

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

KAMEL KACHOUR

## Définition algébrique des cellules non strictes

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome 49, n° 1 (2008), p. 1-68

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_2008\\_\\_49\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_2008__49_1_1_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 2008, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

*par Kamel KACHOUR*

### Abstract

The goal of this article is to propose precise definitions, for the higher and nonstrict version, of the concepts of natural transformations and analogues (modifications, etc.), and all that within the framework of the Eilenberg-Moore algebras. Thus we obtain objects with algebraic nature, and a good candidate for the graphic part of the non-strict  $\infty$ -category of non-strict  $\infty$ -categories. But it is also to complete the formalism of the categorification, which is a motivation of this work.

## 1 Introduction

En définissant les catégories  $n$ -uples [10], Ehresmann est le premier à imaginer les catégories hautes dans leurs versions strictes. Mais l'apparition, en théorie de l'homotopie, de structures associatives à homotopie près (comme les  $H$ -groupes) et, parallèlement en théorie des catégories, la définition des bicatégories de Bénabou [7], donnent aux mathématiciens cette idée nouvelle de structure « non-strict », et laisse déjà imaginer des versions non-strictes des catégories hautes-strictes d'Ehresmann. Pourtant la tentative de bien les définir n'est pas abordée à cette époque : les catégoriciens avaient d'autres intérêts, d'autant plus que retranscrire l'intuition que l'on a des  $\infty$ -catégories non-strictes, en une définition accomplie, est une épreuve difficile parce que les bases mêmes d'une telle définition restaient obscure.

Mais en 1983, Grothendieck mettait en chantier une théorie de l'homotopie pour ces  $\infty$ -champs, et par là même, définissait les  $\infty$ -groupoïdes non-stricts (dans le début de sa « lettre à QUILLEN » [13]). En tout cas, il semble que ce travail ait motivé des catégoriciens à mettre au point d'autres définitions, et surtout à se mettre d'accord sur le minimum que l'on requiert pour

une définition raisonnable des  $\infty$ -catégories non-strictes : il y a l'unanimité sur le fait qu'une telle définition doit prendre en compte les basses dimensions (par exemple toutes les différentes 2-catégories faibles obtenues doivent être des bicatégories et réciproquement), et il est souhaitable que ces  $\infty$ -catégories non-strictes aient une nature intrinsèque homotopique (elles doivent en particulier vérifier les hypothèses de stabilisation de Baez et Dolan [1]). Les autres considérations dépendent de la sensibilité de chaque mathématicien : certains souhaiteront qu'elles aient en plus une nature algébrique [5, 16, 18], et d'autres souhaiteront qu'elles aient plutôt une nature simpliciale [20], voire opétopique [2], etc.

Beaucoup de définitions ont été proposées [8, 15], et la proximité entre ces définitions fait encore l'objet d'étude [6, 8]. Aussi les motivations de toutes ces définitions se sont diversifiées : par exemple, l'idée très naturelle de catégorification des structures est une des motivations amorcée par Baez et Dolan [1], où les auteurs donnent à ces catégorifications l'ambition de fondre dans un même formalisme la topologie algébrique et la théorie des champs quantiques topologiques [1, 2]. Dans la même optique, il faut signaler tout particulièrement les travaux non moins intéressants de Baez et Schreiber sur le début de la catégorification de la géométrie différentielle et des théories de Jauges [3, 4].

Cet article fait suite à l'exposé que j'ai donné au *Séminaire Itinérant de Catégories* en mars 2007 à Paris [14], et nous abordons les extensions logiques des  $\infty$ -catégories non strictes : les  $\infty$ -foncteurs non-stricts (qui ont été proposés dans [19] et qu'on appellera ici  $T^0$ -algèbres), les  $\infty$ -transformations naturelles non-strictes (qu'on appellera  $T^1$ -algèbres), les  $\infty$ -modifications non-strictes (les  $T^2$ -algèbres), etc. où  $T^0, T^1, T^2, \dots, T^n, \dots$  désignent des monades adaptées (ces algèbres sont définies au § 4.1). Ces extensions sont précisément celles des  $\infty$ -catégories non-strictes de Penon, qui sont la version non-réflexive des prolixes de Penon [18]. J'ai volontairement utilisé des techniques très proches que celles que l'on trouve dans [18] et des notations analogues (sauf pour les lois crochets), pour bien montrer la simplicité de ces différentes extensions, et pour finalement faire voir le caractère uniforme et unificateur de toutes ces constructions, ainsi que la capacité de ces  $\infty$ -catégories non-strictes à être étendues à d'autres êtres mathématiques. La performance de ces  $\infty$ -catégories non-strictes concerne aussi le problème de la catégorification des structures : dans [19], l'auteur propose une caté-

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

gorification systématique des théories de Lawvere, et cette catégorification pourra donc s'adapter aux nouvelles algèbres utilisées dans cet article. Signalons aussi que la définition des  $\infty$ -groupoïdes non-stricts étant naturelle (lorsqu'on a nos  $\infty$ -catégories non-strictes !), ce travail a aussi un intérêt en théorie de l'homotopie [9]. Il faut bien avoir à l'esprit que si ces extensions ont été possibles, c'est aussi grâce à la grande simplicité de la définition des  $\infty$ -catégories non-strictes de Penon.

Soyons plus précis sur les constructions de cet article : ce qu'on appellera  $T^n$ -algèbre (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) sont ces extensions recherchées. Les  $T^n$ -algèbres sont les algèbres d'Eilenberg-Moore d'une monade  $(T^n, \mu^n, \eta^n)$  produite par une adjonction  $E^n \dashv U^n$ , avec

$$U^n : (n, \infty)\text{-EtC} \longrightarrow (\infty\text{-Gr})^2$$

telle que  $(n, \infty)\text{-EtC}$  (défini au § 3.5) correspond, lorsque  $n = 0$ , à la catégorie des étirements morphiques de [19]. Les objets de  $(n, \infty)\text{-EtC}$  s'appelleront étirements catégoriques  $n$ -cellulaires. Dans cet article, les étirements catégoriques  $n$ -cellulaires sont les objets les plus fondamentaux avant l'introduction des  $T^n$ -algèbres : ils sont formés de  $(n, \infty)$ -magmas cellulaires et de  $(n, \infty)$ -catégories strictes cellulaires (si  $n = 0$ , ces  $(n, \infty)$ -catégories strictes cellulaires correspondront aux  $\infty$ -foncteurs stricts ; si  $n = 1$ , ce seront les  $\infty$ -transformations naturelles strictes, etc). D'autre part dans ces étirements cellulaires on se donne également des « données d'étirements »  $(\pi_0, \pi_1, \phi_0, \phi_1)$ , ces derniers produisant des opérations partielles permettant l'occurrence des cellules de cohérences souhaitées ;  $\phi_0$  et  $\phi_1$  jouent le rôle des lois crochets de [18]. Ces données d'étirements permettent de sélectionner les « bons diagrammes » des  $\infty$ -magmas  $n$ -cellulaires sous-jacents, i.e. ceux devant « contenir » des cellules de cohérences. Ces constructions sont complètement analogues à celles des étirements catégoriques faites dans [18], où ce procédé de relâchement des axiomes est largement expliqué.

L'une des difficultés que nous avons dû surmonter a été de simplifier le formalisme de toutes ces constructions, grâce à une utilisation systématique des homs internes provenant d'une structure monoïdale fermée sur la catégorie des  $\infty$ -graphes. En tous cas, le passage des 0-cellules (i.e. correspondant aux  $\infty$ -catégories non-strictes dans la catégorie globulaire augmentée  $\widetilde{\text{Alg}}(T^*)$  du § 4.4) aux cellules d'ordres supérieurs crée une difficulté pour les notations auxquelles on peut difficilement se soustraire. Sans le langage des catégories

enrichies, la première version de ce travail contenait des 16-uplets pour représenter les étirements catégoriques  $n$ -cellulaires !

Les deux  $\infty$ -graphes réflexifs les plus importants de cet article sont la catégorie globulaire  $\text{Alg}(T^*)$  et la catégorie globulaire augmentée  $\widetilde{\text{Alg}}(T^*)$  (définie dans le § 4.4). L' $\infty$ -graphe réflexif  $\text{Alg}(T^*)$  est construit de telle manière que ces 0-cellules correspondent aux  $\infty$ -foncteurs non-stricts, les 1-cellules aux  $\infty$ -transformations naturelles non-strictes, etc. Mais ceci n'est que provisoire, et ce sont les homs des catégories enrichies qui nous poussent à faire ce choix de départ (c'est à dire commencer par parler de catégories globulaires avant de parler de catégories globulaires augmentées). Par exemple, pour l' $\infty$ -graphe  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(G, G')$  (défini au § 3.2), les éléments de  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(G, G')(0)$  sont des morphismes d' $\infty$ -graphes qui sont la structure sous-jacente de tout  $\infty$ -foncteur. C'est pour cela que les  $\infty$ -foncteurs non-stricts sont qualifiés de  $T^0$ -algèbres. Mais ce choix a été motivé pour faciliter le formalisme : on « s'aligne » avec les homs internes pour simplifier les calculs. Ensuite on « augmente » la catégorie globulaire  $\text{Alg}(T^*)$ , pour y inclure les  $T$ -algèbres (qui sont les  $\infty$ -catégories non-strictes de Penon) : pour cela on « ajoute »  $\text{Alg}(T)$  à  $\text{Alg}(T^*)$ , en renumérotant, de telle sorte que les  $T$ -algèbres deviennent des 0-cellules, etc. Ainsi on obtient  $\widetilde{\text{Alg}}(T^*)$ , où les  $T^0$ -algèbres correspondent aux  $T$ -algèbres, les  $T^1$ -algèbres correspondent aux  $T^0$ -algèbres de  $\text{Alg}(T^*)$ , etc. Mais ces « structures augmentées » ne sont pas utilisées dans cet article, et leurs intérêts est surtout de mettre en évidence la partie graphique de la probable  $\infty$ -catégorie non-strictes qui se cache derrière elles.

Ce qui m'a surtout impressionné dans ce travail, c'est de voir que les propriétés des étirements catégoriques cellulaires subsistaient par passage aux algèbres : on va démontrer qu'en dimension 2 les  $T^0$ -algèbres sont des pseudo-2-foncteurs, les  $T^1$ -algèbres sont des pseudo-2-transformations naturelles, et on détaillera pour les  $T^2$ -algèbres la proposition disant qu'elles sont des pseudo-2-modifications. Enfin, l'histoire semble ne pas s'arrêter là, et en utilisant les mêmes méthodes proposées dans cet article, il sera probablement possible à l'avenir de compléter le formalisme des catégories hautes d'autres concepts.

Je tiens à remercier tout particulièrement Jacques Penon, dont les encouragements et la patience face à mes questions souvent trop triviales, ont fait émerger ce travail.

Je tiens à remercier aussi Albert Burroni qui m'a permis de le rencontrer.

Je remercie Michael Batanin qui m'a conseillé d'adopter plutôt les  $\infty$ -catégories non-strictes de Penon que les prolixes, et Tom Leinster qui m'a donné des précisions, via internet, sur sa définition des  $\infty$ -catégories non-strictes. Je remercie enfin Denis Bitouzé pour ces conseils en  $\LaTeX$ , et Jean-Pierre Ledru pour son soutien sans faille.

Je dédie ce travail à mes enfants, Leïli, Mohamed-Réda, et Âmina-Tassadit.

## 2 Remarque sur les notations utilisées

Dans tout l'article, on s'efforcera (à quelques exceptions près) de respecter des règles de notations qui doivent en faciliter sa lecture. Les deux catégories monoïdales importantes de cet article seront notées  $\mathbb{G}$  (pour la catégorie monoïdale fermée des  $\infty$ -graphes du § 3.2), et  $\mathbb{C}$  (pour la catégorie cartésienne fermée des  $\infty$ -catégories strictes du § 3.4). Les catégories seront notées avec des lettres majuscules ajourées (du moins pour la première lettre). Les catégories enrichies et les  $\infty$ -graphes seront notés avec des lettres majuscules classiques, sauf pour les catégories globulaires (ici une catégorie globulaire désigne un  $\infty$ -graphe réflexif interne de  $\mathbb{C}at$ ,  $\mathbb{C}at$  étant la catégorie des catégories localement petites) qui auront une notation spécifique. La plupart des homs externes seront notés avec un « h » minuscule :  $\text{hom}(-, -)$ , et les homs internes avec un « H » majuscule :  $\text{Hom}_-(-, -)$ . L'indice de ces homs internes indique leurs catégories enrichies correspondantes. Les esquisses seront notées avec des lettres majuscules rondes.

Cet article mettra en évidence deux grandes classes d' $\infty$ -graphes : les homs internes, dont les applications source, but et identité, utiliseront respectivement les notations  $d$ ,  $c$  et  $\text{id}$ , et les catégories globulaires dont les applications source, but et identité utiliseront respectivement les notations  $\sigma$ ,  $\beta$  et  $\iota$ . Pour les autres  $\infty$ -graphes (par exemple un  $\infty$ -graphe réflexif quelconque de  $\infty\text{-}\mathbb{G}rr$  ou une  $\infty$ -catégorie stricte quelconque de  $\infty\text{-}\mathbb{C}at$ ), on utilisera les notations  $s$ ,  $b$  et  $1$  pour désigner les applications source, but et identité.

Les opérations d'un  $\infty$ -magma (défini dans [18]), seront notées

- $(\circ_p^n)_{0 \leq p < n}$ , pour un  $\infty$ -magma quelconque ;
- $(\star_p^n)_{0 \leq p < n}$ , pour les  $\infty$ -magmas sous-jacents des étirements catégoriques

cellulaires libres (défini dans § 3.6 et § 4.2).

Seules les opérations des  $\infty$ -magmas du § 6.2 auront des notations spécifiques.

Si, pour les applications source, but ou identité, les exposants et les indices ont une signification évidente (par exemple l'application  $s_{n-1}^n$  d'un  $\infty$ -graphe  $G$  désignera l'application source  $G(n) \xrightarrow{s_{n-1}^n} G(n-1)$ ), les autres objets de cet article ont des exposants et des indices qui ont également un sens bien précis : l'exposant, pour  $n \in \mathbb{N}$ , désignera le niveau cellulaire auquel appartient cet objet et l'indice, égal à 0 ou 1, signifiera d'une part que cet objet a une nature graphique (c'est un  $\infty$ -graphe ou un morphisme d' $\infty$ -graphes), et désignera d'autre part la composante de cet objet dans  $(\infty\text{-Gr})^2$ . Par exemple, on verra au § 4.1 l'écriture  $\eta^n(G) = (\eta_0^n(G), \eta_1^n(G))$  qui signifiera que  $\eta^n$  est un « objet  $n$ -cellulaire », que  $\eta_0^n(G)$  est dans la première composante d' $(\infty\text{-Gr})^2$  (en l'occurrence  $\eta_0^n(G)$  sera un morphisme d' $\infty$ -graphes).

Mais souvent un objet cellulaire n'aura pas d'exposant (qui indique son niveau cellulaire), ce qui signifie qu'il n'y a pas d'ambiguïté sur le « niveau » cellulaire d'un tel objet, et aussi que la présence de ces exposants n'est pas nécessaire pour la clarté du texte.

Lorsque l'on travaillera en dimension 2, des simplifications de notations s'imposeront également : certaines simplifications utiliseront le symbole  $\bar{\quad}$  qui concerne toutes les écritures contenant des  $G$ , et le symbole  $\widehat{\quad}$  sera utilisé pour les écritures contenant des  $T^i(G)$  : par exemple on notera  $\bar{\eta}_0^n = \eta_0^n(G)$  et  $\widehat{\eta}_0^n = \eta_0^n(T^n(G))$ .

Dans les diagrammes (dessinés grâce à  $\mathbb{X}\mathbb{Y}$ -pic), les symboles  $\cup$  et  $\square$  signifient que ces diagrammes sont commutatifs.

Si  $\mathbb{C}$  est une catégorie,  $\mathbb{C}(0)$  sera la classe de ces objets et  $\mathbb{C}(1)$  sera la classe de ces flèches.

Enfin le symbole  $:=$  signifie « est égal à par définition ».

### 3 Les catégories d'étirements catégoriques cellulaires : $(n, \infty)\text{-EtC}$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

Soit  $\mathbb{V}$  une catégorie monoïdale quelconque. On notera  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  à la fois la 2-catégorie des catégories  $\mathbb{V}$ -enrichies et sa catégorie sous-jacente (i.e. celle où l'on oublie les transformations naturelles enrichies). Si  $C \in \mathbb{V}\text{-Cat}(0)$ ,  $|C|$

désignera l'ensemble des objets de  $C$ , et  $\underline{C}$  sa catégorie sous-jacente. Si  $\mathbb{V}$  est monoïdale fermée, sa catégorie auto-enrichie sera notée  $\overline{\mathbb{V}}$ . La plupart des morphismes de compositions des catégories enrichies qui vont suivre ne sont pas décrites, car leurs descriptions sont toujours triviales. Enfin, si  $\mathbb{V}$  est une catégorie quelconque,  $\mathbb{V}\text{-Gr}$  désignera la catégorie des graphes  $\mathbb{V}$ -enrichies (je rappelle qu'un graphe enrichi est formé d'une classe d'objets et d'hom internes pour chaque couple d'objets). Même si des constructions se font dans le cadre des catégories enrichies, ce sont souvent les graphes enrichis sous-jacents que l'on utilisera. Pour cela, on s'aidera du foncteur d'oubli  $\mathbb{V}\text{-Cat} \longrightarrow \mathbb{V}\text{-Gr}$  qui commute aux produits fibrés donc aux catégories internes.

### 3.1 Représentabilité au sens de Gray de $\mathbb{V}\text{-Cat}$

Soit  $\mathbb{V}$  une catégorie monoïdale à produits fibrés telle que son tenseur soit noté  $\otimes$  et son identité  $I$ , et soit  $C$  une catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie. Avec cela, on va construire une nouvelle catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie  $C^2$ , qui mettra en évidence un foncteur  $(-)^2 : \mathbb{V}\text{-Cat} \longrightarrow \mathbb{V}\text{-Cat}$ , qui fera de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  (vue comme 2-catégorie) une 2-catégorie représentable au sens de Gray [12].

$C^2$  est définie de la manière suivante :  $|C^2| = \underline{C}(1)$ , et si  $I \xrightarrow{f} C(X, Y)$ ,  $I \xrightarrow{f'} C(X', Y')$  sont deux objets de  $C^2$ , alors le hom  $C^2(f, f')$ , est donné par le carré cartésien suivant de  $\mathbb{V}$  :

$$\begin{array}{ccc} C^2(f, f') & \longrightarrow & C(Y, Y') \\ \downarrow & & \downarrow C(f, Y') \\ C(X, X') & \xrightarrow{C(X, f')} & C(X, Y') \end{array}$$

où  $C(X, f')$  est donné par le composé

$$C(X, X') \xrightarrow{d_{C(X, X')}} C(X, X') \otimes I \xrightarrow{Id \otimes f'} C(X, X') \otimes C(X', Y') \xrightarrow{c_{X, X', Y'}} C(X, Y')$$

et  $C(f, Y')$  est donné par le composé

$$C(Y, Y') \xrightarrow{g_{C(Y, Y')}} I \otimes C(Y, Y') \xrightarrow{f \otimes Id} C(X, Y) \otimes C(Y, Y') \xrightarrow{c_{X, Y, Y'}} C(X, Y')$$



**Proposition 1 (Gray [12])** *Le foncteur*

$$(-)^2 : \mathbb{V}\text{-Cat} \longrightarrow \mathbb{V}\text{-Cat}$$

*fait de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  une 2-catégorie représentable, donc en particulier (puisque  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  a des produits fibrés), induit pour tous  $C \in \mathbb{V}\text{-Cat}(0)$  une catégorie interne  $\text{int}(C)$  dans  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  ( $\mathbb{V}\text{-Cat}$  vue comme catégorie) :*

$$\text{int}(C) = C \begin{array}{c} \xleftarrow{\delta_0} \\ \xrightarrow{i} \\ \xrightarrow{\delta_1} \end{array} C^2 \xleftarrow{k} C^2 \times_C C^2$$

*et l'image de cette catégorie interne par le foncteur objet  $\mathbb{V}\text{-Cat} \xrightarrow{Ob} \text{Ens}$  est  $\underline{C}$ .*

**Remarque 1** *C'est cette dernière propriété qui sera utilisée pour montrer la proposition – très utilisée – ci-après.*

Voici un corollaire de la proposition 1 qui montre que certains foncteurs produisent une catégorie interne de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  :

**Proposition 2** *Tout foncteur de la forme :  $\mathbb{D} \xrightarrow{F} \underline{C}$  (i.e.  $\mathbb{D}$  est une catégorie quelconque et  $\underline{C}$  est la catégorie sous-jacente à une catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie  $C$ ), induit canoniquement une catégorie interne de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$ .*

**Preuve** En effet, soit  $\text{App}$  la catégorie dont les objets sont les applications :  $A \xrightarrow{f} |C|$ , où  $C$  est une catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie, et dont les flèches sont les couples  $(g, h)$ , tels que

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & A' \\ f \downarrow & \square & \downarrow f' \\ |C| & \xrightarrow{|h|} & |C'| \end{array}$$

où  $g$  est une application et  $h$  est un foncteur  $\mathbb{V}$ -enrichi  $C \xrightarrow{h} C'$ . Dans ces conditions on voit bien que tout foncteur de la forme  $\mathbb{D} \xrightarrow{F} \underline{C}$ , induit une

catégorie interne de  $\mathbb{A}pp$  ; en effet  $F$  induit le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{D}(1) \times_{\mathbb{D}(0)} \mathbb{D}(1) & \longrightarrow & \mathbb{D}(1) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \mathbb{D}(0) \\
 F_1 \times_{F_0} F_1 \downarrow & & \square & \downarrow F_1 & \downarrow F_0 \\
 \underline{C}(1) \times_{\underline{C}(0)} \underline{C}(1) & \longrightarrow & \underline{C}(1) & \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} & \underline{C}(0)
 \end{array}$$

et on voit que la partie inférieure de ce diagramme est la partie objet de la catégorie interne de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$  de la proposition 1, i.e. cette partie inférieure est en fait le diagramme

$$|C^2| \times_{|C|} |C^2| \longrightarrow |C^2| \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \\ \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} |C|$$

D'autre part on a un foncteur  $\mathbb{A}pp \xrightarrow{U} \mathbb{V}\text{-Cat}$ , qui associe à toutes applications  $A \xrightarrow{f} |C|$ , la catégorie  $\mathbb{V}$ -enrichie  $C[A]$  définie par  $|C[A]| := A$ , et si  $X, Y \in |C[A]|$  alors  $C[A](X, Y) := C(f(X), f(Y))$ . D'autre part,  $U$  a un adjoint à gauche (si  $G \dashv U$ , alors  $G(C) := 1_{|C|}$ ). Donc  $U$  commute aux produits fibrés et donc aux catégories internes, donc envoie les catégories internes de  $\mathbb{A}pp$  sur des catégories internes de  $\mathbb{V}\text{-Cat}$ . ■

Dans les paragraphes qui vont suivre, après avoir utilisé les résultats précédents pour construire les trois catégories internes de  $\mathbb{G}\text{-Gr}$  qui nous intéressent (où  $\mathbb{G}$  désignera alors la catégorie monoïdale fermée des  $\infty$ -graphes), on associera à chacune de ces catégories internes une famille de catégories (indexées par  $\mathbb{N}$ ), et une catégorie globulaire. Le résultat suivant est utile :

**Proposition 3** *Si  $\mathbb{V}$  et  $\mathbb{W}$  sont deux catégories quelconques, alors on a un foncteur canonique :*

$$\text{Funct}(\mathbb{V}, \mathbb{W}) \xrightarrow{\varphi} \text{Funct}(\mathbb{V}\text{-Gr}, \mathbb{W}\text{-Gr})$$

Signalons enfin deux résultats qu'on utilisera au paragraphe § 3.5, pour définir la catégorie enrichie des étirements catégoriques :

**Proposition 4** *Avec les mêmes notations de la proposition 2, si on se donne un objet  $A \xrightarrow{f} |C|$  de  $\mathbb{A}pp$ , alors  $f$  induit canoniquement le foncteur  $\mathbb{V}$ -enrichi pleinement fidèle  $C[A] \xrightarrow{f_*} C$*

**Proposition 5** Soit  $\mathbb{W} \xrightarrow{U} \mathbb{V}$ , un foncteur monoïdal entre catégories monoïdales fermées. Notons  $\mathbb{W}\text{-Cat} \xrightarrow{U_*} \mathbb{V}\text{-Cat}$ , le foncteur qu'il induit. Dans ces conditions  $U$  produit un foncteur  $\mathbb{V}$ -enrichi canonique :

$$U_* \overline{\mathbb{W}} \longrightarrow \overline{\mathbb{V}}$$

### 3.2 Structure monoïdale fermée sur $\infty\text{-Gr}$

La catégorie des  $\infty$ -graphes  $\infty\text{-Gr}$  est une catégorie de préfaisceau, et à ce titre est un topos, et donc une catégorie cartésienne (donc monoïdale) fermée. Pourtant ce n'est pas cette structure monoïdale qu'on étudiera. Celle qui nous intéresse est définie de la façon suivante : soient  $G, G' \in \infty\text{-Gr}(0)$ . On pose pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$

$$(G \otimes G')(n) := (G(n) \times G'(0)) \amalg (G(0) \times G'(n))$$

et  $(G \otimes G')(0) := G(0) \times G'(0)$ . On voit facilement que  $G \otimes G'$  est un  $\infty$ -graphe. De même ce tenseur est facile à définir sur les morphismes : si  $f, f' \in \infty\text{-Gr}(1)$ , pour tous  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$(f \otimes f')(n) := (f(n) \times f'(0)) \amalg (f(0) \times f'(n))$$

et  $(f \otimes f')(0) := f(0) \times f'(0)$  (bien sûr  $f(n)$  signifie la  $n^e$  composante de  $f$ ).

Avec ces définitions on vérifie facilement que  $\infty\text{-Gr} \times \infty\text{-Gr} \xrightarrow{\otimes} \infty\text{-Gr}$  est un bifoncteur. Si on considère l' $\infty$ -graphe  $I = ( \dots \emptyset \rightrightarrows \emptyset \rightrightarrows \{0\} )$ , on vérifie que  $I$  joue le rôle d'identité pour ce tenseur. Avec ceci,  $\infty\text{-Gr}$  est une catégorie monoïdale symétrique (elle n'est pas stricte car :  $G \otimes I \xrightarrow{\sim} G$ , et  $G \otimes I \neq G$ ). On a donc :

**Proposition 6**  $\infty\text{-Gr}$  muni du produit tensoriel précédent est une catégorie monoïdale fermée, notée donc brièvement  $\mathbb{G}$ .

**Preuve (Construction des homs)** Pour  $G, G' \in \infty\text{-Gr}(0)$ , on va construire un  $\infty$ -graphe  $\text{Hom}_{\mathbb{G}}(G, G')$ . Déjà,  $\text{Hom}_{\mathbb{G}}(G, G')(0) = \text{hom}(G, G')$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\text{Hom}_{\mathbb{G}}(G, G')(n)$  est l'ensemble des triplets  $(f_0, f_1, \tau)$ , où  $f_0$  et  $f_1$  sont éléments de  $\text{Hom}_{\mathbb{G}}(G, G')(0)$ , et  $\tau$  appartient à  $G'(n)^{G(0)}$ , tels que pour tous  $a$  dans  $G(0)$ ,

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

$s_0^n(\tau(a)) = f_0(a)$ , et  $b_0^n(\tau(a)) = f_1(a)$ (ici  $s_p^n$  et  $b_p^n$  sont les sources et buts de  $G'$ ).

Les applications sources et buts de cet  $\infty$ -graphe  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G, G')$  sont donnés par

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G, G')(n) &\xrightarrow{d_p^n} \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G, G')(p) \\ (f_0, f_1, \tau) &\mapsto (f_0, f_1, \tau') \end{aligned}$$

tel que  $\tau'$  est le composé  $G(0) \xrightarrow{\tau} G'(n) \xrightarrow{s_p^n} G'(p)$ . De même  $c_p^n$  est défini similairement avec  $b_p^n$ . On vérifie sans difficulté la propriété universelle de fermeture. ■

Aussi  $\mathbb{G}$  a des produits fibrés et  $\overline{\mathbb{G}}$  sera sa catégorie auto-enrichie. D'après la proposition 1 on peut lui associer une catégorie interne de  $\mathbb{G}\text{-Gr}$ , que l'on note  $\text{int}(\overline{\mathbb{G}})$ . À cette catégorie interne on va associer, pour tous  $n \in \mathbb{N}$ , une catégorie  $(n, \infty)\text{-Gr}$  appelée catégorie des  $\infty$ -graphes  $n$ -cellulaires (dont les objets sont les éléments des ensembles  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G, G')(n)$  ( $G$  et  $G'$  quelconque) de la proposition 6), et une catégorie globulaire  $(*, \infty)\text{-Gr}$  formée de toutes ces catégories.

Pour simplifier la suite et pour des raisons de tailles on travaillera avec la catégorie des classes  $\widehat{\text{Ens}}$  (on peut aussi utiliser le langage des univers et vérifier que tout marche bien, mais c'est un peu long et sans grand intérêt). On va s'aider de certains diagrammes de  $\text{int}(\overline{\mathbb{G}})$  pour décrire le processus qui conduit à la formation des catégories de la proposition 7. Ces diagrammes sont surtout là pour aider l'intuition.

Un diagramme de  $\text{int}(\overline{\mathbb{G}})$  est par exemple :

$$\text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G'_0) \longleftarrow \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}^2}}(f_0, f_1) \longrightarrow \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_1, G'_1)$$

tels que  $G_0, G_1, G'_0, G'_1$  sont dans  $\infty\text{-Gr}(0)$ ,  $f_0, f_1$  sont dans  $\infty\text{-Gr}(1)$  et sont donnés par

$$G_0 \xrightarrow{f_0} G'_0, \quad G_1 \xrightarrow{f_1} G'_1$$

et  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}^2}}(f_0, f_1)$  est un hom de la catégorie enrichie  $\overline{\mathbb{G}^2}$ .

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

Le foncteur  $\infty\text{-Gr} \xrightarrow{ev_n} \mathbb{E}ns, G \longmapsto G(n)$ , produit (grâce à la proposition 3) le foncteur  $\mathbb{G}\text{-Gr} \xrightarrow{\varphi(ev_n)} \mathbb{E}ns\text{-Gr}$ , qui envoie

$$(|\mathbb{G}|, \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G_1)/G_0, G_1 \in |\mathbb{G}|)$$

sur  $(|\mathbb{G}|, \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G_1)(n)/G_0, G_1 \in |\mathbb{G}|)$ .

Soit le foncteur de réalisation  $\text{Cat}(-) := \text{réal}(\mathcal{E}; -)$  (qui est aussi un 2-foncteur strict), tel que  $\mathcal{E}$  soit l'esquisse des catégories (qui est une esquisse projective), on obtient le foncteur

$$\text{Cat}(\mathbb{G}\text{-Gr}) \xrightarrow{\text{Cat}(\varphi(ev_n))} \text{Cat}(\mathbb{E}ns\text{-Gr})$$

$(\varphi(ev_n))$  commute aux produits fibrés car  $ev_n$  lui-même commute aux produits fibrés). Ce foncteur envoie

$$\text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G'_0) \longleftarrow \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}^2}}(f_0, f_1) \longrightarrow \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_1, G'_1)$$

sur

$$\text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G'_0)(n) \longleftarrow \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}^2}}(f_0, f_1)(n) \longrightarrow \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_1, G'_1)(n)$$

D'autre part le foncteur  $\mathbb{E}ns\text{-Gr} \xrightarrow{\chi} \mathbb{G}r$ , où  $\mathbb{G}r$  désigne la catégorie des graphes, défini sur les objets par

$$|C|, C(x, y)(x, y \in |C|) \longmapsto \coprod_{x, y \in |C|} C(x, y) \xrightarrow[s]{s} |C|$$

( $C$  désigne ici une catégorie enrichie quelconque de  $\mathbb{E}ns$ ) envoie

$$(|\mathbb{G}|, \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G_1)(n)/G_0, G_1 \in |\mathbb{G}|)$$

sur

$$\coprod_{G_0, G_1 \in |\mathbb{G}|} \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G_1)(n) \xrightarrow[s]{s} |\mathbb{G}|$$

Puis le foncteur  $\mathbb{G}r \xrightarrow{Fl} \widehat{\mathbb{E}ns}$ , défini par  $\{G_1 \xrightarrow[s]{s} G_0\} \longmapsto G_1$  envoie

$$\coprod_{G_0, G_1 \in |\mathbb{G}|} \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G_1)(n) \xrightarrow[s]{s} |\mathbb{G}|$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

sur  $\coprod_{G_0, G_1 \in |\mathbb{G}|} \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G_1)(n)$ , donc on obtient le foncteur

$$\text{Cat}(\text{Ens-Gr}) \xrightarrow{\text{Cat}(Fl \circ \chi)} \text{Cat}(\widehat{\text{Ens}}) \supset \text{Cat}$$

( $\chi$  et  $Fl$  commutent aux produits fibrés), qui envoie  $\text{Cat}(\varphi(ev_n))(\text{int}(\overline{\mathbb{G}}))$  sur

$$\coprod_{G_0, G_1 \in |\mathbb{G}|} \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G_1)(n) \xrightarrow{\quad \leftarrow \quad \rightarrow \quad} \coprod_{f_0, f_1 \in \infty\text{-Gr}(1)} \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}^2}(f_0, f_1)(n)$$

qui désigne la catégorie  $(n, \infty)\text{-Gr}$ , des  $\infty$ -graphes  $n$ -cellulaires (cette catégorie est décrite plus intuitivement après la proposition 7).

Ce procédé de construction est général et s'étend aux catégories internes de  $\mathbb{G}\text{-Gr}$  :

**Proposition 7** *Si  $J$  est une catégorie interne de  $\mathbb{G}\text{-Gr}$  alors on lui associe canoniquement :*

- $\forall n \in \mathbb{N}$ , une catégorie  $J_n$
- une catégorie globulaire  $J_*$  formée des catégories  $J_n$ , ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**Preuve**

- La formation de ces catégories a été décrite précédemment pour la catégorie interne  $\text{int}(\overline{\mathbb{G}})$ . Pour une catégorie interne  $J$  quelconque de  $\mathbb{G}\text{-Gr}$  on procède de la même manière : il suffit de lui appliquer le foncteur  $(ev_n)^* := \text{Cat}(Fl \circ \chi) \circ \text{Cat}(\varphi(ev_n))$  pour obtenir  $J_n := (ev_n)^*(J)$ .
- Pour définir la catégorie globulaire  $J_*$ , on considère tout d'abord l'esquisse  $\mathcal{G}$  des  $\infty$ -graphes réflexifs (esquisse qui n'a pas de cônes), et le foncteur de réalisation  $\infty\text{-Gr}(-) := \text{réal}(\mathcal{G}; -)$  (qui est aussi un 2-foncteur strict). Il suffit ensuite de considérer l'ensemble des foncteurs  $(ev_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , avec les transformations naturelles évidentes

$$\left( \begin{array}{ccc} & \text{but} & \\ & \leftarrow \text{identité} \rightarrow & \\ ev_n & & ev_{n+1} \\ & \leftarrow \text{source} \rightarrow & \\ & & \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

qui forment un  $\infty$ -graphe réflexif  $\Sigma$  interne de  $\text{Funct}(\infty\text{-Gr}, \text{Ens})$ . Ensuite on considère l' $\infty$ -graphe réflexif

$$\infty\text{-Gr}(\varphi)(\Sigma) = \left( \begin{array}{ccc} & \text{but} & \\ & \leftarrow \text{identité} \rightarrow & \\ \varphi(ev_n) & & \varphi(ev_{n+1}) \\ & \leftarrow \text{source} \rightarrow & \\ & & \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

interne de  $\text{Funct}(\mathbb{G}\text{-Gr}, \mathbb{E}\text{ns-Gr})$ , obtenue grâce au foncteur

$$\infty\text{-Grr}(\text{Funct}(\infty\text{-Gr}; \mathbb{E}\text{ns})) \xrightarrow{\infty\text{-Grr}(\varphi)} \infty\text{-Grr}(\text{Funct}(\mathbb{G}\text{-Gr}; \mathbb{E}\text{ns-Gr}))$$

( $\varphi$  étant le foncteur de la proposition 3). Enfin  $J_*$  est obtenue en appliquant le foncteur  $\text{Cat}(Fl \circ \chi)$  à l'évaluation en  $\text{int}(\overline{\mathbb{G}})$  de l' $\infty$ -graphe réflexif interne

$$\left( \begin{array}{ccc} & \text{but} & \\ \text{Cat}(\varphi(e\nu_n)) & \xrightarrow{\text{identité}} & \text{Cat}(\varphi(e\nu_{n+1})) \\ & \text{source} & \end{array} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

de  $\infty\text{-Grr}(\text{Funct}(\text{Cat}(\mathbb{G}\text{-Gr}), \text{Cat}(\mathbb{E}\text{ns-Gr})))$ . ■

Donc on peut associer à  $\text{int}(\overline{\mathbb{G}})$  les catégories des  $\infty$ -graphes  $n$ -cellulaires ( $n, \infty$ )-Gr ( $n \in \mathbb{N}$ ) et la catégorie globale des  $\infty$ -graphes  $(*, \infty)$ -Gr. Ainsi un  $\infty$ -graphe  $n$ -cellulaire peut-être vu comme un triplet  $(G_0, G_1, \gamma)$  tels que  $G_0$  et  $G_1$  sont des  $\infty$ -graphes et  $\gamma \in \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, G_1)(n)$ .

Un morphisme d' $\infty$ -graphes  $n$ -cellulaires se décrit de la manière suivante :

$(G_0, G_1, \gamma) \xrightarrow{f} (G'_0, G'_1, \gamma')$  est donné par un couple de morphismes d' $\infty$ -

graphes  $(G_0 \xrightarrow{f_0} G'_0, G_1 \xrightarrow{f_1} G'_1)$ , tels que  $f_1 \circ \gamma = \gamma' \circ f_0$  (pour  $n \geq 1$   $f_1 \circ \gamma = \{f_1(\gamma(a))/a \in G(0)\}$  et  $\gamma' \circ f_0 = \{\gamma'(f_0(a))/a \in G(0)\}$ ). Dans ce cas on dira que  $f_0$  et  $f_1$  font commuter le diagramme  $n$ -cellulaire formé par  $(G_0, G_1, \gamma)$  et  $(G'_0, G'_1, \gamma')$ .

**Remarque 2** Il est important de remarquer que  $f_1 \circ \gamma = \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(G_0, f_1)(\gamma)$  (voir § 3.1), de même  $\gamma' \circ f_0 = \text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(f_0, G'_1)(\gamma')$ . Dans la suite, ces opérations entre morphismes d' $\infty$ -graphes et objets  $n$ -cellulaires seront la plupart du temps notés sans symbole, le contexte écartera tous risque de confusion.

**Remarque 3** La catégorie globale augmentée des  $\infty$ -graphes  $(*, \infty)\text{-}\overline{\text{Gr}}$ , se construit à partir de  $(*, \infty)\text{-Gr}$  en y ajoutant la catégorie des  $\infty$ -graphes avec les applications sources et buts adéquats, et en renumérotant, de telle sorte que « l'étage 0 » soit la catégorie des  $\infty$ -graphes. Il va de soi qu'avec une telle renumérotation, un  $\infty$ -graphe  $n$ -cellulaire de  $(*, \infty)\text{-Gr}$  correspond à un  $\infty$ -graphe  $(n + 1)$ -cellulaire de  $(*, \infty)\text{-}\overline{\text{Gr}}$ , etc.

**Remarque 4** La catégorie globulaire  $(*, \infty)\text{-Gr}$  a deux  $\infty$ -graphes réflexifs sous-jacents,  $\infty\text{-Grr}(Fl)((*, \infty)\text{-Gr})$  et  $\infty\text{-Grr}(Ob)((*, \infty)\text{-Gr})$ , où par exemple  $\infty\text{-Grr}(Ob)((*, \infty)\text{-Gr})$  provient du foncteur  $\infty\text{-Grr}(Ob(-))$ , qui est le foncteur  $\infty\text{-Grr}(-)$  de la proposition 7 appliqué au foncteur objet  $\text{Cat} \xrightarrow{\text{Ob}} \text{Ens}$ .

L' $\infty$ -graphe réflexif  $\infty\text{-Grr}(Ob(-))$  sera aussi noté  $(*, \infty)\text{-Gr}$  et au § 6.2 on utilisera les  $\infty$ -graphes réflexifs  $(*, \infty)\text{-Cat}$ ,  $(*, \infty)\text{-Mag}$ , et  $(*, \infty)\text{-EtC}$ , obtenu de cette manière.

### 3.3 Les catégories d' $\infty$ -magmas $n$ -cellulaires ( $n \in \mathbb{N}$ )

Les  $\infty$ -magmas sont définis dans [18]. Un  $\infty$ -magma  $n$ -cellulaire est un  $\infty$ -graphe  $n$ -cellulaire

$$(M_0, M_1, \gamma) \in (n, \infty)\text{-Gr}(0)$$

tels que  $M_0$  et  $M_1$  sont des  $\infty$ -magmas. Un morphisme d' $\infty$ -magmas  $n$ -cellulaires

$$(M_0, M_1, \gamma) \xrightarrow{f} (M'_0, M'_1, \gamma')$$

est formé par un couple de morphismes d' $\infty$ -magmas

$$(M_0 \xrightarrow{f_0} M'_0, M_1 \xrightarrow{f_1} M'_1)$$

tels que  $f_0$  et  $f_1$  font commuter le diagramme  $n$ -cellulaire formé par les triplets  $(M_0, M_1, \gamma)$  et  $(M'_0, M'_1, \gamma')$ , i.e. tels que  $f_1 \gamma = \gamma' f_0$ . La catégorie des  $\infty$ -magmas  $n$ -cellulaires sera notée  $(n, \infty)\text{-Mag}$ . Elle peut aussi être obtenue grâce aux propositions 2 et 7 : le foncteur oubli  $\infty\text{-Mag} \xrightarrow{\text{oubli}} \infty\text{-Gr} = \overline{\mathbb{G}}$  produit une catégorie interne de  $\mathbb{G}\text{-Cat}$  donc aussi une catégorie interne de  $\mathbb{G}\text{-Gr}$ , avec laquelle on peut associer pour tous  $n \in \mathbb{N}$  la catégorie  $(n, \infty)\text{-Mag}$  et une catégorie globulaire  $(*, \infty)\text{-Mag}$ . Dans ce contexte la catégorie  $\mathbb{G}$ -enrichie  $M = \overline{\mathbb{G}}[\infty\text{-Mag}(0)]$ , produit par l'application  $\infty\text{-Mag}(0) \xrightarrow{\text{oubli}} \infty\text{-Gr}(0)$  (grâce à la proposition 2, et où avec les notations adoptées on a successivement  $\mathbb{G}(0) = \overline{\mathbb{G}}(0) = |\overline{\mathbb{G}}|$ ), aura des homs qui seront notés  $\text{Hom}_M(M_0, M_1)$ , et bien sûr  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{G}}}(M_0, M_1) = \text{Hom}_M(M_0, M_1)$ , si  $M_0$  et  $M_1$  sont des  $\infty$ -magmas.

Comme dans la remarque 3, on définit facilement la catégorie globulaire augmentée  $(*, \infty)\text{-Mag}$  des  $\infty$ -magmas.



### 3.4 Structure cartésienne fermée sur $\infty\text{-Cat}$

$\infty\text{-Cat}$  étant la catégorie des  $\infty$ -catégories strictes, on montre qu'elle est cartésienne fermée en procédant comme  $\infty\text{-Gr}$ , i.e. en construisant explicitement ces homs. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soient  $C_0$  et  $C_1$  deux  $\infty$ -catégories strictes, et  $\gamma \in \text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)(n)$ . Notons  $\gamma_0 = d_0^n(\gamma)$ ,  $\gamma_1 = c_0^n(\gamma)$ . On considère les  $\gamma$  vérifiant les propriétés suivantes :

- $\forall t \geq n$  ( $t \in \mathbb{N}$ ),  $\forall x \in C_0(t)$ , tel que  $s'_0(x) = a$ ,  $b'_0(x) = b$  :

$$\gamma_1(x) \circ'_0 1'_t(\gamma(a)) = 1'_t(\gamma(b)) \circ'_0 \gamma_0(x)$$

- $\forall p \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\forall t \geq p$ ,  $\forall x \in C_0(t)$ , tel que  $s'_0(x) = a$ ,  $b'_0(x) = b$  :

$$\gamma_1(x) \circ'_0 1'_t(d_p^n(\gamma)(a)) = 1'_t(d_p^n(\gamma)(b)) \circ'_0 \gamma_0(x)$$

$$\gamma_1(x) \circ'_0 1'_t(c_p^n(\gamma)(a)) = 1'_t(c_p^n(\gamma)(b)) \circ'_0 \gamma_0(x)$$

Cet ensemble est noté  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)(n)$  (on verra ci-après le pourquoi de cette notation). Si on suppose que  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)(0)$  est l'ensemble des  $\infty$ -foncteurs stricts entre  $C_0$  et  $C_1$ , alors on vérifie facilement que la famille d'ensembles  $(\text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)(n))_{n \in \mathbb{N}}$ , avec les restrictions des applications  $d_{n-1}^n$  et  $c_{n-1}^n$  à ces ensembles, forment un  $\infty$ -graphe que l'on note  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)$ . On peut le rendre réflexif en associant pour tous  $\gamma \in \text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)(n)$  la  $(n+1)$ -cellule  $\text{id}_{n+1}^n(\gamma)$ , défini par :  $\forall a \in C_0(0)$ ,  $\text{id}_{n+1}^n(\gamma)(a) := 1_{\gamma(a)}$ . Reste à lui mettre des compositions qui seront notées  $\otimes_p^n$  ( $0 \leq p < n$ ). Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et soient  $\gamma, \gamma' \in \text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)(n)$ , et supposons que pour  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  on a  $d_p^n(\gamma') = c_p^n(\gamma)$ . Dans ce cas  $\gamma' \otimes_p^n \gamma$  sera la  $n$ -cellule  $(\gamma' \otimes_p^n \gamma)(a) := \gamma'(a) \circ_p^n \gamma(a)$  (ici  $a \in C_0(0)$ ). Muni de ces compositions,  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)$  est une  $\infty$ -catégorie stricte et on a alors la :

**Proposition 8**  $\infty\text{-Cat}$  est cartésienne fermée.

Notons  $\mathbb{C}$  la catégorie cartésienne fermée ainsi obtenue,  $\overline{\mathbb{C}}$  sa catégorie auto-enrichie,  $\mathbb{C}\text{-Cat}$  la catégorie des catégories  $\mathbb{C}$ -enrichies, et  $\text{int}(\overline{\mathbb{C}})$  la catégorie interne associé à  $\overline{\mathbb{C}}$  grâce à la proposition 1. Les homs de  $\overline{\mathbb{C}}$  seront donc les  $\text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)$  précédents.

On peut construire les catégories dites d' $\infty$ -catégories strictes cellulaires  $(n, \infty)\text{-Cat}$  ( $n \in \mathbb{N}$  et  $(n, \infty)\text{-Cat}$  sera la catégorie des  $\infty$ -catégories strictes  $n$ -cellulaires), et une catégorie globulaire  $(*, \infty)\text{-Cat}$ , en utilisant la proposition 7 comme suit :  $\infty\text{-Cat} \xrightarrow{U} \infty\text{-Gr}$  commute aux produits fibrés, donc

$\mathbb{C}\text{-Cat} \xrightarrow{U_*} \mathbb{G}\text{-Cat}$  commute aux produits fibrés, donc  $U_*(\text{int}(\overline{\mathbb{C}}))$  est une catégorie interne de  $\mathbb{G}\text{-Cat}$ , donc aussi une catégorie interne de  $\mathbb{G}\text{-Gr}$ , à laquelle on applique la proposition 7.

On peut aussi parler de sa catégorie globulaire augmentée  $(*, \infty)\text{-}\overline{\mathbb{C}}\text{at}$ .

Les objets de  $(n, \infty)\text{-Cat}$  sont des triplets  $(C_0, C_1, \gamma)$ , tels que  $C_0$  et  $C_1$  sont des  $\infty$ -catégories strictes et  $\gamma \in \text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(C_0, C_1)(n)$ . Il est important de remarquer que  $(n, \infty)\text{-Cat}$  est une sous-catégorie pleine de  $(n, \infty)\text{-Mag}$ .

### 3.5 Les catégories d'étirements catégoriques $n$ -cellulaires ( $n \in \mathbb{N}$ )

Les étirements et les étirements catégoriques sont définis dans [18]. Un étirement catégorique est ici noté avec un quadruplet  $E = (M, C, \pi, \phi)$  où en particulier on se donne le morphisme d' $\infty$ -magma  $M \xrightarrow{\pi} C$ . Les lois crochets de [18] sont ici notées avec la lettre  $\phi$ . Ainsi la cellule de cohérence notée dans [18] par  $[y, z]$  sera notée ici  $\phi[y, z]$ . La catégorie des étirements sera notée  $\mathbb{E}t$ , et celle des étirements catégoriques  $\mathbb{E}tC$ .

Dans ce qui suit on va construire la catégorie enrichie des étirements, que l'on notera  $Et$ , puis la catégorie enrichie des étirements catégoriques que l'on notera  $EtC$ .

Le foncteur oubli canonique  $\mathbb{C} \xrightarrow{U} \mathbb{G}$  est un foncteur monoïdal. En effet, si on se donne  $C, C' \in \infty\text{-Cat}(0)$ , alors la collection des morphismes d' $\infty$ -graphes

$$U(C) \otimes U(C') \xrightarrow{U_{C,C'}} U(C \times C'), \quad I \longrightarrow U(J)$$

vérifient les axiomes faisant de  $U$  un foncteur monoïdal. Ici  $I$  désigne l'objet unité de  $\mathbb{G}$  et est donné par

$$I = \dots \emptyset \rightrightarrows \emptyset \rightrightarrows \{0\},$$

et  $J$  est l'objet unité de  $\mathbb{C}$  avec

$$J = \dots \{0\} \rightrightarrows \{0\} \rightrightarrows \{0\}.$$

$U_{C,C'}$  est défini de la façon suivante :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on se donne l'application

$$(U(C) \otimes (U(C')))(n) \xrightarrow{U_{C,C'}(n)} U(C \times C')(n)$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

et si  $(x, y) \in C(n) \times C'(0)$ , alors  $U_{C,C'}(n)(x, y) = (x, 1_n^0(y))$ , et si  $(x, y) \in C(0) \times C'(n)$ , alors  $U_{C,C'}(n)(x, y) = (1_n^0(x), y)$ .

Donc la proposition 5 entraîne l'existence d'un foncteur enrichi canonique dans  $\mathbb{G}$

$$U_*(\overline{\mathbb{C}}) \longrightarrow \overline{\mathbb{G}},$$

tel que  $U_*$  soit le foncteur  $\mathbb{C}\text{-Cat} \xrightarrow{U_*} \mathbb{G}\text{-Cat}$  associé à  $U$ .

D'autre part la proposition 4 appliquée à l'application

$$|\text{Et}| \xrightarrow{V} |\overline{\mathbb{G}}^2|$$

dit que  $V$  induit un foncteur enrichi pleinement fidèle

$$\overline{\mathbb{G}}^2[|\text{Et}|] := \text{Et} \xrightarrow{V_*} \overline{\mathbb{G}}^2.$$

Donc si on considère le foncteur enrichi  $\delta_1$ , obtenu en construisant  $\overline{\mathbb{G}}^2$  (de la proposition 1)

$$\overline{\mathbb{G}}^2 \xrightarrow{\delta_1} \overline{\mathbb{G}}$$

alors on obtient le diagramme suivant de  $\mathbb{G}\text{-Cat}$ , avec son carré cartésien enrichi :

$$\begin{array}{ccc} \text{EtC} & \xrightarrow{\pi_1} & U_*(\overline{\mathbb{C}}) \\ \pi_0 \downarrow & & \downarrow U \\ \text{Et} & \xrightarrow{\delta_1 \circ V_*} & \overline{\mathbb{G}}. \end{array}$$

En particulier  $|\text{EtC}| = |\text{EtC}|$  et, si

$$\begin{cases} E_0 = (M_0, C_0, \pi_0, \phi_0) \\ E_1 = (M_1, C_1, \pi_1, \phi_1) \end{cases}$$

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

sont deux étirements catégoriques, alors  $\text{Hom}_E(E_0, E_1)$  (hom de  $\text{EtC}$ ) est l' $\infty$ -graphe, tel que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $\gamma \in \text{Hom}_E(E_0, E_1)(n)$ , alors  $\gamma$  est formé de deux éléments

$$\begin{cases} \gamma_M \in \text{Hom}_M(M_0, M_1)(n) \\ \gamma_C \in \text{Hom}_{U_*(\overline{\mathbb{C}})}(C_0, C_1)(n) \end{cases}$$

(hom de  $U_*(\overline{\mathbb{C}})$ ), de telle sorte que  $\pi_0$  et  $\pi_1$  font commuter le diagramme  $n$ -cellulaire formé par  $(M_0, M_1, \gamma_M)$  et  $(C_0, C_1, \gamma_C)$ , i.e.  $\gamma_C \circ \pi_0 = \pi_1 \circ \gamma_M$  (voir la remarque 2). On pourra ainsi dire rapidement que  $\gamma$  est donné par un couple  $(\gamma_M, \gamma_C)$ , sous-entendu que  $\gamma_M$  et  $\gamma_C$  font commuter le diagramme  $n$ -cellulaire correspondant (ce type d'abréviation est en particulier utilisé en 6.2.3).

Passons à la définition de la catégorie des étirements catégoriques  $n$ -cellulaires ( $n \in \mathbb{N}$ ) (on utilise les mêmes notations que précédemment). La catégorie  $\underline{\text{EtC}}$  a les mêmes objets que ceux de  $\text{EtC}$ , et a pour morphismes les flèches du type  $E_0 \xrightarrow{f=(f_M, f_C)} E_1$ , tels que  $M_0 \xrightarrow{f_M} M_1$  soit un morphisme d' $\infty$ -graphes,  $C_0 \xrightarrow{f_C} C_1$  soit un  $\infty$ -foncteur strict, tels que  $f_C \circ \pi_0 = \pi_1 \circ f_M$ .

Donc on a un foncteur oubli  $\text{EtC} \xrightarrow{U} \underline{\text{EtC}}$ , pour lequel on va pouvoir dérouler la machinerie précédente :  $U$  produit une catégorie interne de  $\mathbb{G}\text{-Cat}$  (proposition 2) donc aussi une catégorie interne de  $\mathbb{G}\text{-Gr}$  avec laquelle on peut associer, pour tous  $n \in \mathbb{N}$ , une catégorie  $(n, \infty)\text{-EtC}$  (proposition 7), appelée catégorie des étirements catégoriques  $n$ -cellulaires. Un objet de  $(n, \infty)\text{-EtC}$  est donné par un triplet  $(E_0, E_1, \gamma)$ , tel que  $\gamma \in \text{Hom}_E(E_0, E_1)(n)$ .

Si  $(E'_0, E'_1, \gamma')$  est un autre étirement catégorique  $n$ -cellulaire tel que  $\gamma'$  provienne d'un couple  $(\gamma'_M, \gamma'_C)$  de  $\text{Hom}_M(M'_0, M'_1)(n) \times \text{Hom}_{U_*(\overline{\mathbb{C}})}(C'_0, C'_1)(n)$ , alors un morphisme de  $(n, \infty)\text{-EtC}$

$$(E_0, E_1, \gamma) \xrightarrow{f} (E'_0, E'_1, \gamma')$$

est donné par un couple  $(f_M, f_C)$  formé d'un morphisme

$$(M_0, M_1, \gamma_M) \xrightarrow{f_M} (M'_0, M'_1, \gamma'_M)$$

de  $(n, \infty)\text{-Mag}$  (où on pose  $f_M = (f_{M,0}, f_{M,1})$ ), et d'un morphisme

$$(C_0, C_1, \gamma_C) \xrightarrow{f_C} (C'_0, C'_1, \gamma'_C)$$

de  $(n, \infty)$ -Cat (où on pose  $f_C = (f_{C,0}, f_{C,1})$ ), tels que  $E_0 \xrightarrow{(f_{M,0}, f_{C,0})} E'_0$  et  $E_1 \xrightarrow{(f_{M,1}, f_{C,1})} E'_1$  sont des morphismes d'étirements catégoriques.

Signalons enfin que l'on notera  $(*, \infty)$ -EtC la catégorie globulaire associée à  $U$  et qu'on peut bien sûr parler ensuite de sa catégorie globulaire augmentée  $(*, \infty)$ -EtC.

**Remarque 5** Lorsqu'une cellule  $x \in M(n)$  est transformée par  $\pi$  en une cellule identité (par exemple si  $x$  est une cellule de cohérence i.e. de la forme  $\phi[y, z]$ ), alors on dira que  $x$  est normalisé par  $\pi$ . Cette terminologie sera utilisée aux § 5 traitant des calculs en dimension 2.

### 3.6 Quelques foncteurs remarquables

Avec les notations précédentes, les constructions :

$$(n, \infty)\text{-EtC} \xrightarrow{U_{n\text{-Mag}}^{n\text{-EtC}}} (n, \infty)\text{-Mag}$$

$$(E_0, E_1, \gamma) \mapsto (M_0, M_1, \gamma_M)$$

et :

$$(n, \infty)\text{-EtC} \xrightarrow{U_{n\text{-Cat}}^{n\text{-EtC}}} (n, \infty)\text{-Cat}$$

$$(E_0, E_1, \gamma) \mapsto (C_0, C_1, \gamma_C)$$

sont fonctorielles. En particulier on utilisera le foncteur oublié  $U^n$  donné par le composé

$$(n, \infty)\text{-EtC} \xrightarrow{U_{n\text{-Mag}}^{n\text{-EtC}}} (n, \infty)\text{-Mag} \xrightarrow{V_n} (\infty\text{-Gr})^2$$

avec  $(M_0, M_1, \alpha) \xrightarrow{V_n} (M_0, M_1)$ .

## 4 Les catégories d'algèbres

### 4.1 Les adjonctions : $E^n \dashv U^n$

**Proposition 9** *Le foncteur  $U^n$  précédent a un adjoint à gauche :  $E^n \dashv U^n$ .*

**Preuve** On va utiliser le théorème du faisceau associé de [11]. On montre facilement que les étirements catégoriques  $n$ -cellulaires sont projectivement esquissables, ainsi que les objets de  $(\infty\text{-Gr})^2$ . Notons respectivement  $\mathcal{E}_n$  et  $\mathcal{G}$  leurs esquisses projectives. On voit immédiatement que  $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}_n$ , donc le foncteur obtenu par réalisation  $\text{Mod}(\mathcal{E}_n) \xrightarrow{V^n} \text{Mod}(\mathcal{G})$ , a un adjoint à gauche  $F^n \dashv V^n$ . D'autre part on montre que  $\text{Mod}(\mathcal{E}_n) \simeq (n, \infty)\text{-EtC}$ , et  $\text{Mod}(\mathcal{G}) \simeq (\infty\text{-Gr})^2$ . Donc la commutativité qui résulte de ces équivalences

$$\begin{array}{ccc} \text{Mod}(\mathcal{E}_n) & \xrightarrow{V^n} & \text{Mod}(\mathcal{G}) \\ \downarrow \wr & \square & \downarrow \wr \\ (n, \infty)\text{-EtC} & \xrightarrow{U^n} & (\infty\text{-Gr})^2 \end{array}$$

donne l'adjoint à gauche  $E^n$  de  $U^n$  ;  $\eta^n$  désignera l'unité et  $\varepsilon^n$  la counité de cette adjonction. ■

Si  $G \in (\infty\text{-Gr})^2(0)$ , alors  $\eta^n(G) \in (\infty\text{-Gr})^2(1)$ , donc on notera  $\eta^n(G) = (\eta_0^n(G), \eta_1^n(G))$ , tels que  $\eta_0^n(G), \eta_1^n(G) \in \infty\text{-Gr}(1)$ . Sa monade correspondante sera notée  $(T^n, \mu^n, \eta^n)$ . Comme précédemment, pour  $G \in (\infty\text{-Gr})^2(0)$  on notera  $\mu^n(G) = (\mu_0^n(G), \mu_1^n(G))$ .

La catégorie des algèbres d'Eilenberg-Moore associée à cette monade se notera  $\text{Alg}(T^n)$  (voir [17] pour sa définition), et les objets de cette catégorie s'appelleront des  $T^n$ -algèbres. Ainsi, comme on l'a dit à l'introduction, les  $T^0$ -algèbres correspondront aux  $\infty$ -foncteurs non-stricts, les  $T^1$ -algèbres aux  $\infty$ -transformations naturelles non-strictes etc. La monade des  $\infty$ -catégories non strictes de Penon sera simplement notée  $(T, \mu, \eta)$ , et la catégorie de ces algèbres sera notée  $\text{Alg}(T)$ .

Ce qui est surprenant pour les  $T$ -algèbres c'est que seule l'existence d'un adjoint à gauche permet de montrer les propriétés bicatégoriques que l'on souhaite (en dimension 2), et pour cela il n'y a pas besoin de construire explicitement la monade correspondante de cet adjoint. On verra qu'il en est de même, en dimension 2, pour les propriétés pseudo-2-fonctorielles des  $T^0$ -algèbres et pour les propriétés de pseudo-2-transformations naturelles des  $T^1$ -algèbres.

## 4.2 Foncteurs remarquables et notations pour les structures libres

Il faut bien voir que l'étirement catégorique  $n$ -cellulaire libre  $E^n(G)$  est formé de deux étirements catégoriques

$$E_0^n(G) = (M_0^n(G), C_0^n(G), \pi_0^n(G), \phi_0^n(G))$$

$$E_1^n(G) = (M_1^n(G), C_1^n(G), \pi_1^n(G), \phi_1^n(G))$$

et d'une  $n$ -cellule

$$\gamma^n(G) \in \text{Hom}_E(E_0^n(G), E_1^n(G))(n)$$

avec  $M_0^n(G) \xrightarrow{\pi_0^n(G)} C_0^n(G)$  et  $M_1^n(G) \xrightarrow{\pi_1^n(G)} C_1^n(G)$ , qui sont les morphismes d' $\infty$ -magma correspondants. Donc  $\gamma^n(G)$  est donné par un couple

$$(\gamma_M^n(G), \gamma_C^n(G)) \in \text{Hom}_M(M_0^n(G), M_1^n(G))(n) \times \text{Hom}_{U, \overline{\mathbb{C}}}(C_0^n(G), C_1^n(G))(n)$$

qui vérifie  $\pi_1^n(G) \circ \gamma_M^n(G) = \gamma_C^n(G) \circ \pi_0^n(G)$  (voir la remarque 2).

On considère le foncteur  $\mathbb{A}lg(T^n) \xrightarrow{M_n} (n, \infty)\text{-Gr}$ , défini par :

$$(G = (G_0, G_1), \nu = (\nu_0, \nu_1)) \longmapsto (G_0, G_1, \nu_1 \circ \gamma_M^n(G) \circ \eta_0^n(G))$$

qui sera utilisé en particulier lorsque l'on montrera que les  $T^n$ -algèbres se structurent en morphismes d' $\infty$ -magmas  $n$ -cellulaires (§ 4.5). Les compositions du genre  $\nu_1 \circ \gamma_M^n(G) \circ \eta_0^n(G)$ , sont bien sûr les « compositions » entre morphismes d' $\infty$ -graphes et objets  $n$ -cellulaires dont on a parlé dans la remarque 2.

On posera aussi :

$$(\infty\text{-Gr})^2 \xrightarrow{U_n^{\text{Gr}} := U_n^{\text{EIC}} \circ E^n} (n, \infty)\text{-Mag}$$

et

$$(\infty\text{-Gr})^2 \xrightarrow{U_n^{\text{Gr-Cat}} := U_n^{\text{EIC}} \circ E^n} (n, \infty)\text{-Cat}$$

Les notations pour la dimension 2 sont les suivantes :

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

- Si  $(G, \nu)$  est une  $T^0$ -algèbre, on notera

$$U_{0-\text{Mag}}^{0-\text{Gr}}(G) = (M_0^0(G), M_1^0(G), F_M^0(G))$$

où bien sûr  $F_M^0(G) \in \text{Hom}_M(M_0^0(G), M_1^0(G))(0)$ , et pour  $M_0((G, \nu)) = (G_0, G_1, \nu_1 \circ F_M^0(G) \circ \eta_0^0(G))$ , on notera  $F^0 = \nu_1 \circ F_M^0(G) \circ \eta_0^0(G)$ . Cette notation fait référence à la structure de pseudo-2-foncteur que l'on mettra sur  $F^0$  au § 5.2.

On notera aussi  $U_{0-\text{Cat}}^{0-\text{Gr}}(G) = (C_0^0(G), C_1^0(G), F_C^0(G))$ .

- Si  $(G, \nu)$  est une  $T^1$ -algèbre, on notera

$$U_{1-\text{Mag}}^{1-\text{Gr}}(G) = (M_0^1(G), M_1^1(G), \tau_M^1(G))$$

où  $\tau_M^1(G) \in \text{Hom}_M(M_0^1(G), M_1^1(G))(1)$  et pour

$$M_1((G, \nu)) = (G_0, G_1, \nu_1 \circ \tau_M^1(G) \circ \eta_0^1(G))$$

on notera  $\tau^1 = \nu_1 \circ \tau_M^1(G) \circ \eta_0^1(G)$ . Cette notation fait référence à la structure de pseudo-2-transformation naturelle que l'on mettra sur  $\tau^1$  au § 5.3. On notera aussi  $U_{1-\text{Cat}}^{1-\text{Gr}}(G) = (C_0^1(G), C_1^1(G), \tau_C^1(G))$ .

- De la même manière on proposera au § 5.4 pour les  $T^2$ -algèbres des notations analogues qui feront références aux pseudo-2-modifications.

### 4.3 Domaines et codomaines des algèbres

Notons  $\text{Adj}$  la catégorie ayant pour objets les adjonctions  $(F, G, \eta, \varepsilon)$  tels que  $C \xrightarrow{F} A$ , soit l'adjoint à gauche, et ayant pour morphisme

$$(F, G, \eta, \varepsilon) \xrightarrow{f} (F', G', \eta', \varepsilon')$$

les couples de foncteurs

$$(A \xrightarrow{h} A', C \xrightarrow{k} C')$$

tels que  $G' \circ h = k \circ G$ . Notons  $\text{Mon}$  la catégorie dont les objets sont les catégories munies d'une monade, et dont les flèches

$$(C, (T, \mu, \eta)) \xrightarrow{\varphi} (C', (T', \mu', \eta'))$$



**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

sont les couples  $\varphi = (Q, t)$ , tel que  $C \xrightarrow{Q} C'$  est un foncteur, et  $t$  une transformation naturelle de la forme  $T'Q \xrightarrow{t} QT$ . D'autre part  $t$  doit être compatible avec les multiplications et les identités des monades, i.e. on doit avoir les deux diagrammes commutatifs suivants :

$$(\text{Mon}_1) : \begin{array}{ccc} T'^2Q & \xrightarrow{T't} & T'QT \xrightarrow{tT} & QT^2 \\ \mu'Q \downarrow & & \square & \downarrow Q\mu \\ T'Q & \xrightarrow{t} & QT, & \end{array}$$

$$(\text{Mon}_2) : \begin{array}{ccc} Q & & \\ \eta'Q \downarrow & \searrow^{Q\eta} & \\ T'Q & \xrightarrow{t} & QT. \end{array}$$

La composition dans  $\text{Adj}$  et ces morphismes identités sont évidents à définir. Pour  $\text{Mon}$ , seule la composition est moins évidente à définir. Si on se donne le diagramme

$$(C, (T, \mu, \eta)) \xrightarrow{(Q,t)} (C', (T', \mu', \eta')) \xrightarrow{(Q',t')} (C'', (T'', \mu'', \eta''))$$

alors on posera  $(Q', t') \circ (Q, t) := (Q' \circ Q, Q't \circ t'Q)$  (ici  $\circ$  est le produit vertical des transformations naturelles). Aussi on a le foncteur canonique  $\text{Adj} \xrightarrow{U} \text{Mon}$ ,  $(F, G, \eta, \varepsilon) \longmapsto (C, (G \circ F, G\varepsilon F, \eta))$ , défini sur les flèches par

$$\begin{array}{ccc} [(F, G, \eta, \varepsilon)] & \xrightarrow{(h,k)} & [(F', G', \eta', \varepsilon')] \\ \downarrow & & \\ [(C, (G \circ F, G\varepsilon F, \eta))] & \xrightarrow{(k,t)} & [(C', (G' \circ F', G'\varepsilon'F', \eta'))] \end{array} ,$$

avec  $t := G'(\varepsilon'hF \circ F'k\eta)$ . Avec ceci on a la :

**Proposition 10** *U a un adjoint à droite :  $U \dashv A$ .*

**Preuve**  $A$  est défini sur les objets par la construction d'Eilenberg-Moore. Soit  $(C, (T, \mu, \eta)) \in \text{Mon}(0)$  ; notons  $A(C, (T, \mu, \eta)) = (F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T)$ . Avec

ces notations on définit  $A$  sur les flèches :

$$\begin{array}{ccc} [(C, (T, \mu, \eta))] & \xrightarrow{(Q, \iota)} & (C', (T', \mu', \eta')) \\ & \downarrow A & \\ [(F^T, G^T, \mu^T, \eta^T)] & \xrightarrow{(Q', Q)} & (F'^{T'}, G'^{T'}, \mu'^{T'}, \eta'^{T'}) \end{array}$$

tel que le foncteur  $\text{Alg}(T) \xrightarrow{Q^*} \text{Alg}(T')$  est défini :

– sur les objets par  $(G, \nu) \mapsto (Q(G), Q(\nu) \circ t(G))$

– sur les flèches par  $[(G, \nu) \xrightarrow{f} (G', \nu')] \mapsto Q(f)$ .

L'unité de l'adjonction  $U \dashv A$  est donnée par le foncteur de comparaison d'Eilenberg-Moore  $K$ . Si on note cette unité  $1_{\text{Adj}} \xrightarrow{c} A \circ U$ , alors  $c((F, G, \eta, \varepsilon)) = (Id_C, K) : (F, G, \eta, \varepsilon) \longrightarrow (F^T, G^T, \mu^T, \eta^T)$ , et la counité de cette adjonction est donnée par  $U \circ A \xrightarrow{1_{Id_{\text{Mon}}}} Id_{\text{Mon}}$ .

#### 4.4 Applications aux adjonctions : $E^n \dashv U^n$ ( $n \in \mathbb{N}$ )

La catégorie globulaire  $(*, \infty)\text{-EtC}$  et les adjonctions  $E^n \dashv U^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) permettent de construire un  $\infty$ -graphe réflexif interne de  $\text{Adj}$  de la forme :

$$\begin{array}{ccccc} \cdots & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \end{array} & (n, \infty)\text{-EtC} & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \end{array} & (n-1, \infty)\text{-EtC} & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \end{array} & \cdots \\ & & \begin{array}{c} E^n \uparrow \downarrow U^n \\ \vdots \end{array} & & \begin{array}{c} E^{n-1} \uparrow \downarrow U^{n-1} \\ \vdots \end{array} & & \\ \cdots & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \end{array} & (\infty\text{-Gr})^2 & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \end{array} & (\infty\text{-Gr})^2 & \begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightleftarrows \\ \rightarrow \end{array} & \cdots \end{array}$$

tels que les morphismes de la partie inférieure de ce diagramme soient des identités.

Aussi avec le foncteur projection

$$\begin{array}{ccc} \text{Adj} & \xrightarrow{\pi_0} & \text{Cat} \\ (F, G, \eta, \varepsilon) & \mapsto & \text{dom}(G) \end{array}$$

on a successivement les foncteurs  $\text{Adj} \xrightarrow{\pi_0 \circ A \circ U} \text{Cat}$ , puis :

$$\infty\text{-Grr}(\text{Adj}) \xrightarrow{\infty\text{-Grr}(\pi_0 \circ A \circ U)} \infty\text{-Grr}(\text{Cat})$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

(le foncteur  $\infty\text{-Gr}(-)$  a été défini dans la proposition 7), qui appliquée à l' $\infty$ -graphe réflexif interne de  $\text{Adj}$  précédent permet d'obtenir la catégorie globulaire des algèbres  $\text{Alg}(T^*)$ , qui renferme tous les objets importants de cet article (sauf les  $T$ -algèbres, où il faut augmenter cette catégorie globulaire pour les y inclure. La catégorie globulaire augmentée des algèbres sera notée  $\widetilde{\text{Alg}}(T^*)$ ).

Si  $n \geq 1$ , le foncteur  $U$  appliqué aux deux adjonctions  $E^n \dashv U^n$  et  $E^{n-1} \dashv U^{n-1}$ , produit les deux transformations naturelles  $T^{n-1} \xrightarrow{\delta_{n-1}^n} T^n$  et  $T^{n-1} \xrightarrow{\kappa_{n-1}^n} T^n$  (ici  $\delta_{n-1}^n := U^{n-1}\Delta_{n-1}^n$ , avec  $\Delta_{n-1}^n := \varepsilon^{n-1}\sigma_{n-1}^n E^n \odot E^{n-1}\eta^n$ , et  $\kappa_{n-1}^n := U^{n-1}\Upsilon_{n-1}^n$ , avec  $\Upsilon_{n-1}^n := \varepsilon^{n-1}\beta_{n-1}^n E^n \odot E^{n-1}\eta^n$ ), tels que les foncteurs domaines et codomaines  $\text{Alg}(T^n) \xrightarrow[\beta_{n-1}^n]{\sigma_{n-1}^n} \text{Alg}(T^{n-1})$ , sont définis par

$$\begin{array}{c} (G = (G_0, G_1), v = (v_0, v_1)) \\ \sigma_{n-1}^n \downarrow \\ (G, v \circ \delta_{n-1}^n(G) = (v_0 \circ \delta_{n-1,0}^n(G), v_1 \circ \delta_{n-1,1}^n(G))) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{c} (G = (G_0, G_1), v = (v_0, v_1)) \\ \beta_{n-1}^n \downarrow \\ (G, v \circ \kappa_{n-1}^n(G) = (v_0 \circ \kappa_{n-1,0}^n(G), v_1 \circ \kappa_{n-1,1}^n(G))) \end{array}$$

Les  $T$ -algèbres s'invitent dans ces constructions (pour définir  $\widetilde{\text{Alg}}(T^*)$ ), de la façon suivante : les adjonctions  $E \dashv U$  et  $E^0 \dashv U^0$  produisent les deux transformations naturelles  $Tp_0 \xrightarrow{\delta} p_0T^0$  et  $Tp_1 \xrightarrow{\kappa} p_1T^0$  où  $p_0$  et  $p_1$  sont les projections de  $(\infty\text{-Gr})^2$  sur  $\infty\text{-Gr}$ . D'autre part

$$\delta := U\Delta \text{ avec } \Delta := \varepsilon\sigma E^0 \odot Ep_0\eta^0$$

et

$$\kappa := U\Upsilon, \text{ avec } \Upsilon := \varepsilon\beta E^0 \odot Ep_1\eta^0$$

et  $\sigma, \beta$  sont les applications sources et buts entre  $(0, \infty)\text{-EtC}$  et  $\text{EtC}$ .

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

Pour  $n \geq 1$  et  $G \in (\infty\text{-Gr})^2$ , on a  $\Delta_{n-1}^n(G)$  et  $\Upsilon_{n-1}^n(G) \in (n-1, \infty)\text{-EtC}(1)$ .  
Donc on peut écrire

$$\Delta_{n-1}^n(G) = (\Delta_{n-1,M}^n(G), \Delta_{n-1,C}^n(G)) \quad \text{et} \quad \Upsilon_{n-1}^n(G) = (\Upsilon_{n-1,M}^n(G), \Upsilon_{n-1,C}^n(G))$$

tels que

$$\Delta_{n-1,M}^n(G) = (\delta_{n-1,0}^n(G), \delta_{n-1,1}^n(G)) \quad \text{et} \quad \Upsilon_{n-1,M}^n(G) = (\kappa_{n-1,0}^n(G), \kappa_{n-1,1}^n(G))$$

(l'indice  $M$  indiquant que ce sont les parties « magmas » des morphismes  $\Delta_{n-1}^n(G)$ ,  $\Upsilon_{n-1}^n(G)$  d'étirements catégoriques  $(n-1)$ -cellulaires). On voit en particulier que les morphismes d' $\infty$ -graphes  $\delta_{n-1,0}^n(G)$ ,  $\delta_{n-1,1}^n(G)$ ,  $\kappa_{n-1,0}^n(G)$  et  $\kappa_{n-1,1}^n(G)$ , héritent de structure de morphismes d' $\infty$ -magmas. Ce fait est fondamental pour la suite.

Ainsi chaque  $G \in (\infty\text{-Gr})^2(0)$  produit des étirements catégoriques  $n$ -cellulaires libres  $E^n(G)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), qui sont « connectés » entre eux par les morphismes  $\Delta_{n-1}^n(G)$  et  $\Upsilon_{n-1}^n(G)$  ( $n \geq 1$ ). Par exemple on a les deux morphismes  $E^{n-1}(G) \xrightarrow{\Delta_{n-1}^n(G)} \sigma_{n-1}^n(E^n(G))$  et  $E(G_0) \xrightarrow{\Delta(G_0)} \sigma(E^0(G))$ , qui mettent à notre disposition des diagrammes commutatifs qui vont être utile pour la proposition ci-après.

Rappelons que pour  $n \geq 1$  les applications sources et buts de  $\text{Alg}(T^*)$  et  $(*, \infty)\text{-Gr}$  sont pour tous les deux notés avec les couples  $(\sigma_{n-1}^n, \beta_{n-1}^n)$ , mais ici on va utiliser une autre notation pour ceux de  $(*, \infty)\text{-Gr}$ , qui seront exceptionnellement notés  $(\tilde{\sigma}_{n-1}^n, \tilde{\beta}_{n-1}^n)$ . Rappelons que  $\tilde{\sigma}_{n-1}^n((G_0, G_1, \gamma)) = (G_0, G_1, d_{n-1}^n(\gamma))$  (quand on détail la catégorie globulaire  $(*, \infty)\text{-Gr}$ ), où  $d_{n-1}^n$  désigne une application source des homs internes. Même remarque pour  $\tilde{\beta}_{n-1}^n$ . Dans ce cas, avec les foncteurs  $M_n$  définis dans § 4.2, on a la :

**Proposition 11** *Pour tout  $n \geq 1$ , on a  $\tilde{\sigma}_{n-1}^n \circ M_n = M_{n-1} \circ \sigma_{n-1}^n$  et  $\tilde{\beta}_{n-1}^n \circ M_n = M_{n-1} \circ \beta_{n-1}^n$ .*

**Preuve** Montrons que  $\tilde{\sigma}_{n-1}^n \circ M_n = M_{n-1} \circ \sigma_{n-1}^n$  (pour l'autre égalité on procède de la même manière). Soit  $(G, \nu) \in \text{Alg}(T^n)$ , alors

$$M_n((G, \nu)) = (G_0, G_1, \nu_1 \gamma_M^n(G) \eta_0^n(G))$$

donc

$$\tilde{\sigma}_{n-1}^n(M_n((G, \nu))) = (G_0, G_1, \nu_1 d_{n-1}^n(\gamma_M^n(G)) \eta_0^n(G))$$

et de même

$$M_{n-1}(\sigma_{n-1}^n(G, \nu)) = (G_0, G_1, \nu_1 \delta_{n-1,1}^n(G) \gamma_M^{n-1}(G) \eta_0^{n-1}(G))$$

Aussi l'axiome (Mon<sub>2</sub>) (voir § 4.3) dit que  $\delta_{n-1,0}^n(G) \eta_0^{n-1}(G) = \eta_0^n(G)$ , et  $\Delta_{n-1}^n(G)$  donne un diagramme commutatif exprimant l'égalité

$$\delta_{n-1,1}^n \gamma_M^{n-1}(G) = d_{n-1}^n(\gamma_M^n(G)) \delta_{n-1,0}^n(G).$$

Donc :

$$\begin{aligned} \nu_1 d_{n-1}^n(\gamma_M^n(G)) \eta_0^n(G) &= \nu_1 d_{n-1}^n(\gamma_M^n(G)) \delta_{n-1,0}^n(G) \eta_0^{n-1}(G) \\ &= \nu_1 \delta_{n-1,1}^n(G) \gamma_M^{n-1}(G) \eta_0^{n-1}(G) \end{aligned}$$

■

## 4.5 Structuration en morphismes d' $\infty$ -magmas $n$ -cellulaires des $T^n$ -algèbres

Soit  $(G, \nu)$  une  $T^n$ -algèbre et  $M_n((G, \nu)) = (G_0, G_1, \nu_1 \circ \gamma_M^n(G) \circ \eta_0^n(G))$ , l' $\infty$ -graphe  $n$ -cellulaire produit par le foncteur  $M_n$ .

L'algèbre  $(G, \nu)$  a une  $T$ -algèbre domaine

$$(\sigma \circ \sigma_0^1 \circ \dots \circ \sigma_{n-1}^n)(G, \nu) = (G_0, \nu_0 \circ \delta_{n-1,0}^n(G) \circ \delta_{n-2,0}^{n-1}(G) \circ \dots \circ \delta_{0,0}^1(G) \circ \delta(G))$$

et une  $T$ -algèbre codomaine

$$(\beta \circ \beta_0^1 \circ \dots \circ \beta_{n-1}^n)(G, \nu) = (G_1, \nu_1 \circ \kappa_{n-1,1}^n(G) \circ \kappa_{n-2,1}^{n-1}(G) \circ \dots \circ \kappa_{0,1}^1(G) \circ \kappa(G))$$

Ces  $T$ -algèbres mettent respectivement sur  $G_0$  et  $G_1$  une structure d' $\infty$ -magma (voir [18] pour cette structure d' $\infty$ -magma), qui permet de voir  $M_n((G, \nu))$  comme un objet de  $(n, \infty)$ -Mag. On a posé également

$$U_{n\text{-Mag}}^{\text{Alg}(T^n)}((G, \nu)) = (M_0^n(G), M_1^n(G), \gamma_M^n).$$

Avec ceci on a le résultat suivant :

**Proposition 12** *Toute  $T^n$ -algèbre  $(G, \nu) \in \text{Alg}(T^n)(0)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) induit un morphisme de  $(n, \infty)$ -Mag :  $U_{n\text{-Mag}}^{\text{Alg}(T^n)}((G, \nu)) \xrightarrow{\nu} M_n((G, \nu))$ .*

Donc en particulier on obtient la commutativité du diagramme  $n$ -cellulaire formé par  $U_{n\text{-Mag}}^{\text{Alg}(T^n)}((G, \nu))$ ,  $M_n((G, \nu))$ ,  $\nu_0$  et  $\nu_1$  i.e. on a  $(\nu_1 \gamma_M^n(G) \eta_0^n(G)) \nu_0 = \nu_1 \gamma_M^n(G)$ .

On appliquera ce résultat pour les  $T^i$ -algèbres ( $i = 0, 1, 2$ ), en montrant qu'en dimension 2 elles se structurent respectivement en pseudo-2-foncteurs, pseudo-2-transformations naturelles et pseudo-2-modifications.

## 5 La dimension 2

Pour alléger l'écriture des calculs de ce chapitre on évitera de mettre des parenthèses aux endroits où il n'y a pas de risque de confusion, et parfois le symbole de composition de la catégorie  $\infty\text{-Gr}$  sera omis comme on le fait pour les opérations entre morphismes d' $\infty$ -graphes et objets  $n$ -cellulaires (voir remarque 2). D'autre part on suivra les simplifications de notations de la fin du § 2.

### 5.1 Dimensions des étirements et des algèbres

Un  $\infty$ -graphe réflexif  $G$  est de dimension  $p \in \mathbb{N}$  si toutes ces  $q$ -cellules pour  $q > p$  sont des cellules identités et s'il a au moins une  $p$ -cellule qui ne soit pas une cellule identité. Dans ce cas on notera  $\dim G = p$ . Un étirement catégorique  $n$ -cellulaire  $(E_0 = (M_0, C_0, \pi_0, \phi_0), E_1 = (M_1, C_1, \pi_1, \phi_1), \gamma)$  est de dimension  $p \in \mathbb{N}$ , si les  $\infty$ -graphes réflexifs sous-jacents de  $M_0$  et  $M_1$  sont de dimensions  $p$ . Une  $T^n$ -algèbre  $(G = (G_0, G_1), \nu = (\nu_0, \nu_1))$  est de dimension  $p$ , si  $G_0$  et  $G_1$  sont de dimensions  $p$ , lorsqu'elles sont considérées comme  $\infty$ -magmas.

Avec cela on a la proposition suivante concernant les étirements catégoriques  $j$ -cellulaires ( $j = 0, 1, 2$ ) :

**Proposition 13** *Les étirements catégoriques  $j$ -cellulaires pour  $j = 0, 1, 2$  se structurent respectivement en pseudo-2-foncteurs, pseudo-2-transformations naturelles et pseudo-2-modifications.*

La proposition 13 est facile à démontrer et fait appel à la même méthode que celle utilisée dans [18]. Les axiomes de ces structures sont décrits ci-après. En l'occurrence pour les algèbres, les vérifications de ces axiomes sont plus

subtiles, et nous en donnerons donc des démonstrations complètes (pour les axiomes les moins faciles).

## 5.2 Structuration en pseudo-2-foncteurs des $T^0$ -algèbres de dimension 2

Soit  $(G, \nu)$  une  $T^0$ -algèbre de dimension 2 (voir § 4.2 pour les notations utilisées). Posons :

$$U_{0\text{-Mag}}^{0\text{-Gr}}(G) = (M_0^0(G), M_1^0(G), F_M^0(G))$$

et

$$F^0 := \nu_1 \circ F_M^0(G) \circ \eta_0^0(G)$$

et ici  $F_M^0(G) \in \text{Hom}_M(M_0^0(G), M_1^0(G))(0)$  et  $F^0 \in \text{Hom}_{\overline{\mathcal{C}}}(G_0, G_1)(0)$ .

On sait que  $M_0^0(G) \xrightarrow{F_M^0(G)} M_1^0(G)$  n'est que le morphisme d' $\infty$ -graphes provenant de l'étirement catégorique 0-cellulaire libre  $E^0(G)$ , et grâce à la proposition 12 on sait qu'on a un morphisme d' $\infty$ -magmas 0-cellulaires  $(M_0^0(G), M_1^0(G), F_M^0(G)) \xrightarrow{\nu} (G_0, G_1, F^0)$ .

La  $T$ -algèbre source de  $(G, \nu) : \sigma((G, \nu)) = (G_0, \nu_0 \circ \delta(G))$  produit sur  $G_0$  une structure de bicatégorie qui coïncide avec celle produite par  $(G, \nu)$  sur  $G_0$  (i.e. celle où on pose  $a \circ_p^n b = \nu_0(\eta_0^0(G)(a) \star_p^n \eta_0^0(G)(b))$ ); de la même manière la  $T$ -algèbre but de  $(G, \nu) : \beta((G, \nu)) = (G_1, \nu_1 \circ \kappa(G))$ , produit sur  $G_1$  une structure de bicatégorie qui coïncide avec celle produite par  $(G, \nu)$  sur  $G_1$  (i.e. celle où on pose  $a \circ_p^n b = \nu_1(\eta_1^0(G)(a) \star_p^n \eta_1^0(G)(b))$ ). Ces coïncidences viennent de  $(\text{Mon}_2)$  et du fait que  $\delta(G)$  est un morphisme d' $\infty$ -magmas. La structure bicatégorique de ces  $T$ -algèbres est décrite sous l'angle des prolixes dans [18].

Donc on obtient un morphisme d' $\infty$ -graphes  $G_0 \xrightarrow{F^0} G_1$ , tels qu'en dimension 2,  $G_0$  et  $G_1$  sont des bicatégories. On va donc montrer que pour ces données  $F^0$  est un pseudo-2-foncteur. Seul l'axiome de compatibilité avec l'associativité sera montré parce que les autres axiomes sont plus faciles à montrer et se démontrent avec les mêmes techniques. Pour montrer cet axiome on aura besoin de montrer des résultats de préservations de cellules de

cohérences. En particulier on va montrer que  $\nu_0$  et  $\nu_1$  préservent les cellules de cohérences d'associativités.

### 5.2.1 Cellules de cohérences d'associativités des bicatégories sources et buts

Dans les étirements les cellules d'associativités seront notées avec la lettre majuscule  $A$  et dans les algèbres avec la lettre minuscule  $a$ . Dans les algèbres le sens des flèches de cohérence n'est pas important (parce qu'il est très facile de voir que ce sont des  $\circ_1^2$ -isomorphismes), et on notera indifféremment

$$a \circ_0^1 (b \circ_0^1 c) \xrightarrow{a(a,b,c)} (a \circ_0^1 b) \circ_0^1 c \quad \text{ou} \quad a \circ_0^1 (b \circ_0^1 c) \xleftarrow{a(a,b,c)} (a \circ_0^1 b) \circ_0^1 c$$

Ces notations seront les mêmes pour la  $T$ -algèbre domaine  $(G_0, \nu_0 \circ \delta(G))$ , ou la  $T$ -algèbre codomaine  $(G_1, \nu_1 \circ \kappa(G))$ . Les constructions qui vont suivre seront faites pour  $(G_1, \nu_1 \circ \kappa(G))$ , bien qu'elles restent valables dans l'algèbre  $(G_0, \nu_0 \circ \delta(G))$ . Si  $(a, b, c)$  est un 0-chemin d'ordre 1 de  $G_1$  on posera

$$a(a, b, c) := \nu_1 \kappa(G) A(\eta(G_1)(a), \eta(G_1)(b), \eta(G_1)(c))$$

où  $A(\eta(G_1)(a), \eta(G_1)(b), \eta(G_1)(c))$  est la 2-cellule de cohérence d'associativité produite par l'étirement catégorique libre  $E(G_1)$  (on trouve cette définition dans [18]). On voit aussi que

$$\kappa(G) A(\eta(G_1)(a), \eta(G_1)(b), \eta(G_1)(c)) = A(\eta_1^0(G)(a), \eta_1^0(G)(b), \eta_1^0(G)(c))$$

(puisque  $\kappa(G)$  préserve les cellules de cohérence, puisque provenant d'un morphisme d'étirements catégoriques).

On va tout d'abord montrer qu'avec une telle définition des cellules d'associativités,  $\nu_1$  préserve ce type de cellules, i.e. on va montrer qu'on a une formule du type :

$$\nu_1(A(a, b, c)) = a(\nu_1(a), \nu_1(b), \nu_1(c))$$

Le graphe  $G = (G_0, G_1)$  a une  $T^0$ -algèbre canonique qui est donné par la multiplication de la monade  $T^0$  :

$$(T^0(G), \mu^0(G)) = ((T_0^0(G), T_1^0(G)), (\mu_0^0(G), \mu_1^0(G)))$$



**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

Notons  $\overline{\mu}_1^0 = \mu_1^0(G)$ ,  $\widehat{\kappa} = \kappa(T^0(G))$ ,  $\widehat{\eta} = \eta(T_1^0(G))$ ,  $\widehat{\eta}_1^0 = \eta_1^0(T^0(G))$ . Dans ce cas, si  $(a, b, c)$  est un 0-chemin d'ordre 1 de  $T_1^0(G)$ , alors :

$$\begin{aligned}
 a(a, b, c) &:= \overline{\mu}_1^0 \widehat{\kappa} A(\widehat{\eta}(a), \widehat{\eta}(b), \widehat{\eta}(c)) \\
 &= \overline{\mu}_1^0 A(\widehat{\eta}_1^0(a), \widehat{\eta}_1^0(b), \widehat{\eta}_1^0(c)) \\
 &= A(\overline{\mu}_1^0 \widehat{\eta}_1^0(a), \overline{\mu}_1^0 \widehat{\eta}_1^0(b), \overline{\mu}_1^0 \widehat{\eta}_1^0(c)) \\
 &= A(a, b, c).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Notons :  $\bar{\kappa} = \kappa(G)$ ,  $\bar{\eta} = \eta(G_1)$ ,  $\bar{\eta}_1^0 = \eta_1^0(G)$ ,  $\bar{\eta}_1^0 = \eta_1^0(G')$ . Dans ce cas si on se donne un morphisme (strict) de  $T^0$ -algèbres  $(G, v) \xrightarrow{\varphi=(\varphi_0, \varphi_1)} (G', v')$ , alors en particulier, on a le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 T_1^0(G) & \xrightarrow{v_1} & G_1 \\
 T_1^0(\varphi) \downarrow & \square & \downarrow \varphi_1 \\
 T_1^0(G') & \xrightarrow{v'_1} & G'_1
 \end{array}$$

qui montre que

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(a(a, b, c)) &= \varphi_1 v_1 \bar{\kappa} A(\bar{\eta}(a), \bar{\eta}(b), \bar{\eta}(c)) \\
 &= \varphi_1 v_1 A(\bar{\eta}_1^0(a), \bar{\eta}_1^0(b), \bar{\eta}_1^0(c)) \\
 &= v'_1 T_1^0(\varphi) A(\bar{\eta}_1^0(a), \bar{\eta}_1^0(b), \bar{\eta}_1^0(c)) \\
 &= v'_1 A(T_1^0(\varphi) \bar{\eta}_1^0(a), T_1^0(\varphi) \bar{\eta}_1^0(b), T_1^0(\varphi) \bar{\eta}_1^0(c)) \\
 &= v'_1 A(\bar{\eta}_1^0(\varphi_1(a)), \bar{\eta}_1^0(\varphi_1(b)), \bar{\eta}_1^0(\varphi_1(c))) \\
 &= a(\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c))
 \end{aligned} \tag{2}$$

l'avant dernière égalité ayant été obtenue grâce au carré

$$\begin{array}{ccc}
 G_1 & \xrightarrow{\eta_1^0(G)} & T_1^0(G) \\
 \varphi_1 \downarrow & \square & \downarrow T_1^0(\varphi) \\
 G'_1 & \xrightarrow{\eta_1^0(G')} & T_1^0(G')
 \end{array}$$

Enfin  $(G, \nu)$  est en particulier un morphisme de  $T^0$ -algèbres

$$\begin{array}{ccc} (T^0)^2(G) & \xrightarrow{\mu^0(G)} & T^0(G) \\ T^0(\nu) \downarrow & \square & \downarrow \nu \\ T^0(G) & \xrightarrow{\nu} & G \end{array}$$

i.e. on a le carré

$$\begin{array}{ccc} T_1^0(T^0(G)) & \xrightarrow{\mu_1^0(G)} & T_1^0(G) \\ T_1^0(\nu) \downarrow & \square & \downarrow \nu_1 \\ T_1^0(G) & \xrightarrow{\nu_1} & G_1 \end{array}$$

On peut donc appliquer la formule (2)  $\nu_1(a(a, b, c)) = a(\nu_1(a), \nu_1(b), \nu_1(c))$ . D'autre part on a, grâce à la formule (1)  $\nu_1(a(a, b, c)) = \nu_1(A(a, b, c))$ , qui montre la formule :

$$\boxed{\nu_1(A(a, b, c)) = a(\nu_1(a), \nu_1(b), \nu_1(c))}$$

### 5.2.2 Cellules de cohérences de distributivités des pseudo-2-foncteurs

Dans les étirements ces cellules seront notées avec la lettre  $D$ , et dans les algèbres elles seront notées avec la lettre  $d$ . Comme précédemment le sens des flèches de cohérence (dans les algèbres) n'est pas important, et on notera

$$F(a \circ_0^1 b) \xrightarrow{d(a,b)} F(a) \circ_0^1 F(b), \text{ ou } F(a \circ_0^1 b) \xleftarrow{d(a,b)} F(a) \circ_0^1 F(b).$$

Bien sûr si  $(G = (G_0, G_1), \nu = (\nu_0, \nu_1))$  est la  $T^0$ -algèbre concernée, alors  $d(a, b)$  vivra dans  $G_1$ , et sera défini par  $d(a, b) := \nu_1 D(\eta_0^0(G)(a), \eta_0^0(G)(b))$  où  $D(\eta_0^0(G)(a), \eta_0^0(G)(b))$  est la 2-cellule de cohérence produite par l'étirement catégorique 0-cellulaire libre  $E^0(G)$ ,

$$D(\eta_0^0(G)(a), \eta_0^0(G)(b)) := \phi_1^0(G)[F_M^0(G)(\eta_0^0(G)(a) \star_0^1 \eta_0^0(G)(b)), \\ F_M^0(G)(\eta_0^0(G)(a)) \star_0^1 F_M^0(G)(\eta_0^0(G)(b))]$$

On va montrer qu'avec une telle définition des cellules de distributivités,  $\nu_1$  préserve ce type de cellules. Cette fois-ci on va montrer une formule du genre

$$\nu_1(D(a, b)) = d(\nu_0(a), \nu_0(b)).$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

Comme précédemment on utilise l'algèbre  $(T^0(G), \mu^0(G))$ . Notons  $\overline{\mu}_1^0 = \mu_1^0(G)$ ,  $\overline{\mu}_0^0 = \mu_0^0(G)$ ,  $\widehat{\eta}_0^0 = \eta_0^0(T^0(G))$ ,  $\widehat{\phi}_1^0 = \phi_1^0(T^0(G))$ ,  $\widehat{F} = F_M^0(T^0(G))$ ,  $\widehat{\phi}_1^0 = \phi_1^0(G)$ ,  $\overline{\phi}_1^0 = \phi_1^0(G')$ ,  $\overline{F} = F_M^0(G)$ ,  $\overline{F}' = F_M^0(G')$ ,  $\overline{\eta}_0^0 = \eta_0^0(G)$ ,  $\overline{\eta}_0^0 = \eta_0^0(G')$ . Dans ce cas on a

$$d(a, b) := \overline{\mu}_1^0 D(\widehat{\eta}_0^0(a), \widehat{\eta}_0^0(b))$$

$(d(a, b)$  est ici produite par  $(T^0(G), \mu^0(G))$ )

$$\begin{aligned} &= \overline{\mu}_1^0 \widehat{\phi}_1^0 [\widehat{F}(\widehat{\eta}_0^0(a) \star_0^1 \widehat{\eta}_0^0(b)), \widehat{F}(\widehat{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 \widehat{F}(\widehat{\eta}_0^0(b))] \\ &= \overline{\phi}_1^0 [\overline{\mu}_1^0 \widehat{F}(\widehat{\eta}_0^0(a) \star_0^1 \widehat{\eta}_0^0(b)), \overline{\mu}_1^0 \widehat{F}(\widehat{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 \overline{\mu}_1^0 \widehat{F}(\widehat{\eta}_0^0(b))] \end{aligned}$$

en utilisant le carré

$$\begin{array}{ccc} T_1^0(T^0(G)) & \xrightarrow{\overline{\mu}_1^0} & T_1^0(G) \\ \widehat{F} \uparrow & \square & \uparrow \widehat{F} \\ T_0^0(T^0(G)) & \xrightarrow{\overline{\mu}_0^0} & T_0^0(G) \end{array}$$

(ce carré provient du morphisme d'étirement catégorique cellulaire libre  $\varepsilon^0 E^0(G)$ ), on obtient

$$\begin{aligned} d(a, b) &= \overline{\phi}_1^0 [\overline{F}(\overline{\mu}_0^0 \widehat{\eta}_0^0(a) \star_0^1 \overline{\mu}_0^0 \widehat{\eta}_0^0(b)), \overline{F}(\overline{\mu}_0^0 \widehat{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 \overline{F}(\overline{\mu}_0^0 \widehat{\eta}_0^0(b))] \\ &= \overline{\phi}_1^0 [\overline{F}(a \star_0^1 b), \overline{F}(a) \star_0^1 \overline{F}(b)] \\ &= D(a, b) \end{aligned} \tag{3}$$

où  $D(a, b)$  est ici produite par  $E^0(G)$ . D'autre part, si on se donne un morphisme (strict) de  $T^0$ -algèbres  $(G, \nu) \xrightarrow{\varphi=(\varphi_0, \varphi_1)} (G', \nu')$ , alors on a le carré

$$\begin{array}{ccc} T_1^0(G) & \xrightarrow{\nu_1} & G_1 \\ T_1^0(\varphi) \downarrow & \square & \downarrow \varphi_1 \\ T_1^0(G') & \xrightarrow{\nu'_1} & G'_1 \end{array}$$

qui montre que

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(d(a, b)) &= \varphi_1 v_1 D(\overline{\eta}_0^0(a), \overline{\eta}_0^0(b)) \\
 &= v'_1 T_1^0(\varphi) D(\overline{\eta}_0^0(a), \overline{\eta}_0^0(b)) \\
 &= v'_1 T_1^0(\varphi) \phi_1^0 [\overline{F}(\overline{\eta}_0^0(a) \star_0^1 \overline{\eta}_0^0(b)), \overline{F}(\overline{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 \overline{F}(\overline{\eta}_0^0(b))]. \\
 &= v'_1 \phi_1^0 [T_1^0(\varphi) \overline{F}(\overline{\eta}_0^0(a) \star_0^1 \overline{\eta}_0^0(b)), \\
 &\quad T_1^0(\varphi) \overline{F}(\overline{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 T_1^0(\varphi) \overline{F}(\overline{\eta}_0^0(b))]
 \end{aligned}$$

(cette dernière égalité provient de  $T_1^0(\varphi)$ , qui préserve le crochet et la structure d' $\infty$ -magmas sous-jacente)

Aussi on a le carré

$$\begin{array}{ccc}
 M_0^0(G) & \xrightarrow{\overline{F}} & M_1^0(G) \\
 \begin{array}{c} \vdots \\ T_0^0(\varphi) \\ \downarrow \gamma \end{array} & \square & \begin{array}{c} T_1^0(\varphi) \\ \downarrow \gamma \end{array} \\
 M_0^0(G') & \xrightarrow{\overline{F}'} & M_1^0(G')
 \end{array}$$

(je mets des pointillés pour bien faire voir que  $T_0^0(\varphi)$  et  $T_1^0(\varphi)$  proviennent de  $E^0(G)$ ), donc

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(d(a, b)) &= v'_1 \phi_1^0 [\overline{F}'(T_0^0(\varphi) \overline{\eta}_0^0(a) \star_0^1 T_0^0(\varphi) \overline{\eta}_0^0(b)), \\
 &\quad \overline{F}'(T_0^0(\varphi) \overline{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 \overline{F}'(T_0^0(\varphi) \overline{\eta}_0^0(b))]
 \end{aligned}$$

Ensuite on utilise le carré

$$\begin{array}{ccc}
 G_0 & \xrightarrow{\overline{\eta}_0^0} & T_0^0(G) \\
 \varphi_0 \downarrow & \square & \downarrow T_0^0(\varphi) \\
 G'_0 & \xrightarrow{\overline{\eta}'_0} & T_0^0(G')
 \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(d(a, b)) &= v'_1 \phi_1^0 [\overline{F}'(\overline{\eta}_0^0(\varphi_0(a)) \star_0^1 \overline{\eta}_0^0(\varphi_0(b))), \\
 &\quad \overline{F}'(\overline{\eta}_0^0(\varphi_0(a))) \star_0^1 \overline{F}'(\overline{\eta}_0^0(\varphi_0(b)))] \\
 &= d(\varphi_0(a), \varphi_0(b)). \tag{4}
 \end{aligned}$$

Enfin  $(G, \nu)$  est en particulier un morphisme de  $T^0$ -algèbres donc, grâce à (3),  $\nu_1(d(a, b)) = \nu_1(D(a, b))$  et, grâce à (4)  $\nu_1(d(a, b)) = d(\nu_0(a), \nu_0(b))$ . Ainsi on obtient la formule :

$$\boxed{\nu_1(D(a, b)) = d(\nu_0(a), \nu_0(b))}$$

### 5.2.3 Axiome d'associativité des pseudo-2-foncteurs

On va vérifier l'axiome suivant de compatibilité avec l'associativité :

$$\begin{array}{ccc} F^0(a) \star_0^1 (F^0(b) \star_0^1 F^0(c)) & \xrightarrow{1_{F^0(a)} \star_0^2 d(b,c)} & F^0(a) \star_0^1 F^0(b \star_0^1 c) \\ \uparrow a(F^0(a), F^0(b), F^0(c)) & & \downarrow d(a, b \star_0^1 c) \\ (F^0(a) \star_0^1 F^0(b)) \star_0^1 F^0(c) & \square & F^0(a \star_0^1 (b \star_0^1 c)) \\ \downarrow d(a, b) \star_0^2 1_{F^0(c)} & & \uparrow F^0(a, (b \star_0^1 c)) \\ F^0(a \star_0^1 b) \star_0^1 F^0(c) & \xrightarrow{d(a \star_0^1 b, c)} & F^0((a \star_0^1 b) \star_0^1 c) \end{array}$$

Pour vérifier cet axiome on va voir que le diagramme suivant de  $T_1^0(G)$  « contient » une 3-cellule :

$$\begin{array}{ccc} A_1 & \xrightarrow{f_1} & A_2 \\ f_0 \uparrow & & \downarrow f_2 \\ A_0 & \simeq & A_3 \\ f_3 \downarrow & & \uparrow f_3 \\ A_5 & \xrightarrow{f_4} & A_4, \end{array}$$

avec

$$\begin{aligned} A_0 &= \overline{(F_M^0 \eta_0^0(a) \star_0^1 F_M^0 \eta_0^0(b)) \star_0^1 F_M^0 \eta_0^0(c)} \\ A_1 &= \overline{F_M^0 \eta_0^0(a) \star_0^1 (F_M^0 \eta_0^0(b) \star_0^1 F_M^0 \eta_0^0(c))} \\ A_2 &= \overline{F_M^0 \eta_0^0(a) \star_0^1 \overline{F_M^0 (\eta_0^0(b) \star_0^1 \eta_0^0(c))}} \\ A_3 &= \overline{F_M^0 (\eta_0^0(a) \star_0^1 (\eta_0^0(b) \star_0^1 \eta_0^0(c)))} \\ A_4 &= \overline{F_M^0 ((\eta_0^0(a) \star_0^1 \eta_0^0(b)) \star_0^1 \eta_0^0(c))} \\ A_5 &= \overline{F_M^0 (\eta_0^0(a) \star_0^1 \eta_0^0(b)) \star_0^1 \overline{F_M^0 \eta_0^0(c)}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 f_0 &= \overline{\phi}_1^0(A_0, A_1) = A(\overline{F_M^0 \eta_0^0}(a), \overline{F_M^0 \eta_0^0}(b), \overline{F_M^0 \eta_0^0}(c)) \\
 f_1 &= 1_{\overline{F_M^0 \eta_0^0}(a)} \star_0^2 D(\overline{\eta_0^0}(b), \overline{\eta_0^0}(c)) \\
 f_2 &= D(\overline{\eta_0^0}(a), \overline{\eta_0^0}(b) \star_0^1 \overline{\eta_0^0}(c)) \\
 f_3 &= \overline{F_M^0} A(\overline{\eta_0^0}(a), \overline{\eta_0^0}(b), \overline{\eta_0^0}(c)) \\
 f_4 &= D(\overline{\eta_0^0}(a) \star_0^1 \overline{\eta_0^0}(b), \overline{\eta_0^0}(c)) \\
 f_5 &= D(\overline{\eta_0^0}(a), \overline{\eta_0^0}(b)) \star_0^2 1_{\overline{F_M^0 \eta_0^0}(c)}
 \end{aligned}$$

où, pour simplifier les calculs, on a noté  $\overline{\eta_0^0} = \eta_0^0(G)$ ,  $\overline{F_M^0} = F_M^0(G)$ ,  $\overline{F_C^0} = F_C^0(G)$ ,  $\overline{\pi_0^0} = \pi_0^0(G)$ ,  $\overline{\pi_1^0} = \pi_1^0(G)$  et  $\overline{\phi_1^0} = \phi_1^0(G)$ ;  $\overline{\pi_0^0}$  est bien sûr le morphisme d' $\infty$ -magmas provenant de  $E^0(G)$ .

Les cellules  $c_0 = \underline{f_2} \circ f_1 \circ f_0$ , et  $c_1 = f_3 \circ f_4 \circ f_5$  sont parallèles. Reste à montrer que  $\overline{\pi_1^0}(c_0) = \overline{\pi_1^0}(c_1)$ ;  $\overline{\pi_1^0}$  est un morphisme d' $\infty$ -magmas et normalise trivialement les cellules  $\overline{f_0}$ ,  $\overline{f_1}$ ,  $\overline{f_2}$ ,  $\overline{f_4}$ ,  $\overline{f_5}$ . Pour voir que  $\overline{f_3}$  est également normalisé par  $\overline{\pi_1^0}$ , on utilise  $E^0(G)$

$$\begin{array}{ccc}
 M_0^0(G) & \xrightarrow{\overline{\pi_0^0}} & C_0^0(G) \\
 \overline{F_M^0} \downarrow & \square & \downarrow \overline{F_C^0} \\
 M_1^0(G) & \xrightarrow{\overline{\pi_1^0}} & C_1^0(G)
 \end{array}$$

et alors

$$\begin{aligned}
 \overline{\pi_1^0}(f_3) &= \overline{\pi_1^0} \overline{F_M^0} A(\overline{\eta_0^0}(a), \overline{\eta_0^0}(b), \overline{\eta_0^0}(c)) \\
 &= \overline{F_C^0} \overline{\pi_0^0} A(\overline{\eta_0^0}(a), \overline{\eta_0^0}(b), \overline{\eta_0^0}(c)) \\
 &= \text{cellule identité}
 \end{aligned}$$

Ainsi  $\overline{\pi_1^0}(c_0) = \overline{\pi_1^0}(c_1)$ , donc  $c_0$  et  $c_1$  sont connectés par une 3-cellules

$$\rho = \overline{\phi_1^0}(c_0, c_1).$$

Pour terminer il suffit alors d'appliquer  $v_1$  à ce diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 v_1 A_1 & \xrightarrow{v_1 f_1} & v_1 A_2 \\
 v_1 f_0 \uparrow & & \downarrow v_1 f_2 \\
 v_1 A_0 & \xrightarrow{v_1 (\equiv)} & v_1 A_3 \\
 v_1 f_5 \downarrow & & \uparrow v_1 f_3 \\
 v_1 A_5 & \xrightarrow{v_1 f_4} & v_1 A_4
 \end{array}$$

avec  $v_1 \rho$  qui est une 3-cellule de  $G_1$  donc une identité, qui rend donc commutatif ce diagramme. D'autre part  $v_1 A_0 = (F^0(a) \circ_0^1 F^0(b)) \circ_0^1 F^0(c)$  (puisque  $v_1$  est un morphisme d' $\infty$ -magmas);  $v_1 A_1 = F^0(a) \circ_0^1 (F^0(b) \circ_0^1 F^0(c))$ ;  $v_1 A_2 = v_1 \overline{F_M^0 \eta_0^0(a)} \circ_0^1 v_1 \overline{F_M^0 \eta_0^0(b)} \star_0^1 \overline{\eta_0^0(c)} = F^0(a) \circ_0^1 F^0(b \circ_0^1 c)$  (proposition 12);  $v_1 A_3 = F^0(a \circ_0^1 (b \circ_0^1 c))$  (proposition 12);  $v_1 A_4 = F^0((a \circ_0^1 b) \circ_0^1 c)$  (proposition 12);  $v_1 A_5 = F^0(a \circ_0^1 b) \circ_0^1 F^0(c)$  (encore la proposition 12 !);  $v_1 f_0 = a(v_1 \overline{F_M^0 \eta_0^0(a)}, v_1 \overline{F_M^0 \eta_0^0(b)}, v_1 \overline{F_M^0 \eta_0^0(c)})$  (car  $v_1$  préserve ce type de cohérence)  $= a(F^0(a), F^0(b), F^0(c))$ ;  $v_1 f_1 = 1_{F^0(a)} \circ_0^2 d(v_0 \overline{\eta_0^0(b)}, v_0 \overline{\eta_0^0(c)}) = 1_{F^0(a)} \circ_0^2 d(b, c)$ ;  $v_1 f_2 = d(v_0 \overline{\eta_0^0(a)}, v_0 (\overline{\eta_0^0(b)} \star_0^1 v_0 \overline{\eta_0^0(c)})) = d(a, b \circ_0^1 c)$  (même raison que précédemment);  $v_1 f_3 = F^0(a(a, b, c))$  (grâce à la proposition 12 et parce que  $v_0$  préserve (comme  $v_1$ ) les cellules de cohérence d'associativités);  $v_1 f_4 = d(v_0 \overline{\eta_0^0(a)} \star_0^1 \overline{\eta_0^0(b)}, v_0 \overline{\eta_0^0(c)})$  (car  $v_1$  préserve les cohérences de distributivité)  $= d(a \circ_0^1 b, c)$ ;  $v_1 f_5 = d(v_0 \overline{\eta_0^0(a)}, v_0 \overline{\eta_0^0(b)}) \circ_0^2 1_{F^0(c)}$  (comme précédemment)  $= d(a, b) \circ_0^2 1_{F^0(c)}$ .

Ainsi l'axiome d'associativité des pseudo-2-foncteurs est vérifié. Les autres axiomes se vérifient de la même manière (comme les axiomes d'unités, où en particulier il faut montrer que  $v_1$  préserve certain type de cohérence). Finalement les  $T^0$ -algèbres de dimension 2 sont des pseudo-2-foncteurs.

### 5.3 Structuration en pseudo-2-transformations naturelles des $T^1$ -algèbres de dimension 2

Soit  $(G, v)$  une  $T^1$ -algèbre de dimension 2 (voir § 4.2 pour les notations utilisées). Posons :

$$U_{1-\text{Mag}}^{1-\text{Gr}}(G) = (M_0^1(G), M_1^1(G), \tau_M^1(G))$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

et

$$\tau^1 := v_1 \tau_M^1(G) \eta_0^1(G)$$

Donc  $\tau_M^1(G) \in \text{Hom}_M(M_0^1(G), M_1^1(G))(1)$  et  $\tau^1 \in \text{Hom}_{\overline{G}}(G_0, G_1)(1)$ .

Le triplet  $(M_0^1(G), M_1^1(G), \tau_M^1(G))$  provient de l'étirement catégorique 1-cellulaire libre  $E^1(G)$  et, grâce à la proposition 12, on sait qu'on a un morphisme d' $\infty$ -magmas 1-cellulaires

$$(M_0^1(G), M_1^1(G), \tau_M^1(G)) \xrightarrow{v} (G_0, G_1, \tau^1).$$

On posera

$$F_M^1(G) = d_0^1(\tau_M^1(G))$$

$$H_M^1(G) = c_0^1(\tau_M^1(G))$$

$$F^1 = d_0^1(\tau^1)$$

$$H^1 = c_0^1(\tau^1).$$

La  $T$ -algèbre source de  $(G, v)$

$$\sigma(\sigma_0^1((G, v))) = (G_0, v_0 \circ \delta_{0,0}^1(G) \circ \delta(G))$$

met sur  $G_0$  une structure de bicatégorie qui coïncide avec celle produite par  $(G, v)$  sur  $G_0$ , c'est à dire celle où on pose  $a \circ_p^n b := v_0(\eta_0^1(G)(a) \star_p^n \eta_0^1(G)(b))$ .

De la même manière, la  $T$ -algèbre but de  $(G, v)$

$$\beta(\beta_0^1((G, v))) = (G_1, v_1 \circ \kappa_{0,1}^1(G) \circ \kappa(G))$$

met sur  $G_1$  une structure de bicatégorie qui coïncide avec celle produite par  $(G, v)$  sur  $G_1$ , c'est à dire celle où on pose  $a \circ_p^n b := v_1(\eta_1^1(G)(a) \star_p^n \eta_1^1(G)(b))$ .

Ceci est la conséquence de  $(\text{Mon}_2)$  et des structures de morphismes  $\infty$ -magmas sous-jacents à  $\delta(G)$ ,  $\delta_{0,0}^1(G)$ ,  $\kappa(G)$ ,  $\kappa_{0,1}^1(G)$ .

Aussi la  $T^0$ -algèbre source de

$$(G, v) : \sigma_0^1((G, v)) = (G, v \circ \delta_0^1(G)) = (G, (v_0 \circ \delta_{0,0}^1(G), v_1 \circ \delta_{0,1}^1(G)))$$

produit un pseudo-2-foncteur

$$F^0 = v_1 \circ \delta_{0,1}^1(G) \circ F_M^0(G) \circ \eta_0^0(G)$$



qui coïncide avec  $F^1$ .

La  $T^0$ -algèbre but de  $(G, \nu)$

$$\beta_0^1((G, \nu)) = (G, \nu \circ \kappa_0^1(G)) = (G, (\nu_0 \circ \kappa_{0,0}^1(G), \nu_1 \circ \kappa_{0,1}^1(G)))$$

produit un pseudo-2-foncteur

$$H^0 = \nu_1 \circ \kappa_{0,1}^1(G) \circ F_M^0(G) \circ \eta_0^0(G)$$

qui coïncide avec  $H^1$ .

Toutes ces coïncidences viennent de la proposition 11.

Donc on obtient un diagramme  $G_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{F^1} \\ \downarrow \tau^1 \\ \xrightarrow{H^1} \end{array} G_1$ , tel qu'en dimension 2,  $G_0$

et  $G_1$  sont des bicatégories,  $F^1$  et  $H^1$  sont des pseudo-2-foncteurs. On va donc montrer que pour ces données  $\tau^1$  est une pseudo-2-transformation naturelle. Seul l'axiome de compatibilité avec l'associativité sera montré. Pour montrer cet axiome on aura besoin de montrer des résultats de préservations de cellules de cohérences.

### 5.3.1 Cellules de cohérences d'associativités des bicatégories sources et buts

On utilisera les notations habituelles. Les constructions qui vont suivre concernent la  $T$ -algèbre but  $(G_1, \nu_1 \circ \kappa_{0,1}^1(G) \circ \kappa(G))$ , bien qu'elles restent valables dans la  $T$ -algèbre source  $(G_0, \nu_0 \circ \delta_{1,0}^1(G) \circ \delta(G))$ . Si  $(a, b, c)$  est un 0-chemin d'ordre 1 de  $G_1$  on posera

$$a(a, b, c) := \nu_1 \kappa_{0,1}^1(G) \kappa(G) A(\eta(G_1)(a), \eta(G_1)(b), \eta(G_1)(c))$$

où  $A(\eta(G_1)(a), \eta(G_1)(b), \eta(G_1)(c))$  est défini comme en 5.2.1. On voit aussi que

$$\begin{aligned} \kappa_{0,1}^1(G) \kappa(G) A(\eta(G_1)(a), \eta(G_1)(b), \eta(G_1)(c)) \\ &= \kappa_{0,1}^1(G) A(\eta_1^0(G)(a), \eta_1^0(G)(b), \eta_1^0(G)(c)) \\ &= A(\eta_1^1(G)(a), \eta_1^1(G)(b), \eta_1^1(G)(c)) \end{aligned}$$

On va tout d'abord montrer qu'avec une telle définition des cellules de cohérences d'associativités,  $\nu_1$  préserve ce type de cellules.

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

Le graphe  $G = (G_0, G_1)$  a une  $T^1$ -algèbre canonique, qui est donné par la multiplication de la monade  $T^1$

$$(T^1(G), \mu^1(G)) = ((T_0^1(G), T_1^1(G)), (\mu_0^1(G), \mu_1^1(G))).$$

On notera  $\overline{\mu}_1^1 = \mu_1^1(G)$ ,  $\widehat{\kappa}_0^1 = \kappa_{0,1}^1(T^1(G))$ ,  $\overline{\kappa}_0^1 = \kappa_{0,1}^1(G)$ ,  $\widehat{\kappa} = \kappa(T^1(G))$ ,  $\overline{\kappa} = \kappa(G)$ ,  $\widehat{\eta} = \eta(T_1^1(G))$ ,  $\overline{\eta} = \eta(G_1)$ ,  $\widehat{\eta}_1^1 = \eta_1^1(T^1(G))$ ,  $\overline{\eta}_1^1 = \eta_1^1(G')$ ,  $\widehat{\eta}_1^1 = \eta_1^1(G)$ .  
Si  $(a, b, c)$  est un 0-chemin d'ordre 1 de  $T_1^1(G)$  alors

$$\begin{aligned} a(a, b, c) &= \overline{\mu}_1^1 \widehat{\kappa}_0^1 \widehat{\kappa} A(\widehat{\eta}(a), \widehat{\eta}(b), \widehat{\eta}(c)) \\ &= \overline{\mu}_1^1 A(\widehat{\eta}_1^1(a), \widehat{\eta}_1^1(b), \widehat{\eta}_1^1(c)) \\ &= A(\overline{\mu}_1^1 \widehat{\eta}_1^1(a), \overline{\mu}_1^1 \widehat{\eta}_1^1(b), \overline{\mu}_1^1 \widehat{\eta}_1^1(c)) \\ &= A(a, b, c). \end{aligned} \tag{5}$$

Ensuite, si on se donne un morphisme strict de  $T^1$ -algèbres

$$(G, \nu) \xrightarrow{\varphi=(\varphi_0, \varphi_1)} (G', \nu')$$

donc en particulier on a le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} T_1^1(G) & \xrightarrow{\nu_1} & G_1 \\ T_1^1(\varphi) \downarrow & \square & \downarrow \varphi_1 \\ T_1^1(G') & \xrightarrow{\nu'_1} & G'_1 \end{array}$$

qui montre que

$$\begin{aligned} \varphi_1(a(a, b, c)) &= \varphi_1 \nu_1 \overline{\kappa}_0^1 \widehat{\kappa} A(\widehat{\eta}(a), \widehat{\eta}(b), \widehat{\eta}(c)) \\ &= \varphi_1 \nu_1 A(\widehat{\eta}_1^1(a), \widehat{\eta}_1^1(b), \widehat{\eta}_1^1(c)) \\ &= \nu'_1 T_1^1(\varphi) A(\overline{\eta}_1^1(a), \overline{\eta}_1^1(b), \overline{\eta}_1^1(c)) \\ &= \nu'_1 A(T_1^1(\varphi) \overline{\eta}_1^1(a), T_1^1(\varphi) \overline{\eta}_1^1(b), T_1^1(\varphi) \overline{\eta}_1^1(c)) \end{aligned}$$

aussi on a le carré

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\overline{\eta}_1} & T_1^1(G) \\ \varphi_1 \downarrow & \square & \downarrow T_1^1(\varphi) \\ G'_1 & \xrightarrow{\overline{\eta}'_1} & T_1^1(G') \end{array}$$

donc :

$$\begin{aligned} \varphi_1(a(a, b, c)) &= v'_1 A(\overline{\eta}_1^{-1}(\varphi_1(a)), \overline{\eta}_1^{-1}(\varphi_1(b)), \overline{\eta}_1^{-1}(\varphi_1(c))) \\ &= a(\varphi_1(a), \varphi_1(b), \varphi_1(c)). \end{aligned} \quad (6)$$

Enfin  $(G, \nu)$  est un morphisme de  $T^1$ -algèbres

$$\begin{array}{ccc} T^1(T^1(G)) & \xrightarrow{\mu^1(G)} & T^1(G) \\ T^1(\nu) \downarrow & \square & \downarrow \nu \\ T^1(G) & \xrightarrow{\nu} & G \end{array}$$

donc on a le carré

$$\begin{array}{ccc} T_1^1(T^1(G)) & \xrightarrow{\overline{\mu}_1^1} & T_1^1(G) \\ T_1^1(\nu) \downarrow & \square & \downarrow \nu_1 \\ T_1^1(G) & \xrightarrow{\nu_1} & G \end{array}$$

D'autre part on a (grâce à la formule (5))  $\nu_1(a(a, b, c)) = \nu_1(A(a, b, c))$ , et on peut appliquer la formule (6) :  $\nu_1(a(a, b, c)) = a(\nu_1(a), \nu_1(b), \nu_1(c))$ , donc on obtient la formule

$$\boxed{\nu_1(A(a, b, c)) = a(\nu_1(a), \nu_1(b), \nu_1(c))}$$

### 5.3.2 Cellules de cohérences de distributivités des pseudo-2-foncteurs

Dans les étirements ces cellules seront notées avec la lettre  $D$ . Dans les algèbres on utilisera la lettre  $d$ . L'indice de ces lettres précisera le pseudo-2-foncteur qui est concerné. Si donc  $(G, \nu)$  est une  $T^1$ -algèbre, alors  $d_0(a, b)$  et  $d_1(a, b)$  sont définis par :

$$\begin{aligned} d_0(a, b) &:= \nu_1 \delta_{0,1}^1(G) D(\eta_0^0(G)(a), \eta_0^0(G)(b)) \\ d_1(a, b) &:= \nu_1 \kappa_{0,1}^1(G) D(\eta_0^0(G)(a), \eta_0^0(G)(b)) \end{aligned}$$

KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

et correspondent respectivement aux cellules de distributivités des pseudo-2-foncteurs  $F^1$  et  $H^1$  (on vérifie bien que ces cellules conviennent puisque par exemple le domaine de  $d_0(a, b)$  est  $F^1(a \circ_0^1 b)$ ).

Notons :  $\overline{\eta}_0^1 = \eta_0^1(G)$ ,  $\widehat{\eta}_0^1 = \eta_0^1(T^1(G))$ ,  $\overline{\eta}_0^{1'} = \eta_0^1(G')$ ,  $\overline{\eta}_0^0 = \eta_0^0(G)$ ,  $\widehat{\eta}_0^0 = \eta_0^0(T^1(G))$ ,  $\overline{\phi}_1^1 = \phi_1^1(G)$ ,  $\widehat{\phi}_1^1 = \phi_1^1(G')$ ,  $\overline{\phi}_1^0 = \phi_1^0(G)$ ,  $\widehat{\phi}_1^0 = \phi_1^0(T^1(G))$ ,  $\overline{F^1} = F_M^1(G)$ ,  $\overline{F^{1'}} = F_M^1(G')$ ,  $\overline{F^0} = F_M^0(G)$ ,  $\widehat{F^1} = F_M^1(T^1(G))$ ,  $\overline{H^1} = H_M^1(G)$ ,  $\overline{\delta}_0^1 = \delta_{0,0}^1(G)$ ,  $\overline{\delta}_1^1 = \delta_{0,1}^1(G)$ ,  $\widehat{\delta}_1^1 = \delta_{0,1}^1(T^1(G))$ ,  $\overline{\kappa}_0^1 = \kappa_{0,0}^1(G)$ ,  $\overline{\kappa}_1^1 = \kappa_{0,1}^1(G)$ ,  $\overline{\mu}_1^1 = \mu_1^1(G)$ ,  $\overline{\mu}_0^1 = \mu_0^1(G)$  (ces simplifications suivent la règle précise du § 2).

On voit aussi que

$$\begin{aligned} D_0(\overline{\eta}_0^1(a), \overline{\eta}_0^1(b)) &:= \overline{\phi}_1^1[\overline{F^1}(\overline{\eta}_0^1(a) \star_0^1 \overline{\eta}_0^1(b)), \overline{F^1}(\overline{\eta}_0^1(a)) \star_0^1 \overline{F^1}(\overline{\eta}_0^1(b))] \\ &= \overline{\delta}_1^1 D(\overline{\eta}_0^0(a), \overline{\eta}_0^0(b)) \end{aligned}$$

car

$$\begin{aligned} \overline{\delta}_1^1 D(\overline{\eta}_0^0(a), \overline{\eta}_0^0(b)) &= \overline{\delta}_1^1 \overline{\phi}_1^0[\overline{F^0}(\overline{\eta}_0^0(a) \star_0^1 \overline{\eta}_0^0(b)), \overline{F^0}(\overline{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 \overline{F^0}(\overline{\eta}_0^0(b))] \\ &= \overline{\phi}_1^1[\overline{\delta}_1^1 \overline{F^0}(\overline{\eta}_0^0(a) \star_0^1 \overline{\eta}_0^0(b)), \\ &\quad \overline{\delta}_1^1 \overline{F^0}(\overline{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 \overline{\delta}_1^1 \overline{F^0}(\overline{\eta}_0^0(b))] \\ &= \overline{\phi}_1^1[\overline{F^1}(\overline{\delta}_0^1 \overline{\eta}_0^0(a) \star_0^1 \overline{\delta}_0^1 \overline{\eta}_0^0(b)), \\ &\quad \overline{F^1}(\overline{\delta}_0^1 \overline{\eta}_0^0(a)) \star_0^1 \overline{F^1}(\overline{\delta}_0^1 \overline{\eta}_0^0(b))] \\ &= \overline{\phi}_1^1[\overline{F^1}(\overline{\eta}_0^1(a) \star_0^1 \overline{\eta}_0^1(b)), \overline{F^1}(\overline{\eta}_0^1(a)) \star_0^1 \overline{F^1}(\overline{\eta}_0^1(b))] \end{aligned}$$

L'avant-dernière égalité vient de ce qu'aussi on a le carré

$$\begin{array}{ccc} M_0^1(G) & \xrightarrow{F_M^1(G)} & M_1^1(G) \\ \delta_{0,0}^1(G) \uparrow & \square & \uparrow \delta_{0,1}^1(G) \\ M_0^0(G) & \xrightarrow{F_M^0(G)} & M_1^0(G) \end{array}$$

provenant de  $E^0(G) \xrightarrow{\Delta_0^1(G)} \sigma_0^1(E^1(G))$  (§ 4.4).

De même

$$\begin{aligned} D_1(\overline{\eta}_0^1(a), \overline{\eta}_0^1(b)) &:= \overline{\phi}_1^1[\overline{H^1}(\overline{\eta}_0^1(a) \star_0^1 \overline{\eta}_0^1(b)), \overline{H^1}(\overline{\eta}_0^1(a)) \star_0^1 \overline{H^1}(\overline{\eta}_0^1(b))] \\ &= \overline{\kappa}_1^1 D(\overline{\eta}_0^0(a), \overline{\eta}_0^0(b)). \end{aligned}$$

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

Donc en fait  $d_0(a, b) = v_1 D_0(\overline{\eta}_0^0(a), \overline{\eta}_0^0(b))$  et  $d_1(a, b) = v_1 D_1(\overline{\eta}_0^0(a), \overline{\eta}_0^0(b))$ .

On va tout d'abord montrer qu'avec ces définitions,  $v_1$  préserve ce type de cellule. Plus précisément on va montrer qu'on a les deux formules suivantes :

$$v_1(D_0(a, b)) = d_0(v_0(a), v_0(b)) \text{ et } v_1(D_1(a, b)) = d_1(v_0(a), v_0(b)).$$

Bien sûr ces formules se démontrent de la même manière et nous ne montrerons que la première. Comme d'habitude à cette étape on s'aide des algèbres, et ici on s'aide de l'algèbre  $(T^1(G), \mu^1(G))$  où on a

$$\begin{aligned} d_0(a, b) &:= \overline{\mu}_1^1 \widehat{\delta}_1^1 D(\widehat{\eta}_0^0(a), \widehat{\eta}_0^0(b)) \\ &= \overline{\mu}_1^1 D_0(\widehat{\eta}_0^1(a), \widehat{\eta}_0^1(b)) \\ &= \overline{\mu}_1^1 \widehat{\phi}_1^1 [F^1(\widehat{\eta}_0^1(a) \star_0^1 \widehat{\eta}_0^1(b)), \widehat{F}^1(\widehat{\eta}_0^1(a)) \star_0^1 \widehat{F}^1(\widehat{\eta}_0^1(b))] \\ &= \widehat{\phi}_1^1 [\overline{\mu}_1^1 \widehat{F}^1(\widehat{\eta}_0^1(a) \star_0^1 \widehat{\eta}_0^1(b)), \overline{\mu}_1^1 \widehat{F}^1(\widehat{\eta}_0^1(a)) \star_0^1 \overline{\mu}_1^1 \widehat{F}^1(\widehat{\eta}_0^1(b))] \end{aligned}$$

On utilise alors le carré

$$\begin{array}{ccc} T_1^1(T^1(G)) & \xrightarrow{\overline{\mu}_1^1} & T_1^1(G) \\ \widehat{F}^1 \uparrow & \square & \uparrow \widehat{F}^1 \\ T_0^1(T^1(G)) & \xrightarrow{\overline{\mu}_0^1} & T_0^1(G), \end{array}$$

(ce carré provient du morphisme d'étirement catégorique 1-cellulaire libre  $\varepsilon^1 E^1(G)$  ; plus précisément il provient du domaine de  $\varepsilon^1 E^1(G)$  ; en particulier  $\overline{\mu}_0^1$  et  $\overline{\mu}_1^1$  préservent les cellules de cohérences), et donc

$$\begin{aligned} d_0(a, b) &= \overline{\phi}_1^1 [F^1(\overline{\mu}_0^1 \widehat{\eta}_0^1(a) \star_0^1 \overline{\mu}_0^1 \widehat{\eta}_0^1(b)), \overline{F}^1(\overline{\mu}_0^1 \widehat{\eta}_0^1(a)) \star_0^1 \overline{F}^1(\overline{\mu}_0^1 \widehat{\eta}_0^1(b))] \\ &= \overline{\phi}_1^1 [F^1(a \star_0^1 b), \overline{F}^1(a) \star_0^1 \overline{F}^1(b)] \\ &= D_0(a, b). \end{aligned} \tag{7}$$

Si on se donne un morphisme strict de  $T^1$ -algèbre  $(G, v) \xrightarrow{\varphi=(\varphi_0, \varphi_1)} (G', v')$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

alors on a le carré

$$\begin{array}{ccc} T_1^1(G) & \xrightarrow{\nu_1} & G_1 \\ T_1^1(\varphi) \downarrow & \square & \downarrow \varphi_1 \\ T_1^1(G') & \xrightarrow{\nu'_1} & G'_1 \end{array}$$

qui montre que

$$\begin{aligned} \varphi_1(d_0(a, b)) &= \varphi_1 \nu_1 D_0(\overline{\eta_0^1}(a), \overline{\eta_0^1}(b)) \\ &= \nu'_1 T_1^1(\varphi) D_0(\overline{\eta_0^1}(a), \overline{\eta_0^1}(b)) \\ &= \nu'_1 T_1^1(\varphi) \overline{\phi_1^1} [\overline{F^1}(\overline{\eta_0^1}(a) \star_0^1 \overline{\eta_0^1}(b)), \overline{F^1}(\overline{\eta_0^1}(a)) \star_0^1 \overline{F^1}(\overline{\eta_0^1}(b))] \\ &= \nu'_1 \overline{\phi_1^1} [T_1^1(\varphi) \overline{F^1}(\overline{\eta_0^1}(a) \star_0^1 \overline{\eta_0^1}(b)), \\ &\quad T_1^1(\varphi) \overline{F^1}(\overline{\eta_0^1}(a)) \star_0^1 T_1^1(\varphi) \overline{F^1}(\overline{\eta_0^1}(b))] \end{aligned}$$

Aussi on a le carré

$$\begin{array}{ccc} M_0^1(G) & \xrightarrow{\overline{F^1}} & M_1^1(G) \\ T_0^1(\varphi) \downarrow \ddots & \square & \downarrow \ddots T_1^1(\varphi) \\ M_0^1(G') & \xrightarrow{\overline{F'^1}} & M_1^1(G') \end{array}$$

(puisque  $T^1(\varphi)$  n'est que « l'oubli » d'un morphisme entre les étirements libres  $E^1(G)$  et  $E^1(G')$ ) donc

$$\begin{aligned} \varphi_1(d_0(a, b)) &= \nu'_1 \overline{\phi_1^1} [\overline{F'^1}(T_0^1(\varphi) \overline{\eta_0^1}(a) \star_0^1 T_0^1(\varphi) \overline{\eta_0^1}(b)), \\ &\quad \overline{F'^1}(T_0^1(\varphi) \overline{\eta_0^1}(a)) \star_0^1 \overline{F'^1}(T_0^1(\varphi) \overline{\eta_0^1}(b))]. \end{aligned}$$

Ensuite on utilise le carré

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{\overline{\eta_0^1}} & T_0^1(G) \\ \varphi_0 \downarrow & \square & \downarrow T_0^1(\varphi) \\ G'_0 & \xrightarrow{\overline{\eta_0^1}} & T_0^1(G') \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned}
 \varphi_1(d_0(a, b)) &= v'_1 \overline{\phi'_1} [ \overline{F'^1}(\overline{\eta'_0}^1(G')(\varphi_0(a)) \star_0^1 \overline{\eta'_0}^1(\varphi_0(b))), \\
 &\quad \overline{F'^1}(\overline{\eta'_0}^1(\varphi_0(a))) \star_0^1 \overline{F'^1}(\overline{\eta'_0}^1(\varphi_0(b))) ] \\
 &= v'_1 D_0(\overline{\eta'_0}^1(\varphi_0(a)), \overline{\eta'_0}^1(\varphi_0(b))) \\
 &= d_0(\varphi_0(a), \varphi_0(b)). \tag{8}
 \end{aligned}$$

Enfin  $(G, v)$  est en particulier un morphisme de  $T^1$ -algèbre donc, d'après la formule (8),  $v_1(d_0(a, b)) = d_0(v_0(a), v_0(b))$  et on a vu que la formule (7) donne  $v_1(d_0(a, b)) = v_1(D_0(a, b))$ , d'où la formule :

$$\boxed{v_1(D_0(a, b)) = d_0(v_0(a), v_0(b))}$$

### 5.3.3 Cellules de cohérences spécifiques aux pseudo-2-transformations naturelles

Dans les étirements ces cellules seront notées avec la lettre  $\Omega$ . Dans les algèbres on utilisera la lettre  $\omega$ . Si on se donne  $s \xrightarrow{a} t \in G_0(1)$ , on va montrer que les 1-cellules parallèles  $H^1(a) \circ_0^1 \tau^1(s)$  et  $\tau^1(t) \circ_0^1 F^1(a)$  sont connectées par une 2-cellule qui sera dite cellules de cohérences pour les pseudo-2-transformations naturelles. On voit par lecture syntaxique dans l'étirement catégorique 1-cellulaire libre  $E^1(G)$  qu'on a la 2-cellule suivante :

$$\begin{array}{c}
 \tau_M^1(G)(\eta_0^1(G)(t)) \star_0^1 F_M^1(G)(\eta_0^1(G)(a)) \\
 \Omega(\eta_0^1(G)(a)) \Downarrow \\
 H_M^1(G)(\eta_0^1(G)(a)) \star_0^1 \tau_M^1(G)(\eta_0^1(G)(s))
 \end{array}$$

et on pose donc

$$\omega(a) := v_1 \Omega(\eta_0^1(G)(a))$$

Cette cellule convient bien puisque

$$\begin{aligned}
 v_1(\tau_M^1(G)(\eta_0^1(G)(t)) \star_0^1 F_M^1(G)(\eta_0^1(G)(a))) \\
 &= v_1 \tau_M^1(G)(\eta_0^1(G)(t)) \circ_0^1 v_1 F_M^1(G)(\eta_0^1(G)(a)) \\
 &= \tau^1(t) \circ_0^1 F^1(a)
 \end{aligned}$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

et, de même,

$$v_1(H_M^1(G)(\eta_0^1(G)(a)) \star_0^1 \tau_M^1(G)(\eta_0^1(G)(s))) = H^1(a) \circ_0^1 \tau^1(s)$$

On va montrer qu'avec cette définition  $v_1$  préserve ce type de cellules. Plus précisément on va montrer la formule :

$$v_1(\Omega(a)) = \omega(v_0(a))$$

On notera (toujours en suivant les règles de notation du § 2)

$$\begin{aligned} \overline{\mu}_1^1 &= \mu_1^1(G), \widehat{\Omega} = \Omega(\eta_0^1(T^1(G))(a)), \overline{\Omega} = \Omega(\eta_0^1(G)(a)), \widehat{\phi}_1^1 = \phi_1^1(T^1(G)), \\ \overline{\phi}_1^1 &= \phi_1^1(G), \overline{\phi}_1^1 = \phi_1^1(G'), \widehat{\tau}_M^1 = \tau_M^1(T^1(G)), \overline{\tau}_M^1 = \tau_M^1(G), \overline{\tau}_M^1 = \tau_M^1(G'), \\ \widehat{\eta}_0^1 &= \eta_0^1(T^1(G)), \overline{\eta}_0^1 = \eta_0^1(G), \overline{\eta}_0^1 = \eta_0^1(G'), \widehat{F}_M^1 = F_M^1(T^1(G)), \overline{F}_M^1 = F_M^1(G), \\ \overline{F}_M^1 &= F_M^1(G'), \widehat{H}_M^1 = H_M^1(T^1(G)), \overline{H}_M^1 = H_M^1(G), \overline{H}_M^1 = H_M^1(G') \end{aligned}$$

Dans l'algèbre  $(T^1(G), \mu^1(G))$  on a

$$\begin{aligned} \omega(a) &:= \overline{\mu}_1^1 \widehat{\Omega} \\ &= \overline{\mu}_1^1 \widehat{\phi}_1^1 [\widehat{\tau}_M^1(\widehat{\eta}_0^1(t)) \star_0^1 \widehat{F}_M^1(\widehat{\eta}_0^1(a)), \widehat{H}_M^1(\widehat{\eta}_0^1(a)) \star_0^1 \widehat{\tau}_M^1(\widehat{\eta}_0^1(s))] \\ &= \overline{\phi}_1^1 [\overline{\mu}_1^1 \overline{\tau}_M^1(\overline{\eta}_0^1(t)) \star_0^1 \overline{\mu}_1^1 \overline{F}_M^1(\overline{\eta}_0^1(a)), \overline{\mu}_1^1 \overline{H}_M^1(\overline{\eta}_0^1(a)) \star_0^1 \overline{\mu}_1^1 \overline{\tau}_M^1(\overline{\eta}_0^1(s))] \end{aligned}$$

et du fait que  $\mu^1(G)$  n'est que l'oubli d'un morphisme d'étirements catégoriques 1-cellulaires on a

$$\begin{array}{ccc} M_0^1(T^1(G)) \xrightarrow{\mu_0^1(G)} & & M_0^1(G) \\ \tau_M^1(T^1(G)) \downarrow & \square & \downarrow \tau_M^1(G) \\ M_1^1(T^1(G)) \xrightarrow{\mu_1^1(G)} & & M_1^1(G) \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} \omega(a) &= \overline{\phi}_1^1 [\overline{\tau}_M^1(t) \star_0^1 \overline{F}_M^1(a), \overline{H}_M^1(a) \star_0^1 \overline{\tau}_M^1(s)] \\ &= \Omega(a). \end{aligned} \tag{9}$$



**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

Soit  $(G, \nu) \xrightarrow{\varphi=(\varphi_0, \varphi_1)} (G', \nu')$  un morphisme strict de  $T^1$ -algèbres ; on a alors le carré

$$\begin{array}{ccc} T_1^1(G) & \xrightarrow{\nu_1} & G_1 \\ T_1^1(\varphi) \downarrow & \square & \downarrow \varphi_1 \\ T_1^1(G') & \xrightarrow{\nu'_1} & G'_1 \end{array}$$

et

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega(a)) &= \varphi_1 \nu_1 \overline{\Omega} \\ &= \nu'_1 T_1^1(\varphi) \overline{\Omega} \quad (\text{d'après le carré précédent}), \\ &= \nu'_1 T_1^1(\varphi) \phi_1^1 [\overline{\tau}_M^1(\eta_0^1(t)) \star_0^1 \overline{F}_M^1(\eta_0^1(a)), \\ &\quad \overline{H}_M^1(\eta_0^1(a)) \star_0^1 \overline{\tau}_M^1(\eta_0^1(s))] \\ &= \nu'_1 \phi_1^1 [T_1^1(\varphi) \overline{\tau}_M^1(\eta_0^1(t)) \star_0^1 T_1^1(\varphi) \overline{F}_M^1(\eta_0^1(a)), \\ &\quad T_1^1(\varphi) \overline{H}_M^1(\eta_0^1(a)) \star_0^1 T_1^1(\varphi) \overline{\tau}_M^1(\eta_0^1(s))] \end{aligned}$$

mais  $T^1(\varphi)$  n'est que l'oubli d'un morphisme d'étirement catégorique 1-cellulaire, donc on a le carré

$$\begin{array}{ccc} M_0^1(G) & \xrightarrow{\tau_M^1(G)} & M_1^1(G) \\ T_0^1(\varphi) \downarrow & \square & \downarrow T_1^1(\varphi) \\ M_0^1(G') & \xrightarrow{\tau_M^1(G')} & M_1^1(G') \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega(a)) &= \nu'_1 \phi_1^1 [\overline{\tau}_M^1 T_0^1(\varphi) \overline{\eta}_0^1(t) \star_0^1 \overline{F}_M^1 T_0^1(\varphi) \overline{\eta}_0^1(a), \\ &\quad \overline{H}_M^1 T_0^1(\varphi) \overline{\eta}_0^1(a) \star_0^1 \overline{\tau}_M^1 T_0^1(\varphi) \overline{\eta}_0^1(s)] \end{aligned}$$

Aussi on a le carré

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{\overline{\eta_0^1}} & T_0^1(G) \\ \varphi_0 \downarrow & \square & \downarrow T_0^1(\varphi) \\ G'_0 & \xrightarrow{\overline{\eta_0^1}} & T_0^1(G') \end{array}$$

donc

$$\begin{aligned} \varphi_1(\omega(a)) &= v_1^1 \overline{\phi_1^1} [\overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(\varphi_0(t)) \star_0^1 \overline{F_M^1 \eta_0^1}(\varphi_0(a)), \\ &\quad \overline{H_M^1 \eta_0^1}(\varphi_0(a)) \star_0^1 \overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(\varphi_0(s))] \\ &= v_1^1 \Omega(\eta_0^1(G'))(\varphi_0(a)) \\ &= \omega(\varphi_0(a)) \end{aligned} \tag{10}$$

En particulier  $(G, v)$  est un morphisme d'algèbre, donc  $v_1(\omega(a)) = \omega(v_0(a))$  (d'après (10)), et on a vu que  $v_1(\omega(a)) = v_1(\Omega(a))$  (d'après (9)), d'où

$$\boxed{v_1(\Omega(a)) = \omega(v_0(a))}$$

### 5.3.4 Axiome de compatibilité avec l'associativité-distributivité des pseudo-2-transformations naturelles

Si on se donne le diagramme  $s \xrightarrow{a} t \xrightarrow{b} u$ , alors on doit vérifier l'axiome suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^1(b) \circ_0^1 (H^1(a) \circ_0^1 \tau^1(s)) \xrightarrow{1_{H^1(b)} \circ_0^2 \omega(a)} & H^1(b) \circ_0^1 (\tau^1(t) \circ_0^1 F^1(a)) \\ \downarrow a(H^1(b), H^1(a), \tau^1(s)) & \downarrow a(H^1(b), \tau^1(t), F^1(a)) \\ (H^1(b) \circ_0^1 H^1(a)) \circ_0^1 \tau^1(s) & (H^1(b) \circ_0^1 \tau^1(t)) \circ_0^1 F^1(a) \\ \downarrow d_1(a, b) \circ_0^2 1_{\tau^1(s)} & \downarrow \omega(b) \circ_0^2 1_{F^1(a)} \\ H^1(b \circ_0^1 a) \circ_0^1 \tau^1(s) & (\tau^1(u) \circ_0^1 F^1(b)) \circ_0^1 F^1(a) \\ \downarrow \omega(b \circ_0^1 a) & \downarrow a(\tau^1(u), F^1(b), F^1(a)) \\ \tau^1(u) \circ_0^1 F^1(b \circ_0^1 a) \xleftarrow{1_{\tau^1(u)} \circ_0^2 d_0(b, a)} & \tau^1(u) \circ_0^1 (F^1(b) \circ_0^1 F^1(a)). \end{array}$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

On va d'abord montrer qu'un certain diagramme de  $T_1^1(G)$  « contient » une 3-cellule, auquel on appliquera ensuite  $\nu_1$  pour obtenir le résultat escompté.

Montrons donc que dans  $T_1^1(G)$  vit le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 B_0 & \xrightarrow{g_0} & B_1 \\
 \Downarrow g_7 & & \Downarrow g_1 \\
 B_7 & & B_2 \\
 \Downarrow g_6 & \Leftarrow & \Downarrow g_2 \\
 B_6 & & B_3 \\
 \Downarrow g_5 & & \Downarrow g_3 \\
 B_5 & \xleftarrow{g_4} & B_4
 \end{array}$$

où on a posé (pour simplifier les calculs on notera  $\overline{\eta_0^1} = \eta_0^1(G)$ ,  $\overline{F_M^1} = F_M^1(G)$ ,  $\overline{H_M^1} = H_M^1(G)$ ,  $\overline{\tau_M^1} = \tau_M^1(G)$ ,  $\overline{\phi_1^1} = \phi_1^1(G)$ ) :

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \overline{H_M^1 \eta_0^1}(b) \star_0^1 (\overline{H_M^1 \eta_0^1}(a) \star_0^1 \overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(s)) \\
 B_1 &= \overline{H_M^1 \eta_0^1}(b) \star_0^1 (\overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(t) \star_0^1 \overline{F_M^1 \eta_0^1}(a)) \\
 B_2 &= (\overline{H_M^1 \eta_0^1}(b) \star_0^1 \overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(t)) \star_0^1 \overline{F_M^1 \eta_0^1}(a) \\
 B_3 &= (\overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(u) \star_0^1 \overline{F_M^1 \eta_0^1}(b)) \star_0^1 \overline{F_M^1 \eta_0^1}(a) \\
 B_4 &= \overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(u) \star_0^1 (\overline{F_M^1 \eta_0^1}(b) \star_0^1 \overline{F_M^1 \eta_0^1}(a)) \\
 B_5 &= \overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(u) \star_0^1 \overline{F_M^1}(\eta_0^1(b) \star_0^1 \overline{\eta_0^1}(a)) \\
 B_6 &= \overline{H_M^1}(\eta_0^1(b) \star_0^1 \eta_0^1(a)) \star_0^1 \overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(s) \\
 B_7 &= (\overline{H_M^1 \eta_0^1}(b) \star_0^1 \overline{H_M^1 \eta_0^1}(a)) \star_0^1 \overline{\tau_M^1 \eta_0^1}(s)
 \end{aligned}$$

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

$$\begin{aligned}
 g_0 &= 1_{\overline{H_M^1 \eta_0^1(b)}} \star_0^2 \overline{\Omega(\eta_0^1(a))} \\
 g_1 &= \overline{\phi_1^1(B_1, B_2)} = A(\overline{H_M^1 \eta_0^1(b)}, \overline{\tau_M^1 \eta_0^1(t)}, \overline{F_M^1 \eta_0^1(a)}) \\
 g_2 &= \overline{\Omega(\eta_0^1(b))} \star_0^2 1_{\overline{F_M^1 \eta_0^1(a)}} \\
 g_3 &= \overline{\phi_1^1(B_3, B_4)} = A(\overline{\tau_M^1 \eta_0^1(u)}, \overline{F_M^1 \eta_0^1(b)}, \overline{F_M^1 \eta_0^1(a)}) \\
 g_4 &= 1_{\overline{\tau_M^1 \eta_0^1(u)}} \star_0^2 \overline{D_0(\eta_0^1(b), \eta_0^1(a))} \\
 g_5 &= \overline{\phi_1^1(B_6, B_5)} = \overline{\Omega(\eta_0^1(b))} \star_0^1 \overline{\eta_0^1(a)} \\
 g_6 &= \overline{D_1(\eta_0^1(b), \eta_0^1(a))} \star_0^2 1_{\overline{\tau_M^1 \eta_0^1(s)}} \\
 g_7 &= \overline{\phi_1^1(B_0, B_7)} = A(\overline{H_M^1 \eta_0^1(b)}, \overline{H_M^1 \eta_0^1(a)}, \overline{\tau_M^1 \eta_0^1(s)}).
 \end{aligned}$$

Posons alors  $c_0 = g_4 \circ_1^2 g_3 \circ_1^2 g_2 \circ_1^2 g_1 \circ_1^2 g_0$  et  $c_1 = g_5 \circ_1^2 g_6 \circ_1^2 g_7$ . On voit facilement que non seulement  $c_0$  et  $c_1$  sont parallèles, mais également qu'elles sont toutes deux normalisées par  $\pi_1^1(G)$ . Donc il existe une 3-cellule  $\overline{\phi_1^1(c_0, c_1)}$  qui les connecte (c'est la 3-cellule au centre du diagramme précédent). Lorsqu'on lui applique  $v_1$  on obtient l'axiome souhaité, car d'une part  $v_1(\overline{\phi_1^1(c_0, c_1)})$  est une cellule identité (puisque  $\dim G_0 = \dim G_1 = 2$ ), et d'autre part grâce au fait que  $v_1$  est un morphisme d' $\infty$ -magmas on a que  $v_1 B_0, v_1 B_1, v_1 B_2, v_1 B_3, v_1 B_4, v_1 B_7$  sont les cellules souhaitées.

Pour  $v_1 B_5$  et  $v_1 B_6$  on utilise la proposition 12 qui dit en particulier que  $v_1 \overline{F_M^1} = F^1 v_0$  et  $v_1 \overline{H_M^1} = H^1 v_0$ .

Pour les morphismes on utilise les résultats de commutations de  $v_1$  avec les cellules de cohérences, et on obtient alors ce qu'on souhaite pour  $v_1 g_i$ , ( $i \in \llbracket 0, 6 \rrbracket$ ).

## 5.4 Structuration en pseudo-2-modification des $T^2$ -algèbres de dimension 2

Soit  $(G, \nu)$  une  $T^2$ -algèbre de dimension 2. Posons  $\Psi^2 := h_1 \Psi_M^2(G) \eta_0^2(G)$  et  $U_{2\text{-Mag}}^{2\text{-Gr}}(G) = (M_0^2(G), M_1^2(G), \Psi_M^2(G))$ . Alors  $\Psi^2 \in \text{Hom}_{\overline{\mathbb{C}}}(G_0, G_1)(2)$  et  $\Psi_M^2(G) \in \text{Hom}_M(M_0^2(G), M_1^2(G))(2)$ .

$(M_0^2(G), M_1^2(G), \Psi_M^2(G))$  provient de l'étirement catégorique 2-cellulaire libre  $E^2(G)$ , et grâce à la proposition 12, on sait qu'on a un morphisme

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

d' $\infty$ -magmas 2-cellulaires

$$(M_0^2(G), M_1^2(G), \Psi_M^2(G)) \xrightarrow{\nu} (G_0, G_1, \Psi^2)$$

On pose

$$\tau_M^2(G) = d_1^2(\Psi_M^2(G))$$

$$\theta_M^2(G) = c_1^2(\Psi_M^2(G))$$

$$F_M^2(G) = d_0^1(d_1^2(\Psi_M^2(G)))$$

$$H_M^2(G) = c_0^1(c_1^2(\Psi_M^2(G)))$$

et aussi :

$$\tau^2 = d_1^2(\Psi^2)$$

$$\theta^2 = c_1^2(\Psi^2)$$

$$F^2 = d_0^1(d_1^2(\Psi^2))$$

$$H^2 = c_0^1(c_1^2(\Psi^2)).$$

La  $T$ -algèbre source de  $(G, \nu)$

$$\sigma(\sigma_0^1(\sigma_1^2(G, \nu))) = (G_0, \nu_0 \circ \delta_{1,0}^2(G) \circ \delta_{0,0}^1(G) \circ \delta(G))$$

met sur  $G_0$  une structure de bicatégorie qui coïncide avec celle produite par  $(G, \nu)$  sur  $G_0$ , c'est à dire celle où on pose

$$a \circ_p^n b := \nu_0(\eta_0^2(G)(a) \star_p^n \eta_0^2(G)(b))$$

La  $T$ -algèbre but de  $(G, \nu)$  :

$$\beta(\beta_0^1(\beta_1^2(G, \nu))) = (G_1, \nu_1 \circ \kappa_{1,0}^2(G) \circ \kappa_{0,0}^1(G) \circ \kappa(G))$$

met sur  $G_1$  une structure de bicatégorie qui coïncide avec celle produite par  $(G, \nu)$  sur  $G_1$ , c'est à dire celle où on pose

$$a \circ_p^n b := \nu_1(\eta_1^2(G)(a) \star_p^n \eta_1^2(G)(b))$$

Ces coïncidences sont la conséquence de  $(\text{Mon}_2)$  et des structures de morphismes  $\infty$ -magmas sous-jacents à  $\delta(G)$ ,  $\delta_{0,0}^1(G)$ ,  $\delta_{1,0}^2(G)$ ,  $\kappa(G)$ ,  $\kappa_{0,0}^1(G)$  et  $\kappa_{1,0}^2(G)$ .

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

La  $T^0$ -algèbre source de  $(G, \nu)$

$$\sigma_0^1 \sigma_1^2((G, \nu)) = (G, (\nu_0 \circ \delta_{1,0}^2(G) \circ \delta_{0,0}^1(G), \nu_1 \circ \delta_{1,1}^2(G) \circ \delta_{0,1}^1(G)))$$

produit un pseudo-2-foncteur  $F^0$  qui coïncide avec  $F^2$ , où

$$F^0 = \nu_1 \circ \delta_{1,1}^2(G) \circ \delta_{0,1}^1(G) \circ F_M^0(G) \circ \eta_0^0(G)$$

La  $T^0$ -algèbre but de  $(G, \nu)$

$$\beta_0^1 \beta_1^2((G, \nu)) = (G, (\nu_0 \circ \kappa_{1,0}^2(G) \circ \kappa_{0,0}^1(G), \nu_1 \circ \kappa_{1,1}^2(G) \circ \kappa_{0,1}^1(G)))$$

produit un pseudo-2-foncteur  $H^0$  qui coïncide avec  $H^2$  tel que

$$H^0 = \nu_1 \circ \kappa_{1,1}^2(G) \circ \kappa_{0,1}^1(G) \circ F_M^0(G) \circ \eta_0^0(G)$$

Enfin la  $T^1$ -algèbre source de  $(G, \nu)$

$$\sigma_1^2((G, h)) = (G, \nu \circ \delta_1^2(G)) = (G, (\nu_0 \circ \delta_{1,0}^2(G), \nu_1 \circ \delta_{1,1}^2(G)))$$

produit une pseudo-2-transformation naturelle  $\tau^1$ , qui coïncide avec  $\tau^2$  avec

$$\tau^1 = \nu_1 \circ \delta_{1,1}^2(G) \circ \tau_M^1(G) \circ \eta_0^1(G)$$

La  $T^1$ -algèbre but de  $(G, \nu)$  :

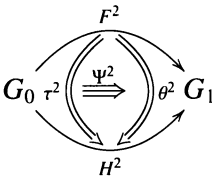
$$\beta_1^2((G, \nu)) = (G, \nu \circ \kappa_1^2(G)) = (G, (\nu_0 \circ \kappa_{1,0}^2(G), \nu_1 \circ \kappa_{1,1}^2(G)))$$

produit une pseudo-2-transformation naturelle  $\theta^1$  qui coïncide avec  $\theta^2$  où

$$\theta^1 = \nu_1 \circ \kappa_{1,1}^2(G) \circ \tau_M^1(G) \circ \eta_0^1(G)$$

Toutes ces coïncidences viennent de la proposition 11.

Donc on obtient le diagramme :



## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

tels qu'en dimension 2,  $G_0$  et  $G_1$  sont des bicatégories,  $F^2$  et  $H^2$  sont des pseudo-2-foncteurs,  $\tau^2$  et  $\theta^2$  sont des pseudo-2-transformations naturelles.

Pour  $s \xrightarrow{a} t \in G_0(1)$ , posons

$$\tau^2(t) \circ F^2(a) \xrightarrow{\omega_r(a)} H^2(a) \circ \tau^2(s) \quad \text{et} \quad \theta^2(t) \circ F^2(a) \xrightarrow{\omega_\theta(a)} H^2(a) \circ \theta^2(s)$$

les 2-cellules de cohérences spécifiques aux pseudo-2-transformations naturelles  $\tau^2$  et  $\theta^2$  pour les cellules de cohérences spécifiques à  $\tau^2$  et  $\theta^2$ . Avec cela on a la proposition suivante :

**Proposition 14**  $(G, v)$  produit sur  $\Psi^2$  une structure de pseudo-2-modification i.e. on a le carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \tau^2(t) \circ F^2(a) & \xrightarrow{\Psi^2(t) \circ_0^2 1_{F^2(a)}} & \theta^2(t) \circ F^2(a) \\ \omega_r(a) \Downarrow & \square & \Downarrow \omega_\theta(a) \\ H^2(a) \circ \tau^2(s) & \xrightarrow{1_{H^2(a)} \circ_0^2 \Psi^2(s)} & H^2(a) \circ \theta^2(s) \end{array}$$

## 6 Exemples

On commence par deux exemples assez simples d'étirements catégoriques cellulaires qui nous donneront des exemples d'algèbres (grâce aux foncteurs de comparaisons d'Eilenberg-Moore). Ensuite on donne un exemple plus subtil qui décrira une structure d'étirement catégorique sur la catégorie globulaire  $(*, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC$ . Enfin on termine ces exemples en montrant que les morphismes de la catégorie  $\text{Alg}(T)$  se structurent en  $T^0$ -algèbres.

### 6.1 Deux exemples simples d'étirements catégoriques cellulaires

**Exemple 1** Notons  $E = (M, C, \pi, \phi)$  un étirement catégorique (on utilise la lettre  $E$ , qui était réservé au foncteur « étirements catégoriques libres », parce qu'il n'y a pas de risque de confusion). On va voir que les cellules de  $M$  mettent en lumière des étirements catégoriques cellulaires en toutes

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

dimension. Pour  $M$  et  $C$ , on notera de la même manière les applications sources, buts, et identités :

$$M(n) \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n-1}^n} \\ \xrightarrow{b_{n-1}^n} \\ \xleftarrow{i_{n-1}^n} \end{array} M(n-1) \quad \text{et} \quad C(n) \begin{array}{c} \xrightarrow{s_{n-1}^n} \\ \xrightarrow{b_{n-1}^n} \\ \xleftarrow{i_{n-1}^n} \end{array} C(n-1)$$

Si  $a \in M(0)$ , notons  $\Delta a : M \longrightarrow M$ , le morphisme d' $\infty$ -graphe suivant :  $\forall c \in M(0), (\Delta a)(c) := a, \forall n \geq 1, \forall c \in M(n), (\Delta a)(c) := 1_n^0(a)$ , et  $\forall n \geq 1$ , si  $\gamma \in M(n)$ , on notera  $\Delta \gamma$  la famille de  $n$ -cellules de  $M$  indexé par  $M(0)$  réduite à la cellule  $\gamma$  elle-même, i.e.  $\forall c \in M(0), (\Delta \gamma)(c) := \gamma$ . Bien sûr on peut faire les mêmes types de constructions pour les cellules de  $C(0)$  et pour les cellules de  $C(n) (n \geq 1)$ , construction que l'on notera aussi avec la lettre  $\Delta$ .

Dans ces conditions on voit bien que  $(M, M, \Delta a) \in (0, \infty)\text{-Mag}$ , que  $(C, C, \Delta \pi(a)) \in (0, \infty)\text{-Cat}$ , et que finalement

$$(E, E, (\Delta a, \Delta \pi(a))) \in (0, \infty)\text{-EtC}$$

On a aussi que  $(M, M, \Delta \gamma) \in (n, \infty)\text{-Mag}$ ,  $(C, C, \Delta \pi(\gamma)) \in (n, \infty)\text{-Cat}$  et finalement

$$(E, E, (\Delta \gamma, \Delta \pi(\gamma))) \in (n, \infty)\text{-EtC}$$

**Exemple 2** L'autre exemple facile est le suivant : soit  $E = (M, C, \pi, \phi)$  un étirement catégorique (on utilisera les mêmes notations que précédemment). On va voir qu'on peut associer à tous quadruplets

$$(a, b, c, \gamma) \in M(0) \times M(0) \times M(0) \times M(n)$$

un étirement catégorique  $n$ -cellulaire.

Les objets  $a$  et  $b$  permettent de construire un  $\infty$ -magma  $\text{Hom}_m(a, b)$ , et une  $\infty$ -catégorie stricte  $\text{Hom}_c(\pi(a), \pi(b))$ , de la façon suivante : si  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$\text{Hom}_m(a, b)(n) = \{ \alpha \in M(n+1) / s_0^{n+1}(\alpha) = a \quad \text{et} \quad b_0^{n+1}(\alpha) = b \}$$

Les applications sources, buts et identités de  $\text{Hom}_m(a, b)$

$$\text{Hom}_m(a, b)(n+1) \begin{array}{c} \xrightarrow{d_{n+1}^{n+1}} \\ \xrightarrow{c_{n+1}^{n+1}} \\ \xleftarrow{\text{id}_{n+1}^n} \end{array} \text{Hom}_m(a, b)(n)$$



## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

sont définis par :  $d_n^{n+1} := s_{n+1}^{n+2}$ ,  $c_n^{n+1} := b_{n+1}^{n+2}$ ,  $\text{id}_{n+1}^n := 1_{n+2}^{n+1}$  (bien sûr on parle de  $s_{n+1}^{n+2}$ ,  $b_{n+1}^{n+2}$  restreints à  $\text{Hom}_m(a, b)(n+1)$  et  $1_{n+2}^{n+1}$  restreint à  $\text{Hom}(a, b)_m(n)$ ).

L' $\infty$ -graphe réflexif ainsi obtenu est muni des opérations  $(\odot_p^n)_{0 \leq p < n}$ , telles que  $\odot_p^n := \circ_{p+1}^{n+1}$ , qui font de  $\text{Hom}_m(a, b)$  un « sous »  $\infty$ -magma de  $M$ . De la même manière on définit le « sous »  $\infty$ -magma  $\text{Hom}_m(a, c)$  de  $M$  (je mets des guillemets parce que à cause de la réindéxation, ce n'est pas vraiment un sous-magma de  $M$ ), et les « sous »  $\infty$ -catégories strictes  $\text{Hom}_c(\pi(a), \pi(b))$  et  $\text{Hom}_c(\pi(a), \pi(c))$  de  $C$ . À ce stade on voit qu'on obtient les deux étirements catégoriques suivants :  $E_0 = (\text{Hom}_m(a, b), \text{Hom}_c(\pi(a), \pi(b)), \pi, \phi)$ , et  $E_1 = (\text{Hom}_m(a, c), \text{Hom}_c(\pi(a), \pi(c)), \pi, \phi)$ , tous deux sous étirements catégoriques de  $E$  (bien sur les  $\pi$  et  $\phi$  de ces étirements sont en fait les restrictions de ceux de  $E$ ). Considérons  $h \in M(1)$  telle que  $s_0^1(h) = b$  et  $b_0^1(h) = c$  ; on notera  $h^*$  le morphisme d' $\infty$ -graphe suivant

$$\text{Hom}_m(a, b) \xrightarrow{h^*} \text{Hom}_m(a, c)$$

défini par :  $\forall n \geq 0, \forall x \in \text{Hom}_m(a, b)(n)$ ,  $h^*(x) := 1_{n+1}^1(h) \circ_0^{n+1} x$  (attention les  $n$ -cellules de  $\text{Hom}_m(a, b)$  sont des  $(n+1)$ -cellules de  $M$ ), et si  $\alpha \in M(n)$  (avec  $n \geq 2$ ) est telle que  $s_0^n(\alpha) = b$  et  $b_0^n(\alpha) = c$ , alors on notera  $\alpha^*$  la famille de  $(n-1)$ -cellules de  $\text{Hom}_m(a, c)$  suivante :  $\alpha^* = \{\alpha \circ_0^n 1_n^1(f) / f \in \text{Hom}_m(a, b)(0)\}$ .

Remarquez que grâce aux lois d'échanges dans les  $\infty$ -catégories strictes, si  $k \in C(1)$  est telle que :  $s_0^1(k) = \pi(b)$  et  $b_0^1(k) = \pi(c)$ , alors

$$\text{Hom}_c(\pi(a), \pi(b)) \xrightarrow{k^*} \text{Hom}_c(\pi(a), \pi(c))$$

(défini comme précédemment) est un  $\infty$ -foncteur strict. Aussi lorsque  $\alpha \in C(n)$  (avec  $n \geq 2$ ) est telle que :  $s_0^n(\alpha) = \pi(b)$  et  $b_0^n(\alpha) = \pi(c)$ , alors  $\alpha^*$  définit une  $\infty$ -catégorie stricte  $(n-1)$ -cellulaire. Avec ces données on voit que

$$(\text{Hom}_m(a, b), \text{Hom}_m(a, c), h^*) \in (0, \infty)\text{-Mag}$$

et

$$(\text{Hom}_c(\pi(a), \pi(b)), \text{Hom}_c(\pi(a), \pi(c)), \pi(h)^*) \in (0, \infty)\text{-Cat}$$

et aussi que  $(E_0, E_1, (h^*, \pi(h)^*)) \in (0, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC$ .

De même, pour  $n \geq 2$ ,

$$(\text{Hom}_m(a, b), \text{Hom}_m(a, c), \alpha^*) \in (n-1, \infty)\text{-Mag}$$

et

$$(\text{Hom}_c(\pi(a), \pi(b)), \text{Hom}_c(\pi(a), \pi(c)), \pi(\alpha^*)) \in (n-1, \infty)\text{-Cat}$$

et de même que  $(E_0, E_1, (\alpha^*, \pi(\alpha^*))) \in (n-1, \infty)\text{-EtC}$ .

## 6.2 Étirement catégorique des étirements morphiques

On rappelle que  $\infty\text{-Gr}$  est monoïdal fermé, ce qui permet de construire différents « homs » qui nous intéressent. Dans un premier temps on définit les compositions en utilisant ces homs (qui sont des  $\infty$ -graphes). Ensuite on utilise ces définitions pour définir les compositions dans l' $\infty$ -graphe réflexif formé à partir de la catégorie globulaire correspondante (en ne considérant que la partie objet de cette catégorie globulaire ; voir la remarque 4). On fait cela pour les trois catégories globulaires qui nous intéressent. Par exemple dans un premier temps on définit les compositions en utilisant les homs d' $\infty$ -magmas, et cela pour définir les compositions dans l' $\infty$ -graphe réflexif  $(*, \infty)\text{-Mag}$  (noté comme sa catégorie globulaire). Et on refait la même chose pour  $(*, \infty)\text{-Cat}$  (respectivement provenant de la catégorie globulaire des  $\infty$ -catégories strictes cellulaires, et de la catégorie globulaire des étirements catégoriques cellulaires). Les applications sources, buts, et identité dans les homs seront respectivement notés avec les lettres  $d$ ,  $c$ , et  $\text{id}$ , et dans les  $\infty$ -graphes réflexifs elles seront notés avec les lettres  $\sigma$ ,  $\beta$ , et  $\iota$  (pour rappeler que ces  $\infty$ -graphes réflexifs proviennent de catégories globulaires).

### 6.2.1 $\infty$ -magmas cellulaires

$M_0, M_1$  désigneront des  $\infty$ -magmas. Soient  $x, y \in \text{Hom}_M(M_0, M_1)(n)$  ( $n \geq 1$ ) alors si pour  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ ,  $c_p^n(x) = d_p^n(y)$  alors on pose

$$\forall a \in M_0(0), (y \odot_p^n x)(a) := y(a) \circ_p^n x(a)$$

Si  $(M_0, M_1, x), (M_0, M_1, y) \in (n, \infty)\text{-Mag}$  sont tels que, pour  $0 \leq p < n$ ,

$$\beta_p^n((M_0, M_1, x)) := (M_0, M_1, c_p^n(x)) = (M_0, M_1, d_p^n(y)) = \sigma_p^n((M_0, M_1, y))$$

alors on posera

$$(M_0, M_1, y) \odot_p^n (M_0, M_1, x) := (M_0, M_1, y \odot_p^n x).$$

Pour les raisons de positionnement habituelles, ces compositions font de  $(*, \infty)\text{-Mag}$  un  $\infty$ -magma.

### 6.2.2 $\infty$ -catégories strictes cellulaires

Les opérations  $\otimes_p^n$  sont celles du § 3.4 (qui définissent la cartésianité d' $\infty$ -Cat).  $C_0, C_1$  désigneront des  $\infty$ -catégories strictes. Avec ces opérations, si  $(C_0, C_1, x), (C_0, C_1, y) \in (n, \infty)\text{-Cat}$  sont tels que, pour  $0 \leq p < n$ ,

$$\beta_p^n((C_0, C_1, x)) := (C_0, C_1, c_p^n(x)) = (C_0, C_1, d_p^n(y)) = \sigma_p^n((C_0, C_1, y))$$

alors on pose

$$(C_0, C_1, y) \otimes_p^n (C_0, C_1, x) := (C_0, C_1, y \otimes_p^n x)$$

Bien sûr ces compositions font de  $(*, \infty)\text{-Cat}$  un  $\infty$ -magma, mais plus, elles font de  $(*, \infty)\text{-Cat}$  une  $\infty$ -catégorie stricte.

### 6.2.3 Étirements catégoriques cellulaires

$E_0 = (M_0, C_0, \pi_0, \phi_0), E_1 = (M_1, C_1, \pi_1, \phi_1)$  désigneront des étirements catégoriques. Soient  $x, y \in \text{Hom}_E(E_0, E_1)(n)$  ( $n \geq 1$ ), dans ce cas  $x$  et  $y$  sont respectivement donnés par les couples  $(x_M, x_C)$  et  $(y_M, y_C)$ , tels que  $x_M, y_M \in \text{Hom}_M(M_0, M_1)(n)$  et  $x_C, y_C \in \text{Hom}_{U_*(\overline{C})}(C_0, C_1)(n)$  (vérifiant les égalités  $\pi_1 x_M = x_C \pi_0$  et  $\pi_1 y_M = y_C \pi_0$ ). Si pour  $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$  on a  $c_p^n(x) = d_p^n(y)$ , alors  $c_p^n(x_M) = d_p^n(y_M)$  et  $c_p^n(x_C) = d_p^n(y_C)$ , et dans ce cas il est naturel de poser

$$y \boxtimes_p^n x := (y_M \odot_p^n x_M, y_C \otimes_p^n x_C),$$

et l'équation  $\pi_1(y_M \odot_p^n x_M) = (y_C \otimes_p^n x_C)\pi_0$  est bien vérifiée. Remarquer qu'on a pas hésité à écrire  $y_C \otimes_p^n x_C$ , parce que l' $\infty$ -graphe  $\text{Hom}_{U_*(\overline{C})}(C_0, C_1)$  n'est que l'oubli de l' $\infty$ -catégorie stricte  $\text{Hom}_{\overline{C}}(C_0, C_1)$ .

Si, pour  $0 \leq p < n$ ,  $(E_0, E_1, x)$  et  $(E_0, E_1, y) \in (n, \infty)\text{-EtC}$  sont tels que

$$\beta_p^n((E_0, E_1, x)) := (E_0, E_1, c_p^n(x)) = (E_0, E_1, d_p^n(y)) = \sigma_p^n((E_0, E_1, y))$$

alors on posera

$$(E_0, E_1, y) \boxtimes_p^n (E_0, E_1, x) := (E_0, E_1, y \boxtimes_p^n x).$$

Et on voit que  $(*, \infty)\text{-EtC}$  devient un  $\infty$ -magma avec ces compositions (pour les raisons positionnelles habituelles).

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

On va montrer dans un premier temps que le morphisme d' $\infty$ -graphes

$$(*, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC \xrightarrow{\Pi} (*, \infty)\text{-}Cat$$

défini par :  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(n, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC \xrightarrow{\Pi} (n, \infty)\text{-}Cat$ , qui envoie  $(E_0 = (M_0, C_0, \pi_0, \phi_0), E_1 = (M_1, C_1, \pi_1, \phi_1), x = (x_M, x_C))$  sur  $(C_0, C_1, x_C)$ , est un morphisme d' $\infty$ -magmas :

Soit, pour  $0 \leq p < n$ ,

$$((E_0, E_1, x), (E_0, E_1, y)) \in (n, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC \times_{(p, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC} (n, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC$$

où  $(n, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC \times_{(p, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC} (n, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC$  est le pullback de

$$(n, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC \xrightarrow{\sigma_p^n} (p, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC \xleftarrow{\beta_p^n} (n, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC$$

alors

$$\begin{aligned} \Pi((E_0, E_1, y) \boxtimes_p^n (E_0, E_1, x)) &= \Pi((E_0, E_1, y \boxtimes_p^n x)) \\ &= \Pi((E_0, E_1, (y_M \otimes_p^n x_M, y_C \otimes_p^n x_C))) \\ &= (C_0, C_1, y_C \otimes_p^n x_C) \\ &= (C_0, C_1, y_C) \otimes_p^n (C_0, C_1, x_C) \\ &= \Pi((E_0, E_1, y)) \otimes_p^n \Pi((E_0, E_1, x)). \end{aligned}$$

Pour  $(E_0, E_1, x) \in (n, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC$  (avec  $n \in \mathbb{N}$ ), on a

$$\begin{aligned} \Pi(\iota_{(E_0, E_1, x)}) &= \Pi((E_0, E_1, id_x)) \\ &= \Pi((E_0, E_1, (id_{x_M}, id_{x_C}))) \\ &= (C_0, C_1, id_{x_C}) \\ &= \iota_{(C_0, C_1, x_C)} \\ &= \iota_{\Pi((E_0, E_1, x))}, \end{aligned}$$

Maintenant on va montrer que le morphisme d' $\infty$ -magmas  $\Pi$  a une loi crochet sous-jacente, qui en fait un étirement catégorique.

Si, pour  $n \geq 1$ , deux étirements catégoriques  $n$ -cellulaires  $(E_0, E_1, x)$  et  $(E_0, E_1, y)$  sont parallèles, cela signifie que  $x \parallel y$ , donc  $x_M \parallel y_M$  et  $x_C \parallel y_C$

(tout ceci est évident). Supposons que ces cellules parallèles vérifient en plus l'égalité :  $\Pi((E_0, E_1, x)) = \Pi((E_0, E_1, y))$ , i.e.  $(C_0, C_1, x_C) = (C_0, C_1, y_C)$ , alors  $x_C = y_C$ . Donc en particulier on a l'égalité  $\pi_1 x_M = \pi_1 y_M$  (puisque  $x_C \pi_0 = \pi_1 x_M$  et  $y_C \pi_0 = \pi_1 y_M$ ). Donc  $\forall a \in M_0(0)$ , on a  $\pi_1(x_M(a)) = \pi_1(y_M(a))$ , avec  $x_M(a) \parallel y_M(a)$  (puisque  $x_M \parallel y_M$ ). Donc on peut considérer la  $n$ -cellule de  $M_1$  :  $x_M(a) \xrightarrow{\phi_1[x_M(a), y_M(a)]} y_M(a)$ , et l'ensemble de ces  $n$ -cellules sera noté  $z_M$ . Notons alors  $\Phi[(E_0, E_1, x), (E_0, E_1, y)] := (E_0, E_1, z = (z_M, z_C))$  (où on a posé  $z_C = \text{id}_{x_C}$ ), l'étirement catégorique  $(n+1)$ -cellulaire obtenu (on voit bien que  $z_C \pi_0 = \pi_1 z_M$ ). On voit alors qu'on a les trois conséquences suivantes :

1.  $\sigma_n^{n+1}(\Phi[(E_0, E_1, x), (E_0, E_1, y)]) = (E_0, E_0, x)$
2.  $\beta_n^{n+1}(\Phi[(E_0, E_1, x), (E_0, E_1, y)]) = (E_0, E_1, y)$
3.  $\Pi(\Phi[(E_0, E_1, x), (E_0, E_1, y)]) = (C_0, C_1, \text{id}_{x_C}) = \iota_{(C_0, C_1, x_C)} = \iota_{\Pi((E_0, E_1, x))}$ .

Cela montre bien que  $(*, \infty)\text{-EtC} \xrightarrow{\Pi} (*, \infty)\text{-Cat}$  est un étirement catégorique, donc une  $\infty$ -catégorie non-strictes (grâce au foncteur de comparaison d'Eilenberg-Moore) : l' $\infty$ -catégorie non-strictes des étirements morphiques.

### 6.3 Structuration en $T^0$ -algèbres des morphismes de $\text{Alg}(T)$

On va montrer qu'à tous morphismes de  $\text{Alg}(T)$  on peut associer un objet de  $\text{Alg}(T^0)$ . Pour cela on va s'aider de deux lemmes :

**Lemme 1** *Si  $Y$  est une catégorie ayant des coproduits alors le foncteur oubli canonique  $Y^2 \xrightarrow{V} Y^2$ , défini sur les objets par :  $(x \xrightarrow{f} y) \mapsto (x, y)$ , et défini sur les flèches par :*

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{f} & y \\
 h \downarrow & \square & \downarrow k \\
 x' & \xrightarrow{f'} & y'
 \end{array}
 \mapsto (x, y) \xrightarrow{(h, k)} (x', y'),$$

*a un adjoint à gauche :  $M \dashv V$ .*

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

**Preuve** On va montrer que le foncteur  $M$  suivant convient :  $\mathcal{Y}^2 \xrightarrow{M} \mathcal{Y}^2$ , défini par

$$(x, y) \longmapsto (x \xrightarrow{\sigma_0} x + y) \quad (\text{première coprojection})$$

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & x \xrightarrow{\sigma_0} x + y & \\ \downarrow (h, k) & \downarrow h & \downarrow \sigma'_0 h, \sigma'_1 k \\ (x', y') & x' \xrightarrow{\sigma'_0} x' + y' & \end{array}$$

où les notations pour le cocouple  $(\sigma'_0 h, \sigma'_1 k)$  provient du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} x + y & & & & x' + y' \\ \uparrow \sigma_0 & \swarrow \sigma_1 & & \searrow \sigma'_0 & \uparrow \sigma'_1 \\ x & & y & & x' & & y' \\ & \searrow h & & \swarrow k & & & \end{array}$$

où

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\sigma_0} & x + y \\ \sigma'_0 h \swarrow & & \uparrow \sigma_1 \\ y & \xrightarrow{\sigma'_1 k} & x' + y' \end{array} \quad \text{et} \quad \sigma'_0 h, \sigma'_1 k$$

En effet, si on considère l'unité définie par  $(x, y) \in \mathcal{Y}^2(0)$

$$(x, y) \xrightarrow{\eta(x, y)} V(M(x, y))$$

avec  $\eta(x, y) = (1_x, \sigma_1)$ , alors on va voir le caractère universel de  $\eta$ .

Soit le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \xrightarrow{\eta(x, y)} & V(M(x, y)) \\ & \searrow f = (f_0, f_1) & \\ & & V(s) \end{array}$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

(où  $s \in Y^2(0)$ ), et posons

$$h = (f_0, )sf_0, f_1() = \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\sigma_0} & x + y \\ f_0 \downarrow & \square & \downarrow )sf_0, f_1( \\ a & \xrightarrow{s} & b \end{array}$$

Alors  $h$  est tel que

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \xrightarrow{\eta(x,y)} & V(M(x, y)) \\ & \searrow f=(f_0, f_1) & \downarrow \cup \\ & & V(s) \end{array} \quad (*)$$

**Remarque 6** Le cocouple  $)sf_0, f_1($  provient du diagramme

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\sigma_0} & x + y \\ sf_0 \swarrow & & \downarrow )sf_0, f_1( \\ y & \xrightarrow{f_1} & b \end{array}$$

et le diagramme (\*) est représenté plus explicitement par

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{1_x} & x \\ & \searrow f_0 & \downarrow \cup \\ & & a \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} y & \xrightarrow{\sigma_1} & x + y \\ & \searrow f_1 & \downarrow \cup \\ & & b \end{array}$$

Montrons l'unicité de  $h$ . Soit

$$M(x, y) \quad \begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\sigma_0} & x + y \\ h' \downarrow & = & h'_0 \downarrow \quad \square \quad \downarrow h'_1 \\ s & & a \xrightarrow{s} b \end{array}$$

tel que :

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \xrightarrow{\eta(x,y)} & V(M(x, y)) \\ & \searrow f=(f_0, f_1) & \downarrow \cup \\ & & V(s) \end{array}$$

**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

i.e.

$$\begin{array}{ccc}
 x & \xrightarrow{1_x} & x \\
 \searrow f_0 & \circlearrowleft & \nearrow h'_0 \\
 & & a
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{ccc}
 y & \xrightarrow{\sigma_1} & x+y \\
 \searrow f_1 & \circlearrowleft & \nearrow h'_1 \\
 & & b
 \end{array}$$

Déjà  $h'_0 = f_0$ , trivialement. D'autre part  $h'_1$  vérifie  $h'_1\sigma_0 = sf_0$  et  $h'_1\sigma_1 = f_1$ , donc l'unicité de  $sf_0, f_1$  (montre que nécessairement  $h'_1 = sf_0; f_1$ ).

Ainsi  $h' = h$  et donc  $M \dashv V$ . ■

**Remarque 7** Soit  $MV \xrightarrow{\varepsilon} 1_{Y^2}$  la counité de cette adjonction, alors

$$\varepsilon(u) = \begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{1_a} & a \\
 \sigma_0 \downarrow & \square & \downarrow u \\
 a+b & \xrightarrow{v} & b
 \end{array}$$

où  $v$  est donné par

$$\begin{array}{ccc}
 a & \xrightarrow{u} & b \\
 \sigma_0 \searrow & & \nearrow \wedge \\
 & & \vdots v \\
 b & \xrightarrow{\sigma_1} & a+b
 \end{array}$$

et  $a \xrightarrow{u} b \in Y^2(0)$ .

**Lemme 2** Si  $\text{Cat} \xrightarrow{\Gamma} \text{Cat}$  est un 2-foncteur strict, et  $X \xrightleftharpoons[F]{G} Y$  est une

adjonction, alors  $\Gamma(X) \xrightleftharpoons[\Gamma(F)]{\Gamma(G)} \Gamma(Y)$ , reste une adjonction.

**Preuve** Si  $F \dashv G$ , donc on a les deux équations  $G\varepsilon \circ \eta G = 1_G, \varepsilon F \circ F\eta = 1_F$ , et donc  $\Gamma(G)\Gamma(\varepsilon) \circ \Gamma(\eta)\Gamma(G) = 1_{\Gamma(G)}$ , et  $\Gamma(\varepsilon)\Gamma(F) \circ \Gamma(F)\Gamma(\eta) = 1_{\Gamma(F)}$ , qui montre :  $\Gamma(F) \dashv \Gamma(G)$ , d'unité  $\Gamma(\eta)$  et de counité  $\Gamma(\varepsilon)$ . ■



**KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES**

Pour ce qui nous concerne, on appliquera plus spécifiquement le lemme 2 au 2-foncteur  $\text{Cat} \xrightarrow{(-)^2} \text{Cat}$ , qui est strict. Il s'ensuit que, si  $X \begin{smallmatrix} \xrightarrow{G} \\ \xleftarrow{F} \end{smallmatrix} Y$  est une

adjonction, alors  $X^2 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{G^2} \\ \xleftarrow{F^2} \end{smallmatrix} Y^2$  reste une adjonction d'unité  $1_{Y^2} \xrightarrow{\eta^2} G^2 F^2$

et de counité  $F^2 G^2 \xrightarrow{\varepsilon^2} 1_{X^2}$  telle que pour  $a \xrightarrow{s} b \in Y(1)$  et  $c \xrightarrow{l} d \in X(1)$ ,  $\eta^2(s)$  et  $\varepsilon^2(l)$  sont donnés respectivement par les carrés

$$\begin{array}{ccc} GF(a) & \xrightarrow{\eta(a)} & a \\ GF(s) \downarrow & \square & \downarrow s \\ GF(b) & \xrightarrow{\eta(b)} & b \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} FG(c) & \xrightarrow{\varepsilon(c)} & c \\ FG(l) \downarrow & \square & \downarrow l \\ FG(d) & \xrightarrow{\varepsilon(d)} & d \end{array}$$

Maintenant on a le matériel suffisant pour montrer qu'à tout morphisme de  $\text{Alg}(T)$  (qui sont des objets de  $\text{Alg}(T)^2$ ), on peut associer une  $T^0$ -algèbre. Pour cela on va construire un diagramme de foncteurs de la forme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Alg}(T)^2 & \xrightarrow{j} & \text{Alg}(T^{0,s}) & \xrightarrow{i^*} & \text{Alg}(T^0) \\ & \searrow & \downarrow & \swarrow & \\ & \cup & & \cup & \\ & & (\infty\text{-Gr})^2 & & \end{array}$$

tel que  $T^{0,s}$  désignera la monade de l'adjonction  $\mathbb{E}tC^2 \begin{smallmatrix} \xrightarrow{V \circ U^2} \\ \xleftarrow{E^2 \circ M} \end{smallmatrix} (\infty\text{-Gr})^2$  décrite

ci-après : grâce au lemme 1 et au lemme 2, l'adjonction  $\mathbb{E}tC \begin{smallmatrix} \xrightarrow{U} \\ \xleftarrow{E} \end{smallmatrix} \infty\text{-Gr}$ ,

induit le morphisme de  $\mathbb{A}dj$

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{E}tC^2 & \xrightarrow{i} & (0, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC \\
 E^2 \uparrow \downarrow U^2 & & \uparrow \downarrow E^0 \\
 (\infty\text{-Gr})^2 & & (\infty\text{-Gr})^2 \\
 M \uparrow \downarrow V & & \\
 (\infty\text{-Gr})^2 & \xrightarrow{\text{identité}} & (\infty\text{-Gr})^2
 \end{array}$$

i.e.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{E}tC^2 & \xrightarrow{i} & (0, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC \\
 E^2 \circ M \uparrow \downarrow V \circ U^2 & & E^0 \uparrow \downarrow U^0 \\
 (\infty\text{-Gr})^2 & \xrightarrow{\text{identité}} & (\infty\text{-Gr})^2
 \end{array}$$

(où  $i$  désigne le plongement de la sous-catégorie pleine  $\mathbb{E}tC^2$  dans la catégorie  $(0, \infty)\text{-}\mathbb{E}tC$ ; voir aussi la remarque 8 sur la composition des adjonctions).

En utilisant l'adjonction  $\mathbb{A}dj \xrightleftharpoons[A]{U} \text{Mon}$  du § 4.3, ce morphisme devient (après descente dans  $\text{Mon}$  puis montée dans  $\mathbb{A}dj$ )

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{A}lg(T^{0,s}) & \xrightarrow{i^*} & \mathbb{A}lg(T^0) \\
 (E^{0,s})T^{0,s} \uparrow \downarrow (U^{0,s})T^{0,s} & & (E^0)T^0 \uparrow \downarrow (U^0)T^0 \\
 (\infty\text{-Gr})^2 & \xrightarrow{\text{identité}} & (\infty\text{-Gr})^2
 \end{array}$$

qui permet d'obtenir le premier triangle

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{A}lg(T^{0,s}) & \xrightarrow{i^*} & \mathbb{A}lg(T^0) \\
 (U^{0,s})T^{0,s} \downarrow & \swarrow \cup & (U^0)T^0 \\
 (\infty\text{-Gr})^2 & & 
 \end{array}$$

Pour le deuxième triangle on procède de façon analogue. L'adjonction  $\mathbb{A}lg(T) \xrightleftharpoons[E^T]{U^T} \infty\text{-Gr}$  induit (encore grâce aux lemmes 1 et 2) le diagramme

d'adjonction

$$\mathbb{A}lg(T)^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{(U^T)^2} \\ \xleftarrow{(E^T)^2} \end{array} (\infty\text{-Gr})^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{V} \\ \xleftarrow{M} \end{array} (\infty\text{-Gr})^2$$

i.e. l'adjonction  $\mathbb{A}lg(T)^2 \begin{array}{c} \xrightarrow{V \circ (U^T)^2} \\ \xleftarrow{(E^T)^2 \circ M} \end{array} (\infty\text{-Gr})^2$ , et on montre facilement que cette adjonction produit la monade précédente  $T^{0,s}$ . Et comme on sait que l'adjonction  $\mathbb{A}lg(T^{0,s}) \begin{array}{c} \xrightarrow{(U^{0,s})^{T^{0,s}}} \\ \xleftarrow{(E^{0,s})^{T^{0,s}}} \end{array} (\infty\text{-Gr})^2$  est finale parmi les adjonctions produisant cette monade, on obtient donc un unique morphisme de  $\mathbb{A}dj$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}lg(T)^2 & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{A}lg(T^{0,s}) \\ \begin{array}{c} (E^T)^2 \circ M \uparrow \downarrow \\ V \circ (U^T)^2 \end{array} & & \begin{array}{c} (E^{0,s})^{T^{0,s}} \uparrow \downarrow \\ (U^{0,s})^{T^{0,s}} \end{array} \\ (\infty\text{-Gr})^2 & \xrightarrow{\text{identité}} & (\infty\text{-Gr})^2 \end{array}$$

qui produit le deuxième triangle

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}lg(T)^2 & \xrightarrow{j^*} & \mathbb{A}lg(T^{0,s}) \\ & \searrow \cup & \downarrow (U^{0,s})^{T^{0,s}} \\ & V \circ (U^T)^2 & (\infty\text{-Gr})^2 \square \end{array}$$

**Remarque 8** Rappelons que le diagramme d'adjonctions

$$D \begin{array}{c} \xrightarrow{G'} \\ \xleftarrow{F'} \end{array} A \begin{array}{c} \xrightarrow{G} \\ \xleftarrow{F} \end{array} X$$

(avec les unités  $\eta$  et  $\eta'$  et les counités  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ ) produit l'adjonction  $D \begin{array}{c} \xrightarrow{G \circ G'} \\ \xleftarrow{F' \circ F} \end{array} X$ , d'unité  $(G\eta'F) \circ \eta$  et de counité  $\varepsilon' \circ (F'\varepsilon G')$ .

## Références

- [1] J. C. BAEZ et J. DOLAN : Categorification. In E. GETZLER et M. KAPRANOV, édés : *Higher Category Theory*, vol. 230 de *Contemporary Mathematics*, p. 1–36, Rhode Island, 1998. American Mathematical Society, Providence.
- [2] J. C. BAEZ et J. DOLAN : Higher Dimensional Algebra III :  $n$ -Categories and the Algebra of Opetopes. *Advances in Mathematics*, 135:145–206, 1998.
- [3] J. C. BAEZ et U. SCHREIBER : Higher Gauge Theory : 2-connections on 2-bundles, 2004. URL <http://arxiv.org/abs/hep-th/0412325>.
- [4] J. C. BAEZ et U. SCHREIBER : Higher Gauge Theory. In A. DAVYDOV, M. BATANIN, M. JOHNSON, S. LACK et A. NEEMAN, édés : *Categories in Algebra, Geometry and Mathematical Physics*, vol. 431 de *Contemporary Mathematics*, p. 7–30, Rhode Island, 2007. American Mathematical Society, Providence. URL <http://arxiv.org/abs/math/0511710v2>.
- [5] M. BATANIN : Monoidal Globular Categories as a Natural Environment for the Theory of Weak- $n$ -Categories. *Advances in Mathematics*, 136 (1):39–103, juin 1998.
- [6] M. BATANIN : On the Penon Method of Weakening Algebraic Structures. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 172(1):1–23, juil. 2002.
- [7] J. BÉNABOU : Introduction to bicategories. In *Reports of the Midwest Category Seminar*, vol. 40 de *Lectures Notes in Mathematics*, p. 1–77. Springer-Verlag, 1967.
- [8] E. CHENG : Comparing  $n$ -Categories : Penon vs Leinster, nov. 2002. Category Theory Seminar, Cambridge University.
- [9] D.-C. CISINSKI : Batanin higher groupoids and homotopy types. *Categories in Algebra, Geometry and Physics*, 431:171–186, 2007.
- [10] C. EHRESMANN : Problèmes universels relatifs aux catégories  $n$ -aires. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 264:273–276, 1967.

## KACHOUR - DEFINITION ALGEBRIQUE DES CELLULES NON STRICTES

- [11] F. FOLTZ : Sur la catégorie des foncteurs dominés. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques*, XI,2, 1969.
- [12] J. W. GRAY : The Meeting of the Midwest Category Seminar in Zurich August 24-30, 1970. In *Reports of the Midwest Category Seminar V*, vol. 195 de *Lectures Notes in Mathematics*, p. 248–255. Springer-Verlag, 1971.
- [13] A. GROTHENDIECK : Pursuing Stacks. Typed manuscript, 1983.
- [14] K. KACHOUR : Version non stricte et en dimension haute des foncteurs, transformations naturelles, modifications etc., mars 2007. S.I.C. de Paris, Université Paris 7.
- [15] T. LEINSTER : A Survey of Definitions of  $n$ -Category. *Theory and Applications of Categories*, 10(1):1–70, 2002.
- [16] T. LEINSTER : *Higher Operads, Higher Categories*, vol. 298 de *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, 2004. ISBN 0-521-53215-9.
- [17] S. MAC LANE : *Categories for the Working Mathematician*, vol. 5 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, New York, 1998. ISBN 0-387-98403-8.
- [18] J. PENON : Approche polygraphique des  $\infty$ -catégories non-strictes. *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle*, XL(1), 1999.
- [19] J. PENON :  $\infty$ -catégorification de structures équationnelles, sept. 2005. S.I.C d'Amiens.
- [20] Z. TAMSAMANI : Sur des notions de  $n$ -catégorie et  $n$ -groupoïde non-strictes via des ensembles multi-simpliciaux. *K-Theory*, 16:51–99, 1999.

Kamel KACHOUR  
69 rue Balard  
75015 Paris  
France

Téléphone : 01 40 60 95 64  
Courriel : kachour\_kamel@yahoo.fr