CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

DENIS-CHARLES CISINSKI

La classe des morphismes de Dwyer n'est pas stable par rétractes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 40, n° 3 (1999), p. 227-231

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1999__40_3_227_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Volume XL-3 (1999)

LA CLASSE DES MORPHISMES DE DWYER N'EST PAS STABLE PAR RETRACTES

par Denis-Charles CISINSKI

Abstract. In [1] R. Thomason claims that a retract of a Dwyer map is a Dwyer map to show the closed model category structure he defined on the category of small categories is proper. This paper gives a counterexample to this claim and shows how to give a proof of the propriety axiom.

Dans **Cat** *as a closed model category* [1], R. Thomason définit une structure de catégorie de modèles fermée propre sur la catégorie **Cat** des petites catégories. Une notion cruciale pour établir l'existence d'une telle structure est celle de morphisme de Dwyer. Il est affirmé dans [1] que la classe de ces morphismes est stable par rétractes. Cette assertion n'est pas utilisée pour montrer que **Cat** est une catégorie de modèles fermée, mais elle intervient pour établir la propreté, et pour démontrer que toute cofibration est un morphisme de Dwyer.

On présente ici un contre-exemple à cette affirmation en construisant un morphisme de Dwyer et un rétracte de celui-ci qui n'en est pas un. On établit en outre que ce rétracte est une cofibration de **Cat**, ce qui montre qu'il existe des cofibrations qui ne sont pas des morphismes de Dwyer. En prouvant néanmoins que sous certaines conditions, un rétracte d'un morphisme de Dwyer est un morphisme de Dwyer, on obtient que toute cofibration entre ensembles ordonnés (et en particulier entre objets cofibrants, les objets cofibrants de **Cat** étant des ensembles ordonnés) est un morphisme de Dwyer. Enfin, on introduit la notion de pseudo-morphisme de Dwyer qui permet de donner une démonstration de l'axiome de propreté.

On se réfèrera dans ce qui suit aux définitions et aux résultats de [1].

Dans un premier temps, on va exhiber un contre-exemple montrant

que :
- la classe des morphismes de Dwyer n'est pas stable par rétractes ;
- il existe des cofibrations qui ne sont pas des morphismes de Dwyer.

On note **Ord** la catégorie des ensembles ordonnés, et $\hat{\Delta}$ celle des ensembles simpliciaux. On définit un foncteur ξ : **Ord** $\to$ **Cat** de la manière suivante : si E est un ensemble ordonné, ξE est l'ensemble des parties finies non vides et totalement ordonnées de E, ordonné par l'inclusion, et si $f : E \to F$ est une application croissante, ξf est défini par $U \mapsto f(U)$. Le foncteur subdivision barycentrique $\mathrm{Sd} : \hat{\Delta} \to \hat{\Delta}$ est l'unique foncteur commutant aux limites inductives, et prolongeant le composé de la restriction de ξ à la catégorie simpliciale Δ avec le foncteur nerf $\mathrm{N} : \mathbf{Cat} \to \hat{\Delta}$. On démontre que si E est un ensemble ordonné, vu comme une petite catégorie, alors $\mathrm{Sd}\,\mathrm{N}\,E = \mathrm{N}\,\xi E$.

Lemme 1 *Pour tout $n \geq 0$, l'inclusion $\delta_n : [0] \hookrightarrow [n]$ (où $[n]$ désigne l'ensemble ordonné $\{0, \ldots, n\}$) est une cofibration et un morphisme de Dwyer.*

DÉMONSTRATION. On définit des applications croissantes $\phi_n : \xi[n] \to [n]$ par $U \mapsto \max(U)$ et $\psi_n : [n] \to \xi[n]$ par $i \mapsto [i]$. On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, "\delta_n"'] & \xi[0] \arrow[r, "\phi_0"] \arrow[d, "\xi\delta_n"] & {[0]} \arrow[d, "\delta_n"] \\
{[n]} \arrow[r, "\psi_n"'] & \xi[n] \arrow[r, "\phi_n"'] & {[n]}
\end{tikzcd}$$

avec $\xi[0] = [0]$, $\phi_n\psi_n = 1_{[n]}$. Autrement-dit, δ_n est un rétracte de $\xi\delta_n$. Par fonctorialité, $\xi\delta_n$ est un rétracte de $\xi^2\delta_n$ qui est une cofibration (cf. [1], prop. 4.6). Par suite, δ_n est une cofibration. Le fait que ce soit un morphisme de Dwyer est évident, car 0 est l'objet initial dans $[n]$, et donc δ_n admet un adjoint à droite, et $[0]$ est un crible de $[n]$.

On considère à présent la catégorie A définie par $\mathrm{Ob}\,A = \{a\}$ et dont l'ensemble des flèches est $\mathrm{Hom}_A(a, a) = \{1_a, \alpha\}$, avec les relations $\alpha^2 = \alpha$ et $\alpha \neq 1_a$. Il existe une unique flèche $\lambda : [0] \to A$, et si l'on forme le carré cocartésien dans **Cat** :

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[r, "\lambda"] \arrow[d, "\delta_1"'] & A \arrow[d, "j"] \\
{[1]} \arrow[r, "\mu"'] & C
\end{tikzcd} \quad ,$$

la flèche j est une cofibration et un morphisme de Dwyer (cf. [1], prop. 4.3). On peut décrire C de manière plus concrète : $\operatorname{Ob} C = \{a, b\}$, $a \neq b$, $\operatorname{Hom}_C(a,a) = \operatorname{Hom}_A(a,a)$, $\operatorname{Hom}_C(a,b) = \{\beta, \gamma\}$, $\operatorname{Hom}_C(b,b) = 1_b$, et $\operatorname{Hom}_C(b,a) = \emptyset$, avec les relations $\gamma\alpha = \beta$, $\beta \neq \gamma$. Le foncteur μ est défini en envoyant $0 \to 1$ sur γ. Il est aussi possible d'expliciter un adjoint à droite s de j : on pose $sa = sb = a$, $s\beta = s\alpha = \alpha$ et $s\gamma = 1_a$, on a alors $sj = 1_A$, et le morphisme d'adjonction $\varepsilon : js \to 1_C$ est donné par $\varepsilon_a = 1_a$ et $\varepsilon_b = \gamma$ (le morphisme $\eta : 1_A \to sj$ étant l'identité).

On définit ensuite B comme la sous-catégorie de C ayant les mêmes objets que C, α et β comme seuls morphismes non identiques, et on note $i : A \to B$, $k : B \to C$ les inclusions. Enfin, on a un foncteur $t : C \to B$ induisant l'identité sur les objets, et tel que $t\beta = t\gamma = \beta$, $t\alpha = \alpha$. On a les relations suivantes : $tk = 1_B$, $ki = j$ et $tj = i$, *i.e.* i est un rétracte de j :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "="] \arrow[d, "i"'] & A \arrow[r, "="] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "i"] \\
B \arrow[r, "k"'] & C \arrow[r, "t"'] & B
\end{tikzcd}$$

Donc i est une cofibration, mais ce n'est pas un morphisme de Dwyer, car le cocrible engendré par A dans B est égal à B, et donc si i était un morphisme de Dwyer, i admettrait un adjoint à droite, et $\operatorname{Hom}_B(a,b) = \{b\}$ serait en bijection avec $\operatorname{Hom}_A(a,a) = \{1_a, \alpha\}$, ce qui est absurde. On a ainsi construit le contre-exemple annoncé.

Lemme 2 *On considère le diagramme commutatif suivant dans* Cat

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\
B \arrow[r, "j"'] & D \arrow[r, "s"'] & B
\end{tikzcd}$$

avec $ri = 1_A$, $sj = 1_B$, j et r étant des foncteurs pleins. Alors si g est un morphisme de Dwyer, f est un morphisme de Dwyer.

DÉMONSTRATION. En considérant le carré cocartésien

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "g'"] \\ D \arrow[r, "r'"'] & D \amalg_C A \end{tikzcd}$$

et en remarquant qu'alors r' est plein et que g' est un morphisme de Dwyer, on peut supposer (quitte à remplacer D par $D \amalg_C A$, j par $r'j$, et s par (s, f)) que $A = C$ et que $r = i = 1_A$. On se ramène facilement aussi au cas où D est le cocrible engendré par $A = C$ dans D, g admettant un adjoint à droite, noté h. Il suffit alors de montrer que f admet un adjoint à droite. Or si $a \in \mathrm{Ob}\, A$ et $b \in \mathrm{Ob}\, B$, on a :

$$\mathrm{Hom}_B(fa, b) \simeq \mathrm{Hom}_D(jfa, jb) = \mathrm{Hom}_D(ga, jb) \simeq \mathrm{Hom}_A(a, hjb).$$

On montre aussi aisément le

Lemme 3 *Soient $A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{r} A$ deux flèches de* **Cat**, *telles que $ri = 1_A$. Alors si B est un ensemble ordonné, i est une inclusion pleine.*

Proposition 1 *Soit $f : A \to B$ une cofibration de* **Cat**. *Si A est un ensemble ordonné, alors B est un ensemble ordonné, et f est un morphisme de Dwyer.*

DÉMONSTRATION. On procède de la même manière que pour la démonstration de la proposition 5.7 dans [1], c'est-à-dire en utilisant l'argument du petit objet et le lemme du rétracte, mais en appliquant les deux lemmes précédents à la place du 3° dans le lemme 5.3 de [1].

REMARQUE : on en déduit immédiatement que tous les objets cofibrants de **Cat** sont des ensembles ordonnés, car $\emptyset$ est un ensemble ordonné.

Définition 1 Un *pseudo-morphisme de Dwyer* est un crible $i : A \to B$, tel que $i : A \to \mathcal{Z}A$ admette une rétraction $r : \mathcal{Z}A \to A$ (on rappelle que $\mathcal{Z}A$ est le cocrible engendré par A dans B), et tel qu'il existe un morphisme de foncteurs $\varepsilon : ir \to 1_{\mathcal{Z}A}$ vérifiant $\varepsilon i = 1_i$.

Lemme 4 *La classe des pseudo-morphismes de Dwyer est stable par rétractes.*

DÉMONSTRATION. Considérons un diagramme commutatif dans **Cat**

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[r, "r"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "j"'] & D \arrow[r, "s"'] & B \end{tikzcd}$$

avec $ri = 1_A$, $sj = 1_B$. On va montrer que si g est un pseudo-morphisme de Dwyer, il en est de même pour f. On se ramène facilement au cas où D est le cocrible engendré par C dans D, g admettant une rétraction p, telle qu'il existe un morphisme de foncteurs $\varepsilon : gp \to 1_D$ vérifiant $\varepsilon g = 1_g$. En posant $q = rpj$ et $\varepsilon' = s\varepsilon j : fq \to 1_B$, on vérifie que q est une rétraction de f et que $\varepsilon' f = 1_f$.

REMARQUE : il est immédiat que tout morphisme de Dwyer est un pseudo-morphisme de Dwyer. La proposition 4.3, le corollaire 4.4, et le lemme 5.3 dans [1] sont tous vrais en remplaçant la notion de morphisme de Dwyer par celle de pseudo-morphisme de Dwyer, et ce en reproduisant les démonstrations de R.Thomason à l'identique. On peut alors remplacer la proposition 5.4 de [1] par :

Proposition 2 *Toute cofibration de* **Cat** *est un rétracte d'un morphisme de Dwyer, et donc est un pseudo-morphisme de Dwyer.*

Cela permet ainsi d'affirmer le corollaire 5.5 de [1], à savoir que **Cat** est une catégorie de modèles fermée propre (en appliquant la proposition 4.3 de [1], mais pour les pseudo-morphismes de Dwyer).

Référence

[1] R. THOMASON, **Cat** *as a closed model category*, Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle XXI-3 (1980), 305-324.

Université Paris 7
2, place Jussieu
75251 Paris cedex 05
e-mail : cisinski@math.jussieu.fr