FRANÇOIS FOLTZ

Légitimité des catégories de préfaisceaux

Diagrammes, tome 1 (1979), exp. n° 3, p. F1-F5

<http://www.numdam.org/item?id=DIA_1979__1__A3_0>

Diagrammes, vol. 1, 1979.

LEGITIMITE DES CATEGORIES DE PREFAISCEAUX.

par

François FOLTZ.

A quelles conditions la catégorie $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ est-elle légitime lorsque $\underline{A}$ est elle-même une catégorie légitime ? J.BENABOU a remarqué que la condition suivante est suffisante :

"$\underline{A}$ admet un ensemble d'objets $\underline{B}_o$ tel que tout objet de $\underline{A}$ soit rétracte d'un élément de $\underline{B}_o$" ;

il a pensé aussi que cette condition devait être nécessaire. Ceci est exact et nous en donnons ici la preuve.

Soit $\underline{A}$ une catégorie; la relation "$A \leqslant A'$ si et seulement si A est un rétracte de A' " est une relation de préordre dans la classe $\underline{A}_o$ des objets de $\underline{A}$. On considère l'équivalence associée et on choisit un objet dans chaque classe d'équivalence : soit $\underline{B}_o$ la classe des objets ainsi choisis et soit $\underline{B}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{A}$ ayant $\underline{B}_o$ pour classe d'objets. Dans $\underline{B}_o$, la relation $\leqslant$ est un ordre cette fois.

Supposons que $\underline{A}$ et $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ soient toutes deux légitimes. Nous allons montrer que, dans ce cas, $\underline{B}_o$ est un ensemble, de la manière suivante : on va construire un certain foncteur $F:\underline{B} \longrightarrow \underline{Ens}$, puis une injection $j: \underline{B}_o \longrightarrow \mathrm{End}(F)$; comme $\underline{Ens}^{\underline{B}}$ est légitime en même temps que $\underline{Ens}^{\underline{A}}$, il en résulte que End(F) est un ensemble, et donc $\underline{B}_o$ aussi.

<u>Construction de F</u>. On se place dans la catégorie $\underline{B}$. Dési-

gnons par $I(B)$ la classe des inversibles à gauche de but B.

Lemme. $I(B)$ est un ensemble.

Pour chaque objet $X \leqslant B$ choisissons un couple (i_X, r_X), $i_X : X \longrightarrow B$ et $r_X : B \longrightarrow X$, tel que $r_X . i_X = 1_X$; l'application qui à $X \leqslant B$ fait correspondre l'idempotent $i_X . r_X$ est injective; en effet, si $i_Y . r_Y = i_X . r_X$, on voit que $r_Y . i_X$ et $r_X . i_Y$ sont inverses l'un de l'autre, donc $X = Y$, car $\underline{B}$ n'a pas d'autres inversibles que ses unités. Ainsi la classe des objets plus petits que B est un ensemble. Il en résulte que $I(B)$ est aussi un ensemble puisque

$$I(B) \subset \bigcup_{X \leqslant B} \underline{B}(X,B) .$$

Pour un objet B de $\underline{B}$, on pose alors $F(B) = P(I(B))$, où P est le foncteur "parties". Pour une flèche $b : B \longrightarrow B'$, on définit $F(b)$: $F(B) \longrightarrow F(B')$ par la formule suivante:

$$F(b)(J) = (b.J) \cap I(B').$$

Si $b' : B' \longrightarrow B''$ est composable avec b, on trouve:

$$\begin{aligned} F(b')(F(b)(J)) &= (b'.F(b)(J)) \cap I(B'') \\ &= (b'.b.J) \cap b'.I(B') \cap I(B'') \\ &= (b'.b.J) \cap I(B'') = F(b'.b)(J), \end{aligned}$$

$$\text{car} \quad b'.I(B') \supset (b'.b.J) \cap I(B''),$$

de sorte que F définit bien un foncteur de $\underline{B}$ dans $\underline{\text{Ens}}$.

Construction de j. A chaque objet Z de $\underline{B}$ on fait correspondre la transformation naturelle $j(Z) = z$ suivante: en $B \in \underline{B}_o$, l'application $z_B : F(B) \longrightarrow F(B)$ est définie par

$$z_B(J) = \bigcup_{Z \leqslant X \leqslant B} J_X^B \text{ , où } J_X^B = \underline{B}(X,B) \cap J.$$

Il s'agit bien d'une transformation naturelle, car pour $b : B \longrightarrow B'$ donné, on trouve:

$$\begin{aligned} z_{B'}(F(b)(J)) &= \bigcup_{Z \leqslant X \leqslant B'} (b.J \cap I(B'))_X^{B'} \\ &= \bigcup_{Z \leqslant X \leqslant B} (b.J_X^B \cap I(B')) \end{aligned}$$

$$= (\bigcup_{Z \leqslant X \leqslant B} b.J_X^B) \cap I(B')$$

$$= (b. \bigcup_{Z \leqslant X \leqslant B} J_X^B) \cap I(B')$$

$$= F(b)(z_B(J)), \qquad \text{en usant du fait que:}$$

$$(b.J \cap I(B'))_X^{B'} = \underline{B}(X,B') \cap b.J \cap I(B') = b.J_X^B \cap I(B').$$

Il nous reste à prouver que l'application $j:\underline{B}_o \longrightarrow \mathrm{End}(F)$ est injective; soient Z et $Z' \in \underline{B}_o$ et posons $z = j(Z)$, $z' = j(Z')$; supposant que $z = z'$, on trouve:

$z'_Z(\{1_Z\}) = z_Z(\{1_Z\}) = \{1_Z\} \neq \emptyset$, ce qui entraîne $Z' \leqslant Z$; on a de même $Z \leqslant Z'$, et donc $Z = Z'$, puisque la relation $\leqslant$ est un ordre dans $\underline{B}_o$.

Il nous reste à décrire une équivalence entre $\underline{\mathrm{Ens}}^{\underline{A}}$ et $\underline{\mathrm{Ens}}^{\underline{B}}$. A ce propos, nous pouvons énoncer un résultat un peu plus général. Soit $\underline{H}$ une catégorie satisfaisant la condition suivante:

> (S) tout idempotent de $\underline{H}$ se décompose en un produit $j.s$ où j est un mono et s est un épi.

Par exemple les catégories régulières vérifient cette condition, mais d'autres catégories, non régulières, comme Cat la vérifient aussi. Soient $\underline{A}$ une catégorie et $\underline{B}$ une sous-catégorie pleine de $\underline{A}$ telle que tout objet de $\underline{A}$ soit rétracte d'un objet de $\underline{B}$.

Proposition. Les catégories $\underline{H}^{\underline{A}}$ et $\underline{H}^{\underline{B}}$ sont équivalentes.

A l'injection canonique $\underline{B} \longrightarrow \underline{A}$ correspond le foncteur "restriction" $R:\underline{H}^{\underline{A}} \longrightarrow \underline{H}^{\underline{B}}$. Construisons un foncteur "extension" $E:\underline{H}^{\underline{B}} \longrightarrow \underline{H}^{\underline{A}}$ de sorte que $R.E$ soit l'identité de $\underline{H}^{\underline{B}}$ et $E.R$ soit équivalent à l'identité de $\underline{H}^{\underline{A}}$.

A cet effet, procédons d'abord à des choix: à tout objet A de $\underline{A}$ faisons correspondre $r_A:B_A \longrightarrow A$ et $i_A:A \longrightarrow B_A$ tels que $r_A.i_A = 1_A$ et $B_A \in \underline{B}_o$; convenons de prendre $r_A = i_A = 1_A$ lorsque $A \in \underline{B}_o$. De même, à tout idempotent $u:C \longrightarrow C$ dans $\underline{H}$ faisons correspondre (condition S) un épi $s_u:C \longrightarrow \overline{C}$ et un mono $j_u:\overline{C} \longrightarrow C$ tels que $j_u.s_u = u$; convenons de prendre $s_u = j_u = 1_C$ lorsque $u = 1_C$.

Considérons alors un foncteur $F:\underline{B} \longrightarrow \underline{H}$ et définissons son extension $E(F) = \overline{F}:\underline{A} \longrightarrow \underline{H}$ de la manière suivante: si $a:A \longrightarrow A'$ est une flèche de $\underline{A}$ on pose:

$$\overline{F}(a) = s_{A'}.F(i_{A'}.a.r_A).j_A \;,$$

où j_A et s_A sont des abrégés de $j_{F(i_A.r_A)}$ et de $s_{F(i_A.r_A)}$; on les notera aussi de façon plus précise, si besoin, par j_A^F et s_A^F.

$\overline{F}$ est bien un foncteur, car

- $\overline{F}(1_A) = s_A.F(i_A.r_A).j_A = s_A.j_A.s_A.j_A = 1_{\overline{F(B_A)}}$,
- pour $a:A \longrightarrow A'$ et $a':A' \longrightarrow A''$, on trouve:

$$\begin{aligned}\overline{F}(a'.a) &= s_{A''}.F(i_{A''}.a'.a.r_A).j_A\\ &= s_{A''}.F(i_{A''}.a'.r_{A'}.i_{A'}.r_{A'}.i_{A'}.a.r_A).j_A\\ &= s_{A''}.F(i_{A''}.a'.r_{A'}).F(i_{A'}.r_{A'}).F(i_{A'}.a.r_A).j_A\\ &= s_{A''}.F(i_{A''}.a'.r_{A'}).j_{A'}.s_{A'}.F(i_{A'}.a.r_A).j_A\\ &= \overline{F}(a').\overline{F}(a)\;.\end{aligned}$$

C'est bien une extension de F, car si $b:B \longrightarrow B'$ est une flèche de $\underline{B}$, on trouve:

$$\overline{F}(b) = s_{B'}.F(i_{B'}.b.r_B).j_B \;,$$

et comme $i_{B'} = r_{B'} = 1_{B'}$ et $i_B = r_B = 1_B$, il vient $s_{B'} = s_{1_{F(B')}} = 1_{F(B')}$ et $j_B = j_{1_{F(B)}} = 1_{F(B)}$, donc $\overline{F}(b) = F(b)$.

Définissons l'extension E sur les transformations naturelles; soit $t:F \longrightarrow G$ une tranformation naturelle; son extension $E(t) = \overline{t}: \overline{F} \longrightarrow \overline{G}$ est donnée par la formule suivante:

$$\overline{t}(A) = s_A^G.t(B_A).j_A^F \;, \text{ où } A \in \underline{A}_o .$$

On vérifie sans peine que c'est bien une transformation naturelle et les choix effectués au début montrent que $\overline{t}(B) = t(B)$ pour un objet B de $\underline{B}$.

Reste à définir l'équivalence n entre l'identité de $\underline{H}^{\underline{A}}$ et l'endofoncteur E.R de $\underline{H}^{\underline{A}}$. Soit $F^*:\underline{A} \longrightarrow \underline{H}$; posons $F = R(F^*)$ et

$\overline{F} = E(F)$; alors $n(F^*) : F^* \longrightarrow F$ est donnée en un objet A par:

$$n(F^*)(A) = s^F_A . F^*(i_A) \ .$$

On vérifie sans peine que $n(F^*)$ est une transformation naturelle inversible (l'inverse de $s^F_A . F^*(i_A)$ étant $F^*(r_A).j^F_A$) et que l'application qui à F^* fait correspondre $n(F^*)$ définit bien n comme transformation naturelle de l'identité de $\underline{H}^{\underline{A}}$ vers E.R .

Remarques.

1- Le résultat obtenu en termes de "classes" et d'ensembles s'énonce aisément en termes d'univers emboîtés. En particulier, on peut remplacer la notion de "légitimité" par celle de "f-légitimité": $\underline{A}$ est dite f-légitime lorsque $\underline{A}(A,A')$ est un ensemble fini pour toute paire (A,A') d'objets de $\underline{A}$; le résultat s'énonce alors: si $\underline{A}$ est une catégorie f-légitime, la catégorie $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ est encore f-légitime à la condition nécessaire et suffisante que $\underline{A}$ admette un ensemble fini $\underline{B}_o$ d'objets tel que tout objet de $\underline{A}$ soit rétracte d'un objet de $\underline{B}_o$.

2- Si $\underline{A}$ est la catégorie associée à une classe ordonnée $(\underline{A}_o, \leqslant)$, la catégorie $\underline{Ens}^{\underline{A}}$ est légitime (resp. f-légitime) si et seulement si $\underline{A}_o$ est un ensemble (resp. un ensemble fini).

3- Soit q un foncteur de $\underline{Ens}$ vers une catégorie légitime $\underline{H}$ satisfaisant la condition (S). Alors $\underline{H}^{\underline{A}}$ est légitime sous la même condition que $\underline{Ens}^{\underline{A}}$.