DIAGRAMMES

C. LAIR

Conditions syntaxiques de plongement. I. Prolongements de foncteurs et extensions de Kan

Diagrammes, tome 2 (1979), exp. nº 3, p. L1-L12

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__2__A3_0>

Diagrammes, Vol. 2 , 1979.

CONDITIONS SYNTAXIQUES DE PLONGEMENT.
I. PROLONGEMENTS DE FONCTEURS ET EXTENSIONS DE KAN.

C. Lair.

Introduction.

Soit $\underline{A}$ une catégorie petite munie d'un ensemble de limites (projectives) petites et soit $\underline{B}$ une catégorie localement petite munie d'un ensemble de limites petites. Si $R: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est un morphisme de catégories munies de limites, on sait que toute réalisation $F: \underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ (certains disent: faisceau ou foncteur continu ou encore modèle de $\underline{A}$) engendre une réalisation libre $\overline{F} : \underline{B} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ (faisceau associé à l'extension de Kan de F le long de R). Il est naturel de se demander à quelle condition suffisante (et éventuellement nécessaire) syntaxique (i. e. ne portant que sur R) on peut affirmer que:

(P). Pour toute réalisation $F : \underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, la réalisation associée $\overline{F} : \underline{B} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ en est un prolongement (i. e. la transformation naturelle canonique $u_F: F \longrightarrow \overline{F}.R$ est un monomorphisme).

En effet, lorsque (P) est vérifiée, il est possible d'énoncer, sans autre vérification, un théorème de plongement analogue au théorème de Stone:

- toute structure algébrique d'espèce $\underline{A}$ (i. e. tout modèle de $\underline{A}$) se plonge dans la structure algébrique d'espèce $\underline{A}$ sous-jacente à une structure algébrique (libre) d'espèce $\underline{B}$.

Dans la partie II de ce travail: "Prolongements de faisceaux et faisceaux associés" (à paraître dans ces "Diagrammes"), nous répondons précisément à cette question générale. Dans la présente partie I , nous résolvons complètement le problème dans le cas particulier où aucune limite n'est distinguée dans $\underline{A}$ ou dans $\underline{B}$. Autrement dit, nous allons obtenir une condition nécessaire et suffisante, ne portant que sur le foncteur $R: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ (où $\underline{A}$ est petite et $\underline{B}$ est localement petite) pour que:

(P'). Pour tout foncteur $F: \underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$, l'extension de Kan $\overline{F} : \underline{B} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ de F le long de R en est un prolongement (i. e. la transformation naturelle canonique $u_F: F \longrightarrow \overline{F}.R$ est un monomorphisme).

Cette condition s'énence ainsi:

(C). *Pour tout objet* A *de* $\underline{A}$, *tout zig-zag* Z *de* $\underline{A}$, *fermé en* A , *est image par le foncteur canonique* $\underline{A}/A \longrightarrow \underline{A}$ *d'un zig-zag* X *de* $\underline{A}/A$, *fermé en* 1_A , *dès que le zig-zag* $R(Z)$ *de* $\underline{B}$ *(fermé en* $R(A)$) *est image par le foncteur canonique* $\underline{B}/R(A) \longrightarrow \underline{B}$ *d'un zig-zag* Y *de* $\underline{B}/R(A)$, *fermé en* $1_{R(A)}$.

Evidemment, cette condition, si elle est nécessaire, n'est pas suffisante pour pouvoir affirmer que les extensions de Kan, même "point par point", des foncteurs de $\underline{A}$ vers une catégorie quelconque le long de R en sont des prolongements. Ceci est dû, *essentiellement*, au fait que l'on ignore, en général, comment sont calculées les limites inductives dans ces catégories. Par contre, pour les catégories complètes, co-complètes et à petites limites inductives *séparantes* (voir le §2) les petites limites inductives se calculent "comme dans Ens ". Alors, nous établissons que la condition (C) est équivalente à la suivante:

(P"). Pour toute catégorie $\underline{E}$, complète, co-complète et à limites inductives petites séparantes, pour tout foncteur $F\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{E}$, l'extension de Kan $\overline{F} : \underline{B} \longrightarrow \underline{E}$ de F le long de R en est un prolongement.

On déduit enfin, à titre d'illustration, quelques applications élémentaires de cette étude.

1. Cas des extensions de Kan à valeurs dans Ens.

1.1. Rappelons, pour fixer les notations, comment est construite explicitement l'extension de Kan $\overline{F}\colon \underline{B} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ d'un foncteur $F\colon \underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ le long de $R\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$.

On associe à tout objet B de $\underline{B}$ la catégorie (comma) R/B ayant:

- pour objets les (b,A) où A est objet de $\underline{A}$ et $b\colon R(A) \longrightarrow B$ est flèche de $\underline{B}$,

- pour morphismes les $((b',A'),a,(b,A))\colon (b,A) \longrightarrow (b',A')$ où $a\colon A \longrightarrow A'$ est flèche de $\underline{A}$ et $b'.R(a) = b$.

Alors, on dispose d'un foncteur canonique $R//B\colon R/B \longrightarrow \underline{A}$ qui associe à $((b',A'),a,(b,A))$ la flèche a .
Dans ces conditions, pour tout objet B de $\underline{B}$, on a:

$$(1).\quad \overline{F}(B) = \varinjlim (R/B \longrightarrow \underline{A} \xrightarrow{F} \mathrm{Ens}) = \varinjlim (F.R//B)$$

et, pour tout objet A de $\underline{A}$:

(2). $u_F(A) : F(A) \longrightarrow \overline{F}(R(A))$ est la co-projection $s_{(1_{R(A)},A)}\colon\ F(R//B(1_{R(A)},A)) = F(A) \longrightarrow \lim (F.R//B)$,

(ces deux formules étant encore valables lorsque l'on remplace Ens par une catégorie quelconque $\underline{E}$ co-complète).

Dans le cas ensembliste, on peut être encore plus explicite. A F on associe la catégorie (comma) $1/F$ ayant:

- pour objets les (A,x) où A est objet de $\underline{A}$ et x est élément de $F(A)$,

- pour morphismes les $((A',x'),a,(A,x))\colon (A,x) \longrightarrow (A',x')$ où $a\colon A \longrightarrow A'$ est flèche de $\underline{A}$ et $F(a)(x) = x'$.

On en déduit un foncteur canonique $1//F\colon 1/F \longrightarrow \underline{A}$ qui à $((A',x'),a,(A,x))$ associe a .
Ensuite, à tout objet B de $\underline{B}$, on associe la catégorie (comma) $1/F/B$ ayant:

- pour objets les (b,A,x) où (A,x) est objet de $1/F$ et (b,A) est objet de R/B ,

- pour morphismes les

$$((b',A',x'),a,(b,A,x))\colon (b,A,x) \longrightarrow (b',A',x')$$

où $((b',A'),a,(b,A))$ est flèche de R/B et $((A',x'),a,(A,x))$ est flèche de $1/F$.

Alors, pour tout objet B de $\underline{B}$, on a:

(3). $\overline{F}(B) = \pi_0(1/F/B)$ (ensemble des composantes connexes de $1/F/B$) ,

et, pour tout objet A de $\underline{A}$:

(4). $u_F(A)\colon F(A) \longrightarrow \overline{F}(R(A))$ est l'application qui à tout x associe la composante connexe $[1_{R(A)},A,x]$ de $(1_{R(A)},A,x)$.

1.2. Pour que l'application $u_F(A)$, définie par (4) , soit injective, il faut et il suffit que:

- $[1_{R(A)},A,x] = [1_{R(A)},A,x']$ implique $x = x'$.

Or, la première égalité a lieu si, et seulement si:

- il existe un entier n et un zig-zag $Z: z_n \longrightarrow \underline{A}$ (où z_n est la catégorie $1 \longleftarrow 2 \longrightarrow \ldots \longleftarrow 2n \longrightarrow 2n+1$) fermé en A , i. e. tel que $Z(1) = Z(2n+1) = A$,

- il existe un zig-zag $Y: z_n \longrightarrow \underline{B}/R(A)$, fermé en $1_{R(A)}$, vérifiant

$$(5). \quad (z_n \xrightarrow{Y} \underline{B}/R(A) \longrightarrow \underline{B}) = (z_n \xrightarrow{Z} \underline{A} \xrightarrow{R} \underline{B}),$$

- il existe un zig-zag $V: z_n \longrightarrow 1/Ens$ vérifiant

$$(6). \quad (z_n \xrightarrow[V]{} 1/Ens \longrightarrow Ens) = (z_n \xrightarrow[Z]{} \underline{A} \xrightarrow[F]{} Ens)$$

et tel que $V(1): 1 \longrightarrow F(Z(1)) = F(A)$ sélectionne x et $V(2n+1): 1 \longrightarrow F(Z(2n+1)) = F(A)$ sélectionne x' .

Mais l'ensemble des zig-zag V vérifiant (6) est en bijection avec $\varprojlim F.Z$. En conséquence, une condition nécessaire et suffisante pour que $\overline{F}$ soit un prolongement de F est que:

(C_F). <u>Pour tout objet</u> A <u>de</u> $\underline{A}$, <u>tout entier</u> n , <u>tout zig-zag</u> $Z: z_n \longrightarrow \underline{A}$, <u>fermé en</u> A , <u>et tout zig-zag</u> $Y: z_n \longrightarrow \underline{B}/R(A)$ <u>fermé en</u> $1_{R(A)}$ <u>et vérifiant</u> (5) , <u>on a</u> $p_1 = p_{2n+1}$, <u>lorsque</u>

$$p_1 \, , \, p_{2n+1} : \varprojlim F.Z \longrightarrow F(Z(1)) = F(Z(2n+1)) = F(A)$$

<u>sont les projections canoniques extrêmes</u>.

1.3. Pour que la condition (P') de l'Introduction soit vérifiée, il est nécessaire et suffisant que (C_F) le soit pour tout foncteur $F: \underline{A} \longrightarrow Ens$.
Comme $\varprojlim F.Z \longrightarrow Hom(\varinjlim I.Z^{op}, F)$ (où $I: \underline{A}^{op} \longrightarrow Ens^{\underline{A}}$ est le plongement de Yoneda), il faut et il suffit donc que $s_1 = s_{2n+1}$, lorsque

$$s_1 \, , \, s_{2n+1} : I(Z(1)) = I(Z(2n+1)) = I(A) \longrightarrow \varinjlim I.Z$$

sont les co-projections canoniques extrêmes.
Mais, $\varinjlim I.Z^{op}$ se calcule point par point dans $Ens^{\underline{A}}$. On en déduit donc que la condition (P') est équivalente à:

(C'). <u>Pour toute flèche</u> $a\colon A \longrightarrow A'$ de $\underline{A}$, <u>tout entier</u> n, <u>tout zig-zag</u> $Z\colon z_n \longrightarrow \underline{A}$, <u>fermé en</u> A, <u>tout zig-zag</u> $Y\colon z_n \longrightarrow \underline{B}/R(A)$ <u>fermé en</u> $1_{R(A)}$ <u>et vérifiant</u> (5), <u>il existe un zig-zag</u> $X_a\colon z_n \longrightarrow \underline{A}/A'$ <u>fermé en</u> a <u>et tel que</u>:

$$- \ (z_n \xrightarrow{X_a} \underline{A}/A' \longrightarrow \underline{A}) = (z_n \xrightarrow{Z} \underline{A}) .$$

1.4. Il est clair que la condition (C') entraîne la condition (C) (prendre $X = X_{1_A}$). Inversement, si la condi- (C) est vérifiée, alors (C') l'est car il suffit de poser, pour tout objet m de z_n (i. e. tout entier $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$):

$$- \ X_a(m) = a.X(m) .$$

En conséquence, les conditions (P') et (C) sont bien équivalentes, comme annoncé dans l'Introduction.

2. <u>Cas des extensions de Kan point par point à valeurs dans une catégorie complète, co-complète, à limites inductives petites séparantes</u>.

2.1. Il nous faut, tout d'abord, définir ce que l'on entend par "petites limites inductives séparantes".

<u>Définition</u>. On dit qu'une catégorie complète et co-complète est à <u>limites inductives petites séparantes</u> si, et seulement si, pour toute catégorie petite $\underline{D}$, pour tout foncteur $G\colon \underline{D} \longrightarrow \underline{E}$ et pour tout objet D de $\underline{D}$ les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

(i). La co-projection canonique $s_D : G(D) \longrightarrow \varinjlim G$ est un monomorphisme,

(ii). Pour tout entier n, tout zig-zag $W: z_n \longrightarrow \underline{D}$ fermé en D, les projections canoniques extrêmes

$$r_1 \text{ , } r_{2n+1} : \varprojlim G.W \longrightarrow G(D)$$

sont égales.

On vérifie facilement que dans toute catégorie complète et co-complète $\underline{E}$ la condition (i) implique (ii). Pour que $\underline{E}$ soit à petites limites inductives séparantes, il suffit donc que (ii) implique (i).
La catégorie Ens est à petites limites inductives sépatantes. En effet, supposons (ii) vérifiée. Comme $\varinjlim G = \pi_0(1/G)$ et $s_D(x) = [D,x]$ est la composante connexe de (D,x), si $[D,x] = [D,x']$, il existe un entier n, **un zig-zag** $W: z_n \longrightarrow \underline{D}$ fermé en D et une famille $(x_m)_{1 \leqslant m \leqslant 2n+1}$ telle que:

- x_m est, pour tout $1 \leqslant m \leqslant 2n+1$, élément de $G(W(m))$,
- $G(W(2k \longrightarrow 2k \pm 1))(x_{2k}) = x_{2k \pm 1}$, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,
- $x_1 = x$ et $x_{2n+1} = x'$.

Mais, alors, $(x_m)_{1 \leqslant m \leqslant 2n+1}$ est élément de $\varprojlim G.W$.
En conséquence, $x_1 = x = x' = x_{2n+1}$ (condition (ii)).
Il en résulte que s_D est un mono, donc que (i) est vérifiée.
Evidemment, si $\underline{C}$ est une catégorie (quelconque), $\mathrm{Ens}^{\underline{C}}$ est à petites limites inductives séparantes. Plus généralement, si $\underline{E}$ l'est, alors $\underline{E}^{\underline{C}}$ l'est.

2.2. Montrons, maintenant, que (P") est équivalente à (C).

Evidemment, si (P") est vérifiée, (C) l'est (car (P") est vérifiée en particulier si $\underline{E} = \mathrm{Ens}$ et l'on peut donc appliquer l'étude du §1).

Inversement, supposons que $R\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ vérifie (C) et que $\underline{E}$ est une catégorie complète, co-complète et à petites limites inductives séparantes. Si $F\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{E}$ est un foncteur, si $\overline{F}\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{E}$ est son extension de Kan le long de R , les formules (1) et (2) sont valides. En particulier, pour tout objet A de $\underline{A}$, on a

$$\overline{F}(R(A)) = \varinjlim (F.R//R(A) = G) \quad .$$

Ceci rappelé, si n est un entier et si $W\colon z_n \longrightarrow \underline{D} = R/R(A)$ est un zig-zag fermé en $(1_{R(A)},A)$, il lui correspond les zig-zags:

- $Z\colon z_n \xrightarrow{W} R/R(A) \xrightarrow{R//R(A)} \underline{A}$, fermé en A ,
- $Y\colon z_n \xrightarrow{W} R/R(A) \xrightarrow{R'} \underline{B}/R(A)$ (où l'on a posé $R'((b',A'),a,(b,A)) = (b',R(a),b)$) , fermé en $1_{R(A)}$ et vérifiant (5) .

En conséquence, il existe un zig-zag $X\colon z_n \longrightarrow \underline{A}/A$ vérifiant les propriétés énoncées dans (C) (qui est satisfaite). On en déduit le diagramme commutatif (*) de $\underline{E}$, ci-dessous

$$(*) \qquad \begin{tikzcd}
 & & \varprojlim (F.R//R(A).W = F.Z = G.W) \arrow[dll, "r_1"'] \arrow[dl, "r_2"] \arrow[dr, "r_{2n}"'] \arrow[drr, "r_{2n+1}"] & & \\
F(A) \arrow[drr, "\substack{F(X(1))\\ 1_{F(A)}}"'] & F(Z(2)) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dr, "F(X(2))"] & \dots & F(Z(2n)) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[dl, "F(X(2n))"'] & F(A) \arrow[dll, "\substack{F(X(2n+1))\\ 1_{F(A)}}"] \\
 & & F(A) & &
\end{tikzcd}$$

On en déduit que $r_1 = r_2$ et donc que

$$u_F(A) = s_{(1_{R(A)},A)} : G(1_{R(A)},A) = F(A) \longrightarrow \underrightarrow{\lim}\, G$$

est un mono.

3. Remarques.

3.1. La condition (C) implique que R est fidèle. Supposons, en effet, que a , $a' : A' \longrightarrow A$ sont tels que $R(a) = R(a')$. Alors, on a:

- le zig-zag Z de $\underline{A}$ d'image

$$A \xleftarrow[a]{} A' \xrightarrow[a']{} A \qquad ,$$

- le zig-zag Y de $\underline{B}/R(A)$ d'image

$$\begin{tikzcd} R(A) \arrow[dr, "1_{R(A)}"'] & R(A') \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, "R(a)"'] & R(A) \arrow[dl, "1_{R(A)}"] \\ & R(A) & \end{tikzcd} \qquad ,$$

donc (condition (C)) il existe un zig-zag X de $\underline{A}/A$ d'image

$$\begin{tikzcd} A \arrow[dr, "1_A"'] & A' \arrow[l, "a"'] \arrow[r, "a'"] \arrow[d, "a''"] & A \arrow[dl, "1_A"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

et, par conséquent, on a $a = a'$ ($= a''$).

3.2. On peut montrer directement (sans utiliser (C)) qu'il est nécessaire que R soit fidèle pour que (P') , donc aussi (P") , soit vérifiée.

En effet, notons $S\colon \mathrm{Ens}^{\underline{A}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{B}}$ l'adjoint à gauche de $\mathrm{Ens}^{R} : \mathrm{Ens}^{\underline{B}} \longrightarrow \mathrm{Ens}^{\underline{A}}$. Le diagramme ci-dessous est alors commutatif (où I et J sont les plongements de Yoneda):

$$\begin{tikzcd}
\underline{A}^{op} \arrow[r, "R^{op}"] \arrow[d, "I"'] & \underline{B}^{op} \arrow[d, "J"] \\
\mathrm{Ens}^{\underline{A}} \arrow[r, "S"'] & \mathrm{Ens}^{\underline{B}}
\end{tikzcd}$$

D'autre part, on sait que S est fidèle si, et seulement si, pour tout objet $F\colon \underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ de $\mathrm{Ens}^{\underline{A}}$, $u_F\colon F \longrightarrow \bar{F}.R$ est un monomorphisme. En conséquence, si (P') est vérifiée, S est fidèle et sa "restriction" R^{op} , donc aussi R , l'est également.
Cette nécessité a été signalée par Lawvere en ([1]) , dans le cas où $\underline{A}$ et $\underline{B}$ sont des théories . Elle n'est évidemment pas suffisante, comme il le note.

3.3. Il est clair qu'à tout genre de calcul de limites inductives (par exemple ici: limites inductives séparantes) va correspondre une condition syntaxique portant sur R , nécessaire et suffisante pour qu'une condition, analogue à (P") mais relative à ce genre de calcul, soit vérifiée. Nous ne développerons pas ici ce point de vue <u>intéressant</u> (en ce sens qu'il souligne que si l'on considère $\underline{E}^{\underline{A}}$ comme une sémantique, sa syntaxe est constituée de $\underline{A}$ mais aussi de $\underline{E}$).

3.4. Supposons que $R\colon \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ possède l'adjoint à droite $Q\colon \underline{B} \longrightarrow \underline{A}$. On trouvera en ([2]) et ([3]) une condition nécessaire et suffisante <u>portant sur</u> Q pour que l'adjoint à gauche Ens^Q de Ens^R soit fidèle mais aussi plein (i.e. tel que, pour tout objet F de $Ens^{\underline{A}}$, la transformation naturelle canonique $u_F : F \longrightarrow \bar{F}.R$ soit un mono <u>et</u> un épi scindé, c'est-à-dire un iso).

4. <u>Exemples</u>.

4.1. Soit $R: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ un morphisme de théories algébriques, au sens de Lawvere. La condition (C) est suffisante pour que l'adjoint à gauche (dont on sait qu'il est une restriction de l'adjoint à gauche de Ens^R) au foncteur d'oubli $Alg(R): Alg(\underline{B}) \longrightarrow Alg(\underline{A})$ soit un foncteur fidèle (i. e. pour que les algèbres de $\underline{A}$ se plongent dans les algèbres de $\underline{B}$ libres qu'elles engendrent).
Ceci répond déjà en partie à la question posée en ([1]). Nous y répondrons encore plus précisément dans la partie II de ce travail.

4.2. Les co-projections canoniques des termes d'une somme vers cette somme, dans une catégorie complète, co-complète et à limites inductives petites séparantes, sont des monos (prendre $\underline{A}$ discrète et $\underline{B} = \underline{1}$).

4.3. Les seules catégories $\underline{A}$ pour lesquelles, pour tout objet A de $\underline{A}$, pour tout foncteur $F: \underline{A} \longrightarrow Ens$, la co-projection canonique $s_A : F(A) \longrightarrow \varinjlim F$ est un mono, sont les groupoïdes.

4.4. Si $R: \underline{A} \longrightarrow \underline{B}$ est plein et fidèle, les extensions de Kan à valeurs dans des catégories complètes, co-complètes et à limites inductives petites séparantes, le long de R sont des prolongements.

Bibliographie.

(1) F. W. Lawvere, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, Lect. Notes in Math. 61 , Springer, 1968.

(2) R. Guitart, Relations et carrés exacts, (à paraître dans Ann. Sc. Math. Québec).

(3) L. Van Den Bril, Carrés exacts de Hilton dans des contextes non abéliens, (à paraître dans Ann. Sc. Math. Québec).