CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

CHRISTIAN LAIR
LAURENT COPPEY

À la mémoire de Florence Cury (1952-95)

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 36, nº 4 (1995), p. 371-381

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1995__36_4_371_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET
GEOMETRIE DIFFERENTIELLE CATEGORIQUES

Volume XXXVI-4 (1995)

A LA MEMOIRE DE Florence CURY (1952-95)

par Christian LAIR et Laurent COPPEY

Abstract. Florence Cury was a young French categorician who died some months ago. C. Lair gives a summary of her main works on enriched graphs with composition and applications to 're-writing' in Computer Science. And L. Coppey recalls some memories of her life.

1. NOTE SUR LES TRAVAUX DE F. CURY *par C. LAIR*

Florence Cury, ancienne élève de A. et C. Ehresmann, chercheur de l'équipe Catégories et Structures (Université Paris 7), chargée de cours à l'Institut de Formation d'Ingénieurs en Electronique de Paris (Université Paris 6), est décédée d'un cancer en mai dernier.

Florence a fondé et développé la *théorie des graphes à composition enrichis* et elle achevait une importante série de travaux concernant la *suffisante complétude connexe*.

C'est Charles Ehresmann qui a introduit (sous le nom originel de « graphes multiplicatifs » - voir, par exemple, [7]) les « graphes à composition » : il se devait de formaliser précisément ce qu'il est convenu d'appeler des « présentations de catégories », car il désirait disposer de « supports » aussi « économiques » que possible pour ses « esquisses ».

Précisément, un *graphe à composition* $\underline{D}$ est constitué par :

- un ensemble $Ob(\underline{D})$ d'*objets* et un ensemble $ObId(\underline{D}) \subseteq Ob(\underline{D})$ d'*objets à identité*,
- un ensemble $Fl(\underline{D})$ de *flèches* et un ensemble $CComp(\underline{D}) \subseteq Fl(\underline{D}) \times Fl(\underline{D})$ de *couples composables de flèches*,
- une application $dom(\underline{D}) : Fl(\underline{D}) \to Ob(\underline{D})$ de *sélection des domaines* et une application $codom(\underline{D}) : Fl(\underline{D}) \to Ob(\underline{D})$ de *sélection des codomaines*,
- une application $selid(\underline{D}) : ObId(\underline{D}) \to Fl(\underline{D})$ de *sélection des identités,*
- une application $comp(\underline{D}) : CComp(\underline{D}) \to Fl(\underline{D})$ de *composition,*

de sorte que (comme on peut s'y attendre) :

- on a $dom(\underline{D})(id_D) = D = codom(\underline{D})(id_D)$, pour tout objet à identité D de $\underline{D}$ (en posant, évidemment, $selid(\underline{D})(D) = id_D$),
- on a $dom(D)(d' \cdot d)) = dom(\underline{D})(d)$ et $codom(\underline{D})(d' \cdot d)) = codom(\underline{D})(d')$, pour tout couple composable (d',d) de flèches de $\underline{D}$ (en posant, évidemment, $comp(\underline{D})(d',d) = d' \cdot d$),

- on a $(d,id_D) \in CComp(\underline{D})$ et $d{\cdot}id_D = d$, pour tout objet à identité D de $\underline{D}$ et toute flèche $d: D \to D'$ de $\underline{D}$,
- on a $(id_{D'},d) \in CComp(\underline{D})$ et $d = id_{D'}{\cdot}d$, pour tout objet à identité D' de $\underline{D}$ et toute flèche $d: D \to D'$ de $\underline{D}$.

Dans ces conditions, il est facile de voir que $\underline{D}$ engendre librement une catégorie : c'est donc bien un *système de générateurs* (ses objets et ses flèches) et de *relations* (ses équations de composition) pour cette catégorie.

Reprenant ce point de vue, Florence a remarqué (voir [2]) qu'on pouvait obtenir (comme pour les catégories) une bonne notion de « graphe à composition enrichi » en passant de cette définition « globale » à une définition « Hom par Hom ».

Précisément, si $\underline{V}$ est une catégorie monoïdale, symétrique et fermée, un *graphe à composition enrichi par* $\underline{V}$ est un $\underline{D}$ constitué par :
- un ensemble $Ob(\underline{D})$ d'*objets* et un ensemble $ObId(\underline{D}) \subseteq Ob(\underline{D})$ d'*objets à identité*,
- un objet $\underline{D}(D,D')$ de $\underline{V}$, pour tous objets D et D' de $\underline{D}$,
- un objet $\underline{D}(D',D'')\bullet\underline{D}(D,D')$ de $\underline{V}$, pour tous objets D, D' et D'' de $\underline{D}$,
- un mono $m(D,D',D''): \underline{D}(D',D'')\bullet\underline{D}(D,D') \to \underline{D}(D',D'')\otimes\underline{D}(D,D')$ de $\underline{V}$, pour tous objets D, D' et D'' de $\underline{D}$,
- une flèche $k(D,D',D''): \underline{D}(D',D'')\bullet\underline{D}(D,D') \to \underline{D}(D,D'')$ de $\underline{V}$, pour tous objets D, D' et D'' de $\underline{D}$,
- une flèche $s(D): J \to \underline{D}(D,D)$ de $\underline{V}$ (où J désigne l'objet de $\underline{V}$, unité du produit tensoriel), pour tout objet à identité D de $\underline{D}$,
- une flèche $cg(D,D'): \underline{D}(D,D') \to \underline{D}(D,D')\bullet\underline{D}(D,D)$ de $\underline{V}$, pour tout objet à identité D de $\underline{D}$ et tout objet D' de $\underline{D}$,
- une flèche $cd(D,D'): \underline{D}(D,D') \to \underline{D}(D',D')\bullet\underline{D}(D,D')$ de $\underline{V}$, pour tout objet D de $\underline{D}$ et tout objet à identité D' de $\underline{D}$,

de sorte que :
- on a $m(D,D,D'){\cdot}cg(D,D') = [id_{\underline{D}(D,D')}\otimes s(D)]{\cdot}unitd\,[\underline{D}(D,D')]$ (où *unitd* est l'équivalence naturelle d'unitarité à droite), pour tout objet à identité D de $\underline{D}$ et tout objet D' de $\underline{D}$,
- on a $m(D,D',D'){\cdot}cd(D,D') = [s(D')\otimes id_{\underline{D}(D,D')}]{\cdot}unitg\,[\underline{D}(D,D')]$ (où *unitg* est l'équivalence naturelle d'unitarité à gauche), pour tout objet D de $\underline{D}$ et tout objet à identité D' de $\underline{D}$,
- on a $k(D,D,D'){\cdot}cg(D,D') = id_{\underline{D}(D,D')}$, pour tout objet à identité D de $\underline{D}$ et tout objet D' de $\underline{D}$,
- on a $k(D,D',D'){\cdot}cd(D,D') = id_{\underline{D}(D,D')}$, pour tout objet D de $\underline{D}$ et tout objet à identité D' de $\underline{D}$.

Dans ces conditions, si $\underline{V}$ possède « suffisamment » de co-limites, $\underline{D}$ engendre librement une catégorie enrichie par $\underline{V}$. Mieux, si $\underline{W}$ est une autre catégorie monoïdale, symétrique et fermée, et si $\Phi : \underline{W} \rightarrow \underline{V}$ est un « bon » foncteur monoïdal (possédant, notamment, un adjoint à gauche monoïdal), alors $\underline{D}$ engendre librement une catégorie enrichie par $\underline{W}$ (si bien que $\underline{D}$ présente « doublement » et les flèches et les « Hom internes» de cette $\underline{W}$-catégorie).

On sait (du moins, on devrait savoir) que, disposant des supports qui lui semblaient les plus « naturels », C. Ehresmann a introduit (voir [8] et [9]) la notion « d'esquisse », i.e. de présentation « diagrammatique » pour *toutes* les théories logiques du 1er ordre.
Précisément, une *esquisse* est un graphe à composition où sont distingués certains cônes projectifs et certains cônes inductifs (à l'époque, on ne savait que représenter les *seules* théories équationnelles-universelles par des *catégories* à produits, puis, un peu plus généralement, les *seules* théories Horn-universelles par des *catégories* munies de limites projectives). Développer - comme l'a fait, très précocément, Florence - la théorie des graphes à composition enrichis, c'était donc ouvrir la voie aux « esquisses enrichies », i.e. aux présentations de théories enrichies, telles les 2-théories, les théories ordonnées ou encore les théories avec ré-écritures.
De nos jours, les bien plus récentes variantes de la notion d'esquisse supposent que leurs supports, au lieu d'être des graphes à composition, sont « des graphes munis de diagrammes devant devenir commutatifs » : elles ne permettent guère un enrichissement systématique fort commode. Dégager, comme l'a fait Florence, la si simple systématique d'enrichissement des graphes à composition, c'était donc aussi valider complètement ne serait-ce que le concept originel de graphe à composition.

Dans nombre de cas classiques, on constate qu'une théorie « purement équationnelle » (c'est-à-dire « équationnelle-universelle », ou encore « algébrique ») possède la *propriété de suffisante complétude connexe* : ses algèbres libres sont constituées des classes de connexité par ré-écriture des algèbres libres d'une théorie « purement relationnelle » qui « l'assouplit » : il suffit, pour l'obtenir, de remplacer les équations par des règles de ré-écriture.
Il n'en est plus nécessairement de même pour ces théories plus générales que sont les théories « essentiellement équationnelles » (c'est-à-dire « Horn-universelles, ou encore « essentiellement algébriques »). C'est ce qu'a révélé Florence (voir [4]) en étudiant certaines théories de « catégories munies de constructeurs ». Par exemple, s'il en est bien encore ainsi

lorsqu'on assouplit « simplement » (i.e. comme pour les théories purement équationnelles) la théorie des catégories cartésiennes, des *défauts de connexité* apparaissent lorsqu'on assouplit aussi simplement la théorie des catégories localement cartésiennes : dans ce cas, elle a montré qu'il était nécessaire (et possible) de les corriger en rajoutant à cet assouplissement (trop) simple suffisamment de lois nouvelles et d'axiomes nouveaux, pourvu qu'elles et ils deviennent « redondants par rigidification (i.e. lorsque la ré-écriture est ré-interprètée en l'égalité !) ».

Pour étudier cette situation plus générale, il convenait tout d'abord d'en délimiter un cadre approprié.

On pourrait croire qu'il suffit de travailler avec des esquisses *projectives* (i.e. où seuls des cônes projectifs sont distingués) : pour Florence, il tombait sous le sens qu'un tel assouplissement d'une telle esquisse ne pouvait qu'être une esquisse enrichie par des 2-flèches (constituant « Hom par Hom » des graphes à composition « de ré-écritures »). Mais ce point de vue est « insuffisamment contextuel ». En effet, les modèles de la première esquisse seraient à prendre (par exemple) dans la catégorie des ensembles, tandis que les modèles de l'esquisse assouplie seraient à prendre dans une catégorie « d'ensembles assouplis » (par exemple, d'ensembles munis de relations de ré-écriture, ou encore de graphes, ou même de graphes à composition - si l'on veut « structurer » plus précisément ces ré-écritures) : il ne suffit donc pas de disposer d'une syntaxe et d'une syntaxe assouplie, il faut aussi disposer d'un « contexte rigide » et d'un « contexte souple » pour y prendre leurs algèbres respectives.

Pour ces raisons, à la conception usuelle des théories essentiellement algébriques (ou à leurs présentations diagrammatiques en termes d'esquisses projectives), elle a préféré celle (plus générale et plus contextuelle) des « syntaxes d'algèbres », introduite par L. Coppey (voir [1]).

Rappelons donc qu'une *syntaxe d'algèbres de contexte une catégorie* $\underline{A}$ est un sur-graphe à composition $\underline{D}$ d'un sous-graphe à composition $\underline{B}$ de $\underline{A}$ et ayant mêmes objets que $\underline{D}$.

Alors, un objet A de $\underline{A}$ est sous-jacent à une *structure de* $\underline{D}$*-algèbre* (A,λ) lorsque $\lambda : \underline{D}^{op} \to \underline{Ens}$ est un foncteur prolongeant le foncteur $\underline{A}(-,A)|_{\underline{B}^{op}} : \underline{B}^{op} \to \underline{Ens}$.

En particulier, si $\underline{A}$ possède « suffisamment » de limites inductives et si les objets de $\underline{D}$ (vus comme autant d'objets de $\underline{A}$) ont un rang de présentabilité dans $\underline{A}$, alors :

- le foncteur « objet de $\underline{A}$ sous-jacent » $U : \underline{D}\text{-}Alg \to \underline{A}$ (de la catégorie $\underline{D}\text{-}Alg$ des $\underline{D}$-algèbres vers la catégorie $\underline{A}$) admet un adjoint à gauche $L : \underline{A} \to \underline{D}\text{-}Alg$,
- la catégorie de Kleisli $\underline{A}_M$ de la monade $M = U{\cdot}L$ est une syntaxe d'algèbres particulière, dite *achevée* (car c'est une sur-*catégorie* de la sous-*catégorie maximum* de $\underline{A}$ qu'est ... $\underline{A}$), elle « contient » $\underline{D}$ et décrit les mêmes algèbres (autrement dit, $\underline{D}\text{-}Alg$ est isomorphe à la catégorie des algèbres de M et U est monadique),

et donc on peut voir $\underline{A}_M = Ach(\underline{D})$ comme la *syntaxe achevée présentée par* $\underline{D}$.
De même, si $\underline{A} = Mod(\underline{E})$ est la catégorie des modèles (ensemblistes) d'une esquisse projective $\underline{E}$, on peut montrer que $\underline{D}\text{-}Alg$ est équivalente à une catégorie de modèles (ensemblistes) d'une certaine sur-esquisse projective $\underline{E}'$ de $\underline{E}$.
Il est donc légitime de voir les syntaxes d'algèbres comme des présentations de théories essentiellement équationnelles plus « contextuelles » que celles présentées par des esquisses projectives (dont les contextes ne sont précisés que lorsqu'on décide de la catégorie où prendre les modèles) et plus « générées » que celles présentées par des monades, i.e. des catégories de Kleisli déjà « achevées » (en tant que syntaxes).

Pour formaliser ce que l'on peut entendre par « théorie (ou présentation de théorie) essentiellement relationnelle », Florence fut donc tout naturellement conduite à enrichir les concepts précédents « avec des 2-flèches (représentant les ré-écritures) » (voir [3] et [5]).
Autrement dit, il lui a suffi, tout d'abord, de décrire une structure de catégorie monoïdale, symétrique et fermée $\underline{\underline{GrComp}}$ convenable sur la catégorie $\underline{GrComp}$ des graphes à composition. Ensuite, il lui a suffi de considérer des graphes à composition $\underline{\underline{GrComp}}$-enrichis (qu'elle appelle les *amphi-graphes à composition*) et des catégories $\underline{\underline{GrComp}}$-enrichies (qu'elle appelle les *amphi-catégories*).
Alors, elle considère qu'une « théorie (plus précisément, une présentation de théorie) essentiellement relationnelle » est une *amphi-syntaxe de contexte une amphi-catégorie* $\underline{\underline{A}}$, i.e. un sur-amphi-graphe à composition $\underline{\underline{D}}$ d'un sous-amphi-graphe à composition $\underline{\underline{B}}$ de $\underline{\underline{A}}$ et ayant mêmes objets que $\underline{\underline{D}}$. De la sorte, un objet A de $\underline{\underline{A}}$ est sous-jacent à *une structure de* $\underline{\underline{D}}$*-amphi-algèbre* (A,θ) lorsque $\theta : \underline{\underline{D}}^{op} \to \underline{\underline{A}}$ est un amphi-foncteur prolongeant l'amphi-foncteur $\underline{\underline{A}}(\text{-},A)|_{\underline{\underline{B}}^{op}} : \underline{\underline{B}}^{op} \to \underline{\underline{GrComp}}$
Enfin, si $\underline{\underline{A}}$ est *co-représentable* (dans un sens analogue à celui qu'on utilise pour les 2-catégories), elle a pu associer à $\underline{\underline{D}}$ une syntaxe (non enrichie) $S(\underline{\underline{D}})$, de contexte la catégorie $\underline{A}$ (sous-jacente à $\underline{\underline{A}}$), de sorte

que la catégorie des $\underline{D}$-amphi-algèbres soit isomorphe à la catégorie des $S(\underline{D})$-algèbres (non enrichies) : elle en déduit donc immédiatement l'existence d'amphi-algèbres libres, lorsque $\underline{A}$ possède « suffisamment » d'amphi-limites inductives et si tous les objets de $\underline{D}$ ont un « amphi-rang » dans $\underline{A}$.

Si $\underline{A}$ est une amphi-catégorie quelconque, il est facile de lui associer la catégorie (non enrichie) $\Pi_0(\underline{A})$ de « ses composantes connexes Hom par Hom ». Par contre, ce n'est que si $\underline{D}$ est un amphi-graphe à composition « raisonnable » que ses « composantes connexes Hom par Hom » forment encore un graphe à composition $\Pi_0(\underline{D})$ (alors, $\underline{D}$ est dit *modifiable*). Autrement dit, on peut procèder (sous ces conditions) à des changements d'enrichissements induits par le foncteur monoïdal « composantes connexes » $\pi_0 : \underline{GrComp} \rightarrow \underline{Ens}$ (en désignant évidemment par $\underline{Ens}$ la structure de catégorie cartésienne fermée de $\underline{Ens}$).

A contrario, si $\underline{A}'$ est une catégorie (non enrichie) quelconque, on peut lui associer l'amphi-catégorie $Disc(\underline{A}')$ de ses « graphes à composition discrets Hom par Hom ». De même, à *tout* graphe à composition (non enrichi) $\underline{D}'$, on peut aussi associer l'amphi-graphe à composition $Disc(\underline{D}')$ de ses « graphes à composition discrets Hom par Hom ». Autrement dit, cette fois encore, on procède à des changements d'enrichissements induits par le foncteur (évidemment) monoïdal « graphe à composition discret » $disc : \underline{Ens} \rightarrow \underline{GrComp}$.

En jouant sur ces changements d'enrichissements, Florence peut immédiatement formaliser (voir [6]) ce qu'est, en toute généralité, une « théorie essentiellement relationnelle assouplissant simplement une théorie essentiellement équationnelle » :

- il convient, tout d'abord, de disposer d'une procédure « d'assouplissement/rigidification » entre contextes, i.e. d'une catégorie non enrichie $\underline{A}'$ (le contexte des objets « rigides »), d'une amphi-catégorie $\underline{A}$ (le contexte des objets « souples ») et d'une amphi-réflexion de $Disc(\underline{A}')$ dans $\underline{A}$, i.e. d'une amphi-adjonction particulière $(\underline{A}, F, R, Disc(\underline{A}'))$,
- alors, une amphi-syntaxe modifiable $\underline{D}$, de contexte l'amphi-catégorie $\underline{A}$, *assouplit* une syntaxe (non enrichie) $\underline{D}'$, de contexte la catégorie $\underline{A}'$, lorsque $\Pi_0(\underline{D}) = \underline{D}'$ et si $\Pi_0(F)$ « transporte » bien $\Pi_0(\underline{D})$ sur $\Pi_0(Disc(\underline{D}')) = \underline{D}'$ (de la sorte, toute structure « souple » de $\underline{D}$-amphi-algèbre sur un objet A' de $\underline{A}'$ - vu, par réflexion, comme un objet de $\underline{A}$ - s'identifie à une structure « rigide » de $\underline{D}$-algèbre).

Plus précisément encore, elle sait formaliser ce qu'est, en toute généralité, une « théorie essentiellement relationnelle assouplissant une théorie

essentiellement équationnelle, mais avec d'éventuelles corrections de défauts de connexité » . Sommairement, cela signifie que :
- on suppose l'amphi-catégorie $\underline{A}$ co-représentable,
- on a « amélioré » l'assouplissement simple $(\underline{D},\underline{D}')$ en se donnant également une syntaxe (non enrichie) $\underline{C}$ contenant $S(\underline{D})$ (de la sorte, toute structure de $\underline{C}$-algèbre sur un objet A de $\underline{A}$ possède une structure de $\underline{D}$-amphi-algèbre sous-jacente),
- les structures de $\underline{C}$-algèbres sur les objets de $\underline{A}'$ (vus, par amphi-réflexion comme des objets de $\underline{A}$) s'identifient à leurs structures de $\underline{D}$-amphi-algèbres sous-jacentes (ainsi, $\underline{C}$ « améliore » $S(\underline{D})$ du seul point de vue de la connexité par 2-flèches).

Si $\underline{A}$ possède suffisamment d'amphi-limites inductives, si A' est un objet de $\underline{A}'$, si on note $(A_{A'},\sigma_{A'})$ la $\underline{C}$-algèbre librement engendrée par $R(A')$ et si on désigne par $\varepsilon_{A'}: A_{A'} \to R(F(A_{A'}))$ la flèche canonique de $\underline{A}$ obtenue par réflexion, il se peut que, pour certains objets A_0 de $\underline{A}$, l'application

$\pi_0(\underline{A}(A_0,\varepsilon_{A'})) : \pi_0(\underline{A}(A_0,A_{A'})) \to \pi_0(\underline{A}(A_0,R(F(A_{A'})))) = \underline{A}'(F(A_0),F(A_{A'}))$

soit bijective : dans ce cas, on peut dire que $\varepsilon_{A'}$ est un *passage au quotient par classes de connexité, du point de vue de* A_0. Dans ces conditions, Florence établit que, si certains de ces objets A_0 sont suffisamment « générateurs de $\underline{A}'$ dans $\underline{A}$ », alors :
- la $\underline{C}$-algèbre $(A_{A'},\sigma_{A'})$ *se quotiente le long de* $\varepsilon_{A'}$, en une $\underline{C}$-algèbre $(R(F(A_{A'})),\sigma_{A'}/\varepsilon_{A'})$,
- $(R(F(A_{A'})),\sigma_{A'}/\varepsilon_{A'})$ possède, par conséquent, une $\underline{D}$-amphi-algèbre sous-jacente $(R(F(A_{A'}),\theta_{A'})$,
- $(R(F(A_{A'}),\theta_{A'})$ s'identifie donc à une $\underline{D}'$-algèbre $(F(A_{A'},),\lambda_{A'})$,
- $(F(A_{A'},),\lambda_{A'})$ est la $\underline{D}'$-algèbre librement engendrée par A',

dès lors, on a bien suffisante complétude connexe au niveau « sémantique » et ce, du point de vue des objets « générateurs » A_0.

Elle en infère aussitôt que la syntaxe achevée $Ach(\underline{D}')$, présentée par $\underline{D}'$ est (équivalente à) une image fonctorielle de la syntaxe achevée $Ach(\underline{C})$, présentée par $\underline{C}$: on a donc aussi suffisante complétude au niveau « syntaxique (achevé)».

En particulier, elle prouve qu'il suffit de prendre $\underline{C} = S(\underline{D})$ (i.e. qu'il suffit d'assouplir *simplement* $\underline{D}'$, sans créer de défauts de connexité) lorsque $\underline{D}'$ est la *duale* d'une théorie de Lawvere ou d'un I-type de Bénabou (attachée à un contexte $\underline{A}'$), i.e. lorsque tous les objets de $\underline{D}$ sont des amphi-sommes, dans $\underline{A}$, d'objets « générateurs » (appartenant à un même ensemble I fixé) : c'est très exactement le cas pour *toutes* les « théories purement équationnelles ».

Plus généralement, elle prouve aussi qu'il suffit de prendre encore $\underline{C} = S(\underline{D})$ (i.e. qu'il suffit d'assouplir encore simplement, sans plus créer de défauts de connexité) lorsque tous les objets de $\underline{D}$ sont (par exemple) des amphi-sommes fibrées au-dessus d'un même objet A_{00} « ne produisant aucune ré-écriture non triviale » dans $\underline{A}$ (i.e tel que, pour tout objet A de $\underline{A}$, le graphe à composition $\underline{A}(A_{00},A)$ est *discret*). C'est très exactement le cas, par exemple, des « théories de catégories munies de structures » (attachées à un contexte $\underline{A}'$) qu'on désire assouplir, mais *sans ré-écriture entre les objets* de ces catégories : A_{00} en représente alors « l'objet des objets ».

Usuellement, pour étudier certaines questions concernant la ré-écriture, il est de bon ton d'utiliser des 2-catégories. Pourtant, a priori, les 2-flèches représentant un système de ré-écriture sont *génératrices* d'une 2-catégorie mais en constituent rarement une, d'emblée : il n'est nul besoin de prescrire, à l'avance, la composée « horizontale » de *toute* 2-flèche $\rho : t_1 \Rightarrow t_2 : S \to S'$ avec *toute* 2-flèche $\rho' : t'_1 \Rightarrow t'_2 : S' \to S''$.
Plus pertinemment, il a été proposé (voir [10]) de se placer plutôt dans une « sesqui-catégorie », i.e. dans une catégorie enrichie par la structure de catégorie, monoïdale, symétrique et fermée $\underline{Cat}'$ (sur $\underline{Cat}$) pour laquelle la fermeture est constituée par les transformations « non naturelles » entre foncteurs. Pourtant, a priori, les 2-flèches représentant un système de ré-écriture sont seulement, de nouveau, *génératrices* d'une telle sesqui-catégorie : il n'est pas plus nécessaire de prescrire, à l'avance, la composée « verticale » de *toute* 2-flèche $\rho : t_1 \Rightarrow t_2 : S \to S'$ avec *toute* 2-flèche $\tau : t_2 \Rightarrow t_3 : S \to S'$.
Il se trouve que, la catégorie $\underline{Cat}$ étant une sous-catégorie réflexive de la catégorie $\underline{GrComp}$, la structure de catégorie monoïdale, symétrique et fermée $\underline{GrComp}$, introduite par Florence, induit sur $\underline{Cat}$ une structure analogue : c'est, précisément, $\underline{Cat}'$! Ainsi (au delà des jeux de terminologie), les « amphi-graphes à composition » sont les *présentations naturelles* des « sesqui-catégories » et le point de vue de Florence sur le sujet semble assez pertinent ... et novateur.

Inlassablement, méticuleusement, Florence, qui leur consacrait tant de temps, dispensa des cours qui ne cessèrent d'éclairer ses étudiants.

Patiemment, discrètement, Florence a développé nombre de concepts et obtenu nombre de résultats qui éclaireront nombre de questions.

Passionnément, pudiquement, sa vie éclaira la mienne.

Elle continue ...

Références

1. L. COPPEY, Théories algébriques et extensions de pré-faisceaux, *Cah. de Top. et Géom. Diff.* XIII-1, Paris (1972).
2. F. CURY, Graphes multiplicatifs enrichis, *Esquisses Math.* 27, Amiens (1978).
3. F. CURY, Conférences au Séminaire Catégories et Structures, Paris 1987 et 1989.
4. F. CURY, Catégories lax-localement cartésiennes et catégories localement cartésiennes: un exemple de suffisante complétude connexe, *Diagrammes* 25, Paris (1991).
5. F. CURY, La suffisante complétude connexe (Sec. A), *Diagrammes* 30, Paris (1993).
6. F. CURY, La suffisante complétude connexe (Sec. B), *Diagrammes* 31, Paris (1994).
7. C. EHRESMANN, *Catégories et Structures*, Dunod, Paris, 1965.
8. C. EHRESMANN, Introduction to the theory of structured categories, Techn. Report 10, Univ. of Kansas, Lawrence (1966). Ré-imprimé dans *Charles Ehresmann: Oeuvres complètes et commentées,* Partie III, Amiens, 1981.
9. C. EHRESMANN, Esquisses et types de structures algébriques, *Bul. Instit. Polit. Iasi,* XIV (1968). Ré-imprimé dans *Charles Ehresmann: Oeuvres complètes et commentées,* Partie III, Amiens, 1981.
10. J.G. STELL, Modelling term rewriting systems by sesqui-categories, *Actes du Col. "Catégories, Algèbres, Esquisses et Néo-esquisses"*, ed. par P. Ageron, Caen, 1994

2. QUELQUES NOTES BIOGRAPHIQUES *par L. COPPEY*

C'est l'image de l'arc-en-ciel qui m'est venue naturellement à l'esprit pour évoquer la mémoire de Florence. J'ai ressenti cette image comme une nécessité pour un témoignage sincère. C'est la force de l'image, et pas seulement celle du symbole, qui s'est imposée à moi quand j'ai accepté d'écrire ces quelques lignes. Je souhaite faire partager cette émotion. Oui; la bien courte existence de Florence m'apparaît ainsi... et l'arc-en-ciel brille toujours dans le ciel encore tourmenté; forçant le retour à la sérénité, il annonce des jours meilleurs.

Au début des années 70, Florence, jeune étudiante à l'Université Paris 7, poursuit ses études de mathématiques en Maîtrise et en DEA avec C. Ehresmann. C'est à cette époque qu'elle rencontre Christian Lair, alors jeune assistant, lui-même élève de C. Ehresmann. Leurs vies seront dès lors étroitement liées, unies: bonheur et enthousiasme partagés; travail intense et soutenu. Les échanges d'idées fructueux sont comme une seconde nature chez tous les deux: chacun inspire l'autre au meilleur niveau. Et vouloir séparer chez eux l'intimité de vie et le travail serait sans doute une erreur. Certes, il y aura des moments difficiles, mais en définitive, ils auront créé, avec le recul du temps, un contraste saisissant que seule l'image extatique de l'arc-en-ciel peut à mon sens exprimer. Quelle joie plus profonde que celle née de la victoire sur les difficultés?

Florence fait donc partie de la dernière génération des élèves de C. et A. Ehresmann. Dès le DEA elle fréquente assiduement le fameux Séminaire Ehresmann. Pour les débutants surtout, il n'est pas toujours facile de suivre avec profit les savants exposés des prestigieux mathématiciens du monde entier qui le fréquentent. Mais C. Ehresmann sait tout cela. Tout autant que la topologie algébrique, les catégories ou les fondements de la théorie des esquisses, il nous enseigne le sens des vraies relations humaines, nourries de respect et de liberté. Il n'ignore pas les hiérarchies, il sait les oublier, aimablement accordant ainsi à chacun une plus grande attention.

Bientôt c'est au tour de Florence d'exposer ses premiers travaux sur les graphes multiplicatifs et esquisses enrichis. Ce type de structure est à la base d'une théorie vraiment générale et naturelle de la ré-écriture, dont Florence conduira l'étude systématique environ dix ans plus tard, nous laissant un héritage solidement enrichi d'idées nouvelles sur le sujet (cf. C. Lair ci-avant).

Voila dans quelle ambiance Florence fait ses premières armes en recherche, partageant enthousiasme et ferveur avec toute l'équipe certes, mais surout, et c'est bien naturel, avec C. Lair; qui achève de préparer sa thèse d'état sur la théorie des esquisses. Bouillonnement d'idées; jeunesse d'esprit; on y croit. C'est un peu l'aventure, mais on y croit, on sait que l'avenir d'une forme nouvelle de mathématiques est là, devant nous, dans toute sa beauté et toute sa richesse, et ma foi, on peut dire que le terrain est déjà bien labouré en 1976, lorsque Florence soutient sa thèse de 3e cycle. De ce point de vue, l'avenir est encore prometteur.

Les utopies et les rêveries de mai 68 se sont envolées assez vite. La réalité sociale et économique n'est pas reluisante; on parle encore un peu de la société de consommation, mais plutôt comme d'un mythe. Le chômage menace déjà, il ne cessera de s'aggraver. La vie devient chère. On ne parle pas encore de récession, mais la société à deux vitesses s'installe durablement. Florence aspire bien légitimement à un poste dans l'enseignement supérieur. Mais les postes sont devenus rares et une forme de surenchère malsaine se manifeste déjà. L'Université, pour une grande part, est crispée sur des positions attentistes, et bientôt conformistes. Concrétement, de grosses chapelles se renforcent et s'organisent pour défendre ce qu'elles croient être des 'privilèges': c'est dire qu'on ne met pas longtemps à désigner les canards boîteux; les renards veillent. Y a-t-il dès lors une place, une petite place, pour une jeune mathématicienne originale, éprise de liberté, au tempérament peu tapageur? L'histoire n'est pas au rendez-vous. On pense: malchance, ingratitude, injustice temporaire, une 'réparation' est toujours possible! Je ne crois pas qu'il se soit agi de cela, à l'époque; la suite des évènements l'a amplement montré.

Florence pare au plus pressé! Abandonnant momentanément la recherche elle accepte un poste de professeur dans les classes préparatoires d'une école d'ingénieurs, l'école Charlia, où elle exercera aussi les fonctions de directeur des études. Nous sommes en 1979. Cela durera jusqu'en 1985. On voit toujours Florence dans le groupe parisien, un peu moins qu'avant, toujours avec le sourire et sans l'ombre d'un ressentiment. Elle est très dévouée à sa nouvelle tâche et elle l'assume avec la compétence qu'on lui connait. Une profonde restructuration de l'école intervient alors. Des propositions sont faites à Florence, présentées comme 'valorisantes', mais elles ne correspondent guère à ses goûts. Et puis Florence croit à une nouvelle 'chance' dans le supérieur; elle a envie de se mettre à l'Informatique théorique et pratique; c'est un secteur qui semble épargné et même avoit le vent en poupe. Encore un rendez-vous manqué avec l'histoire?

Elle obtient finalement un emploi contractuel à l'Université Paris 6 qui lui permet au moins de se remettre à la recherche. J'ai parlé plus haut de société à deux vitesses: qu'on sache donc que la rémunération d''une telle charge d'enseignement est environ deux fois moindre que celle d'un titulaire. En très peu de temps, elle boucle un 3e cycle d'informatique fondamentale à Paris 7 et elle rédige un mémoire de DEA fort intéressant sur la complétion et la complétude, d'après des travaux récents d'Andreka et Nemeti; il sera publié plus tard en 92 (*Diagrammes* 28). Entre temps, Florence a entamé un important travail sur la ré-écriture et la suffisante complétude connexe (cf. Lair). Une partie est achevée et publiée en 90 (*Diagrammes* 25). J'ai le souvenir de deux exposés vraiment remarquables de ce travail à notre séminaire de catégories: clarté, propreté, précision! L'ensemble de ces travaux a une forme à peu près achevée en 94, et constitue ce qui devrait être sa thèse. Celle-ci ne sera pas soutenue de son vivant: Florence est atteinte d'un cancer du sein; elle succombe un an plus tard, le 10 mai 95.

Florence est toujours parmi nous: son sourire, sa gentillesse sans faille, son attention empressée, sa sensibilité, son intelligence. Ce sont quelques unes des vibrantes couleurs de l'arc-en-ciel.

C. LAIR et L. COPPEY
Université Paris 7, U.F.R. de Mathématiques
Tours 45-55-5ème étage
2, place JUSSIEU, 75251 PARIS CEDEX 05