1)} \longleftarrow A_{z(2)} \longrightarrow A_{z(3)} \cdots A_{z(2n-1)} \longleftarrow A_{z(2n)} \longrightarrow A_{z(2n+1)}$$

- pour tout couple (I,I') d'objets de $\underline{I}$ et tout zigzag $z\colon z_n \longrightarrow I$ appartenant à $Z_{II'}(\underline{I})$, par $d_z\colon A_{II'} \longrightarrow A_z$ l'unique morphisme de $\underline{A}$ rendant commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & A_{II'} = A_I \underset{A}{+} A_{I'} \arrow[dd, "d_z"] & \\
A_I = A_{z(1)} \arrow[ur, "\text{coproj}"] \arrow[dr, "\text{coproj}_1"'] & & A_{z(2n+1)} = A_{I'} \arrow[ul, "\text{coproj}"'] \arrow[dl, "\text{coproj}_{2n+1}"] \\
 & A_z = \varinjlim_{p \in z_n} A_{z(p)} &
\end{tikzcd} \;,$$

- par $D(C) = (a_I\colon A_0 \longrightarrow A_I)_{I \in \mathrm{ob}\underline{I}}$ le cône projectif de base (évidemment petite) discrète $\mathrm{ob}\underline{I}$,

- pour tout couple (I,I') d'objets de $\underline{I}$, par

$$D_{II'}(C) = (d_z\colon A_{II'} \longrightarrow A_z)_{z \in Z_{II'}(\underline{I})}$$

le cône projectif de base (petite, car $\underline{I}$ est petite) discrète $Z_{II'}(\underline{I})$.

Dans ces conditions, on vérifie facilement que:

Lemme 2.1. Si A est un objet de $\underline{A}$, pour que

$$\mathrm{Hom}(A_0,A) = \varinjlim_{I \in \underline{I}} \mathrm{Hom}(A_I,A)$$

dans Ens, il faut et il suffit que A valide (au sens du §1) la famille de cônes projectifs de bases petites et discrètes

$$(D(C),(D_{II'}(C))_{(I,I') \in \mathrm{ob}\underline{I}\times\mathrm{ob}\underline{I}})$$

dans $\underline{A}$.

Supposons maintenant que $//\underline{S}//$ est une esquisse petite et notons $/\underline{S}/$ son esquisse purement projective sous-jacente.

Alors, nous avons:

Théorème 2.1. Si $//\underline{S}//$ est une esquisse petite, il existe une famille petite $\mathcal{C}$ de cônes projectifs de bases petites et discrètes dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ telle que la sous-catégorie pleine $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}}(\mathcal{C})$ de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, axiomatisable par $\mathcal{C}$, soit équivalente à $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$.

Preuve. Comme $/\underline{S}/$ est purement projective et petite, on dispose de la réalisation canonique

$$\pi : /\underline{S}/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$$

telle que, naturellement en tout objet S de $\underline{S}$ et en tout objet A de $\underline{A} = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, on ait:

$$A(S) \simeq \mathrm{Hom}(\pi S, A) \quad .$$

De plus, toute réalisation de $//\underline{S}//$ étant, a fortiori, une réalisation de $/\underline{S}/$, la catégorie $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est bien sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$.

On vérifie trivialement que ses objets sont exactement les objets A de $\underline{A}$ tels que:

$$\mathrm{Hom}(\pi S, A) = \varinjlim_{I \in \underline{I}} \mathrm{Hom}(\pi S_I, A)$$

pour tout cône projectif $(\pi s_I : \pi S \longrightarrow \pi S_I)_{I \in \underline{I}^{op}}$ de $\underline{A}$, dual de l'image par π d'un cône inductif $(s_I : S_I \longrightarrow S)_{I \in \underline{I}}$ distingué dans $//\underline{S}//$. Pour conclure, il suffit alors d'appliquer (à ces cônes) le lemme 2.1 . //

3. Remarques.

3.1. Sous les hypothèses du théorème 1.1, on peut remplacer $\underline{S}_{\mathcal{C}}$ par la plus petite sous-catégorie $\underline{S}'_{\mathcal{C}}$ de $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})}$ telle que:

- elle contient l'image de $\underline{S}$ par le foncteur

$$\underline{S} \xrightarrow[\pi]{} (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \xrightarrow[\text{Yoneda}]{} \mathrm{Ens}^{(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})} = \mathrm{Ens}^{\underline{A}} \xrightarrow[\text{restriction}]{} \mathrm{Ens}^{\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})}$$

- les images par

$$R_{\mathcal{C}} : \underline{S}_{\mathcal{C}} \hookrightarrow \underline{A}^{op} \xrightarrow[\text{Yoneda}]{} \mathrm{Ens}^{\underline{A}} \xrightarrow[\text{restriction}]{} \mathrm{Ens}^{\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})}$$

des cônes distingués dans $\underline{S}_{\mathcal{C}}$ (qui sont certainement des limites dans $\mathrm{Ens}^{\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})}$) sont des limites dans $\underline{S}'_{\mathcal{C}}$.
En distinguant dans $\underline{S}'_{\mathcal{C}}$ ces limites, on obtient une réalisation (restriction de $R_{\mathcal{C}}$) :

$$//R'_{\mathcal{C}}// : //\underline{S}_{\mathcal{C}}// \longrightarrow //\underline{S}'_{\mathcal{C}}// ,$$

dont on vérifie facilement qu'elle induit une équivalence:

$$\mathrm{Ens}^{//R'_{\mathcal{C}}//} : \mathrm{Ens}^{//\underline{S}'_{\mathcal{C}}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}_{\mathcal{C}}//} .$$

3.2. Le théorème 1.1 est également valable si l'on suppose seulement que $\underline{A} = \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est une catégorie de réalisations d'une esquisse petite non nécessairement purement projective. Dans ce cas, pour construire l'analogue de $\underline{S}'_{\mathcal{C}}$ (car $\underline{S}_{\mathcal{C}}$ n'a plus de sens), il suffit de raisonner dans la catégorie $\mathrm{Ens}^{\underline{A}}$ et de substituer aux $\pi(S)$ les foncteurs évaluations $ev_S : \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ en les objets S de $\underline{S}$.

3.3. Le théorème 2.1 montre en quoi la remarque 3.2 n'est pas essentielle: une catégorie $\underline{A} = \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est toujours de la forme $\mathrm{Val}_{\underline{A}_1}(\mathcal{C}_1)$, où $\underline{A}_1 = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_1/}$ et $/\underline{S}_1/$ est purement projective.
Par conséquent, une catégorie de la forme $\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ est bien toujours de la forme $\mathrm{Val}_{\underline{A}_1}(\mathcal{C}_2)$, où $\mathcal{C}_2 = (\mathcal{C}, \mathcal{C}_1)$ et $\underline{A}_1$ est la catégorie des réalisations d'une esquisse purement projective.

3.4. Sous les hypothèses du théorème 1.1, supposons de plus que les cônes C_X de la famille $\mathcal{C}$ ont des sommets A_X et des objets de base A_{XD} "petits" au sens de (F.A.U.C.). Ceci signifie qu'ils sont finiment présentables, au sens de (L.P.L.G.), ou encore qu'on peut les écrire:

$$\text{(ii)'} \quad A = \varinjlim_{I \in \underline{I}_A} \pi(S_I) \quad , \quad \underline{I}_A \text{ finie,}$$

(où $A = A_X$, A_{XD} ... , dès que X est objet de $\underline{X}$ et D est objet de $\underline{D}_X$).
On peut alors substituer à $//\underline{S}_{\mathcal{C}}//$ l'esquisse petite $//\underline{S}''_{\mathcal{C}}//$, construite de la même manière, en remplaçant les cônes canoniques distingués en (ii), de la démonstration du théorème 1.1, par les cônes de (ii)'.
On peut également substituer à $//\underline{S}''_{\mathcal{C}}//$ l'esquisse $///\underline{S}''_{\mathcal{C}}///$, de même catégorie sous-jacente, en y distinguant, de plus, pour tout objet X de $\underline{X}$ et tous objets D et D' de $\underline{D}_X$, les duaux des cônes inductifs (qui sont d'ailleurs des sommes fibrées)

$$\begin{tikzcd} & A_X \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ A_{XD} \arrow[dr] & & A_{XD'} \arrow[dl] \\ & A_{XDD'} & \end{tikzcd}$$

3.5. Un <u>site</u> est une catégorie $\underline{S}$ possédant des limites projectives finies et pour laquelle, pour tout objet S de $\underline{S}$, on a distingué des cônes inductifs de bases discretes $C = (s_I : S_I \longrightarrow S)_{I \in \underline{I}}$, appelés <u>familles couvrantes de S</u> .

Un modèle d'un site sur $\underline{S}$ dans un site sur $\underline{S}'$ est un foncteur $F: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$, commutant aux limites projectives finies et préservant les familles couvrantes.
En particulier, si $\underline{S}'$ est un topos pour lequel les familles couvrantes sont des familles épimorphes effectives, un foncteur F est un modèle si, et seulement si, pour tout objet S de $\underline{S}$ et toute famille couvrante $C = (s_I: S_I \longrightarrow S)_{I \in \underline{I}}$ de S, on a (voir (F.O.C.L.)):

$$(\mathrm{Mod}).\quad F(S) = \bigvee_{I \in \underline{I}} \exists_{F(s_I)} (F(S_I))$$

Dans le cas encore plus particulier où $\underline{S}' = \mathrm{Ens}$, il est clair que la condition (Mod) précédente est équivalente à la condition (Val) du §1 (où $\mathcal{C}$ est la famille de toutes les familles couvrantes de tous les objets S de $\underline{S}$). En conséquence, la catégorie des modèles ensemblistes d'un site est esquissable.

3.6. Le théorème 2.1 permet d'appeler légitimement les réalisations, dans Ens, d'une esquisse les modèles de cette esquisse.

3.7. Les propriétés (par exemple: de stabilité par ultraproduits, sous-objets ... telles qu'elles sont étudiées en (F.A.U.C.)) des catégories axiomatisables sont évidemment associées au type d'axiomatisation utilisé. De même, les propriétés des catégories de modèles (ensemblistes) de sites dépendent de la forme de ces sites. Ce sont aussi, en vertu du théorème 1.1, des propriétés de catégories esquissables. De ce point de vue, elles sont associées aux types de cônes projectifs et inductifs distingués dans les esquisses considérées, comme nous le montrons précisément au Chap. III.

CHAPITRE III

CALCUL SYNTAXIQUE DES MODELES

1. Calcul des limites point par point.

Supposons que $//\underline{S}//$ est une esquisse petite et notons $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{J}$) l'ensemble des catégories indexant les cônes projectifs (resp. inductifs) distingués de $//\underline{S}//$.

Désignons par $\underrightarrow{\mathrm{Comm}}\,\mathbb{I}$ (resp. $\underleftarrow{\mathrm{Comm}}\,\mathbb{J}$) la classe de toutes les petites catégories $\underline{X}$ telles que les $\underline{X}$-limites inductives (resp. projectives) commutent dans Ens avec les $\underline{Y}$ -limites projectives (resp. inductives) dès que $\underline{Y}$ appartient à $\mathbb{I}$ (resp. $\mathbb{J}$).
Un calcul point par point montre immédiatement que (voir aussi (F.O.S.A.)):

Proposition 1.1. La catégorie $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ *possède les* $\underleftarrow{\mathrm{Comm}}\,\mathbb{J}$ *-limites projectives, les* $\underrightarrow{\mathrm{Comm}}\,\mathbb{I}$ *-limites inductives et elles s'y calculent point par point.*

Supposons, de plus, que les cônes projectifs distingués dans $//\underline{S}//$ sont des limites projectives de $\underline{S}$ et désignons par $\mathrm{Proj}//\underline{S}//$ la sous-catégorie pleine de $\underline{S}$ dont les objets P sont les *projectifs de* $//\underline{S}//$, i. e. vérifiant:

- $\mathrm{Hom}(P,-)\colon \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est une réalisation de $//\underline{S}//$, c'est-à-dire transforme les cônes inductifs distingués en des limites inductives de Ens.

Notons également $/\underline{S}/$ l'esquisse projective sous-jacente à

$//\underline{S}//$ et U: $Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens^{/\underline{S}/}$ (resp. V: $Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens^{Proj//\underline{S}//}$) le foncteur injection canonique.

Nous pouvons énoncer:

Proposition 1.2. Le foncteur V commute aux limites projectives petites (susceptibles d'exister). Si $//\underline{S}//$ est limitée (c'est-à-dire: si tout objet S de $\underline{S}$ est isomorphe au sommet S' d'une limite projective $(S' \longrightarrow P_I)_{I \in \underline{I}}$ - triviale si S' est projectif, distinguée dans $//\underline{S}//$ sinon - de base dans $Proj//\underline{S}//$), le foncteur U commute aussi aux limites projectives petites (susceptibles d'exister).

Preuve. Supposons que $\underline{X}$ est une catégorie petite et que le foncteur $\varphi : \underline{X} \longrightarrow Ens^{//\underline{S}//}$ admet une limite projective F: $//\underline{S}// \longrightarrow Ens$.

Naturellement en l'objet projectif P , nous avons

$$\begin{aligned} V(F)(P) &\simeq Hom(Hom_{\underline{S}}(P,-),F) \simeq Hom(Hom_{\underline{S}}(P,-), \varprojlim_{X \in \underline{X}} \varphi X) \\ &\simeq \varprojlim_{X \in \underline{X}} Hom(Hom_{\underline{S}}(P,-), \varphi X) \simeq \varprojlim_{X \in \underline{X}} \varphi(X)(P) \\ &\simeq \varprojlim_{X \in \underline{X}} V(\varphi(X))(P) \quad , \end{aligned}$$

d'où la première affirmation, les limites projectives petites se calculant point par point dans $Ens^{Proj//\underline{S}//}$.

Supposons, maintenant, que $//\underline{S}//$ est limitée. Pour tout objet S , nous avons, P_I étant projectif, V commutant aux limites projectives petites, celles-ci se calculant point par point dans $Ens^{Proj//\underline{S}//}$ et $\varphi(X)$ étant une réalisation de $//\underline{S}//$:

$$F(S) \simeq \varprojlim_{I \in \underline{I}} F(P_I) \simeq \varprojlim_{I \in \underline{I}} \varprojlim_{X \in \underline{X}} \varphi(X)(P_I)$$

$$\varprojlim_{X \in \underline{X}} \; \varprojlim_{I \in \underline{I}} \varphi(X)(P_I) \simeq \varprojlim_{X \in \underline{X}} \varphi(X)(S)$$

et l'on conclut, car les limites projectives petites se calculent aussi point par point dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$. //

2. Calcul des limites partielles point par point.

Si $\mathbb{K}$ est une classe de petites catégories, si $\varphi : \underline{X} \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur et si $\psi : \underline{K} \longrightarrow \underline{A}$ est un autre foncteur pour lequel $\underline{K}$ est élément de la classe $\mathbb{K}$, nous dirons que ψ est un $\mathbb{K}$-diagramme limite projective (resp. inductive) partielle de φ si, et seulement si, naturellement en tout objet A de $\underline{A}$, on a:

$$\varprojlim_{X \in \underline{X}} \mathrm{Hom}(A, \varphi X) \simeq \varprojlim_{K \in \underline{K}} \mathrm{Hom}(A, \psi K)$$

$$\text{(resp.} \quad \varprojlim_{X \in \underline{X}^{op}} \mathrm{Hom}(\varphi X, A) \simeq \varprojlim_{K \in \underline{K}^{op}} \mathrm{Hom}(\psi K, A) \text{).}$$

Évidemment, ceci équivaut à écrire que les foncteurs $\mathrm{Hom}(-, \varphi -) : \underline{X} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{A}^{op}}$ (resp. $\mathrm{Hom}(\varphi -,-) : \underline{X}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{A}}$) et $\mathrm{Hom}(-,\psi -) : \underline{K} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{A}^{op}}$ (resp. $\mathrm{Hom}(\psi -,-) : \underline{K}^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{A}}$) ont même limite projective .

Exemple 2.1. Les limites projectives locales de (C.A.L.O.) sont des $\mathbb{K}$-diagrammes limites projectives partielles où $\mathbb{K} = \mathbb{D}$ est la classe des petites catégories discrètes. On aura soin, par contre, de ne pas croire que les limites inductives locales de (C.A.L.O.) sont des $\mathbb{D}$-diagrammes limites inductives partielles (voir le §4).

Supposons maintenant que $//\underline{S}//$ est encore une esquisse petite pour laquelle nous utilisons les notations $\underline{\Pi}$, $\mathbb{J}$,

$\underset{\rightarrow}{\mathrm{Comm}}\ \mathbb{I}$ et $\underset{\leftarrow}{\mathrm{Comm}}\ \mathbb{J}$ du §1 .
Il est alors trivial de constater que:

Proposition 2.1. Si $\varphi' : \underline{X}' \longrightarrow \underline{X}$ est un foncteur initial entre catégories petites et si

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \underline{X}' & \\ \underline{X}'_{K_1} \arrow[ur, "p_{K_1}"] \arrow[rr, "\underline{X}'_k"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\overset{x_k}{\longleftarrow}"] & & \underline{X}'_{K_2} \arrow[ul, "p_{K_2}"'] \end{tikzcd}$$

(où $k : K_1 \longrightarrow K_2$ varie dans la petite catégorie $\underline{K}$) est une 2-limite inductive dans Cat telle que:

- $\underline{K}$ est élément de la classe fixée $\mathbb{K}$ de petites catégories,

- pour tout objet K de $\underline{K}$, la catégorie $\underline{X}'_K$ est objet de $\underset{\leftarrow}{\mathrm{Comm}}\ \mathbb{J}$,

alors, tout foncteur $\varphi : \underline{X} \longrightarrow \mathrm{Ens}/\!/\underline{S}/\!/$ admet $(\underset{\leftarrow}{\lim}\ \varphi.\varphi'.p_K)_{K \in \underline{K}}$ (qui est bien défini en vertu de la proposition 1.1) pour $\mathbb{K}$-diagramme limite projective partielle dans $\mathrm{Ens}/\!/\underline{S}/\!/$.

Dualement, on a bien entendu:

Proposition 2.2. Si $\varphi : \underline{X}' \longrightarrow \underline{X}$ est un foncteur final entre catégories petites et si

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \underline{X}' & \\ \underline{X}'_{K_1} \arrow[ur, "p_{K_1}"] \arrow[rr, "\underline{X}'_k"'] \arrow[rr, phantom, bend left=40, "\overset{x_k}{\longrightarrow}"] & & \underline{X}'_{K_2} \arrow[ul, "p_{K_2}"'] \end{tikzcd}$$

(où $k : K_1 \longrightarrow K_2$ varie dans la petite catégorie $\underline{K}$) est une 2-limite inductive dans Cat telle que:

- $\underline{K}$ est élément de la classe fixée $\mathbb{K}$ de petites catégories,
- pour tout objet K de $\underline{K}$, la catégorie $\underline{X}'_K$ est objet de $\underrightarrow{\mathrm{Comm}}\ \mathbb{I}$,

alors, tout foncteur $\varphi : \underline{X} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ admet $(\varinjlim \varphi . \varphi' . p_K)_{K \in \underline{K}}$ (qui est bien défini en vertu de la proposition 1.1) pour $\mathbb{K}$ -diagramme limite inductive partielle dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$.

Sous les hypothèses des propositions précédentes (i. e. $\underline{X}'_K$ élément de $\underleftarrow{\mathrm{Comm}}\ \mathbb{J}$ ou de $\underrightarrow{\mathrm{Comm}}\ \mathbb{I}$), il est légitime de dire que les limites partielles considérées sont calculées point par point.

3. Calcul des ultraproduits point par point.

Rappelons tout d'abord que (voir, par exemple, (O.C.U.C.)), si $\varphi : \underline{D} \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur d'une catégorie petite et discrète $\underline{D}$ vers une catégorie $\underline{A}$ et si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre de parties de $\underline{D}$, on appelle ultraproduit de $(\varphi, \mathcal{U})$ l'objet de $\underline{A}$, s'il existe:

$$\mathrm{UlPr}(\varphi, \mathcal{U}) = \varinjlim_{\underline{D}' \in \underline{\mathcal{U}}^{op}} \ \prod_{D \in \underline{D}'} \varphi(D) ,$$

où $\underline{\mathcal{U}}^{op}$ désigne la duale de la catégorie (dont les objets sont les parties $\underline{D}'$ de $\underline{D}$ appartenant à $\mathcal{U}$) associée à l'ensemble ordonné $(\mathcal{U} , \subseteq)$.
On dira d'un tel ultraproduit que c'est un σ-ultraproduit si, et seulement si, $\mathcal{U}$ est un σ-ultrafiltre , c'est-à-

dire est stable par intersection dénombrable (l'existence de tels σ-ultrafiltres est évidemment équivalente à l'existence de cardinaux mesurables convenables).
Une catégorie $\underline{A}$ sera dite <u>à ultraproduits</u> (resp. <u>à σ-ultraproduits</u>) si, et seulement si, tout couple tel que $(\varphi, \mathfrak{U})$ (resp. où $\mathfrak{U}$ est un σ-ultrafiltre) admet un ultraproduit.
Enfin, si $\underline{A}'$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{A}$, on dit qu'elle est <u>stable par ultraproduits</u> (resp. <u>par σ-ultraproduits</u>) si, et seulement si, $\mathrm{UlPr}(\varphi, \mathfrak{U})$ est objet de $\underline{A}'$ dès que $\mathrm{UlPr}(\varphi, \mathfrak{U})$ existe dans $\underline{A}$ (resp. et $\mathfrak{U}$ est un σ-ultrafiltre), où φ est à valeurs dans $\underline{A}'$, (évidemment, ceci n'impose pas que les $\prod_{D \in \underline{D}'} \varphi(D)$ sont objets de $\underline{A}'$ lorsque $\underline{D}'$ appartient à $\mathfrak{U}$). Dans le cas particulier où $\underline{A}$ est de la forme $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$, si $\underline{A}'$ est stable par ultraproduits (resp. par σ-ultraproduits), nous dirons aussi qu'<u>ils s'y calculent point par point</u>.

On constate que:

<u>Lemme</u> 3.1. <u>Ens est à ultraproduits et ils y commutent avec les limites projectives finies</u>.

<u>Preuve</u>. Il est évident que Ens est à ultraproduits puisqu'elle est à petites limites.
Comme, d'autre part, $\underline{\mathfrak{U}}^{op}$ est une catégorie filtrante et les limites inductives filtrantes commutent dans Ens avec les limites projectives finies, on conclut aisément. //

<u>Lemme</u> 3.2. Ens <u>est à σ-ultraproduits. Ils y commutent avec les limites projectives finies et les limites inductives dénombrables</u>.

<u>Preuve</u>. En vertu du lemme 3.1, Ens est évidemment à σ-ul-

traproduits et ils y commutent avec les limites projectives finies puisque ce sont des ultraproduits particuliers. Désignons par $\underline{J}$ une catégorie dénombrable. Notons $\underline{J}^+$ la catégorie obtenue en lui adjoignant un objet final Σ (alors tout foncteur $F: \underline{J}^+ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un cône inductif de Ens , parmi ceux-ci il y a donc les cônes-limites inductives) et notons, pour simplifier, $\mathrm{Yon}: \underline{J}^+ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{J}^+})^{op}$ le plongement de Yoneda. Supposons, de plus, que $\varphi : \underline{D} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{J}^+}$ est un foncteur tel que, pour tout objet D de la catégorie discrète petite $\underline{D}$, le cône inductif $\varphi(D): \underline{J}^+ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ soit une limite inductive. Enfin, donnons nous un σ-ultrafiltre $\mathcal{U}$ sur $\underline{D}$.

Posons:

- $L = \mathrm{UlPr}(\varphi , \mathcal{U})$ (il existe et se calcule point par point dans la catégorie $\mathrm{Ens}^{\underline{J}^+}$),

- $L_{\underline{D}'} = \prod_{D \in \underline{D}'} \varphi D$ (qui se calcule également point par point dans la catégorie $\mathrm{Ens}^{\underline{J}^+}$) , pour tout objet $\underline{D}'$ de l'ultrafiltre $\mathcal{U}$.

Pour établir le lemme, il suffit de prouver que:

$$\varinjlim L_{|\underline{J}} = \varinjlim_{J \in \underline{J}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\, J ,L) \simeq \mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\, \Sigma ,L) \simeq L(\Sigma).$$

a). Soit x un élément de $\varinjlim L_{|\underline{J}}$. Il est représenté par un x_J: $\mathrm{Yon}\, J \longrightarrow L$ auquel nous associons $w(x) = x_J.\mathrm{Yon}(J \longrightarrow \Sigma)$. On vérifie facilement que ceci définit bien une application $w: \varinjlim L_{|J} \longrightarrow L(\Sigma)$.

b). Pour montrer que w est injective, supposons qu'on dispose du diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Yon}(J') \arrow[dl, "x_{J'}"'] & \\
L & & \mathrm{Yon}(\Sigma) \arrow[ll, "\bar{x}"'] \arrow[ul, "\mathrm{Yon}(J' \to \Sigma)"'] \arrow[dl, "\mathrm{Yon}(J \to \Sigma)"] \\
 & \mathrm{Yon}(J) \arrow[ul, "x_J"] &
\end{tikzcd}
$$

Comme $\mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\ K, L) = \varinjlim\limits_{\underline{D}' \in \mathfrak{U}^{op}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\ K, L_{\underline{D}'})$, pour tout objet K de $\underline{J}^+$ (les limites inductives petites se calculant point par point dans $\underline{\mathrm{Ens}}^{\underline{J}^+}$) et comme $\underline{\mathfrak{U}}^{op}$ est filtrante, on en déduit qu'il existe un élément $\underline{D}'$ de $\mathfrak{U}$ et un diagramme commutatif

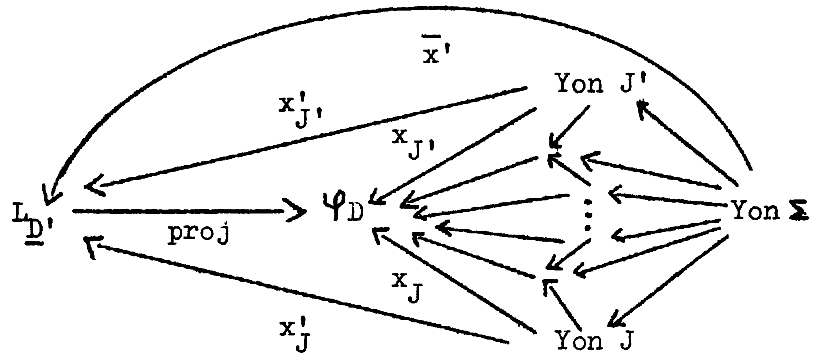
$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Yon}(J') \arrow[dll, "x'_{J'}"'] \arrow[dl, "x_{J'}"] & \\
L_{\underline{D}'} & L \arrow[l, "\mathrm{coproj}_{\underline{D}'}"] & & \mathrm{Yon}(\ ) \arrow[ll, "\bar{x}"'] \arrow[ul, "\mathrm{Yon}(J' \to \Sigma)"'] \arrow[dl, "\mathrm{Yon}(J \to \Sigma)"] \arrow[lll, bend right=40, "\bar{x}'"'] \\
 & & \mathrm{Yon}(J) \arrow[ul, "x_J"] \arrow[ull, "x'_J"] &
\end{tikzcd}
$$

Par conséquent, en "composant" ce diagramme par $\mathrm{proj}_D : L_{\underline{D}'} \longrightarrow \varphi(D)$ et en constatant que l'hypothese impose $\varinjlim \varphi(D)|_J = \varinjlim\limits_{J \in \underline{J}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Yon} J, \varphi D) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\ \Sigma, \varphi D)$, il existe, pour tout objet D de $\underline{D}'$, un zigzag

$$
z_D : J \leftarrow \cdot \rightarrow \ldots\ldots \leftarrow \cdot \rightarrow J'
$$

dans $\underline{J}$ et un diagramme commutatif

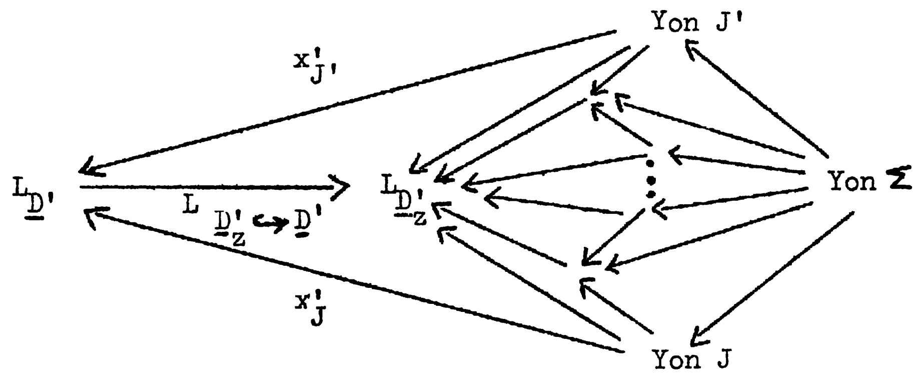
$(*_{z_D})$



Pour tout zigzag

$$z:\ J \leftarrow \quad \rightarrow \quad \cdots\cdots \leftarrow \quad \rightarrow J'$$

de $\underline{J}$, notons maintenant $\underline{D}'_z$ l'ensemble des objets D de $\underline{D}'$ pour lesquels il existe un diagramme $(*_z)$ de la forme précédente. Ceci définit une famille au-plus dénombrable (car $\underline{J}$ est au-plus dénombrable) de parties de $\underline{D}'$ qui recouvrent $\underline{D}'$ (car, pour tout objet D de $\underline{D}'$, il existe au-moins $(*_{z_D})$). En conséquence, $\mathcal{U}$ étant un σ-ultrafiltre, il existe un z tel que $\underline{D}'_z$ appartient à $\mathcal{U}$ et, par conséquent, il existe un diagramme commutatif



Ceci suffit à conclure que $x = x'$, dès que x et x' (représentés par x_J et $x_{J'}$) appartiennent à $\varinjlim L_{|J}$ et vérifient $w(x) = w(x') = \bar{x}$.

c). Montrons, maintenant, que w est surjective.

Si $\bar{x} : \mathrm{Yon}\,\Sigma \longrightarrow L$, il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} L & & \mathrm{Yon}\,\Sigma \arrow[ll, "\bar{x}"'] \arrow[dll, "x'"] \\ L_{\underline{D}'} \arrow[u, "\mathrm{coproj}_{\underline{D}'}"] & & \end{tikzcd}$$

car $L = \varinjlim_{\underline{D}' \in \underline{\mathcal{U}}^{op}} L_{\underline{D}'}$ se calcule point par point dans $\mathrm{Ens}^{\underline{J}^+}$. En particulier, on a donc:

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\,\Sigma, L) \simeq L\,\Sigma \simeq \varinjlim_{\underline{D}' \in \underline{\mathcal{U}}^{op}} L_{\underline{D}'}(\Sigma)$$

$$\simeq \varinjlim_{\underline{D}' \in \underline{\mathcal{U}}^{op}} \mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\,\Sigma, L_{\underline{D}'})$$

Il existe donc, pour tout objet D de $\underline{D}'$, un diagramme commutatif

$$(**_{J_D}) \qquad \begin{tikzcd} L_{\underline{D}'} \arrow[d, "\mathrm{proj}_D"'] & & \mathrm{Yon}\,\Sigma \arrow[ll, "x'"'] \arrow[d, "\mathrm{Yon}(J_D \to \Sigma)"] \\ \varphi D & & \mathrm{Yon}\,J_D \arrow[ll, "x_{J_D}"] \end{tikzcd}$$

Pour tout objet J de $\underline{J}$, notons $\underline{D}'_J$ l'ensemble des objets D de $\underline{D}'$ pour lesquels il existe un diagramme $(**_J)$ de cette forme.

On définit ainsi une famille au-plus dénombrable (car $\underline{J}$ est au-plus dénombrable) de parties de $\underline{D}'$ qui recouvrent $\underline{D}'$ (car, pour tout objet D de $\underline{D}'$, il existe au-moins $(**_{J_D})$). En conséquence, $\mathcal{U}$ étant un σ-ultrafiltre, il existe un objet J de $\underline{J}$ tel que $\underline{D}'_J \in \mathcal{U}$ et, par conséquent, un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
L_{\underline{D}'} \arrow[r, "L^{\underline{D}'}_{\underline{D}'_J}"'] & L_{\underline{D}'_J} & \mathrm{Yon}\, J \arrow[l] \arrow[ll, bend right, "x'_J"']
\end{tikzcd}$$

Ainsi, x'_J représente un élément x de $\varinjlim L_{|J}$ tel que $v(x) = \bar{x}$. //

<u>Lemme 3.3.</u> <u>Dans</u> Ens , <u>les ultraproduits commutent aux sommes finies</u>.

<u>Preuve</u>. C'est un résultat connu qu'un calcul direct permet de retrouver facilement. On peut aussi adapter la démonstration précédente: l'hypothèse de stabilité de l'ultrafiltre par intersection dénombrable y est nécessitée par le fait que l'ensemble des zigzags d'une catégorie $\underline{J}$, même finie, est toujours dénombrable ... sauf lorsque $\underline{J}$ est discrète finie et qu'on ne considère que ses zigzags non triviaux. //

Appelons Λ-<u>catégorie connexe</u> tout triplet $(\underline{J}, \underline{J}_0, \Lambda)$ tel que:

- $\underline{J}$ est une catégorie petite connexe,
- $\underline{J}_0$ est une sous-catégorie discrète de $\underline{J}$,

- $\Lambda : \underline{J}_0 \times \underline{J}_0 \longrightarrow \mathrm{Span}\,\underline{J}$ est un choix de spans de $\underline{J}$ tels que $\Lambda(J_0, J'_0) : J_0 \xleftarrow[j_0]{} J_0 * J'_0 \xrightarrow[j'_0]{} J'_0$ pour tous objets J_0 et J'_0 de $\underline{J}_0$,

- pour tout objet J de $\underline{J}$, il existe un objet J_0 de $\underline{J}_0$ et une flèche $J \longrightarrow J_0$.

On appelle Λ-<u>catégorie connexe finitaire</u> toute Λ-catégorie connexe $(\underline{J}, \underline{J}_0, \Lambda)$ où $\underline{J}_0$ est finie.

On appelle Λ -<u>catégorie</u> (resp. Λ -<u>catégorie finitaire</u>) tout

$$\Big(\underline{J} = \coprod_{l \in \underline{L}} \underline{J}_l \ , \ (\underline{J}_l, \underline{J}_{l\,0}, \Lambda_l)_{l \in \underline{L}}\Big)$$

où $(\underline{J}_l, \underline{J}_{l\,0}, \Lambda_l)_{l \in \underline{L}}$ est une famille petite (resp. une famille finie) de Λ-catégories connexes (resp. de -catégories connexes finitaires). Lorsqu'il n'y a pas risque de confusion, on dira que c'est $\underline{J}$ la Λ-catégorie.

Dans ces conditions, si $\underline{J}$ est une Λ-catégorie (resp. une Λ-catégorie finitaire) et si $\Psi : \underline{J} \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur admettant une limite inductive

$$A = \varinjlim_{J \in \underline{J}} \Psi(J) \ ,$$

nous dirons que A en est une <u>limite</u> Λ -<u>inductive</u> (resp. une <u>limite</u> Λ -<u>inductive finitaire</u>) si, et seulement si:

- pour toute composante connexe $\underline{J}_l$ de $\underline{J}$ et tous objets J_0 et J'_0 de $\underline{J}_{l\,0}$, le diagramme ci-dessous est un produit fibré de $\underline{A}$

$$\begin{tikzcd}
 & \Psi(J_0 * J'_0) \arrow[dl, "\Psi(j_0)"'] \arrow[dr, "\Psi(j'_0)"] & \\
\Psi(J_0) \arrow[dr, "\mathrm{coproj}_{J_0}"'] & & \Psi(J'_0) \arrow[dl, "\mathrm{coproj}_{J'_0}"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Alors, nous avons:

<u>Lemme</u> 3.4. <u>Les ultraproduits commutent dans</u> $\mathcal{E}ns$ <u>avec les limites</u> $\wedge$ <u>-inductives finitaires</u>.

<u>Preuve</u>. On peut raisonner composantes connexes par composantes connexes puisqu'on en admet qu'un nombre fini et qu'on dispose du lemme 3.3. Ceci revient donc à supposer que $(\underline{J}, \underline{J}_0, \wedge)$ est une $\wedge$ -catégorie connexe finitaire. Alors, il suffit de raisonner comme dans la démonstration du lemme 3.2, en remarquant que tout élément x de $\varinjlim L_{\restriction J}$ admet un représentant x_{J_0} : Yon $J_0 \longrightarrow L$, où J_0 est objet de $\underline{J}_0$. Ainsi, dans la démonstration de l'injectivité de w , on peut toujours supposer que $J' = J'_0$ et $J = J_0$ sont objets de $\underline{J}_0$. Par conséquent, pour tout objet D de $\underline{D}'$, on peut prendre comme zigzag z_D (indépendant de D) le zigzag

$$\begin{tikzcd} & J_0 * J'_0 \arrow[dl, "j_0"'] \arrow[dr, "j'_0"] & \\ J_0 & & J'_0 \end{tikzcd}$$

(puisque

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\,\Sigma, \varphi D)$$
$$=$$
$$\mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\,J_0, \varphi D) \underset{\mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\,J_0 * J'_0, \varphi D)}{\times} \mathrm{Hom}(\mathrm{Yon}\,J'_0, \varphi D) ,$$

par hypothèse). Ceci permet de conclure à l'injectivité. Dans la démonstration de la surjectivité, on se borne à considérér $\underline{J}_0$, qui est fini, plutôt que $\mathrm{ob}\underline{J}$. //

Supposons, enfin, que $//\underline{S}//$ est une esquisse petite et désignons par $/\underline{S}/$ son esquisse projective sous-jacente. Par application immédiate des lemmes 3.1 et 3.2, nous avons:

Proposition 3.1. *Si les cônes projectifs distingués dans $//\underline{S}//$ sont finis et si les cônes inductifs distingués sont dénombrables, alors $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est à ultraproduits, ils s'y calculent point par point et $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est une sous-catégorie stable par σ-ultraproduits.*

Enfin, par application du lemme 3.4, nous avons également:

Proposition 3.2. *Si les cônes projectifs distingués dans $//\underline{S}//$ sont finis, si les cônes inductifs distingués sont indexés par des Λ-catégories finitaires, si*

$$\mathcal{J} = \{ \underline{J} \equiv (\underline{J} = \coprod_{l \in \underline{L}} \underline{J}_l \ , \ (\underline{J}_l, \underline{J}_{l\,0}, \wedge_l)_{l \in \underline{L}} \}$$

est l'ensemble de ces catégories et si, pour tout $\underline{J}$ appartenant à $\mathcal{J}$, tout l appartenant à $\underline{L}$, tout couple (J_0, J'_0) d'objets de $\underline{J}_{l\,0}$ et tout cône inductif distingué $(s_J \colon S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$, le cône projectif

$$\begin{tikzcd}
 & S_{J_0 * J'_0} \arrow[dl, "s_{j_0}"'] \arrow[dr, "s_{j'_0}"] & \\
S_{J_0} \arrow[dr, "s_{J_0}"'] & & S_{J'_0} \arrow[dl, "s_{J'_0}"] \\
 & S &
\end{tikzcd}$$

est distingué dans $//\underline{S}//$, alors $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est une sous-catégorie stable par ultraproduits dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ (cette dernière étant à ultraproduits d'après la proposition 3.1).

Preuve. En effet, les conditions de l'hypothèse assurent que les cônes inductifs distingués sont nécessairement réalisés dans Ens en des limites Λ-inductives finitaires. //

4. Calcul des structures localement libres et des limites inductives locales.

Supposons que $U: \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ et $\Psi: \underline{K} \longrightarrow \underline{A}'$ sont deux foncteurs. On dira que Ψ est un diagramme localement libre sur l'objet A de $\underline{A}$ si, et seulement si, naturellement en tout objet A' de $\underline{A}'$, on a:

$$\lim_{K \in \underline{K}^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{A}'}(\Psi K, A') \simeq \mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A, UA')$$

Si $\underline{K}$ est petite, on dira que Ψ est un petit diagramme localement libre sur A. Si $\underline{K}$ est astreinte à appartenir à une classe fixée de petites catégories $\mathbb{K}$, on dira que A admet un $\mathbb{K}$-diagramme localement libre.

Exemple 4.1. Les familles localement libres de (C.A.L.O.) sont des $\mathbb{K}$-diagrammes localement libres, où $\mathbb{K} = \mathbb{D}$ est la classe des catégories petites et discrètes.

Lemme 4.1. Si $U: \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur, tout objet de $\underline{A}$ admet un diagramme localement libre dans $\underline{A}'$

Preuve. Il suffit de poser $\underline{K} = A/U$ (catégorie comma des foncteurs $\mathbb{1} \xrightarrow{A^c} \underline{A} \xleftarrow{U} \underline{A}'$) et $\Psi = \mathrm{proj}$ (projection canonique de A/U vers $\underline{A}'$). //

Plus précisément (et moins trivialement) nous avons:

Lemme 4.2. Si $U: \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur et si A est un objet de $\underline{A}$ tel qu'il existe un foncteur initial $\Psi': \underline{K} \longrightarrow A/U$, où $\underline{K}$ est petite (resp. appartient *à la classe* $\mathbb{K}$ *de catégories petites), alors* A *possède un petit diagramme* (resp. *un* $\mathbb{K}$ *-diagramme) localement libre dans* $\underline{A}'$.

Preuve. En vertu du lemme 4.1 et du fait que le foncteur $\Psi'^{op} : \underline{K}^{op} \longrightarrow (A/U)^{op}$ est final, nous avons

$$\mathrm{Hom}_{\underline{A}}(A,UA') \simeq \varinjlim_{(A'',A \longrightarrow UA') \in (A/U)^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{A}'}(A'',A')$$

$$\simeq \varinjlim_{K \in \underline{K}^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{A}'}(\Psi K,A') \quad ,$$

où $\Psi : \underline{K} \xrightarrow[\Psi']{} A/U \xrightarrow[\text{proj}]{} \underline{A}'$. D'où la conclusion. //

Supposons que $\varphi : \underline{X} \longrightarrow \underline{A}'$ et $\Psi : \underline{K} \longrightarrow \underline{A}'$ sont deux foncteurs. On dira que Ψ est un *diagramme limite inductive locale de* φ si, et seulement si, naturellement en tout objet A' de $\underline{A}'$, on a:

$$\varinjlim_{K \in \underline{K}^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{A}'}(\Psi K,A') \simeq \varprojlim_{X \in \underline{X}^{op}} \mathrm{Hom}_{\underline{A}'}(\varphi X,A')$$

On dira que φ admet un $\mathbb{K}$ *-diagramme limite inductive* locale si l'on astreint $\underline{K}$ à appartenir à une classe fixée $\mathbb{K}$ de petites catégories. Si $\mathbb{K}$ est la classe de toutes les petites catégories, on parlera de *petit diagramme* limite inductive locale. Enfin, si $\underline{X}$ est petite, on dira diagramme (resp. $\mathbb{K}$-diagramme, petit diagramme) limite inductive locale *petite*.

Exemple 4.2. Les limites inductives locales de (C.A.L.O.) sont des $\mathbb{K}$-diagrammes limites inductives locales, où $\mathbb{K} = \mathbb{D}$ est la classe des catégories petites et discrètes.

On a immédiatement:

Lemme 4.3. *Si* $\underline{A}'$ *est une sous-catégorie pleine de* $\underline{A}$ *, si* $\underline{A}$ *est à limites inductives petites et si tout objet*

<u>de $\underline{A}$ possède un $\mathbb{K}$-diagramme localement libre dans $\underline{A}'$</u>, <u>alors $\underline{A}'$ est à $\mathbb{K}$-diagrammes limites inductives locales petites</u>.

Si $U: \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur injection d'une sous-catégorie pleine $\underline{A}'$ de $\underline{A}$ vers $\underline{A}$, nous dirons que la flèche $a: A \longrightarrow A'$, de source l'objet A de $\underline{A}$ et de but l'objet A' de $\underline{A}'$, admet

$$(\Psi: \underline{K} \longrightarrow \underline{A}';\ Qa: A^c \longrightarrow U\Psi,\ Ima: U\Psi \longrightarrow A'^c)$$

(où $A^c : \underline{K} \longrightarrow \underline{A}$ et $A'^c: \underline{K} \longrightarrow \underline{A}$ sont les foncteurs constants sur A et A') pour <u>petit diagramme image relative</u> (à $\underline{A}'$) <u>locale</u> et que, pour tout objet K de $\underline{K}$, Qa_K est un <u>quotient relatif de</u> A si, et seulement si:

- $\underline{K}$ est petite, Ψ est un foncteur, Qa et Ima sont des transformations naturelles,

- Ima_K est un monomorphisme de $\underline{A}$, pour tout objet K de $\underline{K}$,

- $Ima.Qa = a^c$ (transformation naturelle constante sur a),

- pour tout diagramme commutatif de $\underline{A}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "a"] \arrow[dr, "a'"'] & & A' \\ & A'' \arrow[ur, "a''"'] & \end{tikzcd}$$

où A'' est objet de $\underline{A}'$ et a'' est un monomorphisme de $\underline{A}$, on a:

+ il existe un objet K de $\underline{K}$ et un $h: \Psi K \longrightarrow A''$ tel que $a''.h = Ima_K$,

+ si K' est un autre objet de $\underline{K}$ et $h': \Psi K' \longrightarrow A''$ est tel que $a''.h' = Ima_{K'}$, il existe un zigzag de $\underline{K}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {} \arrow[dl] \arrow[dr] & & {} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ K & & \cdots\cdots & & K' \end{tikzcd}$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & {} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & {} \arrow[dl] \arrow[ddl] \arrow[dr] & \\ \Psi K \arrow[dr, "h"'] & & \cdots \arrow[d] & & \Psi K' \arrow[dl, "h'"] \\ & & A'' & & \end{tikzcd}$$

Supposons, maintenant, que $//\underline{S}//$ est une esquisse petite. Nous dirons qu'un cône inductif distingué $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ est *monomorphique* si, et seulement si, pour tout objet J de $\underline{J}$, le cône projectif de $\underline{S}$

$$\begin{tikzcd} & S_J \arrow[dl, "Id_{S_J}"'] \arrow[dr, "Id_{S_J}"] & \\ S_J \arrow[dr, "s_J"'] & & S_J \arrow[dl, "s_J"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

est distingué dans $//\underline{S}//$ (alors, toute réalisation de $//\underline{S}//$ transforme les s_J en des monomorphismes).

Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 4.1. *Si* $//\underline{S}//$ *est une esquisse petite où tous les cônes inductifs distingués sont monomorphiques, alors toute transformation naturelle* $n: F \longrightarrow G$ *allant d'une réalisation* $F: /\underline{S}/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ *vers une réalisation*

$G: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$ admet un petit diagramme image relative locale dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$

Preuve. Pour tout foncteur $L: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, désignons par $H(L)$ la catégorie comma des foncteurs $\mathbb{1} \xrightarrow{1^c} \mathrm{Ens} \xleftarrow{L} \underline{S}$ et par $\mathrm{proj}: H(L) \longrightarrow \underline{S}$ la projection canonique. Ainsi:

- les objets de $H(L)$ sont les (x,S) tels que x appartient à $L(S)$,
- les flèches de $H(L)$ sont les $((x,S),s: S \longrightarrow S',(x',S')): (x,S) \longrightarrow (x',S')$ tels que $F(s)(x) = x'$.

Comme $/\underline{S}/$ est purement projective et petite, la flèche $n: F \longrightarrow G$ de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ admet une image $n': F' \longrightarrow G$ dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$.

Pour prouver la proposition, il s'agit donc de saturer convenablement $H(F')$ en des sous-catégories $\overline{H(F')}_K$ pleines dans $H(G)$ qui soient effectivement de la forme $H(L_K)$ (de ce point de vue, on travaille dans un "déploiement" de G).

Pour ce faire, nous désignons par α un ordinal régulier majorant les cardinaux des catégories indexant tant les bases des cônes projectifs distingués que les bases des cônes inductifs distingués de $//\underline{S}//$. Pour tout cône inductif distingué $(s_J: S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ et tout $x \in G(S)$, on note $\mathrm{Ind}(x)$ l'ensemble (des <u>indices</u> de x) des objets J de $\underline{J}$ tels qu'il existe $x_J \in G(S_J)$ vérifiant $G(s_J)(x_J) = x$, (pour J fixé, un tel x_J est unique, s'il existe, car $G(s_J)$ est un monomorphisme de Ens par hypothèse).

Pour tout ordinal $\beta < \alpha$, tout cône inductif distingué

$(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ et tout $x \in G(S)$, on procède alors au choix d'une partie $\mathrm{Ind}_\beta(x)$ de $\mathrm{Ind}(x)$, non vide si β n'est pas ordinal limite, vide sinon.

Relativement à ce choix, noté ch , on construit la suite

$$(H(F')_{ch,\beta})_{\beta<\alpha} \quad ,$$

donc $H(F')_{ch,\alpha} = \bigcup_{\beta<\alpha} H(F')_{ch,\beta}$, de sous-catégories pleines de $H(G)$ contenant $H(F')$, de la manière qui suit.

On pose $H(F')_{ch,0} = H(F')$

Si $\beta<\alpha$ est un ordinal admettant un prédecesseur β' et si $H(F')_{ch,\beta'}$ est défini, on note d'abord $H_1(F')_{ch,\beta}$ la plus petite sous-catégorie pleine de $H(G)$ contenant $H(F')_{ch,\beta'}$ et telle que:

(i) pour tout cône projectif $(p_I : S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$, distingué,et tout $x \in G(S)$, vérifiant $(G(p_I)(x),S_I) \in \mathrm{ob}H(F')_{ch,\beta'}$, alors $(x,S) \in \mathrm{ob}H_1(F')_{ch,\beta}$,

(ii) si $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ est un cône inductif distingué, si (x,S) est objet de $H(F')_{ch,\beta'}$, alors (x_J,S_J) est objet de $H_1(F')_{ch,\beta}$ dès que $J \in \mathrm{Ind}_\beta(x)$ et $G(s_J)(x_J) = x$.

On note alors $H(F')_{ch,\beta}$ la plus petite sous-catégorie pleine de $H(G)$ contenant $H_1(F')_{ch,\beta}$ et telle que:

(iii) si (x,S) est objet de $H_1(F')_{ch,\beta}$ et si $s : S \longrightarrow S'$ est flèche de $\underline{S}$, alors $(G(S)(x),S')$ est objet de $H(F')_{ch,\beta}$

Si $\beta \leqslant \alpha$ est un ordinal limite tel que $H(F')_{ch,\beta'}$ est défini pour tout ordinal $\beta'<\beta$, on pose

$$H(F')_{ch,\beta} = \bigcup_{\beta'<\beta} H(F')_{ch,\beta'}$$

On vérifie facilement que, pour chaque choix ch , $H(F')_{ch,\alpha}$ correspond bien à une réalisation $F'_{ch,\alpha} : //\underline{S}// \longrightarrow Ens$ et que le diagramme des inclusions des $F'_{ch,\alpha}$ (correspondant aux inclusions des choix) est bien un petit diagramme image relative de n dans $Ens^{//\underline{S}//}$. //

Etablissons, maintenant, que:

<u>Proposition</u> 4.2. <u>Sous les hypothèses de la proposition</u> 4.1, <u>pour toute réalisation</u> $F: /\underline{S}/ \longrightarrow Ens$, <u>la classe de ses quotients relatifs dans</u> $Ens^{//\underline{S}//}$ <u>est petite</u>.

<u>Preuve</u>. Avec les notations de la preuve de la proposition 4.1, on se convainc facilement que chaque $H(F')_{ch,\alpha}$ est engendré en quotientant par des relations convenables un graphe orienté $\overline{H}(F')_{\overline{ch},\alpha}$ "de générateurs" que l'on construit formellement comme suit.

Pour tout ordinal $\beta < \alpha$, non limite, et tout cône inductif distingué $(s_J: S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$, on choisit une partie non vide $\overline{ch}(\underline{J})$ de $ob\underline{J}$, si $\underline{J}$ n'est pas vide.

Posons $\overline{H}(F')_{\overline{ch},0} = H(F')$.

Si $\beta < \alpha$ est un ordinal admettant un prédecesseur β' et si $\overline{H}(F')_{\overline{ch},\beta'}$ est défini, on note d'abord $\overline{H}_1(F')_{\overline{ch},\beta}$ le graphe contenant $\overline{H}(F')_{\overline{ch},\beta'}$ et obtenu en lui adjoignant:

$(\bar{i})$ des objets formels $((x_I)_{I \in ob\underline{I}}, S)$ et des flèches formelles

$(((x_I)_{I \in ob\underline{I}}, S); p_I; (x_I, S_I)): ((x_I)_{I \in ob\underline{I}}, S) \longrightarrow (x_I, S_I)$, pour tout objet I de $\underline{I}$, dès que $(p_I: S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$ est un cône projectif distingué et $\gamma : \underline{I} \longrightarrow \overline{H}(F')_{\overline{ch},\beta'}$ est un homomorphisme de graphes orientés vérifiant:

+ $\gamma(I) = (x_I, S_I)$, pour tout objet I de $\underline{I}$,

+ $\gamma(i) = ((x_I, S_I); S_i; (x_{I'}, S_{I'}))$, pour toute flèche $i: I \longrightarrow I'$ de $\underline{I}$,

+ γ n'admet pas de prolongement

$$\gamma' : \underline{I}^- \longrightarrow \overline{H}(F')_{\overline{ch}, \beta'}$$

(où $\underline{I}^-$ est le graphe obtenu en adjoignant à $\underline{I}$ un objet initial 0) pour lequel $\gamma'(0 \longrightarrow I)$ soit de la forme $((x,S); p_I; (x_I, S_I))$,

$(\overline{ii})$ des objets formels (x_J, S_J) et des flèches formelles $((x_J, S_J); s_J; (x,S)): (x_J, S_J) \longrightarrow (x,S)$, pour tout objet J de $\overline{ch}(\underline{J})$; dès que $(s_J: S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ est un cône inductif distingué, (x,S) est objet de $\overline{H}(F')_{\overline{ch}, \beta'}$ et s'il n'existe pas d'objet (x', S_J) de $\overline{H}(F')_{\overline{ch}, \beta'}$ pour lequel $((x', S_J); s_J; (x,S))$ soit une flèche de $\overline{H}(F')_{\overline{ch}, \beta'}$

On note alors $\overline{H}(F')_{\overline{ch}, \beta}$ le graphe contenant $\overline{H}_1(F')_{\overline{ch}, \beta}$ et obtenu en lui adjoignant:

$(\overline{iii})$ des objets formels (sx, S') et des flèches formelles $((x,S); s; (sx, S')): (x,S) \longrightarrow (sx, S')$, dès que (x,S) est objet de $\overline{H}_1(F')_{\overline{ch}, \beta}$, $s: S \longrightarrow S'$ est flèche de $\underline{S}$ et s'il n'existe pas d'objet (x', S') de $\overline{H}_1(F')_{\overline{ch}, \beta}$ pour lequel $((x,S); s; (x', S'))$ soit flèche de $\overline{H}_1(F')_{\overline{ch}, \beta}$.

Si $\beta \leq \alpha$ est un ordinal limite tel que $\overline{H}(F')_{\overline{ch}, \beta'}$ est défini pour tout ordinal $\beta' < \beta$, on pose

$$\overline{H}(F')_{\overline{ch}, \beta} = \bigcup_{\beta' < \beta} \overline{H}(F')_{\overline{ch}, \beta'}$$

Comme, pour un F donné, la classe des F' est petite et comme, pour un F' donné, la classe des choix $\overline{ch}$ est petite, on conclut facilement. //

Nous pouvons désormais énoncer:

<u>Théorème</u> 4.1. <u>Si</u> $//\underline{S}//$ <u>est une esquisse petite où les cônes inductifs distingués sont monomorphiques, tout objet</u> $F: /\underline{S}/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ <u>de</u> $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ <u>possède un petit diagramme localement libre dans</u> $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$.

<u>Preuve</u>. D'après le lemme 4.1 , on sait que F possède le diagramme (non petit) localement libre

$$\mathrm{proj}: F/U \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$$

(où $U: \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est l'injection canonique). On vérifie facilement, en utilisant les constructions des propositions 4.1 et 4.2 et notamment le fait qu'un diagramme image relative est filtrant, que la sous-catégorie pleine $(F/U)_q$ de F/U dont les objets sont les quotients relatifs de F dans $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est initiale dans F/U . D'après la proposition 4.2, $(F/U)_q$ est petite, le lemme 4.2 permet alors de conclure. //

<u>Corollaire</u> 4.1. <u>Sous les hypothèses du théorème</u> 4.1, $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ <u>est à</u> $\mathbb{K}$<u>-diagrammes limites inductives locales petites, où</u> $\mathbb{K}$ <u>est la classe de toutes les petites catégories indexant les diagrammes petits localement libres du théorème</u> 4.1 <u>précédent</u>.

<u>Preuve</u>. Il suffit d'appliquer le théorème 4.1 et le lemme 4.3. //

<u>Théorème</u> 4.2. <u>Si</u> $//\underline{S}//$ <u>est une esquisse petite où les cô-</u>

nes inductifs distingués sont à bases discrètes, tout objet $F : /\underline{S}/ \longrightarrow Ens$ de $Ens^{/\underline{S}/}$ possède un petit diagramme discret localement libre dans $Ens^{//\underline{S}//}$

Preuve. Notons $//\underline{S}//'$ (resp. $/\underline{S}/'$) l'esquisse (resp. l'esquisse projective) obtenue en distinguant tous les cônes projectifs et inductifs (resp. tous les cônes projectifs) distingués dans $//\underline{S}//$ et, pour tout cône inductif distingué $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ de $//\underline{S}//$, en distinguant de plus les cônes projectifs:

$$\begin{tikzcd} & S_J \arrow[dl, "Id_{S_J}"'] \arrow[dr, "Id_{S_J}"] & \\ S_J \arrow[dr, "s_J"'] & & S_J \arrow[dl, "s_J"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Alors, $Ens^{//\underline{S}//'}$ et $Ens^{//\underline{S}//}$ sont équivalentes car les co-projections vers une somme sont, dans Ens , des injections. En conséquence, le théorème 4.1 s'applique au foncteur inclusion $Ens^{//\underline{S}//} \simeq Ens^{//\underline{S}//'} \longrightarrow Ens^{/\underline{S}/'}$
Comme, de plus, le foncteur injection canonique $Ens^{/\underline{S}/'} \longrightarrow Ens^{/\underline{S}/}$ admet un adjoint à gauche ("théorème du faisceau associé"), on conclut que tout objet de $Ens^{/\underline{S}/}$ possède effectivement un petit diagramme localement libre dans $Ens^{//\underline{S}//}$
D'autre part, $Ens^{//\underline{S}//}$ est à petites limites projectives connexes (proposition 1.1), ceci permet d'affirmer que chaque composante connexe d'un tel diagramme petit localement libre possède un élément initial. La famille (petite)

de ces objets initiaux en constitue donc une sous-catégorie discrète initiale. Le lemme 4.2 permet alors de conclure. //

Corollaire 4.2. Sous les hypothèses du théorème 4.2, la catégorie $Ens^{//\underline{S}//}$ est à petits diagrammes discrets limites inductives locales petites.

Supposons, pour conclure, que $//\underline{S}//$ est une esquisse petite où, pour simplifier, les cônes projectifs distingués sont des limites projectives de $\underline{S}$. Même sans toutes les hypothèses du théorème 4.1 (ou 4.2), on peut encore conclure à l'existence de petits diagrammes localement libres dans $Ens^{//\underline{S}//}$ pour certains (au-moins) objets de $Ens^{\underline{S}}$. Pour ce faire, pour tout objet S de $\underline{S}$, nous notons $ev_S: Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens$ le foncteur évaluation en S. Alors, il est clair que:

Proposition 4.3. Si P est un objet projectif de $//\underline{S}//$ (i. e. si $Hom_{\underline{S}}(P,-): \underline{S} \longrightarrow Ens$ transforme les cônes inductifs distingués en des limites inductives de Ens), le foncteur $ev_P: Ens^{//\underline{S}//} \longrightarrow Ens$ possède une structure libre $\pi'(P)$ sur 1

Preuve. Il suffit de poser $\pi'(P) = Hom(P,-)$. //

Notons $Proj//\underline{S}//$ la sous-catégorie pleine de $\underline{S}$ dont les objets sont les projectifs de $//\underline{S}//$. La proposition 4.3 permet de construire un foncteur

$$\begin{array}{rcl} \pi' : Proj//\underline{S}// & \longrightarrow & (Ens^{//\underline{S}//})^{op} \\ P & \longmapsto & Hom(P,-) \end{array}$$

Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 4.4. Si S est un objet de $//\underline{S}//$ isomorphe au sommet S' d'un cône inductif $(P_J \longrightarrow S')_{J \in \underline{J}}$

distingué dans $//\underline{S}//$ et de base dans $\mathrm{Proj}//\underline{S}//$, alors le foncteur $ev_S: \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ admet $(\pi'(P_J))_{J \in \underline{J}^{op}}$ pour petit diagramme localement libre sur 1.

Preuve. En effet, on a, naturellement en tout objet F de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$:

$$F(S) \simeq F(S') \simeq \varinjlim_{J \in \underline{J}} F(P_J) \simeq \varinjlim_{J \in \underline{J}} \mathrm{Hom}(\pi' P_J, F) \; . \; //$$

Notons, enfin, $/\underline{S}/$ l'esquisse projective sous-jacente à $//\underline{S}//$. Désignons par $U: \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ le foncteur injection canonique et par $\pi : /\underline{S}/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$ la réalisation canonique. Evidemment, π^{op} est plein, fidèle et dense. De même, il est facile de vérifier que:

$$\pi_{\mid \mathrm{Proj}//\underline{S}//} = U^{op} . \pi'$$

Nous pouvons alors affirmer:

Théorème 4.3. Si $//\underline{S}//$ est colimitée (i. e. si tout objet S de $\underline{S}$ est isomorphe au sommet S' d'un cône inductif $(P_J \longrightarrow S')_{J \in \underline{J}}$ - trivial si S est projectif, distingué sinon - de base dans $\mathrm{Proj}//\underline{S}//$), alors:

(i) $\pi'^{op}: (\mathrm{Proj}//\underline{S}//)^{op} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est plein, fidèle et dense,

(ii) pour tout objet S de $\underline{S}$, le petit diagramme $(\pi' P_J)_{J \in \underline{J}^{op}}$ est localement libre sur $\pi(S)$

Preuve. (i). Evidemment, $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est une sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$. Donc U est plein et fidèle. Comme $\mathrm{Proj}//\underline{S}//$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{S}$ et puisque π est plein et fidèle, $\pi_{\mid \mathrm{Proj}//\underline{S}//}$ est également plein et fidèle. On conclut également à la densité de π'^{op}

qui est une restriction (à des sous-catégories pleines de ses source et but) de Π^{op} qui est dense.

(ii). Il suffit de constater que, naturellement en tout objet F de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, on a:

$$\mathrm{Hom}(\Pi S, UF) = \mathrm{Hom}(\Pi S, F) \simeq FS \simeq FS' \simeq \varinjlim_{J \in \underline{J}} FP_J$$

$$\simeq \varinjlim_{J \in \underline{J}} \mathrm{Hom}(\Pi P_J, F) \ . //$$

5. Applications.

5.1. En vertu du théorème 1.1 du Chap. I , une catégorie α -localisable $\underline{A}$ est équivalente à la catégorie des réalisations vers Ens d'une esquisse α -locale, c'est-à-dire d'une esquisse petite $//\underline{S}_{\underline{A}}//$ où les cônes projectifs distingués sont des limites projectives α-petites et où les cônes inductifs distingués sont à bases discretes.
De cette seule forme particulière, on déduit immédiatement les propriétés (autres que (L1), (L2) et (L3) du §1 du Chap. I) de la catégorie $\underline{A}$:

- de la proposition 1.1 résulte que $\underline{A}$ est à limites projectives connexes petites (puisqu'elles commutent dans Ens avec les sommes petites),

- des propositions 1.1 et 1.2 résulte aussi que les limites inductives α-filtrantes existent et commutent dans $\underline{A}$ avec les limites projectives petites (susceptibles d'exister) et en particulier avec les monomorphismes,

- de la proposition 4.1 (adaptée au cas des cônes inductifs distingués de bases discrètes, comme dans la preuve du théorème 4.2) on déduit que $\underline{A}$ est à peu de sous-objets et à peu d'objets quotients forts,

- du théorème 4.2 résulte que les foncteurs injections canoniques $\underline{A} \simeq \mathrm{Ens}^{//\underline{S}_{\underline{A}}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{\underline{A}}/}$ et $\underline{A} \simeq \mathrm{Ens}^{//\underline{S}_{\underline{A}}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}_{\underline{A}}}$ admettent des adjoints locaux (au sens de (C.A.L.O.)),

- du corollaire 4.2 , il vient que $\underline{A}$ est à limites inductives locales petites.

Nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que les constructions de catégories localisables de (C.A.L.O.) s'intérprètent en termes de constructions d'esquisses α-locales.

5.2. Du théorème 4.2 et du corollaire 4.2 on déduit que toute catégorie de réalisations $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$, où $//\underline{S}//$ est une esquisse petite pour laquelle les cônes inductifs distingués sont a bases discrètes, est localisable (on pourra rapprocher ce dernier résultat des remarques 3.1 et 3.2 du Chap. I).

5.3. La catégorie des corps est localisable. Elle est donc équivalente à une catégorie de réalisations, dans Ens, d'une esquisse $//\underline{S}//$ locale (au sens du Chap. I). Par conséquent, $//\underline{S}//$ vérifie les hypothèses de la proposition 1.2. Ainsi, la catégorie des corps n'est pas à produits petits car ils devraient s'y calculer point par point (i. e. comme dans la catégorie des anneaux).
On pourrait évidemment multiplier des exemples de ce genre.

5.4. Supposons que $/\underline{S}/$ est une esquisse purement projective petite où les cônes projectifs distingués sont finis.

Supposons de plus que $\mathcal{C} = (C_X = (a_{XI} : A_X \longrightarrow A_{XI})_{I \in \underline{I}_X})_{X \in \underline{X}}$

est une famille petite de cônes projectifs de $\underline{A} = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, de bases finies et discrètes $\underline{I}_X$ et dont les sommets A_X et les objets de bases A_{XI} sont finiment présentables dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ (au sens de (L.P.L.G.)).
En vertu du théorème 1.1 et de la remarque 3.4 du Chap. II, on sait que $\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ est équivalente à $\mathrm{Ens}^{///\underline{S}''_{\mathcal{C}}///}$.
Comme, par construction, les cônes projectifs distingués de $///\underline{S}''_{\mathcal{C}}///$ sont tous finis et les cônes inductifs distingués sont $\wedge$-inductifs, la proposition 3.2 s'applique. En conséquence, $\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ est stable par ultraproduits dans $\underline{A}$.

5.5. Supposons, maintenant, que $/\underline{S}/$ est une esquisse petite purement projective et que

$$\mathcal{C} = (C_X = (a_{XI} : A_X \longrightarrow A_{XI})_{I \in \underline{I}_X})_{X \in \underline{X}}$$

est une famille petite de cônes projectifs de $\underline{A} = \mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ pour lesquels les a_{XI} sont des épimorphismes de $\underline{A}$.
On construit facilement une nouvelle esquisse petite $///\underline{S}_{\mathcal{C}}///$ telle que $\mathrm{Ens}^{///\underline{S}_{\mathcal{C}}///} \simeq \mathrm{Ens}^{//\underline{S}_{\mathcal{C}}//} \simeq \mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ (voir le théorème 1.1 du Chap. II) et pour laquelle les cônes inductifs distingués dans $///\underline{S}_{\mathcal{C}}///$ sont monomorphes.
Par application du théorème 4.1, on en déduit que toute réalisation $F : /\underline{S}/ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ possède un petit diagramme localement libre dans $\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})$.
Par application du corollaire 4.2, on voit aussi que $\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ est à petits diagrammes limites inductives locales petites.
Ceci fournit autant d'exemples que souhaité des notions de petits diagrammes localement libres ou limites inductives loca-

les petites qui ne sont pas necessairement - au contraire de (C.A.L.O.) - discrets.

Citons, notamment, pour fixer les idées, le cas où $\underline{A}$ est la catégorie des anneaux unitaires commutatifs et

$$\mathcal{C} = (C_n = (\mathbb{Z} \xrightarrow[1 \longmapsto 1]{} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}))_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Alors, $\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ est la catégorie des anneaux unitaires commutatifs de caractéristiques non nulles et $\mathbb{Z}$ admet le petit diagramme - non discret - localement libre constitué par la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Val}_{\underline{A}}(\mathcal{C})$ dont les objets sont les $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ $(n \neq 0)$.

6. Remarques.

6.1. L'hypothèse faite parfois (aux §§1 et 4) que les cônes projectifs distingués dans $//\underline{S}//$ sont des limites projectives de $\underline{S}$ n'est destinée qu'à simplifier la définition formelle des objets projectifs de $//\underline{S}//$. Elle n'est nullement restrictive car, si tel n'est pas le cas, on peut s'y ramener en substituant a $\underline{S}$ la sous-catégorie pleine $\underline{T}$ de $(\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$ dont les objets sont les $\pi(S)$, dès que S est objet de $\underline{S}$ (et en désignant par π la réalisation canonique $/\underline{S}/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$). Si l'on distingue dans $\underline{T}$ les images par π des cônes distingués dans $//\underline{S}//$, on obtient une esquisse $//\underline{T}//$ dont on vérifie sans peine que:

- les cônes projectifs distingues sont des limites projectives,
- les catégories $\mathrm{Ens}^{//\underline{T}//}$ et $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ sont équivalentes.

6.2. Au §4 apparaissent naturellement les notions de diagrammes localement libres ou limites inductives locales. Ce sont des généralisations, aux cas de diagrammes non discrets, des notions analogues de (C.A.L.O.). Elles ne sont nullement gratuites comme l'application 5.5 précédente le prouve. En tout état de cause, on voit aussi comment leur considération est imposée par les formes possibles des esquisses que l'on peut être amené à considérer.
Remarquons, d'autre part, que dans (C.A.L.O.) les propriétés universelles (discrètement) locales dans $\underline{A}'$ sont intérpretées comme des propriétés universelles usuelles dans la catégorie $\underleftarrow{\mathrm{Fam}}\underline{A}'$ des familles d'objets de $\underline{A}'$. Par contre les propriétés universelles (non discrètement) locales du §4 <u>ne sont pas</u> des propriétés universelles usuelles dans la catégorie $\underleftarrow{D}\,\underline{A}'$ (resp. $\underleftarrow{D}_{\mathbb{K}}\,\underline{A}'$) des diagrammes (resp. des $\mathbb{K}$-diagrammes) de $\underline{A}'$. Elles s'expriment, cependant, en termes de carrés exacts (voir Chap. IV ,§§ 2,3 et 6)
Il est a noter, également, que $\underleftarrow{D}\,\underline{A}'$ (resp. $\underleftarrow{D}_{\mathbb{K}}\,\underline{A}'$) apparait en (D.E.L.J.) comme étant une 2-complétion (resp. une $\mathbb{K}$-2-complétion) convenable de $\underline{A}'$; ceci suggère que ce sont les propriétés 2-universelles locales (dans une 2-catégorie $\underline{A}'$) qui s'intérprètent correctement comme des propriétés 2-universelles usuelles dans $\underleftarrow{D}\,\underline{A}'$ (resp. $\underleftarrow{D}_{\mathbb{K}}\,\underline{A}'$).

6.3. Soit $\underline{X}' = 2\text{-}\varinjlim \underline{X}'_K$ une 2-limite inductive dans Cat, comme dans les propositions 2.1 et 2.2, et $\underline{A}$ une catégorie.
Trivialement, pour que tout foncteur $\underline{X}' \longrightarrow \underline{A}$ possede une limite inductive (resp. projective) dans $\underline{A}$, il suffit que:

- tout foncteur $\underline{K} \longrightarrow \underline{A}$ possède une limite inductive (resp. projective) dans $\underline{A}$,

- pour tout objet K de $\underline{K}$, tout foncteur $\underline{X}'_K \longrightarrow \underline{A}$ possède une limite inductive (resp. projective) dans $\underline{A}$.

La proposition 2.2 (resp. 2.1) est un affaiblissement approprié de cet énoncé.

D'autre part, cet énoncé est la version discrète (triviale) d'un "2-critère" (moins évident) d'existence de lax-limites inductives (resp. projectives) dans une 2-catégorie (voir (D.E.L.C.)). Aussi, les propositions 2.1 et 2.2 suggèrent d'en énoncer un analogue prenant en compte d'éventuelles conditions de commutations de limites.

6.4. On peut généraliser la notion d'ultraproduit comme suit:

- on suppose que

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{X}' & \\
\underline{X}'_{K_1} \arrow[ur, "p_{K_1}"] \arrow[rr, "\underline{X}'_k"'] \arrow[rr, phantom, shift left=6, "\xleftarrow{x_k}"] & & \underline{X}'_{K_2} \arrow[ul, "p_{K_2}"']
\end{tikzcd}$$

(où $k: K_1 \longrightarrow K_2$ varie dans la petite catégorie $\underline{K}$) est une 2-limite inductive dans Cat,

- on suppose que $\Psi : \underline{X}' \longrightarrow \underline{A}$ est un foncteur (où $\underline{A}$ est une catégorie à petites limites inductives et projectives),

- on appelle alors <u>limite mixte de</u> Ψ l'objet

$$\underset{\leftrightarrows}{\lim}\ \Psi = \varinjlim_{K \in \underline{K}^{op}} \varprojlim_{X' \in \underline{X}'_K} \Psi\, P_J(X')$$

On retrouve bien la notion d'ultraproduit lorsqu'on suppose que $\underline{K}$ est la catégorie associée à l'ensemble ordonné $(\mathcal{U}, \subseteq)$, où $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre sur l'ensemble $\underline{D}$, les $\underline{X}'_k : \underline{X}'_{K_1} \longrightarrow \underline{X}'_{K_2}$ étant les inclusions des parties appartenant à $\mathcal{U}$ (voir aussi la remarque 6.3 du §6 du Chap. IV).
On peut d'ailleurs rapprocher cette notion de limite mixte de celle de limite partielle du §2 (et cette remarque de la remarque 6.3).
De manière analogue au §3, il est clair que l'existence de telles limites mixtes dans une catégorie de réalisations d'une esquisse petite $//\underline{S}//$ dépend essentiellement de la forme de ses cônes distingués.

6.5. On a déduit le théorème 4.2 du théorème 4.1 en "modifiant" $//\underline{S}//$ en $//\underline{S}//'$, i. e. en constatant que les sommes dans Ens sont toujours monomorphiques. On aurait pu le démontrer directement, sans modifier $//\underline{S}//$, à partir d'une analogue de la proposition 4.1. Pour ce faire, il suffit de modifier la preuve de la proposition 4.1 en y supprimant purement et simplement le rôle du choix ch (si β n'est pas limite, on prend $\mathrm{Ind}_\beta(x) = \mathrm{Ind}(x)$ car on a certainement $\mathrm{Card}\ \mathrm{Ind}(x) = 1$).
Il faut aussi modifier la preuve de la proposition 4.2 en remplaçant le choix de parties $\overline{\mathrm{ch}\underline{J}} \subset \mathrm{ob}\underline{J}$ par un choix d'objets $\overline{\mathrm{ch}}'\underline{J} \in \mathrm{ob}\underline{J}$ (ou, si l'on préfère, on a toujours $\mathrm{Card}\ \overline{\mathrm{ch}\underline{J}} = 1$ et $\overline{\mathrm{ch}\underline{J}} = \{\overline{\mathrm{ch}}'\underline{J}\}$).
Ceci prouve, dans ce cas, que l'on dispose d'images relatives indexées par $\mathcal{D}$, ou encore que les diagrammes petits localement libres sont discrets. On obtient ainsi une explication précise et syntaxique (ou conceptuelle) de ce qui n'

apparait en (C.A.L.O.) que comme des techniques heureuses

6. 6. Le théorème 4.1 est encore valable si l'on dispose d'un moyen permettant d'affirmer que, pour tout cône inductif distingué $(s_J : S_J \longrightarrow S)_{J \in \underline{J}}$ de $//\underline{S}//$, pour toute réalisation $G: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$ et tout x appartenant à $G(S)$, on a:

$$(*) \quad \mathrm{Card}\ G(s_J)^{-1} \leq c$$

(où c est un cardinal donné).
Ainsi, le rôle des cônes inductifs distingués monomorphes est justement de permettre de s'assurer syntaxiquement que l'on peut prendre $c = 1$. Nous ignorons si un procédé syntaxique analogue permet d'imposer la condition (*) pour des c strictement supérieurs à 1 .

CHAPITRE IV

CALCUL DES FORMULES INTERNES

1. Motivations et exemples.

Implicitement au Chap. I, explicitement au Chap. II et constamment en pratique, on rencontre la situation suivante:

- $/\underline{S}/$ est une esquisse projective petite,
- $\mathcal{C}' = (C'_Y = (F'_Y \xrightarrow[f_{YJ}]{} F'_{YJ})_{J \in \underline{J}_Y{}^{op}})_{Y \in \underline{Y}}$ est une famille, indexée par un ensemble $\underline{Y}$, de cônes projectifs petits de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ (à bases non nécessairement discrètes).

Dans ce cas, on considere la sous-catégorie pleine, notée $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}}(\mathcal{C}')$ des objets F de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ <u>validant</u> $\mathcal{C}'$, i. e. vérifiant:

(VC) (validité en termes de continuité) pour tout objet Y de $\underline{Y}$, on a $\mathrm{Hom}(F'_Y, F) = \varinjlim_{J \in \underline{J}_Y} \mathrm{Hom}(F'_{YJ}, F)$.

Constatons d'abord que:

<u>Proposition</u> 1.1. <u>La condition</u> (VC) <u>est équivalente à la conjonction des deux suivantes</u> (<u>validité en termes d'injectivité stricte</u>):

(VI 1) <u>pour tout objet</u> Y <u>de</u> $\underline{Y}$ <u>et toute flèche</u> $f: F'_Y \longrightarrow F$, <u>il existe un objet</u> J <u>de</u> $\underline{J}_Y$ <u>et une flèche</u> $f': F'_{YJ} \longrightarrow F$ <u>tels que</u> $f'.f_{YJ} = f$, (VI 2) *pour tout objet* Y *de* $\underline{Y}$, *pour tous objets* J *et* J' *de* $\underline{J}_Y$ *et pour toutes flèches* $f' : F'_{YJ} \longrightarrow F$ *et* $f'' : F'_{YJ'} \longrightarrow F$ *telles que* $f = f'.f_{YJ} = f''.f_{YJ'}$ *il existe un zigzag dans* $\underline{J}_Y{}^{op}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & {} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \cdots\cdots & & {} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
J & & {} & & {} & & J'
\end{tikzcd}$$

et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddrr] & & \cdots\cdots & & {} \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[ddll] & \\
F_{YJ} \arrow[drrr, "f'"'] & & {} \arrow[dr] & & {} \arrow[dl] & & F_{YJ'} \arrow[dlll, "f''"] \\
 & & & F & & &
\end{tikzcd}$$

dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$.

Preuve. C'est immédiat en calculant dans Ens la limite inductive figurant dans (VC). //

Ensuite, nous avons:

Théorème 1.1. *Il existe une esquisse petite* $//\underline{S}_{\mathcal{C}'}//$ *telle que* $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}}(\mathcal{C}')$ *et* $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}_{\mathcal{C}'}//}$ *soient équivalentes*

Preuve. Elle est tout à fait analogue (et pour cause) à celle du théorème 1.1. du Chap. II .

On note $\underline{S}_{\mathcal{C}'}{}^{op}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ dont les objets sont:

- les $\Pi(S)$, dès que S est objet de $\underline{S}$ (si on désigne par $\Pi : /\underline{S}/ \longrightarrow Ens^{/\underline{S}/}$ la réalisation canonique),

- les F'_Y , dès que Y est objet de $\underline{Y}$,

- les F'_{YJ} , dès que Y est objet de $\underline{Y}$ et J est objet de $\underline{J}_Y$.

On distingue ensuite dans $\underline{S}_{\mathcal{C}'}{}^{op}$:

(i) les cônes inductifs (qui sont des limites) duaux des images par Π des cônes projectifs distingués dans $/\underline{S}/$,

(ii) les cônes inductifs (qui sont des limites)

$$\Big(\Pi(S) \longrightarrow F = \varinjlim_{\substack{S \in \underline{S}^{op} \\ t \in F(S)}} \Pi(S)\Big)_{\substack{S \in \underline{S} \\ t \in F(S)}}$$

(qui présentent les F comme limites inductives canoniques dans $Ens^{/\underline{S}/}$, des $\Pi(S)$) lorsque:

+ $F = F'_Y$ et Y appartient à $\underline{Y}$,

+ $F = F'_{YJ}$, Y appartient à $\underline{Y}$ et J est objet de $\underline{J}_Y$,

(iii) les cônes projectifs C'_Y , dès que Y est objet de $\underline{Y}$.

On conclut facilement. //

Remarque 1.1. Il se peut que les objets F'_Y ou F'_{YJ} des cônes C'_Y soient présentés comme des limites inductives, non nécessairement canoniques dans $Ens^{/\underline{S}/}$, des $\Pi(S)$. Dans ce cas, on peut remplacer $//\underline{S}_{\mathcal{C}'}//$ par une esquisse (plus petite) $//\underline{S}''_{\mathcal{C}'}//$ en substituant ces limites aux limites canoniques de (ii).

Ces considérations recouvrent bien celles des Chap. I et II, comme les exemples qui suivent le montrent.

<u>Exemple</u> 1.1. Au Chap. II nous avons effectivement prouvé que la validité, au sens de l'injectivité "large" utilisée en (F.A.U.C.) (relative à une famille $\mathcal{C}$ de cônes projectifs à bases discrètes), était bien équivalente à la validité au sens de la continuité (VC) ou de l'injectivité stricte (VI 1 et 2) (pour une famille $\mathcal{C}'$, associée à $\mathcal{C}$, de cônes projectifs à bases non nécessairement discrètes).
La remarque 3.4 du Chap II et l'application 5.4 du Chap. III montrent en quoi le problème de la présentation, canonique ou non, en termes de limites inductives, des objets des cônes de $\mathcal{C}'$ (ou $\mathcal{C}$) est important.

<u>Exemple</u> 1.2. Le §2 du Chap. II montre que toute catégorie $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ est aussi de la forme $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}}(\mathcal{C}')$ (au sens de la condition (VC)), ou $\mathcal{C}'$ est simplement la famille des cônes projectifs duaux des images par $\pi : /\underline{S}/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/})^{op}$ des cônes inductifs distingués dans $//\underline{S}//$.

<u>Exemple</u> 1.3. En particulier, le Chap. I prouve que les catégories α-localisables sont bien de la forme $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}}(\mathcal{C}')$ (au sens de (VC)). Plus précisément, si $\underline{A}$ est α-localisable et si $//\underline{S}_{\underline{A}}//$ est l'esquisse α-locale associée:

- $\underline{A} = \mathrm{Ens}^{//\underline{S}_{\underline{A}}//}$ est sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{\underline{A}}/}$,

- le foncteur injection canonique $\underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{\underline{A}}/}$ est à familles localement libres sur les $\pi(S)$, quand S est objet de $\underline{S}_{\underline{A}}$ et $\pi : /\underline{S}_{\underline{A}}/ \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{/\underline{S}_{\underline{A}}/})^{op}$ est la réalisation canonique (application 5.1 du Chap. III).

Pour tout objet S de $\underline{S}_{\underline{A}}$, nous disposons donc d'un cône projectif

$$C'_S = (\pi(S) \longrightarrow A_{SD})_{D \in \underline{D}_S}$$

exprimant que la famille $(A_{SD})_{D \in \underline{D}_S}$ d'objets de $\underline{A}$ est localement libre sur $\pi(S)$.
On vérifie alors facilement que

$$\underline{A} = \mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}}\, /\underline{S}_{\underline{A}}/((C'_S)_{S \in \mathrm{ob}\underline{S}_{\underline{A}}})$$

Plus concrètement encore, on peut citer les exemples qui suivent.

Exemple 1.4. Soit $/\underline{S}/$ une esquisse projective petite. Alors, $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est de la forme $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{\underline{S}}}(\mathcal{C}')$, où $\mathcal{C}'$ est l'ensemble des cônes projectifs (de base Ω) de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$:

$$(\ (\varinjlim_{I \in \underline{I}^{op}} \mathrm{Yon}\, S_I\ ) \longrightarrow \mathrm{Yon}\, \underline{S}\ )\quad ,$$

dès que $(p_I : S \longrightarrow S_I)_{I \in \underline{I}}$ est un cône projectif distingué dans $/\underline{S}/$ (et $\mathrm{Yon}: \underline{S} \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op}$ est le plongement de Yoneda).
On remarquera que les objets de ces cônes sont présentés en termes de limites inductives non canoniques .
Ainsi, on a $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} \simeq \mathrm{Ens}^{//\underline{S}"\mathcal{C}'//} \simeq \mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{\underline{S}}}(\mathcal{C}')$; autrement dit: <u>la réalisation de données projectives s'exprime en termes de validité au sens de</u> (VC) <u>ou</u> (VI 1 et 2).

Exemple 1.5. Soit $R: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ un foncteur tel que $\mathrm{Ens}^R : \mathrm{Ens}^{\underline{S}'} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ soit plein et fidèle. Notons $\underline{V}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{\underline{S}}$ dont les objets sont les foncteurs $F: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ qui factorisent par R (i. e. qui vérifient les équations supplémentaires de $\underline{S}'$). Alors $\underline{V} = \mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{\underline{S}}} (\mathcal{C}')$, où $\mathcal{C}'$ est l'ensemble des cônes projectifs (de base $\mathbb{1}$):

$$(\mathrm{Yon}_{\underline{S}}(S) \xrightarrow[\text{canonique}]{} \mathrm{Yon}_{\underline{S}'}(R(S))$$

dès que S est objet de $\underline{S}$.
Par exemple, si $\underline{G}$ est un graphe orienté, on peut prendre $\underline{S} = \text{chemins}(\underline{G})$; pour $\underline{S}'$ une catégorie ayant $\underline{G}$ pour graphe sous-jacent et pour $R: \text{chemins}(\underline{G}) \longrightarrow \underline{S}'$ le foncteur "composition dans $\underline{S}'$ " .
En tout état de cause, il apparait que: <u>la réalisation d'équations s'exprime en termes de validité au sens de</u> (VC) <u>ou</u> (VI 1 et 2).

<u>Exemple</u> 1.6. Bien entendu, <u>la réalisation de données inductives s'exprime en termes de validité au sens de</u> (VC) <u>ou</u> (VI 1 et 2): c'est ce qu'énonce le théorème 1.1 .

<u>Exemple</u> 1.7 (d'après Diers). Soit $/\underline{S}/$ l'esquisse des anneaux commutatifs (pour simplifier) unitaires. Dans $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$, on considère le cône projectif C' représenté par

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}[X] \arrow[dl, "X \mapsto \lambda"'] \arrow[dr, "\lambda \mapsto 0"] & \\
\mathbb{Z}[X,Y]/XY-1 & & \mathbb{Z}[X]/X
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $\mathrm{Val}_{\mathbb{E}\mathrm{ns}/\underline{S}/}(C')$ est exactement la catégorie des corps commutatifs.

On peut soit considérer que les objets de ce cône sont présentés canoniquement, soit en donner une présentation explicite particulière; ainsi, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}[X,Y]\ /\ XY-1 & \\
\mathbb{Z}[X] \arrow[ur, bend left=60, "X \mapsto X"] \arrow[ur, "X \mapsto Y"] \arrow[ur, bend right, "X \mapsto 1"'] \arrow[rr, bend left, "X \mapsto X"] \arrow[rr, "X \mapsto XY"] \arrow[rr, bend right, "X \mapsto Y"'] & & \mathbb{Z}[X,Y] = \mathbb{Z}[X] + \mathbb{Z}[X] \arrow[ul, "\begin{array}{l} X \mapsto XY \\ Y \mapsto XY \end{array}"']
\end{tikzcd}$$

présente bien $\mathbb{Z}[X,Y]\ /\ XY-1$ comme limite inductive non canonique, dans la catégorie $\mathbb{E}\mathrm{ns}^{/\underline{S}/}$ des anneaux commutatifs unitaires. A cette "lecture" du cône C' correspond concrètement la formule ("axiome des corps"):

$$\forall\, x \in K \ \ (\ (x = 0) \ \vee \ (\ \exists\, y \ \ (xy = 1)\ )\ )\ .$$

<u>Exemple</u> 1.8. Supposons encore que $/\underline{S}/$ est l'esquisse des anneaux commutatifs unitaires et considérons le cône projectif de base discrète représenté par:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}[X] \arrow[dl, "X \mapsto X"'] \arrow[dr, "X \mapsto X"] & \\
\mathbb{Z}[X,Y]\ /\ XY = 1 & & \mathbb{Z}[X,Y]\ /\ Y(1-X) = 1
\end{tikzcd}$$

Les anneaux commutatifs unitaires qui valident, au sens de l'injectivité "large" de (F.A.U.C.), ce cône sont exactement les anneaux locaux. D'après le §1 du Chap. II, ce sont aussi les objets de $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ qui valident un cône projectif, de base non discrète, associé. La comparaison de cette nouvelle base avec la base discrète du cône projectif de l'exemple 1.7 précédent mesure exactement la différence entre anneaux locaux et corps.

Exemple 1.9. Il suffit de reprendre l'exemple cité à la fin de l'application 5.5 du Chap. III (anneaux unitaires commutatifs de caractéristiques non nulles).

Exemple 1.10. Désignons par $/\underline{S}/$ l'esquisse telle que:

- sa catégorie sous-jacente est représentée par

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[dr, shift right, "p_1"'] \arrow[dr, shift left, "p_2"] & & S'' \arrow[ll, "j"] \arrow[dl, shift right, "p_1\cdot j"'] \arrow[dl, shift left, "p_2\cdot j"] \\ & S & \end{tikzcd} \quad ,$$

- elle possède les deux cônes projectifs distingués

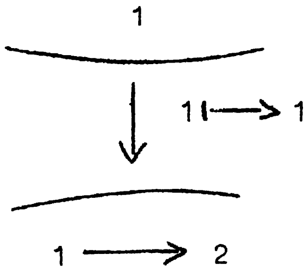
$$\begin{tikzcd} & S' \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ S & & S \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{tikzcd} & S'' \arrow[dl, equal] \arrow[dr, equal] & \\ S'' \arrow[dr, "j"'] & & S'' \arrow[dl, "j"] \\ & S & \end{tikzcd} \quad .$$

Evidemment, $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/}$ est équivalente à la catégorie telle que:

- ses objets sont les ensembles munis d'une relation binaire, notés (E,r) ,

- ses morphismes sont les h: $(E,r) \longrightarrow (E',r')$, où h: $E \longrightarrow E'$ est une application compatible avec r et r'

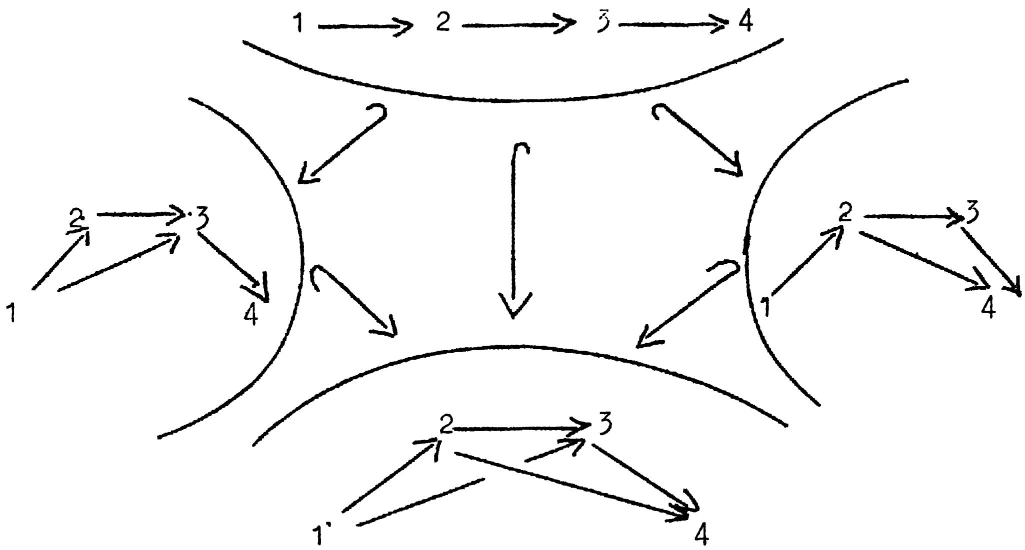
Notons C'_1 le cône projectif (de base $\mathbb{1}$) de $\mathrm{Ens}^{/S/}$ représenté par



Il est clair que $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{/S/}}(C'_1)$ est la sous-catégorie pleine

de $\mathrm{Ens}^{/S/}$ dont les objets sont les (E,r) tels que r soit une relation fonctionnelle.

Si nous notons, maintenant, C'_2 le cône projectif (de base non discrète) représenté par:



on vérifie facilement que les objets de $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}/\underline{S}/}(C'_2)$ sont les (E,r) tels que:

- pour tous x , y , z , t appartenant à E , on a

$$(r\,xy \wedge r\,yz \wedge r\,zt)$$
$$\Longrightarrow$$
$$(r\,xz \wedge \neg r\,yt) \vee (\neg r\,xz \wedge r\,yt) \vee (r\,xz \wedge r\,yt \wedge r\,xt)$$

Exemple 1.11. Soit $\underline{J}$ une catégorie petite et $\underline{J}^+$ la catégorie obtenue en lui adjoignant un objet final.

Dans $\mathrm{Ens}^{\underline{J}^+}$, on dispose du cône projectif dual de l'image de $\underline{J}^+$ par le plongement de Yoneda Yon: $\underline{J}^+ \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{J}^+}$

Evidemment, un objet $F: \underline{J}^+ \longrightarrow \mathrm{Ens}$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{J}^+}$ valide (au sens de (VC) ou (VI 1 et 2)) le cône $\mathrm{Yon}(\underline{J}^+)^{op}$ si, et seulement si, c'est une limite inductive de Ens (c'est évidemment cet argument qui a été utilisé au §3, lemme 3.1, du Chap. III .

Exemple 1.12. Soit $//\underline{S}_1//$ une esquisse petite et $\underline{S}_2$ une catégorie petite. On construit facilement une esquisse petite $//\underline{S}// = //\underline{S}_1// \boxtimes \underline{S}_2$ telle que:

$$\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \simeq (\mathrm{Ens}^{//\underline{S}_1//})^{\underline{S}_2}$$

Les cônes projectifs de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ décrivent donc des conditions à imposer aux foncteurs $\underline{S}_2 \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ En particulier, ils décrivent des conditions à imposer sur les morphismes de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}_1//}$ lorsque l'on prend $\underline{S}_2 = \mathbf{2}$

Ainsi, considérons, par exemple, le cône projectif (de base

$\mathbf{1}$) représenté dans $Ens^{//\underline{S}_1//}$ par le carré commutatif:

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "f'_1"'] & F'_1 \arrow[d, "f'_2"] \\ F_2 \arrow[r, "f_2"'] & F'_2 \end{tikzcd}$$

Un objet $f: F \longrightarrow F'$ de la catégorie $Ens^{//\underline{S}//}$ (i. e. une flèche de $Ens^{//\underline{S}_1//}$) valide ce cône (au sens de (VC) ou (VI 1 et 2)) si, et seulement si, pour tout carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "f_1"'] \arrow[d, "g_1"'] & F'_1 \arrow[d, "g'_1"] \\ F \arrow[r, "f"'] & F' \end{tikzcd}$$

il existe un **unique** carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F_2 \arrow[r, "f_2"'] \arrow[d, "g_2"'] & F'_2 \arrow[d, "g'_2"] \\ F \arrow[r, "f"'] & F' \end{tikzcd}$$

tel que $g_2.f'_1 = g_1$ et $g'_2.f'_2 = g'_1$.

Lorsque $f_1 = f'_1$, $f_2 = f'_2 = Id_{F'_1}$, ceci signifie exactement que f est orthogonal à f_1 , (et si $S_1 = \mathbf{1}$, $f_1 = 2 \rightarrow 1$, on caractérise les monomorphismes de $Ens = Ens^{\mathbf{1}}$).

Lorsque $f_2 = f'_2$, $f_1 = f'_1 = Id_{F'_1}$ et $\underline{S}_1 = \mathbf{1}$, ceci caractérise les applications constantes de $Ens = Ens^{\mathbf{1}}$,

si l'on suppose de plus que $f_2 = f'_2$ est l'unique application de 2 vers 1 .
On remarquera, également, que des conditions analogues de "factorisation non nécessairement unique" s'expriment soit en termes de validité large relative à ces cônes projectifs, ou encore (comme cela résulte du §1 du Chap. II) en termes de validité stricte (VC) ou (VC 1 et 2), relativement aux cônes projectifs de bases non discrètes associés.

Des considérations générales du Chap. II et des exemples précédents ressort qu'il est justifié d'appeler une famille $\mathcal{C}'$ de cônes projectifs d'une catégorie $Ens^{/\underline{S}/}$ une <u>formule</u> (ou <u>conjonction de formules élémentaires</u> que sont les cônes projectifs) <u>interne à</u> $Ens^{/\underline{S}/}$ ou, par extension, <u>interne à</u> $/\underline{S}/$.
Il est également légitime d'appeler les réalisations de $/\underline{S}/$ validant $\mathcal{C}'$ des <u>modèles</u> (de $/\underline{S}/$, cf. la remarque 3.4 du Chap. II) <u>satisfaisant la formule interne</u> $\mathcal{C}'$, ou plus simplement des <u>modeles</u> de $\mathcal{C}'$ (ce sont aussi, au sens de la remarque 3.4 du Chap. II, des modèles de $//\underline{S}_{\mathcal{C}'}//$ ou $//\underline{S}''_{\mathcal{C}'}//$ ... ce qui est donc une terminologie cohérente).
On peut aussi considérer que $/\underline{S}/$ est un <u>langage</u> dans lequel $\mathcal{C}'$ est exprimable (c'est très exactement ce sens que recouvre le qualificatif "interne").
Enfin, il est essentiel de se souvenir (cf. les exemples 1.7, 1.8, 1.9 et 1.10) que, de la manière, canonique ou non, dont sont présentés en termes de limites inductives des $\pi(S)$ les objets des cônes de $\mathcal{C}'$, dépend aussi bien la traduction concrete de $\mathcal{C}'$ (sous forme d'une formule usuelle du premier ordre) que l'esquisse $//\underline{S}''_{\mathcal{C}'}//$ (ou $//\underline{S}_{\mathcal{C}'}//$) qui lui est associée, i. e. le type de calcul syntaxique possible sur ses modèles.

Dans les §§ qui suivent, il s'agit de donner une présentation équivalente de ce point de vue qui permet un calcul "logique" des formules. Les §§2 et 3 sont destinés à fixer quelques notations et rappeler certaines méthodes.

2. <u>Diagrammes et cônes</u>.

Soit $\underline{S}$ une catégorie petite.
Nous notons $\underleftarrow{D}(\underline{S})$ la <u>catégorie des diagrammes petits de</u> $\underline{S}$, i. e. la catégorie ayant pour morphismes de P_2 vers P_1 les 2-triangles de Cat , notés $(P,p)\colon P_2 \longrightarrow P_1$, qui sont de la forme

$$\begin{tikzcd}
\underline{D}_1 \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "P_1"'] & \arrow[d, phantom, "\xleftarrow{\;p\;}"] & \underline{D}_2 \arrow[dl, "P_2"] \\
& \underline{S} &
\end{tikzcd}$$

Dans ces conditions, on dispose:

- du foncteur injection

$$\begin{array}{rl} i(\underline{S})\colon & \underline{S} \longrightarrow \underleftarrow{D}(\underline{S}) \\ & s \longmapsto (s^c\colon \mathbf{1} \longrightarrow \underline{S}) \ , \end{array}$$

- du foncteur injection

$$\begin{array}{rl} j(\underline{S})\colon & (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op} \longrightarrow \underleftarrow{D}(\underline{S}) \\ & (P\colon \underline{D} \longrightarrow \underline{S}) \longmapsto (P\colon \underline{D} \longrightarrow \underline{S}) \ , \end{array}$$

- du foncteur limite projective

$$\begin{array}{rl} \underleftarrow{\lim}\colon & \underleftarrow{D}(\underline{S}) \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \\ & (P\colon \underline{D} \longrightarrow \underline{S}) \longmapsto \underleftarrow{\lim}(\underline{D} \xrightarrow[P]{} \underline{S} \xrightarrow[\mathrm{Yon}_{\underline{S}}]{} (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op}) \end{array}$$

- des foncteurs fibrations discrètes

$$\begin{array}{rcl} h(\underline{S}):\ (Ens^{\underline{S}})^{op} & \longrightarrow & (Cat/\underline{S})^{op} \\ (F:\ \underline{S} \longrightarrow Ens) & \longmapsto & (h(\underline{S})(F):\ H(\underline{S})(F) \longrightarrow \underline{S}) \end{array}$$

et

$$h'(\underline{S}):(Ens^{\underline{S}})^{op} \xrightarrow[h(\underline{S})]{} (Cat/\underline{S})^{op} \xrightarrow[j(\underline{S})]{} D\ (\underline{S})$$

$(H(\underline{S})(F)$ est la 2-limite inductive dans Cat du foncteur

$$\underline{S} \xrightarrow[F]{} Ens \xrightarrow[dis]{} Cat$$

où dis est le foncteur discret - voir aussi la preuve de la proposition 4.1 du Chap. III).

Notons maintenant CAT la catégorie des catégories localement petites.
Soit $\underline{S}'$ une catégorie localement petite.
On note $C_{\rightarrow}(\underline{S}')$ la catégorie de ses cônes inductifs petits, i. e. la catégorie ayant pour morphismes les 2-triangles de CAT, notés $(G,g):\ P \longrightarrow Q$, de la forme

$$\begin{tikzcd} \underline{X}^{+} \arrow[rr, "G^{+}"] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y}^{+} \arrow[dl, "Q"] \\ & \underline{S}' & \end{tikzcd}$$

tels que:

- $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sont petites, $G:\ \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ est un foncteur,

- $\underline{X}^{+}$ (resp. $\underline{Y}^{+}$) est la catégorie obtenue en adjoignant à $\underline{X}$ (resp. $\underline{Y}$) un objet final et G^{+} est le prolongement de G respectant ces objets.

Ainsi, nous disposons d'un <u>foncteur base</u> (des cônes):

$$b(\underline{S}'): \underline{C}_{\rightarrow}(\underline{S}') \longrightarrow Cat$$
$$(P: \underline{X}^{+} \longrightarrow \underline{S}') \longmapsto \underline{X}$$

Clairement, à tout foncteur $\phi: \underline{Z} \longrightarrow \underline{C}_{\rightarrow}(\underline{S}')$, où $\underline{Z}$ est une catégorie petite, est associé un foncteur <u>soudage</u>:

$$\sigma(\underline{S}')(\phi): \Sigma(\underline{S}')(0) \longrightarrow \underline{S}' \quad ,$$

où $\Sigma(\underline{S}')(\phi)$ est la 2-limite inductive dans Cat du foncteur

$$\underline{Z} \xrightarrow[\phi]{} \underline{C}_{\rightarrow}(\underline{S}') \xrightarrow[b(\underline{S}')]{} Cat \xrightarrow[(\ )^{+}]{} Cat.$$

On dispose alors d'un 2-triangle de CAT

$$\begin{tikzcd}
\underline{Z} \arrow[rr, "s(\underline{S}')(\phi)"] \arrow[dr, "\beta(\underline{S}')(\phi)"'] & {} \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{n}"] & \Sigma(\underline{S}')(\phi) \arrow[dl, "\sigma(\underline{S}')(\phi)"] \\
& \underline{S}' &
\end{tikzcd}$$

(où $s(\underline{S}')(\phi)$ est le foncteur "sommet" et $\beta(\underline{S}')(\phi)$ est le foncteur "image des bases").

3. <u>Carrés exacts</u>.

Dans la 2-catégorie CAT des catégories localement petites, on dit qu'un 2-carré g , représenté par

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "L"'] & \underline{Y} \arrow[d, "L'"] \\
\underline{X}' \arrow[r, "G'"'] \arrow[ur, "g"] & \underline{Y}'
\end{tikzcd}$$

est un <u>carré exact</u> (voir (R.E.C.E.)) si, et seulement si:

(EX 1) pour tout objet X' de $\underline{X}'$ et tout objet Y de $\underline{Y}$, l'application canonique induite par g

$$\varinjlim_{(X,X' \to LX) \in X/L} \mathrm{Hom}_{\underline{Y}}(GX,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\underline{Y}'}(G'X',L'Y)$$

est une bijection.

Ceci équivaut à:

(EX 2) dans la catégorie BIM des bimodules, la flèche

$$\tilde{g}: L \otimes G^{o} \longrightarrow G'^{o} \otimes L'$$

est un isomorphisme.

Ainsi, les carrés exacts se composent.

<u>Exemple</u> 3.1. Les carrés commas et co-commas de CAT sont exacts. Par conséquent, si g est un carré exact et si $T: \underline{X}'' \longrightarrow \underline{X}'$ est un foncteur, le carré composé

$$\begin{tikzcd} T/L \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\text{comma}"] & \underline{X} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "L"] \arrow[dr, phantom, "g \nearrow"] & \underline{Y} \arrow[d, "L'"] \\ \underline{X}'' \arrow[r, "T"'] & \underline{X}' \arrow[r, "G'"'] & \underline{Y}' \end{tikzcd}$$

est encore exact. La réciproque est évidemment fausse; ainsi, si g est un 2-carré et si le carré composé ci-dessus est encore exact, nous dirons que g est <u>exact en</u> T et nous noterons $T \models_{\mathrm{ex}} g$.

<u>Exemple</u> 3.2. Un carré de la forme

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "G"] \arrow[d, equal] & \underline{Y} \arrow[d, "L'"] \\ \underline{X} \arrow[r, "G'"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow g"] & \underline{Y}' \end{tikzcd}$$

est exact si, et seulement si, G est G'-adjoint à gauche de L' .

Exemple 3.3. Soit $U: \underline{A}' \longrightarrow \underline{A}$ un foncteur entre catégories localement petites. Le foncteur $\Psi : \underline{X} \longrightarrow \underline{A}'$ (où $\underline{X}$ est localement petite) est un diagramme localement libre sur l'objet A de $\underline{A}$ (voir Chap. III, §4) si, et seulement si, il existe un carré exact de la forme

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d] & \underline{A}' \arrow[d, "U"] \\ \mathbb{1} \arrow[r, "A^c"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow"] & \underline{A} \end{tikzcd}$$

Exemple 3.5. Si $\underline{S}$ est une catégorie petite (restriction apportée pour de simples raisons de commodité d'exposition), le lemme de Yoneda prend les deux formes équivalentes suivantes:

(YON 1) le carré

$$\begin{tikzcd} \underline{S} \arrow[r, "i(\underline{S})"] \arrow[d, equal] & \overleftarrow{\underline{D}}(\underline{S}) \arrow[d, "\overleftarrow{\lim}"] \\ \underline{S} \arrow[r, "Yon_{\underline{S}}"'] \arrow[ur, phantom, "\text{canonique} \nearrow"] & (Ens^{\underline{S}})^{op} \end{tikzcd}$$

est exact,

(YON 2) le carré commutatif

$$\begin{tikzcd}
(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, "h(\underline{S})"] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\Leftarrow"] & (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op} \arrow[d, "\lim"] \\
(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, equal] & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op}
\end{tikzcd}$$

est exact.

Supposons, maintenant, que $\mathbb{A}$ est une 2-catégorie et que $\Theta : \mathbb{A} \longrightarrow \mathrm{CAT}$ est un 2-foncteur.
Un 2-carré de $\mathbb{A}$ de la forme

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "a"] \arrow[d, "a_1"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{q}{\nearrow}"] & A_2 \arrow[d, "a_2"] \\
A'_1 \arrow[r, "a'"'] & A'_2
\end{tikzcd}$$

est appelé <u>carré</u> Θ <u>-exact</u> si, et seulement si, il est transformé par Θ en un carré exact de CAT.
En particulier, si $\mathbb{A}$ est à Hom dans CAT , un carré $\mathbb{A}(A,-)$ -exact, pour tout objet A de $\mathbb{A}$, sera dit <u>exact fort</u>.
Dans CAT , l'exactitude et l'exactitude forte sont équivalentes. Il n'en est pas ainsi en général. Notamment, dans la 2-catégorie $\mathbb{E}\mathrm{sq}$ des esquisses petites, il convient de distinguer, en particulier:

- la Θ -exactitude, où $\Theta : \mathbb{E}\mathrm{sq} \longrightarrow \mathbb{C}\mathrm{at}$ est le 2-foncteur "catégorie sous-jacente" ,

- l'exactitude forte,

- la $\mathbb{E}\mathrm{sq}(/\!/\underline{S}/\!/,-)$ -exactitude, où $/\!/\underline{S}/\!/$ est une esquisse petite fixée.

4. <u>Formules internes et validité</u>.

En toute généralité, si l'on dispose d'un 2-triangle de CAT de la forme

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\
& \underline{S}' &
\end{tikzcd}$$

où $\underline{X}$ et $\underline{Y}$ sont petites, on dira que g est une <u>$\underline{S}$'-formule</u>.

Si $T: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ et $F: \underline{S} \longrightarrow \underline{E}$ sont deux foncteurs (entre catégories localement petites), on dira que F <u>valide</u> g <u>via</u> T et l'on notera $F \underset{T}{\models} g$ (ou plus simplement $F \models g$, si aucune ambiguïté n'est à craindre) si, et seulement si:

- F possède une extension de Kan projective, notée $\underleftarrow{\text{ext}}_T(F)$, le long de T ,

- le diagramme de CAT

$$\begin{tikzcd}
& \underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\
\underline{S} \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{\text{ext. proj.}}{\longleftarrow}"] & \underline{S}' \arrow[dl, "\underleftarrow{\text{ext}}_T(F)"] & \\
& \underline{E} & &
\end{tikzcd}$$

présente $\underset{\longleftarrow}{\mathrm{ext}}_T(F).Q$ comme extension de Kan inductive de $\underset{\longleftarrow}{\mathrm{ext}}_T(F).P$ le long de G .

Dans ces conditions, nous dirons que deux $\underline{S}'$-formules g et g' sont <u>isomorphes</u>, et nous noterons $g \approx g'$ si, et seulement si:

- il existe un diagramme commutatif de CAT de la forme

$$
\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dd, "\wr"'] \arrow[dr] \arrow[dd, phantom, shift left=6ex, "\downarrow\wr"] & \arrow[d, phantom, "\underset{g}{\longrightarrow}"] & \underline{Y} \arrow[dd, "\wr"] \arrow[dl] \arrow[dd, phantom, shift right=6ex, "\downarrow\wr"] \\
& \underline{S}' & \\
\underline{X}' \arrow[rr, "G'"'] \arrow[ur] & \arrow[u, phantom, "\overset{g'}{\longrightarrow}"] & \underline{Y}' \arrow[ul]
\end{tikzcd}
$$

De même, nous dirons que deux $\underline{S}'$-formules g et g' sont <u>équivalentes via</u> $(T,\underline{E})$ et nous noterons $g \underset{(T,\underline{E})}{\sim} g'$ (ou plus simplement $g \sim g'$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) si, et seulement si:

- $F \models g$ si, et seulement si, $F \models g'$, pour tout foncteur $F\colon \underline{S} \longrightarrow \underline{E}$.

Bien entendu, si l'on a $g \approx g'$, on a nécessairement $g \sim g'$, la réciproque étant fausse en général.

Dans la suite, nous n'étudierons que les cas particuliers (justifiés par les considérations du §1) qui suivent, où $\underline{S}$ est une catégorie petite:

- $\underline{S}' = (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op}$, $\underline{E} = \mathrm{Ens}$ et $T = \mathrm{Yon}_{\underline{S}}\colon \underline{S} \longrightarrow (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op}$, dans ce cas, une $\underline{S}'$-formule sera appelée <u>formule concrète</u>

<u>interne à $\underline{S}$</u> ,

- $\underline{S}' = \underleftarrow{D}(\underline{S})$, $\underline{E} = \mathrm{Ens}$ et $T = i(\underline{S}) : \underline{S} \longrightarrow \underleftarrow{D}(\underline{S})$, dans ce cas, une $\underline{S}'$-formule sera appelée <u>formule abstraite interne à $\underline{S}$</u> ,

- $\underline{S}' = (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op}$, $\underline{E} = \mathrm{Ens}$ et

$$T : \underline{S} \xrightarrow[\mathrm{Yon}_{\underline{S}}]{} (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \xrightarrow[h(\underline{S})]{} (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op} ,$$

dans ce cas, une $\underline{S}'$-formule sera appelée <u>formule abstraite stricte interne à $\underline{S}$</u>

De plus, nous appellerons <u>formule scindée interne à $\underline{S}$</u> tout foncteur $\phi : \underline{Z} \longrightarrow \underrightarrow{C}(\underleftarrow{D}(\underline{S}))$. Cette terminologie est justifiée car, à une telle ϕ , on associe la famille petite $(\varphi_Z)_{Z \in \mathrm{ob}\underline{Z}}$ de formules abstraites internes à $\underline{S}$

$$\phi(Z) : \quad \begin{tikzcd} \underline{X}_Z \arrow[rr] \arrow[dr, "P_Z"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\varphi_Z}"] & \Omega \arrow[dl, "Q_Z"] \\ & \underleftarrow{D}(\underline{S}) & \end{tikzcd}$$

Si $F : \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un foncteur, on note alors $F \models \phi$ si, et seulement si, $F \models \varphi_Z$ pour tout objet Z de $\underline{Z}$. De même, il est facile de définir l'équivalence de deux formules scindées ϕ et ϕ' internes à $\underline{S}$, ce que l'on notera encore $\phi \sim \phi'$.

Les diverses définitions précédentes sont reliées comme suit:

<u>Théorème</u> 4.1. <u>Soit $\underline{S}$ une catégorie petite</u>.

(i) <u>A toute formule abstraite</u> (resp. <u>concrète</u>) g <u>interne à $\underline{S}$ est associée une formule concrète</u> (resp. <u>abstraite</u>)

$cc(g)$ (resp. $ab(g)$) interne à $\underline{S}$ et ce de telle sorte que

$$ab(cc(g)) \sim g \quad (\text{resp.} \quad cc(ab(g)) \approx g\ )$$

(ii) A toute formule abstraite (resp. abstraite stricte) g interne à $\underline{S}$ est associée une formule abstraite stricte (resp. abstraite) $st(g)$ (resp. $ab'(g)$) interne à $\underline{S}$ et ce de telle sorte que

$$ab'(st(g)) \sim g \quad (\text{resp.} \quad st(ab'(g)) \sim g\ )$$

(iii) A toute formule abstraite (resp. scindée) g (resp. ϕ) interne à $\underline{S}$ est associée une formule scindée (resp. abstraite) $sc(g)$ (resp. $ab''(\phi)$) interne à $\underline{S}$ et ce de telle sorte que

$$ab''(sc(g)) \sim g \quad (\text{resp.} \quad sc(ab''(\phi)) \sim \phi\ )$$

Preuve. Pour obtenir les associations du point (i), il suffit de composer les formules considérées par l'un des deux foncteurs:

$$\begin{tikzcd} \underleftarrow{D}(\underline{S}) \arrow[r, bend left, "\varprojlim"] & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \arrow[l, "h'(\underline{S})"] \end{tikzcd}$$

De même, pour obtenir l'association du point (ii), il suffit de composer les formules considérées par l'un des deux foncteurs:

$$\begin{tikzcd} \underleftarrow{D}(\underline{S}) \arrow[r, "\varprojlim"'] & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, "h(\underline{S})"'] & (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op} \arrow[ll, bend right, "j(\underline{S})"'] \end{tikzcd}$$

Enfin, pour obtenir l'association du point (iii), supposons que $\phi : \underline{Z} \longrightarrow \underrightarrow{C}(\underleftarrow{D}(\underline{S}))$ est une formule scindée interne à $\underline{S}$. Il lui correspond la formule abstraite interne à $\underline{S}$:

$$\begin{tikzcd} \underline{Z} \arrow[rr, "s(\underleftarrow{D}(\underline{S}))(\phi)"] \arrow[dr, "\beta(\underleftarrow{D}(\underline{S}))(\phi)"'] & \arrow[d, phantom, "n\, =\, ab''(\phi)\ \longrightarrow"] & \Sigma(\underleftarrow{D}(\underline{S}))(\phi) \arrow[dl, "\sigma(\underleftarrow{D}(\underline{S}))(\phi)"] \\ & \underleftarrow{D}(\underline{S}) & \end{tikzcd}$$

Inversement, si g est la formule abstraite interne à $\underline{S}$ représentée par:

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\
& \underleftarrow{D}(\underline{S}) &
\end{tikzcd}$$,

on obtient, naturellement en tout objet Y de $\underline{Y}$, le cône inductif de $\underleftarrow{D}(\underline{S})$, noté $\phi(Y)$, représenté par:

$$\begin{tikzcd}
G/Y \arrow[rr] \arrow[d] & \arrow[d, phantom, "\text{comma}\nearrow"] & \mathbf{1} \arrow[d] \\
\underline{X} \arrow[rr, "G"'] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\
& \underleftarrow{D}(\underline{S}) &
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire un foncteur $\phi: \underline{Y} \longrightarrow \underrightarrow{\underline{C}}(\underleftarrow{D}(\underline{S}))$

Les équivalences de formules de (ii) et (i) résultent de (iii) Celles de (iii) sont claires car les extensions de Kan inductives se calculent point par point dans Ens

L'isomorphisme de (i) résulte de l'égalité:

$$\underleftarrow{\lim} \cdot h'(\underline{S}) = Id_{(Ens^{\underline{S}})^{op}} \qquad //$$

Les extensions de Kan inductives se calculant point par point dans Ens , on déduit donc du théorème 4.1:

<u>Corollaire</u> 4.1. <u>Si</u> $\underline{S}$ <u>est une catégorie petite, si</u>

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\ & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} & \end{tikzcd}$$

est une formule concrete interne à $\underline{S}$ et si $F\colon \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un foncteur, on a:

– $F \models g$ si, et seulement si, pour tout objet Y de $\underline{Y}$, l'application canonique induite par g

$$\varinjlim_{\substack{(X,\, GX \longrightarrow Y) \\ \in G/Y}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^{\underline{S}}}(PX,F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^{\underline{S}}}(QY,F)$$

est une bijection.

Corollaire 4.2. Si $\underline{S}$ est une catégorie petite, si

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[rr, "G"'] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\ & \underleftarrow{D}\,(\underline{S}) & \end{tikzcd}$$

(resp.

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\ & (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op} & \end{tikzcd}$$

)

est une formule abstraite (resp. abstraite stricte) interne à $\underline{S}$ et si $F\colon \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un foncteur, on a:

- $F \models g$ <u>si, et seulement si, pour tout objet</u> Y <u>de</u> $\underline{Y}$, <u>l'application canonique induite par</u> g

$$\varinjlim_{(X,GX\to Y)\in G/Y} \ \varprojlim_{D\in \underline{D}_X} \mathrm{Hom}_{Ens^{\underline{S}}}(P(X)(D),F) \longrightarrow \varprojlim_{D'\in \underline{D}'_Y} \mathrm{Hom}_{Ens^{\underline{S}}}(Q(Y)(D'),F)$$

<u>est une bijection</u>,

(<u>où l'on a posé</u> $P(X)\colon \underline{D}_X \longrightarrow \underline{S}$ et $Q(Y)\colon \underline{D}'_Y \longrightarrow \underline{S}$).

<u>Corollaire</u> 4.3. <u>Si</u> $\underline{S}$ <u>est une catégorie petite, si</u> $\phi : \underline{Z} \longrightarrow \underrightarrow{C}(\underleftarrow{D}(\underline{S}))$ <u>est une formule scindée interne à</u> $\underline{S}$ <u>et si</u> $F\colon \underline{S} \longrightarrow Ens$ <u>est un foncteur, on a:</u>

- $F \models \phi$ <u>si, et seulement si, pour tout objet</u> Z <u>de</u> $\underline{Z}$,

$$\varinjlim_{X\in \underline{X}_Z} \ \varprojlim_{D\in \underline{D}_{ZX}} \mathrm{Hom}_{Ens^{\underline{S}}}(P_Z(X)(D),F) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{D'\in \underline{D}'_Z} \mathrm{Hom}_{Ens^{\underline{S}}}(Q_Z(1)(D'),F) ,$$

(<u>où l'on a posé</u>:

$$\phi(Z) : \quad \begin{tikzcd} \underline{X}_Z \arrow[rr] \arrow[dr, "P_Z"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{\varphi_Z}"] & \mathbb{1} \arrow[dl, "Q_Z"] \\ & D(\underline{S}) & \end{tikzcd}$$

<u>et</u> $Q_Z(1)\colon \underline{D}'_Z \longrightarrow \underline{S}$, $P_Z(X)\colon \underline{D}_{ZX} \longrightarrow \underline{S}$).

Du corollaire 4.1 et de la définition d'un carré exact résulte aussitôt:

<u>Théorème</u> 4.2. <u>Si</u> $\underline{S}$ <u>est une catégorie petite, si</u>

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\ & (Ens^{\underline{S}})^{op} & \end{tikzcd}$$

est une formule concrète interne à $\underline{S}$ et si $F: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un foncteur, on a:

- $F \models g$ si, et seulement si, le carré composé

$$
\begin{tikzcd}
F^c/P \arrow[r] \arrow[d] & \underline{X} \arrow[r, "G"'] \arrow[d, "P"] & \underline{Y} \arrow[d, "Q"] \\
\Box \arrow[r, "F^c"'] \arrow[ur, phantom, "\nearrow\,\mathrm{comma}"] & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, equal] \arrow[ur, phantom, "\nearrow\, g"] & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op}
\end{tikzcd}
$$

est exact;

autrement dit, on a $F \models g$ si, et seulement si, $F^c \models_{ex} g$ au sens du §3 .

Corollaire 4.4. Sous les hypothèses du théorème 4.2 , on a $F \models g$ si, et seulement si, dans la catégorie BIM des bimodules, $(F^c)^\circ . \tilde{g}$ est un isomorphisme. Ceci revient à dire que $(F^c)^\circ$ "iso-co-égalise" le diagramme:

$$
\begin{tikzcd}
 & \underline{X} \arrow[dr, "P"] \arrow[d, "\tilde{g}"] & & \\
\underline{Y} \arrow[ur, "G^\circ", "|" marking] \arrow[r, "Q"'] & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, phantom, ""] & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \arrow[r, "(F^c)^\circ", "|" marking] & \Box
\end{tikzcd}
$$

De même, en utilisant le corollaire 4.2, on a:

Théorème 4.3. Si $\underline{S}$ est une catégorie petite, si

$$
\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[rr, "G"'] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{g}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\
 & (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op} &
\end{tikzcd}
$$

est une formule abstraite stricte interne à $\underline{S}$, si

$F: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un foncteur et si $h(\underline{S})(F): H(\underline{S})(F) \longrightarrow \underline{S}$ est sa fibration discrète associée, alors:

- $F \models g$ si, et seulement si, le carré composé

$$\begin{tikzcd}
h(\underline{S})(F)^{c}/P \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\nearrow \text{comma}"] & \underline{X} \arrow[r, "G"] \arrow[d, "P"] \arrow[dr, phantom, "\overset{g}{\nearrow}"] & \underline{Y} \arrow[d, "Q"] \\
\mathbb{1} \arrow[r, "h(\underline{S})(F)^{c}"'] & (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op} \arrow[r, equal] & (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op}
\end{tikzcd}$$

est exact;
autrement dit, on a $F \models g$ si, et seulement si, on a $h(\underline{S})(F)^{c} \models_{ex} g$, au sens du §3 .

5. Esquisse associée à une formule interne et calcul de l'implication.

Supposons que $//\underline{S}//$ est une esquisse petite et que

$$\begin{tikzcd}
\underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "P"'] & \arrow[d, phantom, "\overset{g}{\longrightarrow}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "Q"] \\
& (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} &
\end{tikzcd}$$

est une formule concrète interne à $\underline{S}$. On note alors $\mathrm{Val}_{\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}}(g)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ dont les objets sont les réalisations $F: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$ tels que $F \models g$.
Dans ces conditions, on a:

Théorème 5.1. (i). *Il existe une esquisse petite* $//\underline{S}_g//$ *et une réalisation* $//R_g// : //\underline{S}// \longrightarrow //\underline{S}_g//$ *telles que* $\mathrm{Ens}^{//R_g//} : \mathrm{Ens}^{//\underline{S}_g//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ *induit une équivalence. Autrement dit, naturellement en toute réalisation* $F: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$, *il existe une réalisation, unique à équivalence près,* $F_g : //\underline{S}_g// \longrightarrow \mathrm{Ens}$ *telle que:*

$$F_g \cdot R_g \sim F$$

(ii). *Il existe une esquisse petite* $//\underline{S}(g)//$ *et une réalisation* $//R(g)//: //\underline{S}// \longrightarrow //\underline{S}(g)//$ *telles que*

$\mathrm{Ens}^{//R(g)//} : \mathrm{Ens}^{//\underline{S}(g)//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//}$ *admette un inverse à droite* $\Gamma : \mathrm{Ens}^{//\underline{S}//} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{//\underline{S}(g)//}$ *tel que*

$\Gamma \cdot \mathrm{Ens}^{//R(g)//}$ *soit équivalent à l'identité. Autrement dit, naturellement en toute réalisation* $F: //\underline{S}// \longrightarrow \mathrm{Ens}$, *il existe une réalisation* $F(g): //\underline{S}(g)// \longrightarrow \mathrm{Ens}$, *unique à équivalence près, telle que* $F(g).R(g) = F$

Preuve. (ii) résulte de (i) en prenant dans $\mathbb{E}\mathrm{sq}$ l'iso-cocomma

$$\begin{tikzcd} //\underline{S}// \arrow[r, "R_g"] \arrow[d, equal] & //\underline{S}_g// \arrow[d] \\ //\underline{S}// \arrow[r, "R(g)"'] \arrow[ur, phantom, "\text{iso-cocomma}"] & //\underline{S}(g)// \end{tikzcd}$$

Pour définir la catégorie sous-jacente $\underline{S}_g$ à l'esquisse $//\underline{S}_g//$ du point (i), on procède comme suit:

- on construit tout d'abord le co-comma (dans $\mathbb{C}$at):

$$\begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[r, "G"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{co-comma}"] & \underline{Y} \arrow[d, "W_2"] \\ \underline{X} \arrow[r, "W_1"'] \arrow[ur, phantom, "w \nearrow"] & \underline{X} \searrow G \end{tikzcd} ,$$

- on en déduit un unique foncteur

$$W: \underline{X} \searrow G \longrightarrow (\mathbb{E}ns^{\underline{S}})^{op}$$

tel que $W\, w = g$,

- on construit ensuite le comma:

$$\begin{tikzcd} W/Yon_{\underline{S}} \arrow[r, "W'_2"] \arrow[d, "W'_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{comma}"] & \underline{S} \arrow[d, "Yon_{\underline{S}}"] \\ \underline{X} \searrow G \arrow[r, "W"'] \arrow[ur, phantom, "w' \nearrow"] & (Ens^{\underline{S}})^{op} \end{tikzcd} ,$$

- enfin, on construit le co-comma:

$$\begin{tikzcd} W/Yon_{\underline{S}} \arrow[r, "W'_2"'] \arrow[d, "W'_1"'] \arrow[dr, phantom, "\text{co-comma}"] & \underline{S} \arrow[d, "W''_2"] \\ \underline{X} \searrow G \arrow[r, "W''_1"] \arrow[ur, phantom, "w'' \nearrow"] & \underline{S}_g \end{tikzcd}$$

Pour définir l'esquisse $//\underline{S}_g//$, on procède comme suit:

(j) on distingue dans $\underline{S}_g$ les cônes projectifs de la forme

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\xleftarrow{C}"] & \Box \arrow[dl] \\ & \underline{S} \arrow[d, "R_g"] & \\ & \underline{S}_g & \end{tikzcd}$$

lorsque

$$\begin{tikzcd} \underline{I} \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\xleftarrow{C}"] & \Box \arrow[dl] \\ & \underline{S} & \end{tikzcd}$$

est un cône projectif distingué dans $//\underline{S}//$,

(jj) on distingue dans $\underline{S}_g$ les cônes projectifs

$$\begin{tikzcd} P/W'_1 \arrow[rr] \arrow[d] & & \Box \arrow[d, "P^c"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow \text{comma}"] \\ W/Yon_{\underline{S}} \arrow[rr, "W'_1"'] \arrow[d, "W'_2"'] & & \underline{X} \smallsetminus G \arrow[ddl, "W''_1"] \\ \underline{S} \arrow[dr, "R_g"'] & \arrow[d, phantom, "\xleftarrow{w''}"] & \\ & \underline{S}_g & \end{tikzcd}$$

pour tout objet P de $\underline{X} \smallsetminus G$, (jjj) on distingue dans $\underline{S}_g$ les cônes inductifs

$$\begin{tikzcd}
\underline{J} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "C' \Rightarrow"] & & \mathbb{1} \arrow[dl] \\
& \underline{S} \arrow[d, "R_g"] & \\
& \underline{S}_g &
\end{tikzcd} ,$$

lorsque

$$\begin{tikzcd}
\underline{J} \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=4, "C' \Rightarrow"] & & \mathbb{1} \arrow[dl] \\
& \underline{S} &
\end{tikzcd}$$

est un cône inductif distingué dans $//\underline{S}//$,

(jv) on distingue, enfin, dans $\underline{S}_g$ les cônes inductifs

$$\begin{tikzcd}
G/Y \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[drr, phantom, "\text{comma}"] & & \mathbb{1} \arrow[d, "Y^c"] \\
\underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "W_1"'] \arrow[rr, phantom, shift right=5, "w \Rightarrow"] & & \underline{Y} \arrow[dl, "W_2"] \\
& \underline{X} \backslash G \arrow[d, "W''_1"'] & \\
& S_g &
\end{tikzcd} ,$$

pour tout objet Y de $\underline{Y}$.

On conclut facilement en utilisant le fait que les extensions de Kan inductives se calculent point par point dans Ens (i. e. essentiellement le corollaire 4.1 du §4). //

Vu le théorème 4.1 du §4 , on peut aussi supposer, dans le théorème 5.1 précédent, que g (resp. g ; ϕ) est une formule abstraite (resp. abstraite stricte; scindée) interne à $\underline{S}$; dans ce cas, il suffirait de raisonner avec la formult concrète $cc(g)$ (resp. $cc(ab'(g))$; $cc(ab''(\phi))$) associée à g (resp. g ; ϕ), mais la remarque 1.1 du §1 montre que l'on peut construire une esquisse nettement plus petite (voir aussi la remarque 6.1 du §6 suivant).

Supposons maintenant que $R: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ est un foncteur entre catégories petites et que g (resp. g') est une formule concrète interne à $\underline{S}$ (resp. $\underline{S}'$). Si $F: \underline{S} \longrightarrow$ Ens est un foncteur, nous noterons $\underset{\longleftarrow}{\mathrm{ext}}_R F: \underline{S}' \longrightarrow$ Ens l'extension de Kan projective de F le long de R . Alors, nous avons:

<u>Théorème 5.2. Si l'on dispose dans</u> $\mathbb{E}$sq <u>d'un carré exact</u> (<u>aux sens du</u> §3)

$$\begin{tikzcd}
\underline{S} \arrow[rr, "R"] \arrow[d, "//R_g//"'] & & \underline{S}' \arrow[d, "//R_{g'}//"] \\
//\underline{S}_g// \arrow[rr, "R'"'] \arrow[rr, phantom, shift left=4ex, "\text{exact} \quad d \nearrow"] & & //\underline{S}'_{g'}//
\end{tikzcd}$$

<u>alors, pour tout foncteur</u> $F: \underline{S} \longrightarrow$ Ens , <u>on a</u>:

- $(F \models g) \Longrightarrow (\underset{\longleftarrow}{\mathrm{ext}}_R F \models g')$.

<u>Preuve</u>. Ceci résulte évidemment du théorème 4.2 du §4 et du fait que les extensions de Kan projectives et inductives se calculent point par point dans Ens . //

6. <u>Remarques</u>.

6.1. Plus généralement qu'au §2 , on peut définir $\underleftarrow{D}\,(\underline{S})$ même lorsque $\underline{S}$ n'est que localement petite. Alors $\underleftarrow{D}\,(\underline{S})$ est encore localement petite. Ainsi, on dispose d'un foncteur:

$$\begin{array}{rl} \underleftarrow{d} : \mathrm{CAT} & \longrightarrow \mathrm{CAT/Cat} \\ \underline{S} & \longmapsto (\underleftarrow{d}\,(\underline{S}) : \underleftarrow{D}\,(\underline{S}) \longrightarrow \mathrm{Cat})\ . \end{array}$$

On montre en (R.M E.S.) que ce foncteur admet un adjoint à gauche:

$$\begin{array}{rl} \underleftarrow{K} : \mathrm{CAT/Cat} & \longrightarrow \mathrm{CAT} \\ (R : \underline{X} \longrightarrow \mathrm{Cat}) & \longmapsto \underleftarrow{K}\,(R) \end{array} \qquad ,$$

appelé <u>foncteur produit croisé</u>; on note alors:

$$\underleftarrow{k}\,(R) : \underleftarrow{K}\,(R) \longrightarrow \underline{X}$$

la fibration scindée associée à R .
Au §2 , $\underrightarrow{C}\,(\underline{S}')$ a été définie lorsque $\underline{S}'$ est localement petite et l'on dispose donc du foncteur:

$$\begin{array}{rl} \underrightarrow{c} : \mathrm{CAT} & \longrightarrow \mathrm{CAT/\ Cat} \\ \underline{S}' & \longmapsto (\ \underrightarrow{c}\,(\underline{S}') : \underrightarrow{C}(\underline{S}') \longrightarrow \mathrm{Cat}) \\ & \qquad\qquad (\underline{X}'^{+} \longrightarrow \underline{S}' \longmapsto \underline{X}'\ ) \end{array}$$

Il admet un adjoint à gauche:

$$\begin{array}{rl} \underrightarrow{\Sigma}' : \mathrm{CAT/Cat} & \longrightarrow \mathrm{CAT} \\ (R : \underline{X} \longrightarrow \mathrm{Cat}) & \longmapsto \underrightarrow{\Sigma}'(R) \end{array}$$

défini, à partir de $\underrightarrow{k}$, par les carrés co-comma:

$$\begin{tikzcd} \underrightarrow{K}\,(R) \arrow[r, "\underrightarrow{k}(R)"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\text{co-comma}"] & \underline{X} \arrow[d] \\ \underrightarrow{K}\,(R) \arrow[r] & \underrightarrow{\Sigma}'(R) \end{tikzcd}$$

(en posant $\underrightarrow{k} = (\ \underleftarrow{k}(\ (-)^{op}\ ))^{op}\ )$.

Ce foncteur adjoint à gauche, que l'on appelle foncteur produit soudé permet, ainsi, de définir le foncteur soudage du §2.

Enfin, si $\underline{S}$ est localement petite, on note $\underleftarrow{\mathrm{Fam}}\,(\underline{S})$ la sous-catégorie pleine (dite catégorie des familles de $\underline{S}$) de $\underleftarrow{D}\,(\underline{S})$ dont les objets sont les $P: \underline{X} \longrightarrow \underline{S}$, où $\underline{X}$ est discrète.

On dispose donc du foncteur:

$$\begin{aligned} \underleftarrow{f} : \mathrm{CAT} &\longrightarrow \mathrm{CAT}/\mathrm{Ens} \\ \underline{S} &\longmapsto \left(\underleftarrow{f}\,(\underline{S}) : \underleftarrow{\mathrm{Fam}}\,(\underline{S}) \to \mathrm{Ens} \right) \\ &\qquad\quad (\underline{X} \longrightarrow \underline{S}) \longmapsto \underline{X} \end{aligned}$$

Ce foncteur admet également un foncteur adjoint à gauche:

$$\begin{aligned} \underleftarrow{H} : \mathrm{CAT}/\mathrm{Ens} &\longrightarrow \mathrm{CAT} \\ (R: \underline{X} \to \mathrm{Ens}) &\longmapsto \underleftarrow{H}\,(R) \end{aligned} \quad ,$$

on note alors $\underleftarrow{h}\,(R): \underleftarrow{H}\,(R) \longrightarrow \underline{X}$ la fibration discrète associée à R .

En particulier, la restriction:

$$(\underleftarrow{h}\,|_{\mathrm{Ens}^{\underline{S}}})^{op} : (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \longrightarrow (\mathrm{Cat}/\underline{S})^{op}$$

est le foncteur fibrations discrètes $h(\underline{S})$ du §2.

Dans ces conditions, si $F: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est un foncteur et si l'on pose $\underleftarrow{F} = \underleftarrow{\lim} \cdot \underleftarrow{D}\,(F)$, on a un diagramme d' (iso-) extensions projectives:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=huge]
\underline{S} \arrow[r, hook] \arrow[drr, "F"'] & \underleftarrow{\mathrm{Fam}}\,(\underline{S}) \arrow[r, hook] \arrow[dr] \arrow[d, phantom, "\text{ext. proj.}\ \overset{\sim}{\Leftarrow}"] & \underleftarrow{D}\,(\underline{S}) \arrow[r, "\lim"'] \arrow[d, "\underleftarrow{F}"] \arrow[d, phantom, shift left=6ex, "\text{ext. proj.}\ \overset{\sim}{\Leftarrow}"] & (\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op} \arrow[l, bend right, "h(\underline{S})"'] \arrow[dl, "\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}^{\underline{S}}}(-{,}F)"] \\
& & \mathrm{Ens} &
\end{tikzcd}$$

qui permet de vérifier que les constructions et les propriétés énoncées dans les théorèmes 4.1 et 5.1 reposent essentiellement sur les adjonctions $\underleftarrow{K} \dashv \underleftarrow{d}$, $\underrightarrow{\Sigma}' \dashv \underrightarrow{c}$ et $\underleftarrow{H} \dashv \underleftarrow{f}$.
Supposons, en particulier, que $G: \underline{I} \longrightarrow \underleftarrow{D}\,(\underline{S})$ est un foncteur . Vu l'adjonction $\underleftarrow{K} \dashv \underleftarrow{d}$ qui est aussi une 2-adjonction, ce foncteur détermine une extension projective

$$\begin{tikzcd}
\underleftarrow{K}\,G \arrow[rr, "b_G"] \arrow[dr, "a_G"'] & & I \arrow[d, "G"] \\
& \underline{S} \arrow[r, phantom, "\text{ext. proj.}"] \arrow[d, "Yon_{\underline{S}}"'] & \underleftarrow{D}\,(\underline{S}) \arrow[dl, "\underleftarrow{lim}"] \\
& (Ens^{\underline{S}})^{op} &
\end{tikzcd}$$

où (a_G, b_G) est le span associé à G par adjonction.
Ainsi, dans le théorème 5.1, si g est donnée sous la forme $g = cc(ab''(\phi))$, où $\phi: \underline{Z} \longrightarrow \underrightarrow{C}\,(\underleftarrow{D}\,(\underline{S}))$, l'adjonction $\underrightarrow{\Sigma}' \dashv \underrightarrow{c}$ détermine un $G: \underline{I} = \underrightarrow{\Sigma}'(\phi) \longrightarrow \underleftarrow{D}\,(\underline{S})$. On peut donc construire une catégorie $\underline{S}''_{\phi}$, plus petite que $\underline{S}_g$, en prenant le co-comma $b_G \setminus a_G$. On en déduit une esquisse petite $//\underline{S}''_{\phi}//$, plus petite que $//\underline{S}_g//$, les cônes projectifs et inductifs à distingués étant clairs.

6.2. Une <u>ébauche</u> est une catégorie $\underline{S}$ munie d'opérations locales compatibles avec la composition des flèches.
En notant $el(\underline{S})$ la catégorie des endomorphismes locaux de $\underline{S}$, il revient au même de dire qu'une ébauche est un foncteur
$E: \underline{I} \longrightarrow el(\underline{S})$.
Par exemple:
- si $\underline{S}$ est une catégorie partiellement monoïdale et si S est un objet de $\underline{S}$, on peut munir $\underline{S}$ du foncteur partiel $S \boxtimes -$;

- si $s : S \longrightarrow S'$ est une flèche de $\underline{S}$, on peut munir $\underline{S}$ de l'opération partielle "produit fibré le long de s " (quand il existe);

- si $/\underline{S}/$ est l'esquisse petite (purement projective) des monoïdes, dont on note les objets 1 , S , $S\times S$, $(S\times S)\times S$ et $S\times(S\times S)$, on peut munir $\underline{S}$ des opérations partielles $S\times-$ et $-\times S$ (en imposant entre elles les équations usuelles); alors un morphisme de cette ébauche dans $\underline{C}^{\underline{C}}$, munie des opérations de compositions avec les foncteurs $\underline{C} \longrightarrow \underline{C}$, s'identifie à une monade sur la catégorie $\underline{C}$.

C'est pour rendre fonctoriel el et l'étude des algèbres d'une ébauche que l'on a introduit, dans (R.M.E.S.), le foncteur $\underset{\rightarrow}{\underline{D}} = (\underset{\leftarrow}{\underline{D}}(\ (-)^{op})^{op}$. Ainsi, $el(\underline{S}) \hookrightarrow \underset{\rightarrow}{\underline{D}}(\underline{S})$ et toute ébauche s'identifie à une <u>machine</u>, i. e. à un foncteur $\underline{I} \longrightarrow \underset{\rightarrow}{\underline{D}}(\underline{S})$ (ainsi appelée car, si $\underline{I}$ et $\underline{S}$ sont des monoïdes et $\underset{\rightarrow}{\underline{D}}$ est remplacé par son sous-foncteur $\underset{\rightarrow}{\underline{Fam}}$, on retrouve les machines de Mealy).
De même, une esquisse petite purement inductive $//\underline{S}//$ s'identifie à une machine $\underline{\mathfrak{I}} \longrightarrow \underset{\rightarrow}{\underline{D}}(\underline{S})$ (où $\underline{\mathfrak{I}}$ est discrète et représente ... l'ensemble des cônes inductifs distingués de $//\underline{S}//$). Une constatation duale vaut pour les esquisses petites purement projectives.

Remarquons, également, que si $\underline{S}$ a un élément final, on dispose évidemment d'un plongement de $\underset{\rightarrow}{\underline{D}}(\underline{S})$ dans $\underset{\rightarrow}{\underline{C}}(\underline{S})$ de sorte que toute machine $\underline{I} \longrightarrow \underset{\rightarrow}{\underline{D}}(\underline{S})$ induit un foncteur $\underline{I} \xrightarrow{P} \underset{\rightarrow}{\underline{C}}(\underline{S})$ c'est-à-dire un $\underline{I}$ -diagramme de $\underline{S}$ -cônes inductifs . En particulier, les ébauches et les esquisses purement inductives s'intèrprètent comme tel et sont donc des cas particuliers de formules scindées internes à $\underline{S}$.

Signalons, enfin, que:

- la donnée d'un tel $\underline{I}$-diagramme de $\underline{S}$ -cônes inductifs équivaut à la donnée d'un diagramme

$$\begin{tikzcd}
\underrightarrow{K}P \arrow[rr, "\underrightarrow{k}P"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=3ex, "\longrightarrow"] & & \underline{I} \arrow[dl] \\
& \underline{S} &
\end{tikzcd}$$

(où $\underrightarrow{k}P$ est associé à P dans l'adjonction $\underrightarrow{K} \dashv \underrightarrow{d}$),
- $\underrightarrow{C}$ est une sous-bimonade de $\underrightarrow{D}(-)$ et sa bicatégorie de Kleisli est donc décrite par produits fibrés .

6.3. Les ultraproduits définis et calculés au §3 du Chap. III et, plus généralement, les limites mixtes de la remarque 6.4 du Chap. III, se définissent aussi comme suit:

- on dispose d'un foncteur $\Psi : \underline{X}' \longrightarrow \underline{A}$ et d'un foncteur $\varphi : \underline{Y} \longrightarrow \underleftarrow{D}(\underline{X}')$,
- $\underleftrightarrow{\lim}\ (\Psi) = \underrightarrow{\lim}\ (\underleftarrow{\lim} \cdot \underleftarrow{D}\ (\Psi) \cdot \varphi\ )$.

D'autre part, si $F: \underline{S} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est de la forme $F = \underleftarrow{\lim}_{J \in \underline{J}} F_J$ dans $(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op}$, où:

- pour tout objet J de $\underline{J}$, F_J est objet de $\underleftarrow{\Delta}(\underline{S})$,
- $\underleftarrow{\Delta}$ est un sous-foncteur de $\underleftarrow{D}$ (par exemple, $\underleftarrow{\Delta}$ peut être le foncteur Cat/- ou le foncteur $\underleftarrow{\mathrm{Fam}}$),

F sera dit $\underleftarrow{\Delta}$ -représentable.

Des calculs de modèles du Chap. III et des remarques 6.1 et 6.2 précédentes, il résulte que la classification des formules internes, c'est-à-dire la classification de formules du premier ordre (voir le Chap. II) est équivalente à la classification des types de représentabilités (ou spécialisations de machines, d'après (D.E.L.C.)), résulte de l'étude des commutations de limites dans Ens .

6.4. En (R.E.C.E.) on trouvera de nombreux critères d'exactitude pour les 2-carrés de CAT . Y figurent aussi de nombreux exemples de carrés exacts dans CAT ou dans d'autres 2-catégories.
Signalons, notamment, que les carrés exacts de Ab sont les carrés exacts de Hilton. En particulier, les suites exacts sont les carrés exacts de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "/\!/"] & 0 \arrow[d] \\ X \arrow[r] & B \end{tikzcd}$$

Il est également facile d'intèrprèter les propriétés des §§ 4 et 5 en termes de calculs de carrés exacts. Il en est ainsi de tout calcul de limites ou d'extensions de Kan et inversement un calcul de carrés exacts s'intérpète en terme de commutation de limites.

6.5. Dans la preuve du théorème 5.1, les diagrammes des points (jj) et (jv) font apparaitre, naturellement, plutôt que des cônes (à distinguer pour obtenir une esquisse) des cylindres, à savoir:

(jj)'
$$\begin{tikzcd} W/Yon_{\underline{S}} \arrow[rr, "W'_1"'] \arrow[dr, "W'_2"'] & & \underline{X}\backslash G \arrow[ddl, "W''_1"] \\ & \underline{S} \arrow[d, "R_g"'] \arrow[r, phantom, "\overset{w''}{\Leftarrow}"] & {} \\ & \underline{S}_g & \end{tikzcd}$$

et

$$(jv)' \qquad \begin{tikzcd} \underline{X} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "W_1"'] & \arrow[d, phantom, "\xrightarrow{w}"] & \underline{Y} \arrow[dl, "W_2"] \\ & \underline{X} \backslash G \arrow[d, "W''_1"] & \\ & \underline{S}_g & \end{tikzcd}$$

Ceci peut conduire à généraliser la notion d'esquisse, i. e. de catégorie munie de cônes projectifs et inductifs distingués, en celle de catégorie munie de cylindres (i. e. d'extensions de Kan) projectifs et inductifs distingués. Ce point de vue semble adapté lorsqu'on désire réaliser dans des catégories qui ne sont pas à petites limites (i. e. où les extensions de Kan ne se calculent pas nécessairement point par point) ou bien si l'on veut envisager une théorie des esquisses enrichies (voir aussi (G.M.E.N.)).

6.6. Nous avons choisi de présenter la notion de formule sous la forme très générale du début du §4 pour ne pas privilégier l'un quelconque des aspects abstrait (travail au-dessus de $\underleftarrow{D}(\underline{S})$) et concret (travail au-dessus de $(\mathrm{Ens}^{\underline{S}})^{op}$); au contraire, cette présentation souligne la dialectique abstrait - concret qui résulte, en fait, de l'adjonction $h(\underline{S}) \dashv \underleftarrow{\lim}$. Plus intuitivement, si g est une formule abstraite interne à $\underline{S}$, il faut voir la formule concrète $cc(g)$ interne à $\underline{S}$ associée à g comme étant la table de vérité de g . Ceci explique en quoi la validité de g ne dépend que de la validité de $cc(g)$.

BIBLIOGRAPHIE

(C.A.L.O.) Y. Diers, Catégories localisables, Thèse, Paris, 1977.

(D.E.L.C.) R. Guitart et L. Van Den Bril, Décompositions et lax-complétions, Cahiers de Top. et Géom. Diff., XVIII,4 , 1977.

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Math. 23, Paris, 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Instit. Polit., Iaşi, XIV, 1968.

(F.A.U.C.) H. Andréka et I. Németi, Formulas and ultraproducts in categories, Beit. zur Alg. und Geom. , 8 , 1979 .

(F.O.C.L.) M. Makkai et G. Reyes, First order categorical logic, Lect. Notes in Math. 611, 1977.

(F.O.S.A.) C. Lair, Foncteurs d'omission de structures algébriques, Cah. de Top. et Géom. Diff., XII,2 , 1971.

(G.M.E.N.) F. Cury, Graphes multiplicatifs enrichis, Esquisses Math. 27, Amiens, 1978.

(I.F.O.F.) H. Andréka et I. Németi, Injectivity in categories to represent all first order formulas, I , Dem. Math. , XII, 3, 1979.

(L.P.L.G.) F. Ulmer, Locally presentable and locally generated categories, Lect. Notes in Math. 195, 1971.

(O.C.U.C.) S. Fakir et L. Haddad, Objets cohérents et ultraproduits dans les catégories, Journ. of Alg., 21,3 , 1972.

(R.E.C.E.) R. Guitart, Relations et carrés exacts, Ann. Sci. Math. Québec, (à paraître).

(R.M.E.S.) R. Guitart, Remarques sur les machines et les structures, Cah. de Top. et Géom. Diff., XV,2 , 1974.

SOMMAIRE