CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

R. LECLERCQ

Symétries de Hecke à déterminant associé central

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 43, nº 3 (2002), p. 191-212

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_2002__43_3_191_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Volume XLIII-3 (2002)

SYMETRIES DE HECKE A DETERMINANT ASSOCIE CENTRAL

par R. LECLERCQ

ABSTRACT. This paper gives an explicit construction of a family of quantum R-matrices of Hecke type which are not deformations of the volte and the associated determinant of which is central. This condition allows to associate a braided category to such a quantum R-matrix, using the process suggested in [GPS].

1 Introduction

Nous appelons une symétrie de Hecke, un opérateur linéaire R : $V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ satisfaisant l'équation de Yang-Baxter quantique (EYBQ)

$$R^{12}\,R^{23}\,R^{12} = R^{23}\,R^{12}\,R^{23} \tag{1.1}$$

ainsi que la condition de Hecke

$$(q\,\mathrm{id} - R)(q^{-1}id + R) = 0,\ q \in \mathbb{K} \tag{1.2}$$

Ici, V désigne un espace vectoriel de dimension $n < \infty$ et nous utilisons les notations tensorielles standard pour les équations et opérateurs dans le produit tensoriel des espaces. L'équation (1.1) est écrite dans $V^{\otimes 3}$ et nous notons comme d'habitude

$$R^{12} = R \otimes \mathrm{id}, \quad R^{23} = \mathrm{id} \otimes R,$$

où id est l'opérateur identité sur V. Le corps de base $\mathbb{K}$ considéré est $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.

Rappelons qu'à chaque symétrie de Hecke R, on peut associer deux algèbres, appelées respectivement symétrique et antisymétrique, définies de la façon suivante :

$$\Lambda_+(V) = T(V)/\{\mathrm{Im}\,(q\,\mathrm{id}\, - R)\}, \quad \Lambda_-(V) = T(V)/\{\mathrm{Im}\,(q^{-1}id + R)\}. \tag{1.3}$$

Ici, $T(V)$ désigne l'algèbre tensorielle libre de l'espace V et $\{I\}$ désigne l'idéal engendré par le sous-ensemble I dans l'algèbre donnée. Notant $\Lambda^l_\pm(V)$ la composante homogène de degré l des algèbres $\Lambda_\pm(V)$, nous désignons par séries de Hilbert-Poincaré associées aux algèbres $\Lambda_\pm(V)$, les sommes

$$P_\pm(x, R) = \sum \dim \Lambda^l_\pm(V) x^l. \tag{1.4}$$

Par abus de langage, nous les appelons séries de Hilbert-Poincaré associées à la symétrie de Hecke R.

Les symétries de Hecke les plus connues sont les opérateurs associés aux groupes quantiques $U_q(sl(n))$ (cf. [FRT]). Leurs séries de Hilbert-Poincaré coïncident avec les séries de Hilbert-Poincaré classiques. Dans les années quatre-vingt, D.Gurevich [G] a construit des symétries de Hecke ne provenant pas d'une déformation de la volte habituelle (une sous classe de telles symétries a été introduite indépendamment dans [DL]). Elles sont appelées non quasi-classiques. Les séries de Hilbert-Poincaré des algèbres associées diffèrent drastiquement de celles classiques. Signalons toutefois que dans [G] une autre condition de Hecke est utilisée, à savoir :

$$(t\,\mathrm{id}\, - R)(id + R) = 0, \; t \in \mathbb{K}. \tag{1.5}$$

Remarquons que si R satisfait (1.5), alors $\hat{R} = \frac{R}{\sqrt{t}}$ avec $t = q^2$ satisfait (1.2).

Dans la suite, le paramètre $q \in \mathbb{K}$ est supposé générique ce qui signifie qu'il n'est ni égal à zéro ni une racine de l'unité : $\forall k \in \mathbb{N},\; k \neq 1,\; q^k \neq 1$. Comme conséquence, aucun des *q-nombres* k_q n'est égal à zéro

$$k_q \equiv \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}} \neq 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Précisons qu'une symétrie de Hecke est dite paire s'il existe un entier p tel que la composante $\Lambda^l_-(V)$ est triviale pour tout $l > p$ et est de dimension un lorsque $l = p$. L'entier p est appelé le rang de R ou de V et il est noté $rang(V)$. Remarquons que pour la volte habituelle et toutes ses déformations du type de Hecke, $p = n$ où $n = \dim V$. Mais en général, cette relation n'est pas valable.

Dans l'article [GLS], des catégories engendrées par des espaces vectoriels V munis d'une symétrie de Hecke ont été construites. Ces catégories ressemblent d'une certaine façon à celle des $sl(n)$-Mod. Plus précisément, les objets de ces catégories sont des sommes directes d'objets simples, ces derniers étant indexés par les diagrammes de Young dont le poids (i-e le nombre de lignes) est borné. La méthode de construction de ces catégories ressemble à celle de Weyl qui a été utilisée pour construire la théorie des représentations des algèbres de Lie $sl(n)$ dans les puissances tensorielles de l'espace de base. Les catégories tressées rigides introduites dans [GLS] sont appelées catégories de Schur-Weyl (SW) et notées SW(V) où V est l'espace vectoriel initial.

Décrivons l'ensemble des objets d'une catégorie en question. Un objet d'une catégorie SW(V) est une somme directe d'objets simples. Ces derniers sont indexés par des partitions (ou ce qui est le même par des diagrammes de Young)

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n-1}), \quad \lambda_{i+1} \leqslant \lambda_i, \tag{1.6}$$

λ_i étant des entiers positifs. Soulignons que dans l'approche classique de Weyl, le rôle central est joué par le fait que le module correspondant au diagramme $\lambda = (1^n)$ est trivial.

Dans la construction des catégories SW(V), nous avons aussi besoin d'une propriété analogue à une modification près : l'entier $n = \dim V$ dans la formule (1.6) doit être remplacé par $p = rang(V)$. Plus précisément, le générateur de la composante $\Lambda^p_-(V)$ doit être central dans le sens indiqué dans la définition 2. Précisons qu'il est unique à un facteur près. Nous appelons cet élément *déterminant associé* à la symétrie de Hecke donnée. Remarquons que les catégories tressées dont l'anneau de Grothendieck est isomorphe à celui de $sl(n)$ ont été considérées dans [KW], [B] et [H]. L'un des objectifs principaux de [GLS] était de construire de telles catégories engendrées par un espace vectoriel muni d'une symétrie de Hecke non-quasiclassique donnée. Cette construction a conduit à la condition de centralité du déterminant associé, qui est formellement plus forte que celle de centralité du déterminant quantique (voir la section 2) utilisée dans [B] et [H].

Notre but principal est de montrer l'existence d'une famille suffisamment large de symétries de Hecke dont le déterminant associé est central. La méthode de construction d'une telle symétrie de Hecke est la suivante : d'abord nous exhibons une famille de symétries de Hecke de rang 2 dont le déterminant associé est central, puis nous utilisons une procédure de "collage" particulière (cf. [MM] où la notion est vue dans un cadre général) qui permet, à partir de deux symétries de Hecke à déterminant associé central, de construire une troisième symétrie de Hecke avec la même propriété. En appliquant cette procédure par récurrence, nous pouvons construire une famille de symétries de Hecke à déterminant associé central de rang quelconque.

Notre article se présente de la façon suivante. Dans la section 2, nous introduisons la notion de déterminant associé à une symétrie de Hecke et nous étudions la condition de centralité de ce déterminant. Dans la section 3, nous rappelons la classification des symétries de Hecke de rang 2 faite dans [G]. Nous présentons également la construction d'une famille de ces symétries de Hecke de rang 2 à déterminant associé central. Ceci nous permet de construire, par une procédure de collage, dans la section 4, une famille de symétries de Hecke rang $p \geq 3$ à déterminant associé central. Dans la section 5, nous montrons que, dans le cas quasiclassique, notre construction nous permet de retrouver en particulier les symétries de Hecke associées aux groupes quantiques $U_q(sl(n))$.

Remerciements. Je remercie très sincèrement le professeur D. Gurevich et je lui suis reconnaissant de m'avoir initié à ce sujet et de m'avoir guidé dans l'étude du problème. Je tiens également à témoigner ma reconnaissance au rapporteur qui a fait beaucoup de suggestions. Celles-ci m'ont permis d'améliorer le texte.

2 Notions de base

Dans la suite, nous désignons par V_R un espace vectoriel muni d'une symétrie de Hecke R. A une symétrie de Hecke paire de rang p, nous associons une suite d'opérateurs $P_\pm^i : T^i(V_R) \to T^i(V_R)$ définis par :

$$P_\pm^1 = id, \; , \; P_\pm^i = Q_\pm^i (P_\pm^{i-1} \otimes id) i_q^{-1}$$

$$Q_+^i = q^{1-i} id + q^{2-i} R^{i-2} R^{i-1} + \ldots + R^1 R^2 \ldots R^{i-1}$$

$$Q_-^i = q^{i-1} id - q^{i-2} R^{i-2} + \ldots + (-1)^{i-1} R^1 \ldots R^{i-1}$$

avec $R^k = R^{kk+1}$ pour tout $k \in 1, \ldots, p-1$. Ici $T^i(V_R)$ désigne la composante homogène de degré i de $T(V_R)$.

Proposition 1 *[G] Il existe un isomorphisme naturel entre* $\operatorname{Im} P_\pm^i$ *et* $\Lambda_\pm^i(V_R)$ $\forall 1 \leq i \leq p$.

Fixons dans V_R une base

$$\{e_i\}, 1 \leq i \leq n = \mathrm{dim V_R}, \; \; e_i \in V_R.$$

Puisque $\dim P_-^p = 1$, le projecteur P_-^p peut s'exprimer dans la base dérivée de l'espace $T^i(V_R)$ comme

$$P_-^p : e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \to u_{i_1 i_2 \ldots i_p} v \tag{2.1}$$

où

$$v = v^{j_1 j_2 \ldots j_p} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \ldots \otimes e_{j_p} \in T^p(V_R)$$

$$u_{i_1 i_2 \ldots i_p} v^{i_1 i_2 \ldots i_p} = 1.$$

Nous adoptons la convention habituelle de l'analyse tensorielle qui utilise une sommation de tout indice apparaissant simultanément en haut et en bas.

Définition 1 *L'élément v (respectivement $u = u_{i_1 i_2 \ldots i_p} e^{i_1} \otimes e^{i_2} \otimes \ldots \otimes e^{i_p}$) est appelé déterminant associé (respectivement codéterminant associé).*

Le couple (u, v) est unique à un changement près

$$v \to av, \;\; u \to a^{-1}u, \;\; a \in \mathbb{K}, \;\; a \neq 0.$$

Nous nous intéressons à la commutation de l'élément v avec les éléments de base e_i de V_R. Définissons l'opérateur

$$\overline{R} : \Lambda^p(V_R) \otimes V_R \to V_R \otimes \Lambda^p(V_R) \quad \text{tel que}\, \overline{R} = R^{12}...R^{pp+1}. \tag{2.2}$$

Précisons que nous plaçons les opérateurs à gauche en les appliquant de la façon : $A \otimes x \to Ax$ où A est un opérateur agissant sur un vecteur x. De même, définissons l'opérateur

$$\underline{R} : V_R \otimes \Lambda^p(V_R) \to \Lambda^p(V_R) \otimes V_R \quad \text{tel que}\, \underline{R} = R^{pp+1}...R^{12}. \tag{2.3}$$

Il est clair que ces opérateurs sont bien définis dans la mesure où

$$\overline{R}(\Lambda^p(V_R) \otimes V_R) \subseteq V_R \otimes \Lambda^p(V_R) \quad \text{et} \quad \underline{R}(V_R \otimes \Lambda^p(V_R)) \subseteq \Lambda^p(V_R) \otimes V_R.$$

Ces dernières relations découlent du fait que le projecteur P^p_- commute avec les opérateurs $\overline{R}$ et $\underline{R}$, ce qui est une conséquence immédiate de l'EYBQ. Par conséquent l'élément v commute avec les générateurs e_i selon les formules :

$$\overline{R} : v \otimes e_i \to \overline{M_i^j} e_j \otimes v, \tag{2.4}$$

$$\underline{R} : e_i \otimes v \to \overline{N_i^j} v \otimes e_j. \tag{2.5}$$

Les matrices $\overline{M} = (\overline{M_i^j})$ et $\overline{N} = (\overline{N_i^j})$ sont appelées matrices de commutation avec le déterminant associé. Les opérateurs correspondants (qui sont donnés par ces matrices dans la base fixée) sont appelés opérateurs de commutation avec la base de l'espace V_R.

Proposition 2 *[G] Les matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont données par*

$$\overline{M_i^j} = (-1)^{p-1} q[p]_q u_{l_1 \dots l_{p-1} i} v^{j l_1 \dots l_{p-1}}, \tag{2.6}$$

$$\overline{N_i^j} = (-1)^{p-1} q[p]_q u_{i l_1 \dots l_{p-1}} v^{l_1 \dots l_{p-1} j}. \tag{2.7}$$

Avec nos notations qui diffèrent de celles de [G], la proposition 5.6 de [G] fournit la relation suivante :

Proposition 3

$$\overline{M_i^j}\,\overline{N_j^k} = q^2\delta_i^k \tag{2.8}$$

où δ_i^k est le symbole de Kronecker.

Remarquons que si une des deux matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ est scalaire, l'autre l'est aussi.

Définition 2 *Nous disons que l'élément v est central si les matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont scalaires et égales, ce qui en vertu de (2.8) est équivalent à*

$$\overline{M} = \overline{N} = \pm q\, id. \tag{2.9}$$

La motivation de cette définition repose sur notre volonté d'imposer que $\Lambda^p(V_R)$ soit isomorphe à l'unité monoidale de $SW(V_R)$. En effet, l'application linéaire

$$\psi : \Lambda^p(V_R) \to \mathbb{K}$$

$$\psi(e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_p}\, v^{j_1 \ldots j_p}) = 1 \in \mathbb{K}$$

ainsi que ψ^{-1} est un morphisme de la catégorie en question sous la condition de centralité de v. Remarquons que dans le cas classique la condition est satisfaite automatiquement parce que la représentation de $sl(n)$ dans l'espace $\Lambda(V_R)$ est triviale.

Parfois la condition de centralité est abordée d'une autre manière. Considérons en effet l'algèbre $\mathcal{T}$ sur $\mathbb{K}$ engendrée par n^2 éléments T^i_j satisfaisant les relations (cf. [FRT]) :

$$R_{12}T_1T_2 = T_1T_2R_{12}. \tag{2.10}$$

La structure de bigèbre est introduite par un coproduit Δ et une counité ε :

$$\Delta(T^i_j) = T^i_k \otimes T^k_j \qquad \varepsilon(T^i_j) = \delta^i_j.$$

Définissons la structure de comodule à droite $\delta_r : V \to V \otimes \mathcal{T}$ sur l'espace V comme suit :

$$\forall\, v = e_i v^i \in V \quad \delta_r(v) = e_k \otimes T^k_{\ i} v^i.$$

Une telle coaction est étendue à $V^{\otimes k}$ par :

$$\delta_r : V^{\otimes k} \to V^{\otimes k} \otimes \mathcal{T} \quad e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_k} \to e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_k} \otimes T^{i_1}_{j_1} \ldots T^{i_k}_{j_k}. \quad (2.11)$$

En outre, nous posons

$$\delta_r(k) = k \otimes 1,\ k \in \mathbb{K} \qquad (2.12)$$

Définissons un élément spécial appelé *déterminant quantique* de la bigèbre $\mathcal{T}$ par :

$$\det_q T \equiv u_{j_1 j_2 \ldots j_p} T^{j_1}_{i_1} T^{j_2}_{i_2} \ldots T^{j_p}_{i_p} v^{i_1 i_2 \ldots i_p}. \qquad (2.13)$$

Par la définition de la coaction (2.11), nous avons en particulier pour le déterminant associé v :

$$\delta_r(v) = v \otimes \det_q T. \qquad (2.14)$$

Les règles de commutation de l'élément $\det_q T$ avec les générateurs de $\mathcal{T}$ sont données dans [G] :

$$\det_q T \cdot T = (N^{-1} T N) \cdot \det_q T \quad \Leftrightarrow \quad \det_q T \cdot (NT) = (TN) \cdot \det_q T \quad (2.15)$$

ou par la proposition 3

$$\det_q T \cdot T = (MTM^{-1}) \cdot \det_q T \quad \Leftrightarrow \quad \det_q T \cdot (TM) = (MT) \cdot \det_q T.$$

Munissons les objets de $SW(V_R)$ de la structure de comodule à droite sur la bigèbre $\mathcal{T}$. Si nous voulons que l'application ψ commute avec la comultiplication, nous devons imposer la condition

$$\det_q T = 1.$$

Mais, c'est compatible avec la structure algébrique si et seulement si $\det_q T$ est un élément central de l'algèbre (2.10). En vertu de (2.15), nous avons alors :

Proposition 4 *[G]* $\det_q T$ *est central si et seulement si les matrices* $\overline{M}$ *et* $\overline{N}$ *sont scalaires.*

Remarquons qu'il n'est pas nécessaire dans ce cas que les matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ soient égales. Dans le cas particulier où R est la symétrie de Hecke provenant du groupe quantique $U_q(sl(n))$, son déterminant quantique $\det_q T$ est central et il engendre le centre de l'algèbre $\mathcal{T}$ (cf. [FRT]). Mais en général, $\det_q T$ n'est pas central, comme le montre d'ailleurs l'exemple 1 présenté dans la section 3. Notons de plus que la centralité du déterminant associé v implique celle du déterminant quantique $det_q T$ dans $\mathcal{T}$.

Conjecture 1 *La centralité du déterminant quantique* $det_q T$ *est équivalente à celle du déterminant associé* v.

Celle-ci se résume à la suivante :

Conjecture 2 *Si les matrices* $\overline{M}$ *et* $\overline{N}$ *sont scalaires, elles sont alors égales.*

Si nous ne pouvons pas encore établir cette conjecture dans un cadre général, nous sommes en mesure de la montrer dans deux cas significatifs.

Proposition 5 *Lorsque la symétrie de Hecke est de rang* 2*, la conjecture précédente est vérifiée.*

Preuve.
Supposons que $\overline{M} = \mathrm{m}\, id$ et $\overline{N} = \mathrm{n}\, id$. Selon la proposition 2, nous avons

$$V\mathrm{m}^{-1}(-q(q+q^{-1}))U = id \tag{2.16}$$

$$\mathrm{n}^{-1}(-q(q+q^{-1}))UV = id. \tag{2.17}$$

où U (respectivement V) désigne la matrice formée des éléments u_{ij} (respectivement la matrice formée des v^{ij}), la base $\{e_i\}$ ayant été fixée.

Par conséquent, par (2.16), $\mathrm{m}^{-1}(-q(q+q^{-1}))U$ est l'inverse à droite de V. Mais alors, c'est aussi l'inverse à gauche de V, qui n'est autre que $\mathrm{n}^{-1}(-q(q+q^{-1}))U$ par (2.17). Nous pouvons immédiatement en déduire que $\mathrm{m} = \mathrm{n}$. ∎

Le deuxième cas où la conjecture est établie est décrit par le lemme suivant qui suppose en fait que nous considérons une symétrie de Hecke réelle, c'est-à-dire que les éléments matriciels de la matrice représentant R dans la base donnée sont réels.

Lemme 1 *Supposons la symétrie de Hecke réelle. Si les matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont scalaires, elles sont alors égales.*

Preuve.
Soit v le générateur de $\Lambda^p(V_R)$. Considérons $v \otimes v \in \Lambda^p(V_R) \otimes \Lambda^p(V_R)$. Commutons tous les facteurs dans ce produit de deux façons. D'abord par $\overline{R}$ nous avons alors

$$\begin{aligned}\overline{R}(v \otimes v) &= \overline{R}(v \otimes (v^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}) \\ &= v^{i_1 \dots i_p} \overline{M}^{j_1}_{i_1} \overline{M}^{j_2}_{i_2} \dots \overline{M}^{j_p}_{i_p} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_p} \otimes v.\end{aligned}$$

De même, en utilisant la régle de commutation donnée par $\underline{R}$ (voir (2.3)), nous avons

$$\begin{aligned}\underline{R}(v \otimes v) &= \underline{R}((v^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}) \otimes v) \\ &= v^{i_1 \dots i_p} \overline{N}^{j_1}_{i_p} \overline{N}^{j_2}_{i_{p-1}} \dots \overline{N}^{j_p}_{i_1} v \otimes e_{j_p} \otimes \dots \otimes e_{j_1}.\end{aligned}$$

Comme $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont scalaires et réelles, nous pouvons écrire $\overline{M} = \mathrm{m}\,\mathrm{id}$ et $\overline{N} = \mathrm{n}\,\mathrm{id}$ avec m, n deux réels. Les deux commutations précédentes peuvent s'écrire

$$\overline{R}(v \otimes v) = \mathrm{m}^p v \otimes v \qquad \underline{R}(v \otimes v) = \mathrm{n}^p v \otimes v.$$

D'où $\mathrm{m}^{\mathrm{p}} = \mathrm{n}^{\mathrm{p}}$. De plus, comme $\mathrm{mn} = q^2$ en vertu de la proposition 3, si les nombres m et n sont réels, ils sont de même signe. D'où $\mathrm{m} = \mathrm{n}$. ∎

Le fait que la conjecture soit vérifiée dans les deux cas précédents nous permet de donner par la suite une famille de symétries de Hecke dont le déterminant associé est central.

3 Symétries de Hecke de rang 2 à déterminant associé central.

Nous présentons ici dans un premier temps les exemples de symétries de Hecke de rang 2 exhibés dans [G] et nous décrivons ensuite une sous famille de telles symétries dont le déterminant associé est central.

3.1 Symétries de Hecke de rang 2

Soit R une symétrie de Hecke de rang 2 agissant sur l'espace $V_R^{\otimes 2}$, $\dim V_R$ = n. Nous considérons la base $\{e_i \otimes e_j\}$ de $V_R^{\otimes 2}$. Pour simplifier les notations, dans la mesure où nous n'utilisons que les projecteurs antisymétriques, nous notons $P_-^p = P^p$. Par (2.1), la projection P^2 correspondant à cette symétrie est

$$P^2(e_ie_j) = u_{ij}v,\ \ v = v^{kl}e_k \otimes e_l \in \Lambda_-^2(V_R),\ \text{ et } \langle u,v\rangle = u_{ij}v^{ij} = 1. \quad (3.1)$$

Comme $P^2 = (q+q^{-1})^{-1}(qid - R)$, nous pouvons écrire R sous la forme :

$$R_{ij}^{kl} = q\delta_i^k\delta_j^l - (q+q^{-1})u_{ij}v^{kl}. \quad (3.2)$$

Pour de telles symétries satisfaisant (3.2), nous avons la proposition suivante :

Proposition 6 *Si R est une symétrie paire de rang 2 et le couple (u,v) satisfait (3.2) alors*

$$UVU^tV^t = \left(q+q^{-1}\right)^{-2} id,\ \ trUV^t = 1 \quad (3.3)$$

où $U \to U^t$ est l'opérateur de transposition. Réciproquement, si les relations (3.3) sont satisfaites, alors l'opérateur défini dans (3.2) est une symétrie paire de rang 2.

Classifier les symétries de rang 2 revient alors à donner une liste exhaustive des couples (U,V) qui satisfont (3.3). En introduisant la matrice $Z = (q+q^{-1})VU^t$, le système (3.3) se met sous la forme :

$$(Z^t)^{-1} = V^{-1}ZV,\ trZ = q+q^{-1}. \quad (3.4)$$

Par conséquent, il suffit alors de trouver les couples solutions (Z, V) de (3.4). La famille de solutions de (3.4) sur le corps $\mathbb{C}$ est décrite par la proposition suivante :

Proposition 7 *[G] Si le couple (Z, V) de matrices est une solution du système (3.4), alors la matrice Z est telle que $trZ = q + q^{-1}$ et sa forme de Jordan contient des blocs tels que s'il existe un bloc correspondant à la valeur propre x, il existe un bloc de la même taille correspondant à la valeur propre $\frac{1}{x}$ avec la même multiplicité.*

Remarque Nous pouvons représenter l'opérateur Z dans sa forme de Jordan par le choix d'une base appropriée. De plus, nous pouvons supposer que les blocs relatifs aux valeurs propres x et $\frac{1}{x}$ occupent des positions symétriques par rapport au centre de la matrice Z. Notons également que si le nombre de blocs est impair, la valeur propre du milieu est ± 1.

Remarque Une solution $V = V_0$ de (3.4) étant trouvée, toute autre matrice de passage V intervenant dans (3.4) est donnée par $V = WV_0$ où W commute avec Z.

Regardons quelques exemples.

Supposons d'abord que $\dim V_R = 2$. Alors dans une base dans laquelle Z est de Jordan, nous avons

$$Z = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & b \\ a & 0 \end{pmatrix} \qquad q \neq 1, \ \ a, b \in C. \tag{3.5}$$

D'autres exemples dans le cas où $rang V_R = \dim V_R = 2$ avec $q = 1$ ont été présentés dans [G].

Supposons que $\dim V_R = 3$. Alors $Z = diag(x, \pm 1, y)$ où $x \pm 1 + y = q + q^{-1}$ et $xy = 1$, V_0 étant une matrice antidiagonale (les seuls éléments non nuls se trouvent sur la diagonale auxiliaire). Donc l'ensemble des solutions $\{(Z, V)\}$ du système (3.4) est constitué de deux composantes connexes correspondant aux deux valeurs possibles ± 1 du coefficient diagonal intermédiaire de la matrice Z.

Maintenant, nous passons au problème de décrire une sous famille de symétries de Hecke de rang 2 dont le déterminant associé est central.

3.2 Symétries de Hecke de rang 2 à déterminant associé central

Dans [AG], une famille de symétries de Hecke de rang 2 satisfaisant la condition de centralité du déterminant associé a été étudiée. Nous reproduisons ici cette construction en utilisant toutefois une normalisation différente. En supposant que Z a un spectre simple i-e, que ces valeurs propres sont distinctes, nous pouvons présenter Z sous la forme diagonale dans une base appropriée : $Z = diag\,(z_1, ..., z_n)$. En vertu de la proposition 7, nous pouvons paramétrer les matrices Z par les valeurs propres z_1, ..., z_r, avec $r = \frac{n}{2}$ si n est pair, et avec $r = \frac{(n-1)}{2}$, si n est impair. Remarquons que si n est impair, nous avons le choix pour la valeur de $z_{r+1} = \pm 1$.

Soit R une symétrie de Hecke de rang 2 supposée à déterminant associé v central. Autrement dit, $\overline{M} = \overline{N} = \pm q\, id$ par la proposition 3. En utilisant la relation

$$U^t = \left(q + q^{-1}\right)^{-1} V^{-1} Z \tag{3.6}$$

il est possible de transformer l'égalité $\overline{M} = \pm q\, id$ en

$$Z = \mp V \left(V^t\right)^{-1}. \tag{3.7}$$

Sous l'hypothèse que Z est diagonale et est à spectre simple, V satisfait (3.4) si et seulement si elle est antidiagonale. En vertu de (3.6), U est alors antidiagonale. Donc, nous avons $v^{ij} \neq 0$, $u_{ij} \neq 0$ si et seulement si $i + j = n$. Pour simplifier les notations, nous utiliserons la notation v^i (respectivement u_i) au lieu de $v^{i\,n+1-i}$ (respectivement $u_{i\,n+1-i}$). Notons $z_i = (q + q^{-1})\, u_i v^i$ (ici, il n'y a pas de sommation sur les indices). Il est facile de voir alors que la relation (3.7) est satisfaite si et seulement si les entrées v^i de la matrice V satisfont le système :

$$\mp \frac{v^i}{v^{n-i+1}} = z_i, \; 1 \leq i \leq n. \tag{3.8}$$

Ce système est compatible, dans la mesure où

$$z_i z_{n-i+1} = 1.$$

Si n est pair, nous avons un choix pour le signe dans (3.8) et pour chaque choix, la famille des solutions de (3.8) est paramétrée par $(v_1, ..., v_r)$ où $r = \frac{n}{2}$. Si n est impair, le choix du signe est déterminé par le signe de $z_{\frac{n+1}{2}} = \pm 1$ et alors la famille est paramétrée par $(v_1, ..., v_r)$ avec $r = \frac{n-1}{2}$.

Résumons la discussion précédente sous la forme de la proposition suivante. Celle-ci fournit une famille de symétries de Hecke de rang 2 à déterminant associé central v sur le corps $\mathbb{C}$.

Proposition 8 *Plaçons nous dans le cadre de la proposition 7. Si le spectre de la matrice Z est simple, alors le couple (Z, V) satisfait (3.4) et le déterminant associé de la symétrie de Hecke R de rang 2 est central si et seulement si la matrice V est une matrice anti-diagonale dont les coefficients sur la diagonale auxiliaire $v^i = v^{in+1-i}$ satisfont le système (3.8).*

Nous donnons ici un exemple de symétries de Hecke de rang 2 dont le déterminant associé v n'est pas central, ce qui fournit également, en vertu de la proposition 5 un exemple de symétrie de Hecke dont le déterminant quantique n'est pas central.

Exemple 1 *Soit un couple (Z, V) défini dans (3.5) tel que $ab^{-1} \neq \pm q$. Alors la symétrie de Hecke déduite du couple (Z, V) est un exemple de symétrie de Hecke dont le déterminant associé v n'est pas central, puisque (Z, V) ne satisfait pas les conditions de la proposition 8.*

Jusqu'ici, toutes les constructions de cette section ont été faites sur le corps $\mathbb{C}$. Maintenant, notre but est de montrer l'existence d'une famille de symétries de Hecke réelles de rang 2 dont le déterminant associé est central. Cette existence permet par la suite d'exhiber une famille de symétries de Hecke de rang quelconque à déterminant associé central.

Commençons par donner des exemples lorsque $\dim V_R = 3$. Posons $Z = diag(x, 1, x^{-1})$. Alors la condition $trZ = q + q^{-1}$ de la proposition 7 devient

$$x + x^{-1} + 1 = q^{-1} + q. \tag{3.9}$$

Remarquons que cette équation possède des racines réelles si q est réel et $q + q^{-1} - 1 \geq 2$. Pour une telle racine x de (3.9), en prenant les éléments v^i réels pour $1 \leq i \leq r$, nous avons une symétrie de Hecke réelle R à déterminant associé central. D'où, dans le cas où $\dim V_R = 3$, il existe une famille de symétries de Hecke réelles de rang 2 telles que leur déterminant associé est central.

Examinons le cas où $\dim V_R = 4$. Posons $Z = diag(x, y, y^{-1}, x^{-1})$. Par la proposition 7, Z doit vérifier l'équation $x+x^{-1} = q^{-1}+q-y-y^{-1}$. Pour n'importe quelle valeur de q, celle-ci possède une large famille de solutions (x, y) réelles. Par conséquent, en choisissant v^i réels, il existe une famille de symétries de Hecke réelles de rang 2 à déterminant associé central. De même, dans la cas où $\dim V_R \geq 5$, pour tout q réel, il existe une famille de symétries de Hecke réelles de rang 2 à déterminant associé central.

4 Construction par collage d'une famille de symétries de Hecke de rang $p \geq 3$.

4.1 Collage

Soit $R_i : V_i^{\otimes 2} \longrightarrow V_i^{\otimes 2}$, $i = 1, 2$ deux symétries de Hecke (non nécessairement paires) avec V_1 et V_2 des espaces vectoriels de dimension finie. Nous définissons un opérateur R agissant dans l'espace $V^{\otimes 2}$ où $V = V_1 \oplus V_2$ tel que

$$\begin{aligned} R_{|V_i^{\otimes 2}} &= R_i & (4.1)\\ \forall x \in V_1, \forall y \in V_2, R(x \otimes y) &= \alpha q^{-1}(y \otimes x) & (4.2)\\ R(y \otimes x) &= q\alpha^{-1} x \otimes y + (q - q^{-1}) y \otimes x. & (4.3) \end{aligned}$$

avec $\alpha \neq 0$ un nombre complexe fixé. Ce nombre α nous permet une liberté au niveau du collage. Cette liberté sera fixée par la suite par notre exigence d'obtenir de "bonnes" propriétés pour la symétrie R collée. Notons qu'une telle procédure de collage (avec α particulier) a été présentée dans [G]. Dans un cadre plus général, elle est considérée dans [MM] où le terme de collage ("glueing") a été suggéré.

Lemme 2 *R défini par (4.1)-(4.3) est une symétrie de Hecke.*

Preuve Le fait que R soit un opérateur de Yang-Baxter provient de [MM]. Il est par ailleurs facile de vérifier que R satisfait la condition de Hecke. ■

Nous voulons calculer les séries de Hilbert-Poincaré correspondant à la symétrie collée. Remarquons que nous avons $\Lambda_\pm(V_i) \subset \Lambda_\pm(V_R)$ et que dans l'algèbre $\Lambda_-(V_R)$ (respectivement $\Lambda_+(V_R)$), les éléments $qx \otimes y + \alpha q y \otimes x$ (respectivement $qxy - \alpha q^{-1} y \otimes x$) où $x \in V_1$, $y \in V_2$ sont égaux à zéro : en effet, nous avons

$$\forall x \in V_1, \forall y \in V_2,\ R\begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha q^{-1} \\ \alpha^{-1} q & q - q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} xy \\ yx \end{pmatrix}.$$

Les valeurs propres de cet opérateur sont q et $-q^{-1}$ et

$$R(qx \otimes y + \alpha q y \otimes x) = q(qx \otimes y + \alpha q y \otimes x)$$
$$R(qx \otimes y - \alpha q^{-1} y \otimes x) = -q^{-1}(qx \otimes y - \alpha q^{-1} y \otimes x).$$

Par conséquent, nous avons le lemme

Lemme 3 *Modulo les relations $qx \otimes y + \alpha q y \otimes x = 0$ (respectivement $qxy - \alpha q^{-1} y \otimes x = 0$), tout monôme de l'algèbre $\Lambda_-(V_R)$ (respectivement $\Lambda_+(V_R)$) peut être réduit à une somme d'éléments du type XY où $X \in \Lambda_-(V_1)$ et $Y \in \Lambda_-(V_2)$ (respectivement $X \in \Lambda_+(V_1)$ et $Y \in \Lambda_+(V_2)$).*

Les séries de Hilbert-Poincaré associées à la symétrie de Hecke R collée peuvent s'exprimer à l'aide de celles associées à R_i, $i = 1, 2$. En effet,

Proposition 9

$$P_\pm(V_R, x) = P_\pm(V_1, x)\, P_\pm(V_2, x).$$

Preuve. Elle découle du lemme 3.

Corollaire 1 *Si les symétries de Hecke R_i, $i = 1, 2$ sont paires alors R est aussi paire. De plus, nous avons $rangV_R = rangV_1 + rangV_2$.*

Cette procédure de collage nous permet de donner des familles assez larges de symétries de Hecke paires de rang supérieur ou égal à 3, en les construisant par récurrence à partir de symétries de Hecke de rang 2.

Nous pouvons maintenant nous poser la question suivante : est-ce que nous pouvons garantir que la condition de centralité du déterminant associé à la symétrie de Hecke collée soit satisfaite lorsque les symétries de Hecke initiales sont à déterminant associé central ?

4.2 Symétries de Hecke à déterminant associé central : construction par collage

Le théorème suivant nous permet d'assurer l'existence d'une symétrie collée à déterminant quantique central construite à partir de deux symétries de Hecke de rangs donnés à déterminant associé central. Donc, si la symétrie de Hecke collée est réelle, son déterminant associé est central en vertu du lemme 1.

Théorème 1 *Soit R_1 et R_2 deux symétries de Hecke respectivement de rang p_1 et p_2 agissant respectivement dans les espaces $V_1^{\otimes 2}$ et $V_2^{\otimes 2}$. Supposons que R_1 et R_2 sont à déterminant associé central, notés respectivement v_1 et v_2. Posons $V = V_1 \oplus V_2$. Alors il existe $p_1 + p_2$ nombres $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que la symétrie $R : V^{\otimes 2} \to V^{\otimes 2}$ définie par les formules (4.1), (4.2) et (4.3) possède des matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ scalaires.*

Preuve.
Nous savons d'après le corollaire 1 que la symétrie collée R est de rang $p_1 + p_2$. Donc, il existe un élément v tel que $\Lambda_-^{p_1+p_2}(V) = \langle v \rangle$. Nous prenons en tant que v l'élément $P_-^{1 \ldots p_1+p_2}(v_1 \otimes v_2)$. Pour calculer les matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ corespondantes à v, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 4

$$\overline{R}\left[P_{-}^{1\ldots p_1+p_2}(v_1\otimes v_2)\otimes w\right]=P_{-}^{2\ldots p_1+p_2+1}\left(R\left((v_1\otimes v_2)\otimes w\right)\right),\ \forall w\in V.$$

$$\underline{R}\left[w\otimes P_{-}^{1\ldots p_2+p_1}(v_1\otimes v_2)\right]=P_{-}^{2\ldots p_1+p_2+1}R\left[w\otimes(v_1\otimes v_2)\right],\ \forall w\in V.$$

Ici $\overline{R}$ désigne l'opérateur de Yang-Baxter transposant $\Lambda_{-}^{p_1+p_2}(V_R)\otimes V_R$ (voir (2.2)) et $\underline{R}$ désigne l'opérateur de Yang-Baxter transposant $V_R\otimes\Lambda_{-}^{p_1+p_2}(V_R)$ (voir (2.3)).

Ce lemme est un cas particulier du fait que les relations ci-dessus demeurent toujours valable si nous remplaçons les projecteurs par n'importe quel polynôme de R^i opérant dans l'espace $V^{\otimes(p_1+p_2)}$. Ce dernier fait est une conséquence immédiate de l'équation de Yang-Baxter.

Soit $\{e_i\}$ une base de V. Notons $\overline{M_1}$ et $\overline{N_1}$ les matrices de commutation du déterminant v_1 associé à R_1. De même, notons $\overline{M_2}$ et $\overline{N_2}$ celles associées à v_2 relativement à R_2.

Comme v_1 est central dans $\Lambda_{-}^{m}(V_1)$, nous avons en vertu de la proposition 3

$$\overline{M_1}=\overline{N_1}=\epsilon_1 q\,id \qquad \text{et} \qquad \overline{M_2}=\overline{N_2}=\epsilon_2 q\,id \qquad \text{avec} \qquad \epsilon_1,\epsilon_2\in\{+,-\}.$$

Le lemme 4 nous permet d'écrire :

$$\overline{M}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & B & \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} & 0 & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\epsilon_2\alpha^{p_1}q^{1-p_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_2\alpha^{p_1}q^{1-p_1}\end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

et

$$\overline{N}=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\epsilon_1\alpha^{p_2}q^{1-p_2} & & \\ & \ddots & \\ & & \epsilon_1\alpha^{p_2}q^{1-p_2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & 0 & \end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} & C & \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} & D & \end{pmatrix}\end{pmatrix}$$

Comme $\overline{MN} = q^2 id$, nous avons alors le système suivant :

$$\begin{cases} \epsilon_1 A\alpha^{p_2}q^{1-p_2} + BC = q^2 id \\ BD = 0 \\ q^{1-p_1}\alpha^{p_1}C = 0 \\ \epsilon_2 q^{1-p_1}\alpha^{p_1}D = q^2 id. \end{cases}$$

Ce système est alors équivalent à

$$\begin{cases} C = 0 \\ B = 0 \\ A = \epsilon_1\alpha^{-p_2}q^{p_2+1}id \\ D = \epsilon_2\alpha^{-p_1}q^{p_1+1}id. \end{cases}$$

Donc les matrices $\overline{M}$ et $\overline{N}$ sont diagonales. En outre, avec un choix approprié du facteur α, les matrices $\overline{R}$ et $\underline{R}$ deviennent scalaires. En effet, $\overline{R}$ et $\underline{R}$ sont scalaires si et seulement si

$$\alpha^{p_1+p_2} = \epsilon_1\epsilon_2 q^{p_1+p_2}. \tag{4.4}$$

Donc suivant le signe du produit $\epsilon_1\epsilon_2$, nous avons dans les deux cas $p_1 + p_2$ solutions de cette équation (en particulier $\alpha = q$ lorsque $\epsilon_1 = \epsilon_2$) tel que le déterminant quantique de la symétrie de Hecke collée est central. ∎

La proposition précédente ne permet pas toutefois d'affirmer que dans le cas complexe le déterminant v associé est central. En revanche, elle nous permet d'écrire

Proposition 10 *Si les symétries de Hecke R_1 et R_2 sont réelles et si $\epsilon_1 = \epsilon_2$, alors la symétrie R construite par le collage avec $\alpha = q$ est réelle et à déterminant associé central.*

La proposition 10 nous permet donc de donner une famille de symétries de Hecke réelles de rang quelconque et à déterminant associé central. En vertu de [GLS], cela nous fournit une famille suffisamment large de catégories tressées SW(V).

5 Exemple : Symétries de Hecke liées aux groupes quantiques $U_q(sl(n))$.

Soit R_1 la symétrie de Hecke de rang 1 définie par $R_1(x \otimes x) = q(x \otimes x)$. En considérant R_2 la symétrie de rang 2 définie à partir d'un couple (Z, V) intervenant dans (3.5) et en imposant $ab^{-1} = q$, nous retrouvons la symétrie de Hecke associée au groupe quantique $U_q(sl(2))$. En collant R_1 et R_2 par le biais des formules (4.1), (4.2) et (4.3) et en posant $\alpha = q$ nous retrouvons la symétrie de Hecke associée à $U_q(sl(3))$. Par récurrence, il vient alors que notre construction permet de retrouver les symétries de Hecke de Drinfeld-Jimbo de type $SL(n)$. En outre, nous savons d'après [FRT], que pour ces dernières le déterminant quantique est central. Notre méthode permet d'obtenir cette propriété comme un cas particulier de la construction plus générale.

Références

[AG] P.Akueson, D.Gurevich *Some algebraic structures related to Temperley-Lieb algebra*, in : Lie Groups and Lie Algebras, Their Representations, Generalizations and Applications ; Mathem. and its Applications 433, pp. 1–16, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht/Boston/London, 1998.

[B] T.Banica *A reconstruction result for the R-Matrix quantizations of SU(N)*, q-alg/ 9806063.

[CP] V.Chari, A. Pressley *A guide to Quantum Groups*, Cambrige University Press, 1994.

[DJ] R. Dipper and G.James *Representations of Hecke algebras of General Linear Groups.* Proc. London Math. Soc., 52(3) (1986) pp. 20–52.
R. Dipper and G.James *Block and Idempotents of Hecke algebras of General Linear Groups.* Proc. London Math. Soc., 54(3) (1987) pp. 57–82.

[DL] M. Dubois-Violette. G.Launer, *The quantum group of a nondegenerated bilinear form*, Phys.Lett. **B245**, 1990, pp.175–177.

[FRT] L.D.Faddeev, N.Yu.Reshetikhin, L.A.Takhtajan Algebra i Analiz 1 (1989) 178 – 206 (in Russian) ; English translation in : Leningrad Math J. 1 (1990) 193.

[G] D.Gurevich *Algebraic aspects of the quantum Yang-Baxter equation*, Leningrad Math.J. 2 (1991), pp. 801–828.

[GLS] D.Gurevich, R.Leclercq, P.Saponov *Traces and dimensions in braided categories*, preprint MPIM-Bonn 01-33, q-alg/ 0104202.

[H] Phung Ho Hai *On matrix quantum groups of type A_n*, International Journal of mathematics, Vol.11 (no 9) 2000, pp. 1115–1146.

[KW] D.Kazdhan, H.Wenzl *Reconstructing monoidal categories*, Adv. in soviet math. 16 (1993), pp. 111–136.

[MM] S.Majid, M.Markl *Glueing operation for R-matrices, quantum groups and link-invariants of Hecke type*, Math.Pro.Cambridge Philos.Soc.119 (1996), pp. 139–166.

[M] S.Majid, *Foundations of quantum group theory*, Cambrige University Press, 1995.

[ML] S.Mac Lane, *Natural associativity and commutativitu*, Rice Univ. Stud. 49 (1963), pp. 28–46.

[ML1] S.Mac Lane, *Categories for the Working Mathematitian*, Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, Berlin 1971.