DIAGRAMMES

R. GUITART

Théorie des bornes

Diagrammes, tome 2 (1979), exp. nº 2, p. G1-G2

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__2__A2_0>

Diagrammes, Vol. 2, 1979.

THEORIE DES BORNES.

Chapitre 2: Bornes, sous-foncteurs de P , Classes, Treillis Sub S .

R. Guitart.

0. Dans le chapitre 1 (*) (qui a été exposé en Juin 1979 au Séminaire de Catégories Guitart-Lair-Coppey-Foltz à l'Université Paris 7 - exposé n° 25) on a vu une nouvelle définition de $\mathbb{N}$ à l'aide des sous-foncteurs B du foncteur "partie" P tels que :

- pour tout X, $\emptyset$ appartient à BX, c'est-à-dire $B(\emptyset) = P(\emptyset)$.

1. Le Théorème du Chapitre 1 se complète en la :

Proposition. Un sous-foncteur quelconque de P est de l'une des formes suivantes: P, $P^{(b(}$, $P^{(b)}$, P_+, $P^{)0}$, $P^{(b(}\wedge P_+$, $P^{(b)}\wedge P_+$, $P^{(b(}\wedge P^{)0}$, $P^{(b)}\wedge P^{)0}$, *(les lois + et . constituant, comme au chapitre 1, un semi-anneau* (Sub P, +, .)), *les divers symboles introduits ayant la signification suivante:*

(*) Erratum: au chapitre 1, page G 2, dans le théorème 1.6, il convient de supprimer : (resp. $b \longmapsto P^{(b(}$) .

$$P^{(b(}X = \{ A \subset X \; / \; 0 \leqslant \text{Card } A < b \},$$
$$P^{(b)}X = \{ A \subset X \; / \; 0 \leqslant \text{Card } A \leqslant b \},$$
$$P_+ X = \emptyset \text{ si } X = \emptyset \text{ et } PX \text{ sinon },$$
$$P^{)0}X = \{ A \subset X \; / \; 0 < \text{Card } A \}.$$

2. On démontre facilement la

Proposition. Si $\mathcal{C}$ est une classe, alors C défini par

$$CX = \{ A \subset X \; / \; A \text{ est élément de } \mathcal{C} \}$$

est un sous-foncteur de la restriction de P aux injections canoniques, que l'on note $P_{\text{inj. can.}}$. Réciproquement, étant donné le sous-foncteur C de $P_{\text{inj. can.}}$, on retrouve la classe $\mathcal{C}$ par:

"X appartient à $\mathcal{C}$" équivaut à "X appartient à CX".

3. Dans les Chapitres qui suivront, on aura pour but, dans le cas de plusieurs foncteurs précis S: $\mathbb{C} \longrightarrow$ Ens, de décrire "concrètement" les éléments de Sub S (e.g. comme ci-avant, pour S = P, en termes de cardinaux et de classes) et la structure naturelle portée par Sub S (e.g. Semi-anneau, ordre). Dans le cas S = P, on approfondira les liens avec les ordinaux, les problèmes universels.

(à suivre)