CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

PIERRE AGERON

Esquisses inductives et presque inductives

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 42, n° 3 (2001), p. 229-240

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_2001__42_3_229_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Volume XLII-3 (2001)

ESQUISSES INDUCTIVES ET PRESQUE INDUCTIVES

par Pierre AGERON

ABSTRACT.

We study those sketches all of whose cones are based on the empty diagram. We prove that the category of models of such a sketch has multilimits. This provides a canonical way to re-sketch it. As a special case, the category of models of a colimit sketch can always be re-sketched by some limit sketch. Specific examples are investigated further.

INTRODUCTION.

Ce travail a fait l'objet de conférences le 21 janvier 2000 à l'Université Denis Diderot (Paris 7), le 17 juin 2000 à l'Université du Littoral (Dunkerque) et le 4 novembre 2000 à l'Université de Cambridge. Il apporte quelques précisions sur la classification des esquisses et des catégories accessibles.

Dans la section 1, nous rappelons, sous une forme qui nous convient, deux constructions dans la catégorie des esquisses qui nous sont utiles par la suite.

La section 2 est consacrée aux esquisses (purement) inductives. Nous rappelons que la catégorie des modèles d'une esquisse inductive est équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse projective ; nous prouvons que la réciproque est fausse et étudions en détail divers cas particuliers de ce résultat.

La section 3 est consacrée aux esquisses presque inductives, c'est-à-dire celles dont les seuls cônes projectifs distingués sont d'indexation vide. Nous montrons que la catégorie des modèles d'une telle esquisse est multicomplète. Nous définissons les esquisse spéciales, qui sont aux esquisses presque inductives ce que les esquisses projectives sont aux esquisses inductives : la catégorie des modèles d'une esquisse presque inductive est équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse spéciale. Nous finissons par des exemples.

TERMINOLOGIE ET NOTATIONS.

(1) Soient $\mathbb{D}$ et $\mathbb{L}$ deux catégories petites et $\mathbb{A}$ une catégorie localement petite. On note $\mathbb{D} \triangleright \mathbb{L}$ la catégorie obtenue en adjoignant à la somme $\mathbb{D} + \mathbb{L}$ une flèche unique de tout objet de $\mathbb{D}$ vers tout objet de $\mathbb{L}$. Si δ et λ sont deux diagrammes dans $\mathbb{A}$, d'indexations respectives $\mathbb{D}$ et $\mathbb{L}$, un **tronc de cône inductif** dans $\mathbb{A}$ construit sur δ et λ est un diagramme j dans $\mathbb{A}$ d'indexation $\mathbb{D} \triangleright \mathbb{L}$ qui prolonge δ et λ. On dit que j présente λ comme **diagramme localement limite inductive** pour δ si, pour tout objet A de $\mathbb{A}$, on a :

$$\varprojlim_{L \in \mathbf{L}^{op}} \operatorname{Hom}(\lambda(L), A) \cong_{\text{can}} \varprojlim_{D \in \mathbf{D}^{op}} \operatorname{Hom}(\delta(D), A)\,).$$

(2) Une **esquisse** $\mathbb{E}$ est une *petite catégorie* (notée $\underline{\mathbb{E}}$ et appelée **support** de $\mathbb{E}$) dans laquelle on distingue certains cônes projectifs et/ou inductifs (un tel cône a pour base un diagramme dans $\underline{\mathbb{E}}$ dont l'indexation sera aussi appelée indexation du cône). On dit que $\mathbb{E}$ est **élémentaire** si on ne distingue aucun cône (on identifie alors $\mathbb{E}$ à $\underline{\mathbb{E}}$). On dit que $\mathbb{E}$ est **projective** (resp. **inductive**) si on ne distingue dans $\underline{\mathbb{E}}$ que des cônes projectifs (resp. inductifs). On dit que $\mathbb{E}$ est **presque inductive** si tous ses cônes projectifs distingués sont d'indexation vide (ses cônes inductifs étant quelconques). Un **modèle** d'une esquisse $\mathbb{E}$ est un foncteur de $\mathbb{E}$ vers $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ qui transforme les cônes distingués de $\mathbb{E}$ en cônes limite de $\mathbb{E}\mathrm{ns}$. Une catégorie est **esquissable** si elle est équivalente à la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ des modèles et transformations naturelles d'une certaine esquisse $\mathbb{E}$. On parle de même de catégorie **projectivement esquissable**, **inductivement esquissable**, etc. Deux esquisses $\mathbb{E}$ et $\mathbb{E}'$ sont **équivalentes** si les catégories $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ et $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}')$ sont équivalentes.

(3) Pour qu'une catégorie $\mathbb{A}$ soit esquissable, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit **accessible**, c'est-à-dire qu'il existe un cardinal régulier β tel que :

(*a*) $\mathbb{A}$ possède les limites inductives d'indexation β-filtrante ;

(*b*) sa sous-catégorie pleine $\mathbb{A}_\beta$ formée des objets β-présentables est (essentiellement) petite et dense dans $\mathbb{A}$;

(*c*) pour tout objet A de $\mathbb{A}$, la catégorie $\mathbb{A}_\beta/A$ est β-filtrante.

Lorsque $\mathbb{A}$ et β vérifient les trois propriétés $(a), (b), (c)$ ci-dessus, on dit que $\mathbb{A}$ est **β-accessible**. Il est souvent utile de remplacer (c) par la clause équivalente :

(c') tout diagramme $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$ d'indexation β-petite, à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta$, admet un diagramme localement limite inductive $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$, à valeurs dans $\mathbb{A}_\beta$.

Enfin, $\mathbb{A}$ est projectivement esquissable si et seulement si elle est accessible et cocomplète, ou encore (ce qui est équivalent) accessible et complète.

1. DEUX CONSTRUCTIONS D'ESQUISSES.

On rappelle ici, en mettant en évidence un certain parallélisme entre elles, deux constructions importantes dans la catégorie des esquisses.

Définition. — Soit $\mathbb{E}$ une esquisse. On note $\mathbb{E}^+$ l'esquisse suivante :
(i) les objets de $\mathbb{E}^+$ sont les objets de $\mathbb{E}$ et un nouvel objet $+\infty$;
(ii) les flèches de $\mathbb{E}^+$ sont les flèches de $\mathbb{E}$ et, pour tout objet E de $\mathbb{E}$, une nouvelle flèche de E vers $+\infty$ (de sorte que $+\infty$ est objet final du support de $\mathbb{E}^+$) ;
(iii) les cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}^+$ sont les cônes projectifs

$$(p_I : S \to B(I))_{I \in \mathbb{I}^+}$$

où :
- $(p_I : S \to B(I))_{I \in \mathbb{I}}$ est un cône projectif distingué de $\mathbb{E}$,
- $\mathbb{I}^+$ est la catégorie définie par (i) et (ii),
- $p_{+\infty}$ est l'unique flèche de S vers $+\infty$;

(iv) les cônes inductifs distingués de $\mathbb{E}^+$ sont les cônes inductifs

$$(q_J : B(J) \to S)_{J \in \mathbb{J}}$$

qui sont l'image dans $\mathbb{E}^+$ d'un cône inductif distingué de $\mathbb{E}$.

On notera que les cônes *projectifs* distingués de $\mathbb{E}^+$ sont tous d'indexation connexe. La proposition (immédiate) suivante sera pour nous essentielle :

Proposition. — *Si $\mathbb{E}$ est presque inductive, alors $\mathbb{E}^+$ est équivalente à une esquisse inductive.*

Remarques. — Il est montré dans [Makkai-Paré89] que la catégorie $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}^+)$ est équivalente à la catégorie $\mathrm{Fam}(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}))$ des familles de modèles de $\mathbb{E}$. Nous avons donné dans [Ageron+1] une caractérisation intrinsèque des catégories esquissables par une esquisse à cônes projectifs d'indexation connexe (catégories « normalement accessibles »).

Définition. — Soient $\mathbb{E}$ une esquisse et M un modèle de $\mathbb{E}$. On note $\mathbb{E}\backslash M$ l'esquisse suivante :
(i) les objets de $\mathbb{E}\backslash M$ sont les couples (E, x), où :
- E est un objet de $\mathbb{E}$,
- x est un élément de $M(E)$;

(ii) les flèches de $\mathbb{E}\backslash M$ sont les triplets $((E, x), e, (E', x'))$ où :
- (E, x) et (E', x') sont deux objets de $\mathbb{E}\backslash M$,
- $e : E \to E'$ est une flèche de $\mathbb{E}$ telle que $M(e)(x) = x'$;

(iii) les cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}\backslash M$ sont les cônes projectifs

$$(p_I : (S, x) \to (B(I), M(p_I)(x)))_{I \in \mathbb{I}}$$

où :
- $(p_I : S \to B(I))_{I \in \mathbb{I}}$ est un cône projectif distingué de $\mathbb{E}$,
- x est un élément de $M(S)$;

(iv) les cônes inductifs distingués de $\mathbb{E}\backslash M$ sont les cônes inductifs

$$(q_{J,y} : (B(J), y) \to (S, x))_{(J,y)\in\mathbb{K}}$$

où :
– $(q_J : B(J) \to S)_{J\in\mathbb{J}}$ est un cône inductif distingué de $\mathbb{E}$,
– $\mathbb{K}$ est une composante connexe de la catégorie $\mathbb{J}\backslash(M \circ B)$ définie par (i) et (ii),
– x est la valeur commune des $M(q_J)(y)$ pour les différents objets (J, y) de $\mathbb{K}$.

On notera que les cônes *inductifs* distingués de $\mathbb{E}\backslash M$ sont tous d'indexation connexe. La proposition (immédiate) suivante sera pour nous essentielle :

Proposition. — *Si tous les cônes inductifs distingués de* $\mathbb{E}$ *sont d'indexation discrète, alors* $\mathbb{E}\backslash M$ *est équivalente à une esquisse inductive.*

Remarques. — Lair a montré [1] que la catégorie Mod($\mathbb{E}\backslash M$) est équivalente à la catégorie Mod($\mathbb{E}$)$/M$ des modèles de $\mathbb{E}$ au-dessus de M. Il a aussi montré dans [Lair96] que les catégories esquissables par une esquisse à cônes inductifs d'indexation connexe sont exactement les catégories accessibles possédant un objet final.

2. ESQUISSES INDUCTIVES.

Voici le principal résultat sur les esquisses inductives.

Théorème. — a) *Toute esquisse inductive est équivalente à une esquisse projective.*
b) *Toute esquisse inductive dont tous les cônes inductifs distingués sont d'indexation discrète est équivalente à une esquisse élémentaire.*

Démonstration. — a) Si $\mathbb{E}$ est inductive, Mod($\mathbb{E}$) possède toutes les limites inductives, calculées point par point (c'est-à-dire créées et préservées par le foncteur d'oubli de Mod($\mathbb{E}$) dans $\mathrm{Ens}^{\underline{\mathbb{E}}}$). On en déduit que Mod($\mathbb{E}$) possède toutes les limites projectives, et donc, classiquement, qu'elle est projectivement esquissable.

b) On vient de voir que Mod($\mathbb{E}$) possède un objet terminal T. On a alors : Mod($\mathbb{E}$) $\simeq$ Mod($\mathbb{E}$)$/T$ $\simeq$ Mod($\mathbb{E}\backslash T$) ; or la construction de $\mathbb{E}\backslash T$ montre qu'elle n'a pas de cône projectif distingué et que ses cônes inductifs distingués sont tous indexés par la catégorie terminale **1**. On a donc Mod($\mathbb{E}\backslash T$) $\simeq$ Mod($\mathbb{E}'$) où $\mathbb{E}'$ est une esquisse élémentaire. C.Q.F.D.

Remarques. — (1) Seul le point b) est nouveau : le point a) se trouve déjà dans [Adámek-Rosický94], 2.63, et même, incomplètement, dans [Guitart86], p. 111.
(2) En 1999, R. Paré m'a posé la question de la réciproque de a). Elle est fausse. En effet, toute catégorie inductivement esquissable possède nécessairement un objet initial strict, car vide point par point [2] : ce n'est pas le cas, par exemple, de la catégorie des groupes, pourtant projectivement esquissable.

---

(1) Lors d'une conférence à l'Université de Caen le 29 janvier 1999.

(2) Plus généralement, il est établi dans [Ageron+1] que les catégories accessibles possédant un objet initial strict sont exactement les catégories esquissables par une esquisse dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation non vide.

Exemples. — *a*) *Co-magmas.* Notons $\mathbb{E}$ l'esquisse de co-magma, c'est-à-dire l'esquisse inductive duale de la classique esquisse projective de magma : un co-magma est donc un ensemble X muni d'une application $k : X \to X+X$. Un peu de réflexion montre que $\mathbb{E}$ est équivalente à l'esquisse élémentaire $\mathbb{E}'$ contenant, pour chaque suite $u \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, un objet E_u et deux flèches $f_u : E_{0u} \to E_u$ et $g_u : E_{1u} \to E_u$. En particulier, Mod($\mathbb{E}$) a un objet final, qui a la puissance du continu.

b) *Co-semigroupes, etc.* Notons $\mathbb{E}$ l'esquisse de *co-semigroupe*, c'est-à-dire de co-magma « co-associatif ». Un petit calcul montre que l'esquisse inductive $\mathbb{E}$ est équivalente à l'esquisse élémentaire $\mathbb{E}'$ ayant deux objets E_1, E_2 et deux flèches $f_1 : E_1 \to E_1$ et $f_2 : E_2 \to E_2$ vérifiant $f_1^2 = f_1$ et $f_2^2 = f_2$ De la même façon, l'esquisse de co-magma « co-autodistributif à gauche » est équivalente à l'esquisse élémentaire ayant deux objets E_1, E_2 et deux flèches $f_1 : E_1 \to E_1$ et $f_2 : E_2 \to E_2$ vérifiant (seulement) $f_1^2 = f_1$.

c) *Surjections.* Considérons l'esquisse inductive $\mathbb{E}$ consistant en une spécification d'épimorphisme

$$\boxed{E_2 \twoheadrightarrow E_1}$$

Pour obtenir une esquisse projective $\mathbb{E}'$ équivalente à $\mathbb{E}$, il suffit de noter que la donnée d'une application surjective équivaut à celle d'une relation d'équivalence sur son ensemble de départ. Or les ensembles munis d'une relation d'équivalence sont les modèles d'une esquisse projective $\mathbb{E}'$. Notons que tous les cônes projectifs distingués de $\mathbb{E}'$ sont d'indexation finie.

d) *Endosurjections.* Considérons l'esquisse inductive $\mathbb{E}$ qui a un seul objet E et consiste en la spécification d'un épimorphisme de E sur E : un modèle de $\mathbb{E}$ s'identifie à un ensemble muni d'une endosurjection (X, f). Contrairement au cas précédent, $\mathbb{E}$ n'est équivalente à aucune esquisse projective dont tous les cônes projectifs distingués soient d'indexation finie. En effet, il est connu que ceci impliquerait que Mod($\mathbb{E}$) est finiment accessible ; or nous allons prouver que ce n'est pas le cas. Définissons $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$p(n+1) = n$$

$$p(0) = 0.$$

Il est clair que $(\mathbb{N}, p)$ est un modèle de $\mathbb{E}$; nous allons montrer qu'il n'est pas limite inductive filtrante d'objets finiment présentables. Pour cela, définissons $q : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ par

$$q(m+1, k) = (m, k)$$

$$q(0, k+1) = (0, k)$$

$$q(0,0) = (0,0).$$

Alors $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, q)$ est aussi un modèle de $\mathbb{E}$. Il en est de même, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, de $(\mathbb{N} \times \{0, \ldots, k\},\ q\,|_{\mathbb{N}\times\{0,\ldots,k\}})$. Ces derniers objets admettent clairement $(\mathbb{N}\times\mathbb{N}, q)$ comme limite inductive filtrante. Remarquons encore que l'application h qui envoie

k sur $(0,k)$ est un morphisme de $(\mathbb{N},p)$ vers $(\mathbb{N}\times\mathbb{N},q)$. Soient maintenant (F,s) un quelconque modèle finiment présentable de $\mathbb{E}$ et g un morphisme de (F,s) vers $(\mathbb{N},p)$: par définition d'un finiment présentable, il doit alors exister $k\in\mathbb{N}$ tel que $h\circ f$ factorise à travers $\mathbb{N}\times\{0,\ldots,k\}$. Mais puisque s est surjective, on voit facilement que ceci implique $g[F]\subset\{0\}$; a fortiori, $(\mathbb{N},p)$ n'est pas limite inductive filtrante d'objets finiment présentables.

En revanche, $\mathbb{E}$ est équivalente à une esquisse projective dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation dénombrable. Dans [Ageron*]), on montre que la catégorie des modèles de $\mathbb{E}$ est équivalente à celle des modèles de la théorie $\mathbb{T}$ écrite dans la logique L_{ω_1,ω_1} au moyen d'un symbole fonctionnel unaire σ et d'une famille $(R_i)_{i\in\mathbf{Z}}$ de symboles relationnels binaires, comportant des axiomes exprimant que σ est une bijection, que chaque R_i est une relation d'équivalence, et les axiomes et schémas suivants :

$$(\bigwedge_{i\in\mathbf{Z}} R_i(t,t'))\Rightarrow(t=t')$$

$$\forall t\ \forall t'\quad R_i(t,t')\Rightarrow R_{i+1}(t,t')$$

$$\forall t\ \forall t'\quad R_{i+1}(t,t')\iff R_i(\sigma(t),\sigma(t'))$$

$$\forall(t_i)_{i\in\mathbf{Z}}\quad(\bigwedge_{i\in\mathbf{Z}} R_i(t_{i-1},t_i))\Rightarrow(\exists!\,t\ \bigwedge_{i\in\mathbf{Z}} R_i(t,t_i)).$$

On en déduit aisément une esquisse projective $\mathbb{E}'$ équivalente à $\mathbb{E}$, dont tous les cônes projectifs distingués sont d'indexation (connexe et) dénombrable.

3. ESQUISSES PRESQUE INDUCTIVES.

Une catégorie esquissable possède toujours des diagrammes localement limite inductive. Mais elle n'a pas, en général, de diagrammes localement limite projective. On va pourtant montrer que, dans la catégorie des modèles d'une esquisse presque inductive (cf. section « Terminologie et notations »), ces diagrammes existent et sont d'indexation discrète. Autrement dit :

Proposition. — *Si une catégorie $\mathbb{A}$ est équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse presque inductive, alors $\mathbb{A}$ est (accessible et) multicomplète.*

Démonstration. — On sait (voir la partie 1) que si $\mathbb{E}$ est une esquisse presque inductive, alors $\mathbb{E}^+$ est équivalente à une esquisse inductive. Mais d'après la partie 2, $\mathbb{E}^+$ est alors équivalente à une esquisse projective. On en déduit que la catégorie $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}))$, équivalente à $\mathrm{Mod}(\mathbb{E}^+)$, est complète. Mais $\mathrm{Mod}(\mathbb{E})$ s'identifie clairement à une sous-catégorie multicoréflexive de $\mathbb{F}\mathrm{am}(\mathrm{Mod}(\mathbb{E}))$; il en résulte aisément qu'elle est multicomplète. C.Q.F.D.

Remarque. — La réciproque de cette proposition est fausse : une catégorie accessible multicomplète, ou même complète, n'est pas nécessairement équivalente à la catégorie des modèles d'une esquisse presque inductive. Pour trouver un contre-exemple, une stratégie possible consiste à mettre en défaut la condition nécessaire suivante pour qu'une catégorie $\mathbb{A}$ soit presque inductivement esquissable : l'existence d'un ensemble de foncteurs de $\mathbb{A}$ vers $\mathbb{E}\mathrm{ns}$ préservant les limites inductives d'indexation connexe (les « foncteurs d'évaluation ») qui sépare tout couple d'objets ou de flèches parallèles de $\mathbb{A}$. On peut alors utiliser la catégorie proposée dans un contexte voisin par R. Paré et citée dans [Adámek-Rosický96]. Il existe en fait des contre-exemples beaucoup plus simples — ainsi la catégorie $\mathbb{A}$ associée à l'ensemble ordonné $\{0 \leq 1\}$ — mais auxquels la méthode précédente n'est pas applicable : il semble alors nécessaire de recourir à l'analyse plus sophistiquée de [Lair87], pp. 136-142.

Le problème se pose maintenant de savoir comment esquisser les catégories accessibles multicomplètes. Envisageons d'abord le cas des catégories accessibles *conditionnellement complètes* : ce sont les catégories accessibles multicomplètes dans lesquelles les familles localement limite projective sont indexées par des ensembles de cardinal ≤ 1. On sait :

Théorème. — ([Ageron97]) *Soient $\mathbb{A}$ une catégorie et β un cardinal régulier. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) $\mathbb{A}$ est β-accessible et conditionnellement complète ;
(b) $\mathbb{A}$ est β-accessible et admet les limites inductives d'indexation non vide ;
(c) $\mathbb{A}$ est esquissable par une esquisse dont
— les cônes projectifs distingués sont tous d'indexation β-petite ;
— les cônes inductifs distingués sont en nombre $< \beta$ (3) et tels que pour chacun d'eux, noté $(q_I : B(I) \to S)_{I \in \mathbb{I}^{op}}$, on ait :

(i) le cône projectif de base vide et de sommet S est distingué,

(ii) pour tout diagramme $\delta : \mathbb{J} \to \mathbb{I}$, d'indexation non vide et α-petite, la limite inductive $\varinjlim \delta$ existe et le cône projectif $B(\varinjlim \delta)$ est distingué.

Peut-on démontrer un théorème analogue dans le cas des catégories multicomplètes ? Pour cela, il convient d'analyser la forme des diagrammes localement limite inductive dans une catégorie β-accessible et multicomplète. C'est l'objet des trois lemmes suivants.

Lemme 1. — *Soit $\mathbb{A}$ une catégorie β-accessible multicomplète. Tout diagramme dans $\mathbb{A}$ d'indexation β-petite et connexe, à valeurs β-présentables, a une limite inductive dans $\mathbb{A}$ et celle-ci est β-présentable.*

---

(3) Pour contrôler le rang d'accessibilité, une hypothèse bornant le nombre des cônes inductifs distingués dans l'esquisse est nécessaire. Une telle hypothèse a été omise dans [Ageron97], où la démonstration supposait en fait implicitement que l'esquisse ne comporte qu'un seul cône inductif. L'exemple de la catégorie des suites d'ensembles non vides (qui est dénombrablement accessible, mais non finiment accessible) montre qu'elle est indispensable.

Démonstration. — Soient $\mathbb{D}$ une catégorie β-petite et connexe et $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$ un diagramme à valeurs β-présentables. On sait qu'il existe un diagramme $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$ à valeurs β-présentables qui est localement limite inductive pour δ ; notons $(j_{DL} : \delta(D) \to \lambda(L))_{D\in\mathbb{D}, L\in\mathbb{L}}$ le tronc de cône inductif correspondant. On peut sans perte de généralité supposer que λ est *saturé*, au sens suivant : si on a dans $\mathbb{A}$ une flèche $f : \lambda(L) \to \lambda(L')$ vérifiant $fj_{DL} = j_{DL'}$ pour tout objet D de $\mathbb{D}$, il existe dans $\mathbb{L}$ une flèche $l : L \to L'$ telle que $f = \lambda(l)$. Soit $\mu : \mathbb{M} \to \mathbb{A}$ la multilimite projective de λ ($\mathbb{M}$ est donc une petite catégorie discrète) ; notons $p_{ML} : \mu(M) \to \lambda(L)$ les multiprojections correspondantes. Pour chaque objet D de $\mathbb{D}$, il existe M et $h : \delta(D) \to \mu(M)$, uniques, tels que $p_{ML}h = j_{DL}$ pour tout objet L de $\mathbb{L}$. Si $d : D \to D'$ est une flèche de $\mathbb{D}$, on dispose donc de (M, h) et (M', h') tels que $p_{ML}h = j_{DL}$ et $p_{M'L}h' = j_{D'L}$. Mais $j_{DL} = d_{D'L}\delta(d) = p_{M'L}h'\delta(d)$: par unicité, il vient alors $M = M'$ et $h'\delta(d) = h$. Puisque $\mathbb{D}$ est (non vide et) connexe, on conclut qu'il existe un même objet M_0 de $\mathbb{M}$ et un cône inductif $(h_D : \delta(D) \to M_0)_{D\in\mathbb{D}}$ tel que, pour tout objet L de $\mathbb{L}$, on ait $p_{M_0L}h_D = j_{DL}$. On va montrer que $\mu(M_0)$ est limite projective de λ – autrement dit que $\mathbb{M}$ est réduite à l'objet M_0. Soit pour cela $(q_L : C \to \lambda(L))_{L\in\mathbb{L}}$ un cône projectif de base λ. Puisque λ est un diagramme localement limite inductive pour δ, il existe au moins un objet L_0 de $\mathbb{L}$ et une flèche $f : \lambda(L_0) \to M_0$ telle que $fj_{DL_0} = h_D$ pour tout objet D de $\mathbb{D}$. Posons $h = fq_{L_0} : C \to \mu(M_0)$. Il est facile de voir que la flèche h ne dépend pas du choix de L_0, puisque deux tels choix sont toujours connectés par un zigzag. Fixons L et montrons $p_{M_0L}h = q_L$. Notons que, pour tout D, la flèche $p_{M_0L}f : \lambda(L_0) \to \lambda(L)$ vérifie : $p_{M_0L}fj_{DL_0} = p_{M_0L}h_D = j_{DL}$. Puisqu'on a supposé λ saturé, il existe $l : L_0 \to L$ telle que $p_{M_0L}f = \lambda(l)$; alors on a bien : $p_{M_0L}h = p_{M_0L}fq_{L_0} = \lambda(l)q_{L_0} = q_L$. De plus, μ étant multilimite projective de λ, le cône $(q_L)_{L\in\mathbb{L}}$ ne peut pas factoriser à travers un $M \neq M_0$, ni par une flèche $h \neq h_L$. On a donc bien $\mu(M_0) = \varprojlim \lambda$. Ainsi la catégorie $\underrightarrow{\mathbb{C}\mathrm{\hat{o}ne}}(\delta)$ des cônes inductifs de base δ possède une sous-catégorie pleine initiale $\mathbb{C}'$, celle des cônes dont le sommet est un objet de la forme $\lambda(L)$, telle que le foncteur d'inclusion de $\mathbb{C}'$ dans $\underrightarrow{\mathbb{C}\mathrm{\hat{o}ne}}(\delta)$ admette une limite projective, à savoir $(h_D : \delta(D) \to M_0)_{D\in\mathbb{D}}$. Cela implique que la (grande) limite projective du foncteur $\mathrm{id}_{\underrightarrow{\mathbb{C}\mathrm{\hat{o}ne}}(\delta)}$ existe, et donc $\underrightarrow{\mathbb{C}\mathrm{\hat{o}ne}}(\delta)$ possède un objet initial, ce qui signifie que δ a une limite inductive. On sait qu'elle est automatiquement β-présentable. C.Q.F.D.

Lemme 2. — *Soit $\mathbb{A}$ une catégorie β-accessible multicomplète. Il existe un diagramme initial $\iota : \mathbb{I} \to \mathbb{A}$, à valeurs β-présentables, tel que pour tout objet A de $\mathbb{A}$, la catégorie $\mathbb{I}^{op}$ possède et le foncteur* $\mathrm{Hom}(\iota(-), A)$ *préserve les limites projectives d'indexation β-petite et connexe.*

Démonstration. — Ceci résulta immédiatement du lemme 1 : il suffit de prendre pour ι le foncteur d'inclusion de $\mathbb{A}_\beta$ dans $\mathbb{A}$. C.Q.F.D.

Lemme 3.— *Soit $\mathbb{A}$ une catégorie β-accessible multicomplète. Tout diagramme $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$ d'indexation β-petite et non vide, à valeurs β-présentables, a un diagramme localement limite inductive $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$, à valeurs β-présentables,* *tel que pour tout cône*[4] *inductif* A *dans* $\mathbb{A}$ *de base* δ, *la catégorie* $\mathbb{L}^{op}$ *possède et le foncteur* $\mathrm{Hom}(\lambda(-), A)$ *préserve les limites projectives d'indexation* β*-petite et non vide.*

Démonstration. — Fixons un diagramme $\delta : \mathbb{D} \to \mathbb{A}$ d'indexation β-petite et non vide, à valeurs β-présentables. Considérons la catégorie $\underrightarrow{\mathbb{C}\hat{o}\mathrm{ne}}(\delta)$ des cônes inductifs de base δ dans $\mathbb{A}$ et sa sous-catégorie pleine $\mathbb{L} = \underrightarrow{\mathbb{C}\hat{o}\mathrm{ne}}_\beta(\delta)$ formée des cônes inductifs dont le sommet est un objet β-présentable de $\mathbb{A}$. On sait que le foncteur $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$ envoyant un tel cône inductif sur son sommet est un diagramme localement limite inductive pour δ. On va montrer que $\mathbb{L}$ possède les limites inductives d'indexation β-petite et non vide. Fixons pour cela un diagramme $\gamma : \mathbb{C} \to \mathbb{L}$, d'indexation β-petite et non vide, et considérons la catégorie $\mathbb{D} \triangleright \mathbb{C}$ définie plus haut. Puisque $\mathbb{D}$ et $\mathbb{C}$ sont β-petites et non vides, il est clair que $\mathbb{D} \triangleright \mathbb{C}$ est β-petite et connexe. Le diagramme d'indexation $\mathbb{D} \triangleright \mathbb{C}$ canoniquement associé à γ est à valeurs β-présentables dans $\mathbb{A}$ et il admet donc, d'après le lemme 2, une limite inductive. Il est facile de constater que cette limite est sommet de la limite inductive [5] du diagramme γ et du diagramme $\mathbb{C} \xrightarrow{\gamma} \mathbb{L} \to \underrightarrow{\mathbb{C}\hat{o}\mathrm{ne}}(\delta)$. C.Q.F.D.

Une fois ces lemmes établis, il relève de la routine de l'esquissabilité (cf. [Ageron97]) d'en déduire la définition et le théorème qui suivent :

Définitions.— Soient $\mathbb{E}$ une esquisse, β un cardinal régulier.
a) On dira qu'un cône inductif distingué

$$q = (q_I : B(I) \to S)_{I \in \mathbb{I}}$$

de $\mathbb{E}$ est **β-spécial** si :
(*i*) il y a dans $\mathbb{E}$ un cône projectif de base vide et de sommet S ;
(*ii*) tout diagramme $\delta : \mathbb{J} \to \mathbb{I}$ d'indexation β-petite et connexe a une limite inductive et le cône projectif $B(\varinjlim \delta)$ est distingué dans $\mathbb{E}$;
(*iii*) pour tout diagramme $\delta : \mathbb{J} \to \mathbb{I}$ d'indexation β-petite discrète et non vide, il y a dans $\mathbb{E}$

— un cône projectif distingué $p^\delta = (p^\delta_J : S^\delta \to B(\delta(J)))_{J \in \mathbb{J}}$

— un cône inductif distingué $q^\delta = (q^\delta_k : B(\mathrm{sommet}(k)) \to S^\delta)_{k \in \underrightarrow{\mathrm{C\hat{o}ne}}_{\mathbb{I}}(\delta)}$

tels que :

$$\forall J \in \mathbb{J} \quad \forall k = (k_J : \mathrm{sommet}(k) \to \delta(J))_{J \in \mathbb{J}} \in \underrightarrow{\mathrm{C\hat{o}ne}}_{\mathbb{I}}(\delta) \qquad p^\delta_J \, q^\delta_k = B(k_J).$$

---

(4) La même notation A (resp. $\lambda(L)$) désigne ici (abusivement) un objet de $\mathbb{A}$ et le cône inductif de base δ, clair dans le contexte, dont cet objet est le sommet.

(5) Notons que si les limites inductives d'indexation β-petite et non vide existent dans $\mathbb{L}$, elles ne sont en général pas préservées par le foncteur $\lambda : \mathbb{L} \to \mathbb{A}$. Il est cependant facile de voir que λ préserve les limites inductives d'indexation β-petite et connexe, car $\mathbb{C}$ est, dans ce cas, une sous-catégorie finale de $\mathbb{D} \triangleright \mathbb{C}$.

b) On dira que $\mathbb{E}$ est β-**spéciale** si :
— tous ses cônes projectifs distingués sont d'indexation β-petite ;
— ses cônes inductifs distingués sont en nombre $< \beta$ et sont β-spéciaux ou de la forme q^δ pour un cône inductif β-spécial et un diagramme δ comme en *a*).

Théorème. — *Soient β un cardinal régulier. Toute catégorie β-accessible multicomplète est esquissable par une esquisse β-spéciale.*

Les esquisse spéciales (c'est-à-dire les esquisses qui sont β-spéciales pour au moins un cardinal régulier β) jouent vis-à-vis des esquisses presque inductives un rôle analogue à celui joué par les esquisses projectives vis-à-vis des esquisses inductives. On a en particulier :

Corollaire. — *Toute esquisse presque inductive est équivalente à une esquisse spéciale.*

Remarque. — Nous avons récemment complété ces résultats en prouvant : *une catégorie accessible est multicomplète si et seulement si elle admet les limites inductives connexes.* Cf. [Ageron+2].

Exemples.— *a*) *Ensembles non vides.* Ils sont ainsi caractérisés :

$$X \neq \emptyset \iff 1 +_X 1 = 1.$$

Cela revient à dire que l'unique application de X dans 1 est surjective. Avec les applications quelconques comme morphismes, les ensembles non vides sont ainsi les modèles d'une esquisse presque inductive $\mathbb{E}$. Ce sont donc aussi ceux d'une esquisse spéciale $\mathbb{E}'$. Une telle esquisse (ayant une infinité d'objets) se déduit aisément de leur autre caractérisation :

$$X \neq \emptyset \iff \varinjlim_{n \in \mathbf{Ens}_f^*} X^n = 1$$

(où $\mathbf{Ens}_f^*$ est une petite catégorie équivalente à la catégorie des ensembles finis non vides). Notons encore que $\mathbb{E}$ est équivalente à l'esquisse $\mathbb{E}''$ de support

$$\boxed{1 \leftarrow E_1 \underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}} E_2}$$

où 1 est spécifié comme objet final et E_2 comme produit $E_1 \times E_1$: $\mathbb{E}''$ est en un sens la « partie utile » de $\mathbb{E}'$, mais n'est pas une esquisse spéciale. Cet exemple ressortit à l'étude des catégories accessibles à limites projectives conditionnelles (cf. plus haut).

b) Graphes réflexifs connexes. La catégorie des graphes réflexifs connexes est esquissée par l'esquisse presque inductive $\mathbb{E}$ dont le support est la catégorie engendrée par les données

$$\boxed{1 \leftarrow E_1 \underset{b}{\overset{e}{\rightrightarrows}} E_2 \qquad s \circ e = b \circ e = \mathrm{id}_{E_1}}$$

où 1 est spécifié à la fois comme objet final et comme conoyau de s et b. Elle est aussi esquissée par l'esquisse spéciale $\mathbb{E}'$ déduite de la caractérisation suivante des graphes réflexifs connexes (où l'on note $\mathbb{G}\mathrm{raph}_f^c$ la catégorie des graphes réflexifs connexes finis et $\mathbb{G}(\mathbb{D})$ l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Graph}}(\mathbb{D}, \mathbb{G})$) :

$$\mathbb{G} \text{ connexe} \iff \left\{ \begin{array}{r} \varinjlim_{\mathbb{D} \in \mathbf{Graph}_f^c} \mathbb{G}(\mathbb{D}) = 1 \\ \forall \mathbb{D}_1\ \forall \mathbb{D}_2\ \varinjlim_{\mathbb{D} \in \mathbf{Graph}_f^c, \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D} \leftarrow \mathbb{D}_2} \mathbb{G}(\mathbb{D}) = \mathbb{G}(\mathbb{D}_1) \times \mathbb{G}(\mathbb{D}_2) \end{array} \right.$$

Un exemple voisin est celui des *G-ensembles homogènes*, pour un groupe fixé G. Ce sont en effet les modèles de l'esquisse presque inductive $\mathbb{E}$ de support

$$\boxed{1 \longleftarrow E \circlearrowleft^{g \in G}}$$

où 1 est spécifié à la fois comme objet final et comme limite inductive du diagramme formé par les flèches g.

c) Structures de Peano. Nous appelons ainsi les modèles de l'esquisse presque inductive dont le support est la catégorie engendrée par les données

$$\boxed{{}^{s}\circlearrowleft E \xleftarrow{o} 1}$$

où 1 est spécifié comme objet final et (o, s) est spécifié comme un cône somme.
Cette esquisse $\mathbb{E}$ est en fait équivalente à une esquisse élémentaire, l'esquisse $\mathbb{E}'$ qui consiste simplement en la spécification d'une permutation sur un ensemble :

$$\boxed{E' \overset{\circlearrowleft^{f}}{\circlearrowleft_{g}} \qquad fg = gf = 1_{E'}}$$

En particulier, Mod($\mathbb{E}$) contient
— un objet initial strict (cf. note (2)) : c'est le modèle standard $\mathbb{N}$ des entiers naturels ;
— un objet final : le modèle $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, où $s(+\infty) = +\infty$.

Distinguons maintenant dans $\mathbb{E}$ un cône inductif supplémentaire spécifiant 1 comme conoyau de s et de id_E. La nouvelle esquisse presque inductive obtenue est alors équivalente à l'esquisse vide ! En effet, elle n'a plus qu'un modèle, celui des entiers naturels standard, unique à un unique isomorphisme près.

BIBLIOGRAPHIE

[Adámek-Rosický94a] J. ADÁMEK and J. ROSICKÝ, *Locally presentable and accessible categories*, Cambridge University Press (1994)

[Adámek-Rosický96] J. ADÁMEK and J. ROSICKÝ, *On geometric and finitary sketches*, Applied categorical structures 4 (1996) 227-240

[Ageron97] P. AGERON, *Limites projectives conditionnelles dans les catégories accessibles*, Diagrammes 38 (1997) 3-18

[Ageron+1] P. AGERON, *Limites inductives point par point dans les catégories accessibles*, à paraître dans Theory and Applications of Categories

[Ageron+2] P. AGERON, *Sur les catégories accessibles multicomplètes*, à paraître dans Journal of Pure and Applied Algebra

[Ageron*] P. AGERON, *L'art de l'esquisse (3) : esquisse d'endosurjection*, rapport de recherche, Université de Caen (2000), 5 p.

[Guitart86] R. GUITART, *On the geometry of computations*, Cahiers de topologie et de géométrie différentielle XXVII (1988) 107-136

[Lair87] C. LAIR, *Catégories qualifiables et catégories esquissables*, Diagrammes 17 (1987) 1-153

[Lair96] C. LAIR, *Esquissabilité des catégories modelables (accessibles) possédant un objet terminal*, Diagrammes 35 (1996) 3-23

[Makkai-Paré89] M. MAKKAI and R. PARÉ, *Accessible categories : the foundations of categorical model theory*, American Mathematical Society (1989)

Pierre AGERON
Département de mathématiques, Université de Caen, 14032 Caen cedex, France
ageron@math.unicaen.fr