C. LAIR

Conditions syntaxiques d'existence de co-adjoints aux foncteurs algébriques

Diagrammes, tome 1 (1979), exp. n^{o} 5, p. L1-L18

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__1__A5_0>

Diagrammes, Vol. 1 , 1979.

CONDITIONS SYNTAXIQUES D'EXISTENCE DE CO-ADJOINTS AUX FONCTEURS ALGEBRIQUES .

C. Lair.

Introduction.

Soit $\underline{T}$ une théorie de Lawvere et $\underline{A} = \mathrm{Alg}(\underline{T})$ sa catégorie d'algèbres. On sait que le foncteur d'oubli canonique $\underline{A} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ possède un co-adjoint à la condition nécessaire et suffisante que:

(i). toutes les lois de $\underline{T}$ factorisent par projections au-travers de lois 1-aires (voir (S.P.A.T.)).

Plus généralement, nous établissons ici des conditions suffisantes et/ou nécessaires analogues (i.e. syntaxiques) pour que, si $U: \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ est une réalisation (i.e. un foncteur continu) entre deux prototypes (i.e. deux catégories munies de limites projectives), le foncteur algébrique qu'elle induit $\mathrm{Alg}(\underline{P}') \longrightarrow \mathrm{Alg}(\underline{P})$ possède un co-adjoint. Ces différentes conditions sont énoncées et prouvées dans le §2.

Pratiquement, il arrive souvent que les prototypes considérés possèdent de "petits systèmes générateurs". Dans ce cas, nous fournissons une condition suffisante particulière pour que le foncteur algébrique ainsi engendré (on dit aussi "esquissé") possède un co-adjoint. C'est l'objet du §3.

Le lecteur constatera facilement que les conditions énoncées sont effectivement facilement vérifiables dans la pratique. Nous lui laissons d'ailleurs le soin de dresser une liste d'exemples, immédiats, correspondants chacun à chacune des conditions obtenues.

Nous avons groupé dans le §1 la terminologie et les résultats préliminaires qui nous sont utiles dans toute la suite. On y trouvera, notamment, une condition nécessaire et suffisante sémantique pour qu'un foncteur algébrique possède un co-adjoint, voir aussi (T.D.C.P.).

§1. Eléments de la théorie des prototypes.

On appelle prototype toute catégorie localement petite où sont distinguées des limites projectives. S'il n'y a aucun risque de confusion quant aux limites que l'on distingue, on note simplement $/\underline{P}/$ un prototype de catégorie sous-jacente $\underline{P}$.

Si $/\underline{P}/$ et $/\underline{P}'/$ sont deux prototypes, on dit que $/U/ : /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}'/$ est une réalisation si, et seulement si, $U : \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$ est un foncteur qui commute aux limites projectives distinguées.

Si $\underline{H}$ est une catégorie et si $/\underline{P}/$ est un prototype, on dit que $F : /\underline{P}/ \longrightarrow \underline{H}$ est une $/\underline{P}/$-algèbre dans $\underline{H}$ si, et seulement si, $F : \underline{P} \longrightarrow \underline{H}$ est un foncteur qui transforme les limites projectives distinguées de $/\underline{P}/$ en des limites projectives de $\underline{H}$; pour plus de commodité nous dirons, également, d'une $/\underline{P}/$-algèbre dans $\underline{H}^{op}$ que c'est une $/\underline{P}/$-co-algèbre dans $\underline{H}$. On note $\underline{H}^{/\underline{P}/}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{H}^{\underline{P}}$ dont les objets sont les $/\underline{P}/$-algèbres dans $\underline{H}$; à l'équivalence près, une telle catégorie est dite algèbrique.

Si $\underline{H}$ est une catégorie et si $/U/ : /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}'/$ est une réalisation, elle induit un foncteur, dit algébrique, noté $\underline{H}^{/U/} : \underline{H}^{/\underline{P}'/} \longrightarrow \underline{H}^{/\underline{P}/}$.

Très particulièrement (et pour des raisons extérieures au présent travail), nous poserons:

- $\mathrm{Ens}^{/\underline{P}/} = /\underline{P}/^{*}$, pour tout prototype $/\underline{P}/$,
- $\mathrm{Ens}^{/U/} = /U/^{*}$, pour toute réalisation $/U/$,

et, par souci d'homogénéité des notations:

- $\mathrm{Ens}^{\underline{P}} = \underline{P}^{*}$, pour toute catégorie localement petite $\underline{P}$.

Si $/\underline{P}/$ est un prototype, comme $\underline{P}$ est localement petite, on dispose du plongement de Yoneda $\underline{P} \longrightarrow \underline{P}^{*\,op}$.
Comme tout foncteur représentable commute aux limites projectives, ce plongement est à valeurs dans $/\underline{P}/^{*\,op}$ et sa restriction définit alors une $/\underline{P}/$-co-algèbre dans $/\underline{P}/^{*}$, dite <u>canonique</u>, et notée $Y: /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}/^{*\,op}$.

Rappelons, maintenant, trois résultats élémentaires qui nous sont indispensables dans la suite.

Soit $/U/: /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}'/$ une réalisation, $Y: /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}/^{*\,op}$ et $Y': /\underline{P}'/ \longrightarrow /\underline{P}'/^{*\,op}$ les co-algèbres canoniques. Nous posons $Z' = /U/^{*\,op}.Y'$.

<u>Lemme</u> 1. <u>Pour tout objet</u> P <u>de</u> $\underline{P}$, <u>l'objet</u> $Y'UP$ <u>de</u> $/\underline{P}'/^{*}$ <u>est structure libre sur l'objet</u> YP <u>de</u> $/\underline{P}/^{*}$, <u>relativement au foncteur</u> $/U/^{*}$.

<u>Preuve</u>. On a, naturellement en tout objet F' de $/\underline{P}'/^{*}$:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Hom}(Y'UP,F') &\simeq F'UP && \text{(Yoneda)}\\
&\simeq /U/^{*}F'P && \text{(définition)}\\
&\simeq \mathrm{Hom}(YP,/U/^{*}F') && \text{(Yoneda)} .
\end{aligned}
$$
::

Du lemme 1 résulte la transformation naturelle $\varepsilon : Y \Longrightarrow Z'.U$ définie comme suit:

- pour tout objet P de $\underline{P}$, on désigne par $\varepsilon_P: YP \longrightarrow Z'UP$ l'image de $Id_{Y'UP}$ par la bijection, associée à l'adjonction du lemme 1, $\mathrm{Hom}(Y'UP,Y'UP) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(YP,Z'UP)$.

<u>Lemme</u> 2. <u>Le foncteur</u> $Z' = /U/^{*\,op}.Y : \underline{P}' \longrightarrow /\underline{P}/^{*\,op}$ <u>est extension de Kan à droite et point par point du foncteur</u> $Y: \underline{P} \longrightarrow /\underline{P}/^{*\,op}$ <u>le long du foncteur</u> $U: \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$.

<u>Preuve</u>. Pour prouver ce lemme, il suffit de montrer que, pour tout objet F de $/\underline{P}/^{*}$, le foncteur $\mathrm{Hom}(Z' - , F) : \underline{P}' \longrightarrow \mathrm{Ens}$ est extension de Kan à gauche du foncteur $\mathrm{Hom}(Y - ,F): \underline{P} \longrightarrow \mathrm{Ens}$ le long de $U: \underline{P} \longrightarrow \underline{P}'$.

Pour ce faire, supposons que $F' : \underline{P}' \longrightarrow$ Ens est un foncteur tel que $f : F'.U \Longrightarrow \mathrm{Hom}(Y - ,F)$ est une transformation naturelle. Nous désignons, alors, par $f' : F' \Longrightarrow \mathrm{Hom}(Z' - ,F)$ la transformation naturelle composée suivante:

$$\begin{tikzcd}
F' \arrow[r, Rightarrow, "\sim", "\text{Yoneda}"'] & \mathrm{Hom}(Y' - ,F') \arrow[r, Rightarrow, "\text{restriction de } /U/^{*}"'] & \mathrm{Hom}(/U/^{*}.Y' - ,/U/^{*}F') \arrow[d, equal, "\text{(définition)}"] \\
 & & \mathrm{Hom}(Z' - ,F'.U) \arrow[d, Rightarrow, "\mathrm{Hom}(Z'-,f)"] \\
\mathrm{Hom}(Z' - ,F) & & \mathrm{Hom}(Z' - ,\mathrm{Hom}(Y -, F)) \arrow[ll, Rightarrow, "\sim"', "\text{Yoneda}"]
\end{tikzcd}$$

Evidemment, $f' : F' \Longrightarrow \mathrm{Hom}(Z' - ,F)$ est l'unique transformation naturelle telle que $f'_{UP} \cdot \varepsilon_P = f_P$, pour tout objet P de $\underline{P}$. Ceci prouve donc le lemme. ::

Lemme 3. (Condition sémantique d'existence d'un co-adjoint). Le foncteur algébrique $/U/^{*} : /\underline{P}'/^{*} \longrightarrow /\underline{P}/^{*}$ possède un co-adjoint si, et seulement si, $Z' : /\underline{P}'/ \longrightarrow /\underline{P}/^{*\,op}$ est une $/\underline{P}'/$-co-algèbre dans $/\underline{P}/^{*}$.

Preuve. Si $/U/^{*}$ possède un co-adjoint, il commute aux limites inductives. En conséquence, comme $Y' : /\underline{P}'/ \longrightarrow /\underline{P}'/^{*\,op}$ est une co-algèbre, $/U/^{*\,op}.Y' = Z'$ est une co-algèbre. La condition est donc bien nécessaire.

Supposons, pour montrer qu'elle est suffisante, que Z' est une co-algèbre. Pour tout objet F de $/\underline{P}/^{*}$, il est clair que $\mathrm{Hom}(Z' - ,F) : /\underline{P}'/ \longrightarrow$ Ens est une $/\underline{P}'/$-algèbre, i.e. un objet de $/\underline{P}'/^{*}$. En vertu du lemme 2, nous avons donc naturellement en tout objet F' de $/\underline{P}'/^{*}$:

$$\mathrm{Hom}(F',\mathrm{Hom}(Z' - ,F)) \simeq \mathrm{Hom}(/U/^{*} F',F) ,$$

puisque $/\underline{P}/^{*}$ et $/\underline{P}'/^{*}$ sont des sous-catégories pleines de $\underline{P}^{*}$ et $\underline{P}'^{*}$ et $\mathrm{Hom}(Y - ,F) \simeq F$ (Y étant un plongement de Yoneda). Ceci prouve que $/U/^{*}$ possède bien le co-adjoint q défini par $qF = \mathrm{Hom}(Z' - ,F)$. ::

Du lemme 3 résultent immédiatement les deux corollaires qui suivent. Pour énoncer simplement le premier, nous dirons qu'une catégorie est <u>utile au prototype</u> $/\underline{P}'/$ si, et seulement si, elle indexe une limite projective distinguée de $/\underline{P}'/$.

<u>Corollaire</u> 1. <u>Le foncteur algébrique</u> $/U/^*$ <u>possède un co-adjoint si, et seulement si, il commute aux limites inductives dont les catégories d'indices sont duales des catégories utiles au prototype</u> $/\underline{P}'/$.

<u>Corollaire</u> 2. <u>Le foncteur algébrique</u> $/U/^*$ <u>possède un co-adjoint si, et seulement si, il commute aux limites inductives</u>.

Dans la suite, nous identifions une théorie de Lawvere (resp. Linton) à un prototype $/\underline{T}/$ tel que:

- $\underline{T}$ est la catégorie sous-jacente à la théorie,

- tous les produits finis (resp. petits) de $\underline{T}$ sont distingués.

Ainsi, la catégorie $/\underline{T}/^*$ est isomorphe à la catégorie des algèbres de la théorie. Par contre, si un homomorphisme entre théories (i.e. un foncteur préservant les produits - finis ou petits - <u>et les objets</u>) s'identifie à une réalisation entre les prototypes associés, la réciproque est fausse: ceci permet de considérer plus de foncteurs algébriques $/\underline{T}'/^* \longrightarrow /\underline{T}/^*$ (considérer, par exemple, le foncteur $Ab \longrightarrow Ab$ qui, à tout groupe abélien G associe $G \times G$). Précisément, si $/\underline{T}/$ est une théorie, $\underline{T}$ possède un objet T_1 tel que tout objet T de $\underline{T}$ est un produit de n copies de T_1 , où n est un entier (resp. un cardinal). Alors, nous posons $T = T_n$. On dit que $/U/: /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est une <u>réalisation de degré</u> n si, et seulement si:

- $/\underline{T}/$ et $/\underline{T}'/$ sont deux théories,

- $/U/$ est une réalisation et $UT_1 = T'_n$.

Un homomorphisme entre théories s'identifie donc à une réalisation de degré 1.

Bien sûr, des considérations analogues valent aussi pour les I-types de Bénabou (voir (S.A.D.C.)).

Moyennant ces précisions, du lemme 3 on déduit aussi les corollaires particuliers qui suivent.

Corollaire 3. Si $/U/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est une réalisation entre théories de Lawvere, le foncteur $/U/^*$ admet un co-adjoint si, et seulement si, il commute aux sommes finies.

Corollaire 4. Si $/U/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est une réalisation d'un I-type de Bénabou vers un I'-type de Bénabou, le foncteur $/U/^*$ possède un co-adjoint si, et seulement si, il commute aux sommes finies.

Corollaire 5. Si $/U/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est une réalisation entre théories de Linton, le foncteur $/U/^*$ possède un co-adjoint si, et seulement si, il commute aux petites sommes.

Signalons que seuls les lemmes 1, 2 et, surtout, 3 nous sont utiles dans la suite. Nous en avons énoncé les corollaires 1 à 5 (évidents, et d'ailleurs peu originaux) par simple souci esthétique: le problème de la caractérisation sémantique des foncteurs algébriques possédant un co-adjoint étant ainsi entièrement résolu.

§2. Conditions syntaxiques d'existence d'un co-adjoint à un foncteur algébrique

Donnons, tout d'abord, une condition nécessaire et suffisante syntaxique d'existence de co-adjoints applicable à des foncteurs algébriques particuliers.

Nous supposons donc que $/U/ : \underline{P} \longrightarrow /\underline{P}'/$ est une réalisation (étant entendu que la catégorie localement petite $\underline{P}$ est identifiée au prototype particulier obtenu en n'y distinguant aucune limite projective ... même si $\underline{P}$ en possède). Nous reprenons les notations des lemmes 1, 2 et 3.

Proposition 1. Pour que $/U/^*$ possède un co-adjoint, il faut et il suffit que:

(i). pour tout objet P de $\underline{P}$ et toute limite projective $P' = \varprojlim P'_{X'}$ distinguée dans $/\underline{P}'/$, on ait

$$\mathrm{Hom}(P', UP) = \varinjlim \mathrm{Hom}(P'_{X'}, UP) .$$

Preuve. En vertu du lemme 3, $/U/^*$ possède un co-adjoint si, et seulement si, $/U/^{*\,op}\,.\,Y'$ est une $/\underline{P}'/$-co-algèbre dans $\underline{P}^*$. Il en est ainsi si, et seulement si, pour toute limite projective $P' = \varprojlim P'_{X'}$ distinguée dans $/\underline{P}'/$, on a:

- $/U/^* Y'P' = \varinjlim /U/^* Y'P'_{X'}$, dans $\underline{P}^*$.

Les limites inductives de $\underline{P}^*$ se calculant point par point, ceci équivaut à:

- $(/U/^* Y'P')(P) = \varinjlim (/U/^* Y'P'_{X'})(P)$, pour tout objet P de $\underline{P}$,

ou encore, d'après le lemme de Yoneda, à:

- $\mathrm{Hom}(YP,/U/^* Y'P') = \varinjlim \mathrm{Hom}(YP,/U/^* Y'P'_{X'})$, pour tout objet P de $\underline{P}$.

D'après le lemme 1, ceci équivaut à:

- $\mathrm{Hom}(Y'UP,Y'P') = \varinjlim \mathrm{Hom}(YUP,Y'P'_{X'})$, pour tout objet P de $\underline{P}$.

Comme Y' est un plongement plein et fidèle, ceci est vérifié si, et seulement si:

- $\mathrm{Hom}(P',UP) = \varinjlim \mathrm{Hom}(P'_{X'},UP)$ dans Ens, pour tout objet P de $\underline{P}$.

Ce qui établit bien la proposition. ::

On peut évidemment donner de la proposition 1 les deux versions équivalentes qui suivent.

Proposition 1'. Pour que $/U/^* : /\underline{P}'/^* \longrightarrow /\underline{P}/^*$ possède un co-adjoint, il faut et il suffit que:

(i'). pour tout objet P de $\underline{P}$, le foncteur $\mathrm{Hom}(-,UP)$ soit une $/\underline{P}'/$-co-algèbre dans Ens.

Proposition 1". Pour que $/U/^* : /\underline{P}'/^* \longrightarrow /\underline{P}/^*$ possède un co-adjoint, il faut et il suffit que:

(i"). pour toute limite projective $P' = \varprojlim P'_{X'}$, distinguée dans $/\underline{P}'/$, alors $P'!!U = \varinjlim P'_{X'}!!U$ dans $\mathrm{CaT}_{/\underline{P}'}$,

(<u>où</u> CaT <u>est la catégorie des catégories localement petites et</u> <u>où</u>, <u>pour tout objet</u> P'_1 <u>de</u> $\underline{P}'$, <u>on note</u> $P'_1!U$ <u>la catégorie</u> <u>comma associées à</u> $\{P'_1\} \hookrightarrow \underline{P}' \xleftarrow[U]{} \underline{P}$ <u>et</u>

$P'_1!!U : P'_1!P \longrightarrow \underline{P}'$ <u>est la projection canonique</u>).

Enfin, de la proposition 1, on déduit le corollaire qui suit, dû à Lawvere (voir (S.P.A.T.)).

<u>Corollaire</u> 6. <u>Soit</u> $/\underline{T}/$ <u>une théorie de Lawvere</u> (resp. <u>Linton</u>). <u>Pour que le foncteur d'oubli</u> $Alg(/\underline{T}/) = /\underline{T}/^* \longrightarrow Ens$ <u>possède un co-adjoint</u>, <u>il faut et il suffit que toute loi</u> n-<u>aire de</u> $/\underline{T}/$ (<u>où</u> n <u>est un entier</u> (resp. <u>un cardinal</u>)) <u>factorise d'une et d'une seule façon au travers d'une projection</u>.

<u>Preuve</u>. Il suffit d'appliquer la proposition 1 à $/U/ : \underline{1} \longrightarrow /\underline{T}/$, où $U: \underline{1} \longrightarrow \underline{T}$ est le foncteur distinguant l'objet T_1 de $\underline{T}$ (voir le §1). ::

Le corollaire 6 signifie, évidemment, que pour que le foncteur d'oubli de la catégorie des algèbres d'une théorie vers Ens possède un co-adjoint, il faut et il suffit que cette catégorie soit la catégorie des ensembles munis d'une opération d'un monoïde fixe (à savoir $Hom_{\underline{T}}(T_1,T_1)$). Plus généralement, la proposition 1, appliquée aux foncteurs $\underline{1} \longrightarrow /\underline{T}/$ distinguant les objets d'un I-type de Bénabou, permet d'affirmer que, pour que le foncteur d'oubli canonique d'une catégorie d'algèbres d'un I-type vers Ens^I possède un co-adjoint, il faut et il suffit que cette catégorie d'algèbres soit la catégorie des familles (indexées par I) d'ensembles munies d'une opération d'une catégorie fixe (dont la classe d'objets est en bijection avec I).

Revenant au cas le plus général, nous supposons, maintenant, que $/U/ : /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}'/$ est une réalisation quelconque. Nous utilisons, encore, les notations des lemmes 1,2 et 3. De plus, si $\underline{C}$ est une catégorie, nous notons $\underline{C}^\wedge$ la catégorie obtenue en lui adjoignant un élément initial 0 . Si $B: \underline{C} \longrightarrow \underline{D}$ est un foncteur, $B^\wedge: C^\wedge \longrightarrow D^\wedge$ est son prolongement tel que $B^\wedge(0) = 0$. Evidemment, toute limite projective $P = \varprojlim P_X$, distinguée dans $/\underline{P}/$, s'identifie à un foncteur $L : \underline{X}^\wedge \longrightarrow \underline{P}$ tel que, notamment, $L(0) = P$ et $L(X) = P_X$, pour tout objet X de la catégorie $\underline{X}$ indexant cette limite; bien sûr, une remarque analogue vaut pour les limites projectives distinguées de $/\underline{P}'/$.

Au prototype $/\underline{P}/$ nous associons le prototype $//\underline{P}//$ où sont non seulement distinguées les limites projectives distinguées de $/\underline{P}/$ mais aussi les foncteurs constants $\underline{1}^\wedge \longrightarrow \underline{P}$ (qui présentent tout objet comme limite projective "canonique"). Bien entendu, on vérifie que $//\underline{P}//^*$ et $/\underline{P}/^*$ sont équivalentes.

Soit $L' : \underline{X}'^\wedge \longrightarrow \underline{P}'$ une limite projective distinguée de $/\underline{P}'/$. Nous notons $L'?P$ la catégorie définie comme suit:

- ses objets sont les (Q_1, L_1, n_1) tels que:
    + $Q_1 : \underline{X}_1 \longrightarrow \underline{X}'$ est un foncteur ,
    + $L_1 : \underline{X}_1^\wedge \longrightarrow \underline{P}$ est une limite projective distinguée dans $//\underline{P}//$,
    + $n_1 : L'.Q_1^\wedge \Longrightarrow U.L_1$ est une transformation naturelle,
- ses morphismes sont les $(R, n', n'') : (Q_1, L_1, n_1) \longrightarrow (Q_2, L_2, n_2)$ tels que
    + $R : X_2 \longrightarrow X_1$ est un foncteur,
    + $n' : L_1.R^\wedge \Longrightarrow L_2$ est une transformation naturelle,
    + $n'' : Q_1^\wedge.R^\wedge \Longrightarrow Q_2^\wedge$ est une transformation naturelle,
    + on a $(Un')\ n_1 = n_2\ (L'n'')$ (composition des transformations naturelles).

Alors, nous notons $L'??U : L'?U \longrightarrow L'(0)!U$ (où $L'(0)!U$ est la catégorie comma associée à $\{L'(0)\} \hookrightarrow \underline{P}' \xleftarrow[U]{} \underline{P}$) le foncteur qui à (R, n', n'') associe

$$L'n''(0) = L'Q_1^\wedge(0) = L'\ Q_2^\wedge(0) = L'0 \begin{matrix} \xrightarrow{n_2(0)} UL_2(0) \\ \xrightarrow[n_1(0)]{} UL_1(0) \end{matrix} \qquad \begin{matrix} L_2(0) \\ \uparrow{\scriptstyle n'(0)} \\ L_1(0) \end{matrix} .$$

Ces notations étant précisées, nous pouvons énoncer:

<u>Proposition</u> 2. <u>Pour que</u> $/U/^{*} : /\underline{P}'/^{*} \longrightarrow /\underline{P}/^{*}$ <u>possède un co-adjoint, il suffit que le foncteur</u> $L'??U : L'?U \longrightarrow L'(0)!U$ <u>soit initial pour toute limite projective</u> $L' : \underline{X}'^{\wedge} \longrightarrow \underline{P}'$ <u>distinguée dans</u> $/\underline{P}'/$.

<u>Preuve</u>. Pour montrer que $/U/^{*}$ possède un co-adjoint, il suffit de prouver, en vertu du lemme 3, que $Z'.L'$ est une limite projective dans $/\underline{P}/^{*\,op}$ pour toute limite projective L' , distinguée dans $/\underline{P}'/$. Pour ce faire, supposons que $L'' : \underline{X}'^{\wedge} \longrightarrow /\underline{P}/^{*\,op}$ est un autre foncteur (i.e. un autre cône projectif) tel que $L''|_{\underline{X}'} = Z'.L'|_{\underline{X}'}$ (i.e. L'' est de même base que $Z'.L'$).

Si P est un objet de $\underline{P}$ et $z : YP \longrightarrow Z'L'(0)$, il lui correspond, vu le lemme 1, un unique $z' : Y'UP \longrightarrow Y'L'(0)$ tel que $/U/^{*}z' \cdot \varepsilon_P = z$ (où ε_P est l'image de $Id_{Y'UP}$ par l'isomorphisme d'adjonction du lemme 1:

$$Hom(Y'UP,Y'UP) \simeq Hom(YP,/U/^{*}\,Y'UP) = Hom(YP,Z'UP)).$$

Comme Y' est un plongement plein et fidèle, il existe un unique $p' : L'(0) \longrightarrow UP$ tel que $Y(p') = z'$. Une première conséquence de l'initialité de $L'??U$ est qu'il existe alors un$((Q_1,L_1,n_1),p_1)$ tel que:

- (Q_1,L_1,n_1) est un objet de $L'?U$,
- $p_1 : L_1(0) \longrightarrow P$,
- $Up_1 \cdot n_1(0) = p'$.

Comme Y est aussi bien une $/\underline{P}/$-co-algèbre qu'une $//\underline{P}//$-co-algèbre dans $/\underline{P}/^{*}$, il existe donc une unique transformation naturelle $m_1 : Y.L_1 \Longrightarrow L''.Q_1$ telle que:

- $m_1(X_1) = Z'n_1(X_1) \cdot \varepsilon_{L_1(X_1)}$, pour tout objet X_1 de $\underline{X}_1$

Dans ces conditions, nous posons:

$$m_1(0).Yp_1 = \nu_P^1(z) : YP \longrightarrow L''(0) .$$

Si $((Q_2,L_2,n_2),p_2)$ vérifie les conditions précédentes (où 1 est remplacé par 2), on construit, de la même manière, un

$$\nu^2_P(z) : YP \longrightarrow L''(0) .$$

Le lecteur vérifiera sans peine qu'une seconde conséquence de l'initialité de $L'(0)$??U est que $\nu^1_P(z) = \nu^2_P(z)$ (il suffit, en effet, d'utiliser l'existence d'un "zig-zag" reliant convenablement $((Q_1,L_1,n_1),p_1)$ à $((Q_2,L_2,n_2),p_2)$). En d'autres termes, pour tout objet P de $\underline{P}$, nous venons de construire une application

$$\nu_P : \mathrm{Hom}(YP,Z'L'(0)) \simeq Z'L'(0)(P) \longrightarrow L''(0)(P) \simeq \mathrm{Hom}(YP,L''(0)).$$

On vérifie facilement que cette construction est naturelle en l'objet P de $\underline{P}$. On obtient ainsi un morphisme

$$\nu : Z'L'(0) \longrightarrow L''(0)$$

dans $/\underline{P}/^*$, dont il est aisé de vérifier qu'il est l'unique tel que, pour toute flèche $0 \longrightarrow X'$ de $\underline{X}'^{\wedge}$, on a:

$$\nu \, . \, Z'(0 \longrightarrow X') = L''(0 \longrightarrow X').$$

Ceci prouve bien que $Z'.L'$ est une limite projective dans $/\underline{P}/^{*\,op}$, donc que Z' est une $/\underline{P}'/$-co-algèbre dans $/\underline{P}/^*$, ou encore que $/U/^*$ possède un co-adjoint. ::

Bien entendu, la proposition 2 s'applique à une réalisation, de degré quelconque (voir le §1) entre théories. Néanmoins, on peut en donner une traduction plus simple en introduisant la terminologie qui suit.

Soit $/\underline{T}/$ une théorie de Lawvere (resp. Linton). On dit que $t: T_n \longrightarrow T_N$ est une <u>loi</u> (n,N)-<u>aire</u>. Une loi (n,1)-aire est donc, plus usuellement, une loi n-aire. On dit que la loi n-aire $t: T_n \longrightarrow T_1$ <u>ne diffère élémentairement de la loi</u> n-<u>aire</u> $\bar{t}: T_n \longrightarrow T_1$ <u>que par des lois</u> 1-<u>aires</u> si, et seulement si, $(p^n_i : T_n \longrightarrow T_1)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ étant un produit distingué de $/\underline{T}/$:

- il existe une famille $(u_i: T_1 \longrightarrow T_1)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de lois 1-aires telle que $t.\,[u_i]_{1 \leqslant i \leqslant n} = \bar{t}$,

(où $[u_i]_{1 \leqslant i \leqslant n} : T_n \longrightarrow T_n$ est l'unique flèche de $\underline{T}$ telle que $p^n_i \, . \, [u_i]_{1 \leqslant i \leqslant n} = u_i \, . \, p^n_i$, pour tout

$1 \leqslant i \leqslant n$).

On dit que $t: T_n \longrightarrow T_1$ <u>ne diffère de</u> $\bar{t}: T_n \longrightarrow T_1$ <u>que par des lois</u> 1-<u>aires</u> si, et seulement si:

- il existe une suite $(t = t_1, \bar{t}_1, t_2, \bar{t}_2, \ldots, t_m, \bar{t}_m = \bar{t})$ telle que t_j ne diffère élémentairement de $\bar{t}_j$ que par des lois 1-aires et t_i ne diffère élémentairement de $\bar{t}_{i-1}$ que par des lois 1-aires, pour tout $1 \leqslant j \leqslant m$ et $2 \leqslant i \leqslant m$.

On dit que $t: T_n \longrightarrow T_N$ est <u>composé de</u> $\bar{t}: T_{n\times N} \longrightarrow T_N$ <u>avec</u> $n \times N$ <u>lois</u> 1-<u>aires</u> si, et seulement si, étant donnés les produits $(p_i^n: T_n \longrightarrow T_1)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(p_{i,j}^{n\times N}: T_{n\times N} \longrightarrow T_1)_{1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant N}$, distingués dans $/\underline{T}/$:

- il existe une famille $(u_{i,j}: T_1 \longrightarrow T_1)_{1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant N}$ telle que $p_{i,j}^{n\times N} \cdot [u_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant N}} = u_{i,j} \cdot p_i^n$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$ et tout $1 \leqslant j \leqslant N$ et $\bar{t} \cdot [u_{i,j}]_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant N}} = t$.

Enfin, nous dirons que $t: T_n \longrightarrow T_N$ est <u>close</u> si, et seulement si, les conditions:

- $m \leqslant n$,
- $a: m \longrightarrow n$ est une injection,
- $(p_i^n: T_n \longrightarrow T_1)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(p_i^m: T_m \longrightarrow T_1)_{1 \leqslant i \leqslant m}$ sont des produits distingués de $/\underline{T}/$,
- $h: T_n \longrightarrow T_m$ est l'unique morphisme de $\underline{T}$ tel que $p_i^m \cdot h = p_{a(i)}^n$, pour tout $1 \leqslant i \leqslant m$,
- $\bar{t}: T_m \longrightarrow T_N$ vérifie $\bar{t}.h = t$,

impliquent:

- $m = n$ et a est une bijection (et h est alors un iso),

(intuitivement, une loi close est une loi qui dépend effectivement de toutes ses variables).

Alors, la proposition 2 se traduit facilement en le:

Corollaire 7. Si $/U/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est une réalisation de degré N entre théories de Lawvere (resp. Linton), le foncteur algébrique $/U/^* : /\underline{T}'/^* \longrightarrow /\underline{T}/^*$ possède un co-adjoint dès que:

(j). toute loi (n,N)-aire close de $\underline{T}'$ est composée d'une loi $(n \times N, N)$-aire, image par U d'une loi n-aire close de $\underline{T}$, par $n \times N$ lois 1-aires de $\underline{T}'$,

(jj). deux telles décompositions d'une même loi close (n,N)-aire de $\underline{T}'$ ne diffèrent qu'à des lois 1-aires de $\underline{T}$ près.

En particulier, si le degré de la réalisation est 1 , nous pouvons énoncer:

Corollaire 8. Si $/U/ : /\underline{T}/ \longrightarrow /\underline{T}'/$ est un homomorphisme entre théories de Lawvere (resp. Linton), le foncteur algébrique $/U/^* : /\underline{T}'/^* \longrightarrow /\underline{T}/^*$ possède un co-adjoint dès que:

(j'). toute loi n-aire close de $\underline{T}'$ est composée d'une loi n-aire, image par U d'une loi n-aire close de $\underline{T}$, par n lois 1-aires de $\underline{T}'$,

(j'j'). deux telles décompositions d'une même loi n-aire close de $\underline{T}'$ ne diffèrent que par des lois 1-aires de $\underline{T}$.

Par exemple, si $/\underline{T}/$ est la théorie librement engendrée par $\underline{1}$ (i.e. si $\underline{T}$ est la duale de la catégorie des entiers), on voit que la seule loi close de $\underline{T}$ est la loi 1-aire Id_1. Par conséquent, le foncteur $/U/^*$ possède un co-adjoint dès que les seules lois closes de $\underline{T}'$ sont 1-aires ... ce qui est une autre version de la suffisance de la condition du corollaire 6 .

§3. Cas d'un foncteur algébrique esquissé.

Il se peut qu'un foncteur algébrique soit induit par une réalisation $/U/ : /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}'/$ envoyant un système générateur petit $/\underline{S}/$ de $/\underline{P}/$ sur un système générateur petit $/\underline{S}'/$ de $/\underline{P}'/$, dans un sens qui sera précisé ci-dessous. Dans ce cas, on dit que le foncteur algébrique considéré est <u>esquissé</u> par la restriction $/V/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ de $/U/$. Vues les tailles respectives de U et V , il est souhaitable de disposer alors d'une condition suffisante portant sur V qui permette, sans recours à la proposition 2, d'affirmer que le foncteur esquissé par $/V/$ possède un co-adjoint. C'est dans ce but que nous établissons les résultats ci-dessous, évidemment analogues aux précédents,mais d'application encore plus aisée.

On appelle <u>esquisse</u> (en particularisant légèrement, pour les besoins de la cause, l'optique de (E.T.S.A.) par exemple) toute catégorie petite où est <u>distingué</u> un ensemble petit de petits cônes projectifs. S'il n'y a aucun risque de confusion, on note simplement $/\underline{S}/$ une esquisse de catégorie sous-jacente $\underline{S}$.

Si $/\underline{S}/$ et $/\underline{S}'/$ sont deux esquisses, on dit que $/V/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ est une <u>réalisation</u> si, et seulement si, $V : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ est un foncteur commutant aux cônes projectifs distingués. De même, si $/\underline{P}/$ est un prototype, on dit que $/J/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{P}/$ est une <u>réalisation</u> si, et seulement si, $J : \underline{S} \longrightarrow \underline{P}$ est un foncteur transformant les cônes projectifs distingués en limites projectives distinguées.

Si $\underline{H}$ est une catégorie et $/\underline{S}/$ est une esquisse, on dit que $F : /\underline{S}/ \longrightarrow \underline{H}$ est une $/\underline{S}/$-<u>algèbre dans</u> $\underline{H}$ si, et seulement si, $F : \underline{S} \longrightarrow \underline{H}$ est un foncteur transformant les cônes projectifs distingués en des limites projectives. On dira aussi qu'une $/\underline{S}/$-algèbre dans $\underline{H}^{op}$ est une $/\underline{S}/$-<u>co-algèbre dans</u> $\underline{H}$. On note $\underline{H}^{/\underline{S}/}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{H}^{\underline{S}}$ dont les objets sont les $/\underline{S}/$-algèbres dans $\underline{H}$. A l'équivalence près, une telle catégorie est dite <u>algébrique esquissée</u>.

Si $\underline{H}$ est une catégorie et si $/V/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ (resp. $/J/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{P}/$) est une réalisation, elle induit un foncteur

$$\underline{H}^{/V/} : \underline{H}^{/\underline{S}'/} \longrightarrow \underline{H}^{/\underline{S}/} \quad (\text{resp. } \underline{H}^{/J/} : \underline{H}^{/\underline{P}/} \longrightarrow \underline{H}^{/\underline{S}/})$$

dit <u>algébrique esquissé</u> .

Très particulièrement, comme au §1, nous posons:

- $\mathrm{Ens}^{/\underline{S}/} = /\underline{S}/^{*}$, $\mathrm{Ens}^{/V/} = /V/^{*}$ et $\mathrm{Ens}^{/J/} = /J/^{*}$.

Nous admettrons le lemme qui suit (dont on se persuade facilement et pour lequel on trouvera une démonstration en (E.T.S.A.) ou encore, plus précisément, en (E.G.C.E.)):

Lemme 4. *Pour toute esquisse* $/\underline{S}/$, *il existe un unique (à isomorphisme près) prototype petit* $/\underline{P}/$ *et une unique réalisation* $/J/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{P}/$ *tels que, naturellement en toute catégorie localement petite* $\underline{H}$ *et en* $/\underline{S}/$, *on ait:*

- $\underline{H}^{/J/} : \underline{H}^{/\underline{P}/} \longrightarrow \underline{H}^{/\underline{S}/}$ *est un isomorphisme.*

On dit alors que $/\underline{P}/$ *est le prototype de* $/\underline{S}/$ *et que* $/J/$ *est la réalisation canonique.*

En particulier, si $/\underline{S}'/$ *est une autre esquisse et* $/J'/ : /\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{P}'/$ *est la réalisation canonique vers son prototype, à toute réalisation* $/V/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ *est associée une unique réalisation* $/U/ : /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}'/$ *telle que:*

- $/U/./J/ = /J'/./V/$.

Notons que ce lemme traduit un peu plus que l'existence d'un adjoint au foncteur injection de la catégorie des prototypes petits vers la catégorie des esquisses (pour plus de détails, voir (E.G.C.E.)).

En vertu du lemme 4, si $/\underline{S}/$ est une esquisse, $/\underline{P}/$ son prototype et $/J/ : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{P}/$ la réalisation canonique, on dispose donc:

- du plongement de Yoneda $Y_0 : \underline{S} \longrightarrow \underline{S}^{*\,\mathrm{op}}$,
- de la $/\underline{P}/$-co-algèbre canonique $Y : /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}/^{*\,\mathrm{op}} \simeq /\underline{S}/^{*\,\mathrm{op}}$,
- d'une $/\underline{S}/$-co-algèbre *canonique*

  $Y.J = Y_1 : /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{P}/ \longrightarrow /\underline{P}/^{*\,\mathrm{op}} \simeq /\underline{S}/^{*\,\mathrm{op}}$,
- du foncteur injection canonique $E : /\underline{S}/^{*} \longrightarrow \underline{S}^{*}$.

On vérifie alors facilement que:

Lemme 5. *Si* $/\underline{S}/$ *est une esquisse, le foncteur injection canoni-*

que E possède un adjoint $A: \underline{S}^* \longrightarrow /\underline{S}/^*$ tel que $A^{op}.Y_0 = Y_1$.

Supposons, maintenant, que $/V/: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}'/$ soit une réalisation et notons:

- $E: /\underline{S}/^* \longrightarrow \underline{S}^*$ et $E': /\underline{S}'/^* \longrightarrow \underline{S}'^*$ les injections canoniques, $A: \underline{S}^* \longrightarrow /\underline{S}/^*$ et $A': \underline{S}'^* \longrightarrow /\underline{S}'/^*$ leurs adjoints,
- $Y_0: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}^{*\,op}$ et $Y'_0 : \underline{S}' \longrightarrow \underline{S}'^{*\,op}$ les plongements de Yoneda,
- $Y_1: /\underline{S}/ \longrightarrow /\underline{S}/^{*\,op}$ et $Y'_1: /\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{S}'/^{*\,op}$ les co-algèbres canoniques,
- $Z'_0 = V^{*\,op}.Y'_0 : \underline{S}' \longrightarrow \underline{S}^{*\,op}$,
- $Z''_1 = A^{op}.Z'_0 : \underline{S}' \longrightarrow /\underline{S}/^{*\,op}$,
- $Z'_1 = /V/^{*\,op}.Y'_1 : \underline{S}' \longrightarrow /\underline{S}/^{*\,op}$.

Alors, on a:

Lemme 6. Le foncteur Z'_0 est extension de Kan à droite et point par point du foncteur Y_0 le long de V. Le foncteur Z''_1 est extension de Kan à droite et point par point du foncteur Y_1 le long de V.

Preuve. La première affirmation résulte du lemme 2 appliqué à la réalisation particulière $V: \underline{S} \longrightarrow \underline{S}'$ entre prototypes (petits) où ne sont distinguées aucunes limites projectives particulières. Comme A^{op} est co-adjoint, il préserve les extensions de Kan à droite et point par point, d'où la seconde affirmation. ::

L'analogue du lemme 3 est:

Lemme 7. Pour que $/V/^*$ possède un co-adjoint, il faut et il suffit que Z'_1 soit une $/\underline{S}'/$-co-algèbre dans $/\underline{S}/^*$.

Preuve. En effet, si $/\underline{P}'/$ est le prototype de $/\underline{S}'/$ et $/J'/: /\underline{S}'/ \longrightarrow /\underline{P}'/$ est la réalisation canonique, on a, par construction, $Z'.J = Z'_1$. Si Z' est une co-algèbre, il est clair que Z'_1 en est une. Inversement, comme $/\underline{P}'/$ est le prototype de $/\underline{S}'/$, si Z'_1 est une co-algèbre, Z' en est une. Ce qui prouve le lemme, vu le lemme 3. (D'ailleurs, on établit facilement que Z' , prolongement à $\underline{P}'$ de Z'_1 , est extension de Kan à droite et point par point de Z'_1 le long de $J'.V$.) ::

On peut affaiblir, maintenant, le lemme 7 en le suivant, que nous utilisons immédiatement après.

Lemme 8. Si Z''_1 est une $/\underline{S}'/$-co-algèbre dans $/\underline{S}/^*$ alors $/V/^*$ possède un co-adjoint (et Z''_1 est naturellement équivalent à Z'_1).

Preuve. Soit F un objet de $/\underline{S}/^*$. Si Z''_1 est une co-algèbre, il est clair que $\mathrm{Hom}(Z''_1 - ,F)$ est une $/\underline{S}'/$-algèbre dans Ens, i.e. un objet de $/\underline{S}'/^*$. Il en résulte que, naturellement en tout objet F' de $/\underline{S}'/^*$ et en vertu du lemme 6, on a:

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}(F',\mathrm{Fom}(Z''_1 - ,F)) &\simeq \mathrm{Hom}(F'.V,\mathrm{Hom}(Y_1 - ,F))\\ &\simeq \mathrm{Hom}(F'.V,F)\\ &\simeq \mathrm{Hom}(/V/^* F',F)\ .\end{aligned}$$

Donc $/V/^*$ possède bien un co-adjoint q défini par:

- $q(F) = \mathrm{Hom}(Z''_1 - ,F)$.

Dans ce cas, les lemmes 3 et 7 indiquent que l'on a aussi:

- $q(F) \simeq \mathrm{Hom}(Z'_1 - ,F)$,

et, par conséquent, $Z'_1 \simeq Z''_1$. ::

Il nous reste à prouver l'analogue de la proposition 2 . Pour ce faire, nous notons $//\underline{S}//$ l'esquisse, de catégorie sous-jacente $\underline{S}$, où les cônes projectifs distingués sont non seulement ceux de $/\underline{S}/$ mais aussi les foncteurs constants $\underline{1}^{\wedge} \longrightarrow \underline{S}$. Nous utilisons, enfin, des constructions et des notations analogues à celles qui précèdent la proposition 2.
Dans ces conditions, nous avons:

Proposition 3. Pour que $/V/^* : /\underline{S}'/^* \longrightarrow /\underline{S}/^*$ possède un co-adjoint, il suffit que le foncteur C'??V: C'?V $\longrightarrow$C'(O)!V

<u>soit initial, pour tout cône projectif</u> $C' : \underline{X}'^{\wedge} \longrightarrow \underline{S}'$, <u>distingué dans</u> $/\underline{S}'/$.

<u>Preuve</u>. Nous allons prouver que Z''_1 est une co-algèbre ce qui, en vertu du lemme 8, suffira.

Soit $C' : \underline{X}'^{\wedge} \longrightarrow \underline{S}'^{\wedge}$ un cône projectif distingué dans $/\underline{S}'/$ et $L'' : \underline{X}'^{\wedge} \longrightarrow /\underline{S}'/^{* \, op}$ un autre cône projectif, de même base que $Z''_1.C'$.

Un raisonnement tout à fait analogue à celui effectué dans la preuve de la proposition 2 établit qu'à tout morphisme $z : Y_0 S \longrightarrow Z'_0 C'(0)$ est associé un $\nu_S(z) : Y_0 S \longrightarrow L''(0)$ et ce naturellement en l'objet S de $\underline{S}$. Alors, ceci définit un morphisme $\nu_0 : Z'_0 C'(0) \longrightarrow L''(0)$. Il en résulte, par adjonction, un morphisme:

- $\overline{\nu} : A^{op} Z'_0 C'(0) = Z''_1 C'(0) \longrightarrow L''(0)$,

dont on prouve sans peine qu'il est le seul à vérifier:

- $\overline{\nu} \, . \, Z''_1(0 \longrightarrow X') = L''(0 \longrightarrow X')$, pour toute flèche $0 \longrightarrow X'$ de $\underline{X}'^{\wedge}$.

Ceci établissant que $Z''_1.C'$ est une limite projective dans $/\underline{S}/^{* \, op}$, la proposition en découle. ::

<u>Bibliographie</u>.

(E.G.C.E.) C. Lair, Etude générale de la catégorie des esquisses, Esquisses Mathématiques 23, Paris 1975.

(E.T.S.A.) C. Ehresmann, Esquisses et types de structures algébriques, Bul. Inst. Polit., Iasi XIV, 1968.

(S.A.D.C.) J. Bénabou, Structures algébriques dans les catégories, Cah. de Top. et Géom. Diff., Vol. X,1 , , Dunod, Paris 1968.

(S.P.A.T.) F. W. Lawvere, Some algebraic problems in the context of functorial semantics of algebraic theories, Lecture Notes in Math. 61, Springer, 1968.

(T.D.C.P.) Y. Diers, Type de densité d'une sous-catégorie pleine, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 90, 1976.