

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

JEAN-MICHEL VAPPEREAU

## **Une autre orientation dans les chaînes et les nœuds et la définition du nombre de nœud**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome  
36, n° 2 (1995), p. 153-191

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1995\\_\\_36\\_2\\_153\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1995__36_2_153_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

**UNE AUTRE ORIENTATION DANS LES CHAÎNES  
ET LES NŒUDS ET LA DEFINITION DU  
NOMBRE DE NŒUD**  
*par Jean-Michel VAPPERAU*

ABSTRACT : With a method of coloring knot and chain diagrams, our aim is to isolate the characteristic cuts of each of the said diagrams.

The study of the variation of the cut, in the case of chains made of several components, leads us to formulate the relation :

$$c_S - 2K_S = v_i - 2E_i$$

which is the object of our principle theorem.

This relation is verified for any diagram, and establishes a liaison between two types of orientations (the torsion and the crossing sign).

The number of the *average cut*  $K_S$ , which is articulated from these results, can be interpreted through Reidemeister and Gordian moves which are defined here. Then we formulate another tertiary move, the Knot move which leads us to introduce the knot number, invariant by ambient isotopy. This number is added to the well known linking number, which depends on the orientation of the crossing sign in the study of knots and chains.

To conclude, in order to consider these two characteristics numbers, we propose a new calculation of the linking number in terms of torsion, thanks to the notion of the included non-knot.

This new way of comparing links articulates a structural rupture between the chains of three components and the chains of four.

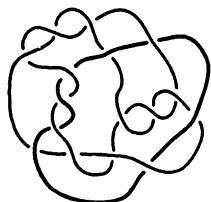


FIG. 1

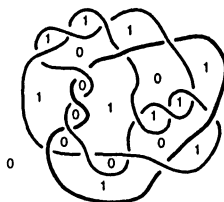


FIG. 2

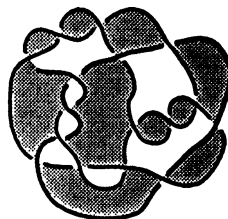


FIG. 3

## 1 La méthode de lecture de l'un nœud

Nous travaillons à partir des *présentations* (diagrams) de *nœuds* ou de *chaînes* mis à plat en position générale (Fig. 1) que nous dirons *schémas plats*  $S$ .

### 1.1 Premier temps : la surface d'empan

Munis d'un binaire de signes, nous parcourons et marquons l'ensemble des zones en passant par une traversée franche des portions d'arc et en changeant de signe de l'une à l'autre. Cette traversée se fait en plein milieu de chaque portion d'arc, en évitant les croisements et leur proximité. Toutes les zones adjacentes de la mise à plat sont alors marquées de signes contraires, sachant que deux zones adjacentes sont séparées par une portion d'arc (Fig. 2). Nous convenons que l'ensemble des zones portant le même signe que la zone périphérique forme l'ensemble des *vides* du schéma plat donné. L'ensemble des *pleins*, respectant cette convention, connectés par les demi-torsions définit la *surface d'empan* de la présentation. Colorions cette surface pour la mettre en évidence : le nœud ou la chaîne se présente alors comme un damier déformé (Fig. 3).

### 1.2 Deuxième temps : caractère orientable

Chaque zone est bordée par un certain nombre de portions d'arcs, ce nombre définit la *valence* de la zone. S'il existe au moins un *vide* de valence impaire, la surface est *unilatère*. Nous la colorions par des hachures (Fig. 4). Dans le cas contraire tous les vides sont de valence paire, la surface est *bilatère*. Nous la colorions avec deux trames contrastées, une pour chaque face (Fig. 5 et 6).

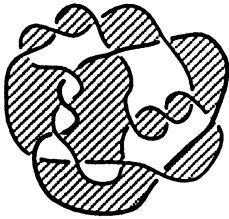


FIG. 4

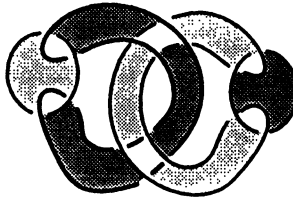


FIG. 5

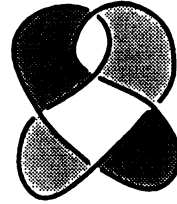


FIG. 6

### 1.3 Troisième temps : la coupure

Dans le cas où la surface est unilatère, nous pourrions la réorienter, la rendre bilatère. Il est nécessaire et il suffit d'y effectuer une *coupure*. Cette coupure peut toujours être rendue connexe et se présenter comme un cercle.

Pour la déterminer, il faut se munir d'un nouveau binaire de couleurs. Prenons deux trames contrastées gris clair et gris foncé :



Colorions en alternance, au moyen de ce binaire de couleurs, les portions d'arcs de chaque rond en suivant les parcours successifs de ces ronds et en déposant de la couleur du côté de la surface non orientable produite au deuxième temps (Fig. 4). Lorsqu'il s'agit d'un nœud d'un seul rond la détermination de la coupure est terminée à la fin du parcours. Quand il s'agit d'une chaîne, la procédure de coloriage des portions d'arcs d'un même rond revient sur son point de départ sans avoir coloré l'ensemble de la surface. Il nous faut recommencer autant de fois qu'il est nécessaire en fonction du nombre de ronds, en choisissant de commencer par une portion d'arc quelconque et une des deux couleurs, ceci pour chaque rond (Fig. 7).

A partir de ce coloriage certains pleins sont monochromes, car toutes leurs portions d'arcs sont de la même couleur, d'autres sont bicolores (Fig. 8). Les pleins monochromes peuvent être coloriés de la couleur des portions d'arcs qui les bordent. La coupure passera autour du ou des vides dont toutes les portions d'arcs sont de même couleur. La coupure passe par chacun des pleins bicolores de manière à séparer les deux couleurs (Fig. 9).

La coupure, en parcourant les pleins bicolores, joint les croisements bicolores ; ce sont les croisements où se rencontrent, dans la zone pleine,

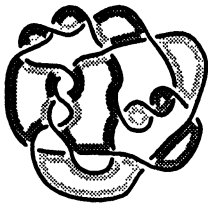


FIG. 7

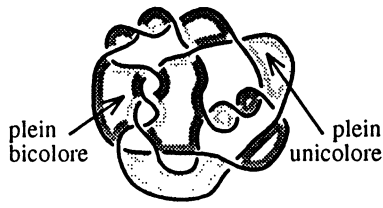


FIG. 8

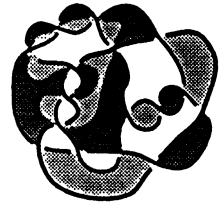


FIG. 9

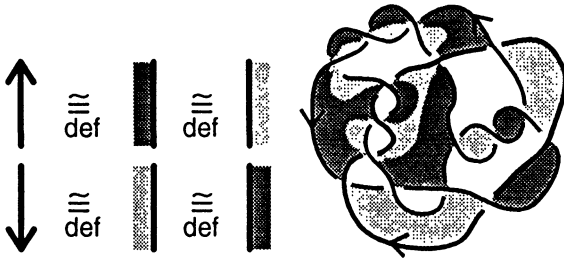


FIG. 10

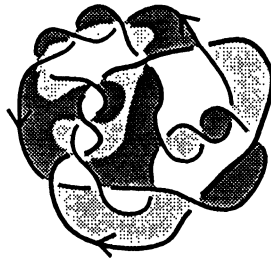


FIG. 11

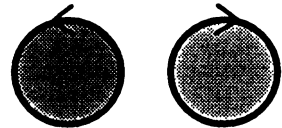


FIG. 12

deux portions d'arcs de couleurs différentes. On appelle *parité de la coupure* la parité du nombre de croisements par où elle passe.

Ce coloriage définitif correspond de manière stricte à une orientation des ronds de chaîne et de nœud. Pourvu d'une correspondance choisie (Fig. 10), une orientation des ronds qui font bord de l'étoffe peut être associée à un coloriage de l'étoffe (Fig. 11). Une autre manière de noter le code adopté peut être employé usuellement dans le plan des dessins (Fig. 12).

#### 1.4 Multiplicité des coupures

Dans le cas d'une chaîne faite de plusieurs ronds, nous avons vu que la procédure s'interrompt et qu'il nous faut la reprendre de manière arbitraire en choisissant une nouvelle portion d'arc et une couleur. Un choix différent peut être effectué, parmi les deux couleurs, pour la portion d'arc choisie à ce moment de la reprise du coloriage. Ces différents coloriages ne produisent pas le même résultat : il y a donc plusieurs coupures possibles dans le cas d'une chaîne à plusieurs ronds. En voici

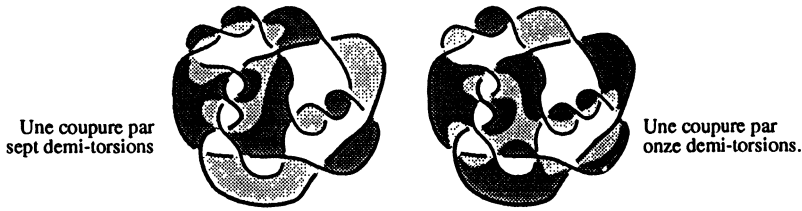


FIG. 13

un exemple à partir de notre exemple : Dans le cas des chaînes, il y a donc plusieurs coupures. Si le nombre de ronds est noté  $r$ , le nombre de coloriage est  $(2^r)$  et le nombre de coupures est  $(2^{r-1})$ . Ces différentes coupures ont la même parité. La théorie des surfaces intrinsèques nous assure de ce fait puisqu'il s'agit toujours de la même surface non orientable et qu'elle est équivalente à un plan projectif ou à une bouteille de Klein adjoint d'un certain nombre de tores d'après le théorème principal de la théorie des surfaces topologiques intrinsèques (Voir GRAMAIN, [1], remarque 8 p. 42 et chap. V, et J.M. VAPPEREAU [2]).

## 2 Variation de la coupure et enlacements<sup>2</sup>

### 2.1 Caractéristique et torsion

Il est courant, depuis les travaux de TAIT, comme dans la définition de la *vrille* (*writhe*), de noter les croisements d'éléments de ronds orientés grâce à deux signes  $+1$  et  $-1$



Ceci définit le *signe de croisement* (*crossing sign*) que nous appellerons la *caractéristique* ( $\gamma_i$ ) de chaque croisement, compte tenu de l'*orientation des ronds*, notée  $i$ .

Il existe une autre orientation des croisements dans un schéma plat de nœud ou de chaîne, en tenant compte cette fois de la distinction

---

<sup>2</sup>Nous sommes repartis d'une remarque de M. BERTHEUX, dans le cas des chaînes à deux ronds, selon laquelle la différence des nombres des coupures correspond aux nombres d'enlacements.

des pleins et des vides (1.1), qui est indépendante de l'orientation des ronds.

Posons deux signes  $+1$  et  $-1$  pour les deux types de croisements non orientés par l'orientation des ronds de ficelle, où il est décidé de la différence des pleins et des vides.



Ces deux croisements orientés par les pleins et les vides ne sont plus superposables dans le plan. Nous appellerons ce *signe d'incidence*  $+1$  ou  $-1$  la *torsion* ( $\tau_S$ ) de chaque croisement<sup>3</sup>.

Cette distinction entre l'orientation des croisements par la torsion et l'orientation des croisements par la caractéristique a été peu développée par les mathématiciens jusqu'à une période récente.<sup>4</sup>

Ainsi chaque croisement peut recevoir une double orientation dans une présentation de nœud ou de chaîne où ont été distingués les pleins et les vides, lorsqu'elle est orientée quant aux ronds. Il y a donc quatre types de croisements (Fig. 14).

La surface qui sert à définir la torsion, ainsi disposée à la hauteur d'un croisement, nous permet de faire apparaître le coloriage comme convenant à rendre compte de l'orientation des ronds par des couleurs disposées sur le côté de chaque élément de ficelle. Cette correspondance entre l'orientation des ronds et le coloriage des zones est définie plus haut. Nous désignons ces quatre types de croisements par un couple  $(\tau, \gamma)$ , où les nombres  $\tau$  et  $\gamma$  sont pris dans la paire  $\{+1, -1\}$ . Le premier note la torsion, le second la caractéristique. Notons également  $p, q, b$  et  $d$  les nombres respectifs de ces quatre types de croisements  $(+1, +1), (+1, -1), (-1, +1)$  et  $(-1, -1)$  dans un schéma plat  $S$  orienté ou coloré.

<sup>3</sup>En Etant solidaire de l'étoffe, nous considérons une torsion gauche et une torsion droite.

<sup>4</sup>Cette distinction est bien connue depuis REIDEMEISTER [3], mais reste insuffisamment développée. Nous en voulons pour preuve le fait que R.H. FOX [4] définit l'orientation d'un croisement par la torsion mais il la confond dans un des exemples qu'il donne (p. 158, 3<sup>ième</sup> exemple : nœud de Listing) avec l'orientation par la caractéristique. Depuis lors, il semble que la règle triangle-étoile des systèmes dynamiques ait mieux fait apparaître la nécessité de cette distinction des pleins et des vides, mais il reste que l'emploi conjoint de ces deux orientations n'a pas été envisagé comme nous le proposons ici.

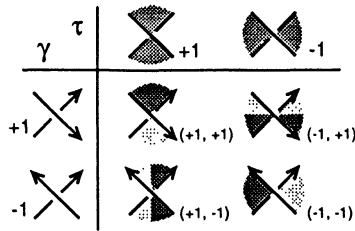


FIG. 14

Pourvu de cette double orientation, pour une présentation  $S$ , où les pleins et les vides sont distingués, et d'orientation quant aux ronds ou de coloriage  $i$ , posons :

- la somme des croisements orientés par la torsion, soit le *nombre de croisements* :

$$c_S = p + q - b - d$$

où  $S$  indique le schéma plat choisi.

- la somme des croisements orientés par leur caractéristique, soit la *writhe* :

$$v_i = p - q + b - d$$

où  $i$  indique l'orientation choisie des ronds ou le coloriage pour la présentation donnée.

Si  $X_i$  et  $Y_i$  sont deux ronds de la présentation orientée par  $i$ , on note  $crois(X_i, Y_i)$  l'ensemble des croisements mutuels de  $X_i$  et  $Y_i$  et on pose le *nombre d'enlacement* (*linking number*) :

$$enl(X_i, Y_i) = \frac{1}{2} \sum_{x \in crois(X_i, Y_i)} \gamma_i(x)$$

où  $\gamma_i(x)$  est la caractéristique du croisement  $x$ .

Il nous est plus pratique parfois de noter ce nombre multiplicativement  $X_i Y_i$ .

- On définit le *nombre de chaîne*  $E_i$ , comme la somme des nombres d'enlacement rond à rond orientés par les caractéristiques. Soit  $\mathcal{P}_i$  l'ensemble des paires non orientées  $\{X_i, Y_i\}$  de ronds distincts  $X_i$  et  $Y_i$  du schéma plat orienté par  $i$ , soit :

$$E_i = \sum_{\{X_i, Y_i\} \in \mathcal{P}_i} enl(X_i, Y_i)$$



Dans une chaîne, nous appellerons *croisements impropres* les croisements mutuels de deux ronds distincts et *croisements propres* les croisements d'un rond avec lui-même.

Ainsi les *nœuds propres* faits d'un seul rond ne présentent que des croisements propres et il n'est pas question à leur sujet de nombre d'enlacement. Nous dirons que leur nombre de chaîne  $E_i$  est nul.

Le nombre de chaîne  $E_i$  est en fait la demi-somme des caractéristiques des croisements impropres de l'ensemble de la présentation colorée.

## 2.2 De la variation de la coupure

Les croisements propres et impropres réagissent de manières différentes dans la variation de la coupure :

### Proposition 1

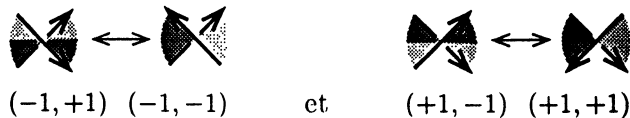
i) *A la hauteur d'un croisement impropre, si nous changeons l'orientation d'un des ronds, la caractéristique change, et par conséquent le type de croisement change aussi.*

ii) *Les croisements propres ne changent pas de caractéristique, ni de type de croisement, dans un changement d'orientation du rond considéré*

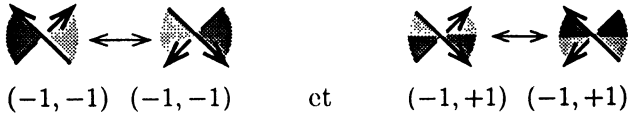
Dans le cas d'un croisement impropre, il n'y a que deux caractéristiques  $+1$  ou  $-1$ , et ces termes se différencient par définition lors du changement de sens d'un seul des éléments de ficelle qui constitue le croisement considéré. Ce changement n'affecte pas la torsion.

Ainsi, lorsqu'un seul élément de ficelle change de sens, la caractéristique change et par conséquent le type de croisement se modifie en restant de même torsion.

Les types de croisement s'échangent suivant :



Pour un croisement propre, lorsque l'orientation du rond change, les deux éléments changent de sens simultanément. La caractéristique ne change pas, et la torsion non plus. Les types de croisement ne changent pas.



### 2.3 De l'accomplissement de la coupure

**Définition 1** *Pour un schéma plat d'un nœud ou d'une chaîne orientée par la torsion, dont les ronds sont non orientés, nous appellerons la moyenne des nombres de la coupure le nombre  $K_S$  obtenu pour une orientation  $i$  quelconque des ronds de cette présentation :*

$$K_S = 1/2(c_S - v_i) + E_i.$$

#### **Théorème 2 (Principal)**

i) *Pour un schéma plat  $S$  donnée d'un nœud ou d'une chaîne et pour une orientation  $i$  quelconque de cette présentation, nous pouvons écrire la relation suivante :  $c_S - 2K_S = v_i - 2E_i = \eta$*

ii) *Le nombre  $K_S$  est orienté par la torsion et est indépendant des coloriage (des orientations) des ronds qui forment le nœud ou la chaîne.*

**Démonstration** D'après la définition de  $K_S$ , la relation qui forme la première partie de ce théorème est une proposition aisée à établir. Il faut démontrer l'indépendance de  $K_S$  par rapport au coloriage (à l'orientation  $i$ ) pour établir la deuxième partie du théorème principal. Les nombres  $v_i$  et  $E_i$  sont des invariants des isotopies régulières (mouvements de Reidemeister  $M_2$  et  $T_3$ , (3.2). Du fait de la définition de  $v_i$ , par les caractéristiques de l'ensemble de tous les croisements de la présentation, et de  $E_i$ , par les caractéristiques des seuls croisements impropres, le nombre  $\eta$  est bien défini comme la somme des caractéristiques des seuls croisements propres. Nous appellerons *vrille propre* ce nombre  $\eta$  et nous pouvons noter au passage le résultat supplémentaire suivant.

#### **Lemme 3**

(i) *La vrille propre  $\eta = v_i - 2E_i$  est un invariant des présentations de nœuds ou de chaînes, pour les isotopies régulières pratiquées sur la sphère.*

(ii) *La vrille propre  $\eta$  est indépendante des coloriage des ronds qui forment le nœud ou la chaîne.*

$\eta$  est indépendant du schéma plat  $S$ , tant que celle-ci ne change que du fait des isotopies régulières. Mais afin de démontrer notre théorème nous avons recours à la seconde partie de notre lemme. Comme nous l'avons montré plus haut (Proposition 1), les croisements propres ne changent pas de caractéristique lorsque nous changeons de coloriages. Ainsi le nombre  $\eta$  étant indépendant du coloriage et le nombre  $c_S$  étant lui-même indépendant de l'orientation  $i$ , par définition il ne dépend que de la torsion, nous pouvons conclure que le nombre  $K_S = \frac{1}{2}(c_S - \eta)$  est bien indépendant du coloriage et ne dépend que de la torsion, ce qu'il nous fallait démontrer.

## 2.4 Le nombre de la coupure

Le nombre de la coupure  $k_{iS}$  est la somme des valeurs des croisements orientés par la torsion par où passe la coupure :  $k_{iS} = q - b$

**Proposition 4** *Le nombre de la coupure  $k_{iS}$  vérifie la relation :*

$$k_{iS} = \frac{1}{2}(c_S - v_i).$$

Cette relation se démontre facilement :

$$c_S = p + q - b - d, \quad \text{et} \quad v_i = p - q + b - d.$$

Ainsi :  $c_S - v_i = 2q - 2b = 2(q - b) = 2k_{iS}$  ;  $q$  et  $b$  correspondent aux croisements par où passe la coupure, pourvus ici de leur torsion, d'où la relation proposée.

### 2.4.1 Variation arithmétique de la coupure

Ce nombre de la coupure dépend de la torsion et des coloriages.

**Corollaire 5** *Le nombre de la coupure  $k_{iS}$  vérifie la relation :*

$$k_{iS} = K_S - E_i.$$

Pour une orientation  $i$  d'une présentation donnée d'un nœud ou d'une chaîne, notre théorème principal nous assure que le nombre de la coupure  $k_{iS}$  vérifie la relation suivante :  $k_{iS} = \frac{1}{2}(c_S - v_i) = K_S - E_i$

Ainsi pour un schéma plat donné, la variation de la coupure en fonction des coloriages suit en son nombre  $E_i$ . Ainsi ce justifie que



FIG. 15

nous parlions à propos du nombre  $K_S$  de la moyenne des nombres de la coupure<sup>5</sup>.

La répartition des nombres de la coupure  $k_{iS}$  est donc un transformé de la répartition des nombres de chaîne  $E_i$ , elle consiste à inverser leurs signes et à les translater de la longueur  $K_S$ .

#### 2.4.2 Les chaînœuds

L'ensemble de ces considérations et de ces résultats nous mène à adopter le terme de *Nœuds impropres* pour les chaînes à coupures constantes, c'est-à-dire où le nombre de la coupure est indépendant de  $i$ . Nous les appellerons aussi *chaînœuds* (*linknods*).

La figure 15 est un exemple particulièrement remarquable avec le nœud borroméen. Les chaînœuds ne contiennent aucun enlacement.

Pour justifier notre façon de dire, soulignons que les nœuds propres sont à coupure constante, car du fait d'être constitués d'un seul élément de corde, ils n'ont qu'une seule coupure. Par conséquent il nous paraît remarquable que certaines chaînes, faites de plusieurs ronds, présentent une constance du nombre de la coupure qui les rend analogues aux nœuds propres, renouvelant par là la distinction du un et du multiple.

### 2.5 De la répartition des enlacements

Nous voulons montrer, par la suite, que nous pouvons traiter des enlacements dans les chaînes orientées seulement par la torsion, c'est-à-dire indépendamment d'un coloriage choisi.

A une chaîne de  $r$  ronds non colorée correspond  $2^r$  coloriages qui donnent des résultats différents lors du calcul des nombres d'enlacement.

---

<sup>5</sup>  $K_S = \frac{1}{2^{r-1}} \sum_i k_{iS} = \frac{1}{2^{r-1}} \cdot 2^{r-1} K_S - \frac{1}{2^{r-1}} \sum_i E_i$ . Or  $\sum_i 2^{r-1} E_i = 0$ , car chaque nombre d'enlacement y paraît un nombre pair de fois pourvu de signes opposés deux à deux.

Nous notons  $C$  l'ensemble (de cardinal  $r$ ) des composants et nous indexons les nombres de chaîne  $E_i$  par les sous-ensembles de  $C$ ,  $i \in \mathcal{P}(C)$ , de telle manière que pour une orientation quelconque fixée, notée  $\emptyset$ , l'orientation  $i$  est obtenue en changeant le sens de parcours des composants appartenant à  $i$ . Les nombres de chaînes ainsi obtenus sont bien au nombre de  $2^r$ . Les coloriages produisent deux à deux la même coupure, avec la simple inversion globale des couleurs. Nous disposons donc de la relation  $E_i = E_{\bar{i}}$ , où  $\bar{i}$  désigne le complémentaire ensembliste de  $i$  dans  $C$ .

Il y a donc  $2^{r-1}$  nombres de chaîne à distinguer, éventuellement différents, qui sont des combinaisons linéaires à coefficients dans  $\{+1, -1\}$  des nombres d'enlacements de tous les couples de composants.

Par conséquent il y a  $2^{r-1}$  nombres de coupure à distinguer.

### 2.5.1 Des chaînes orientées par la caractéristique

Nous appellerons *répartition des nombres d'enlacement* pour une orientation donnée la distribution des nombres d'enlacement répartis entre les couples de ronds.

**Définition 2** *Deux chaînes de présentations colorées respectives  $S_{1i}$  et  $S_{2j}$  sont dites  $R_{enl}$ -équivalentes, si et seulement si il existe une bijection  $f$  des composants de  $S_{1i}$  vers ceux de  $S_{2j}$ , telle que pour chaque couple de composants  $(X, Y)$  on ait :*

$$enl(f(X), f(Y)) = enl(X, Y)$$

Dans ce cas, nous disons qu'elles ont même répartition des nombres d'enlacement et leurs nombres de chaîne respectifs sont égaux :  $E_i = E_j$

Cette relation est une relation d'équivalence entre chaînes colorées.

**Théorème 6** *Dans le cas où  $S_{1i}$  et  $S_{2j}$  sont  $R_{enl}$ -équivalents par une bijection  $f$ , alors  $S_{1i}$  et  $S_{2j}$  le sont aussi pour tout coloriage  $i'$  de  $S_1$  et  $j'$  de  $S_2$ ,  $j'$  correspondant à  $i'$  à travers la bijection  $f$ .*

Il suffit de constater que nous passons d'un coloriage à un autre en inversant le sens de un ou plusieurs ronds et de rendre ce fait par un signe négatif attribué à la lettre du rond qui change ainsi d'orientation :

$$enl(X_i, Y_i) = enl(-X_i, Y_i) = -enl(X_i, Y_i) = -X_i Y_i$$

et d'ajouter que ces transpositions de signe sont respectées par la correspondance  $f$ , car :

$$f(-X_i) = -f(X_i)$$

### 2.5.2 Des chaînes non orientées par la caractéristique

Pour une chaîne donnée non orientée par la caractéristique, nous appelons *répartition des nombres de chaîne*, la distribution de ses nombres de chaîne répartis selon les orientations par des coloriage.

**Définition 3** *Deux chaînes de présentations respectives  $S_1$  et  $S_2$ , non orientées par la caractéristique, seront dites  $R_E$ -équivalentes, s'il existe une bijection  $g$  entre les orientations de leurs composants respectifs telle que pour toute orientation  $i$  de  $S_1$  et  $g(i)$  de  $S_2$  :*

$$E_i(S_1) = E_{g(i)}(S_2)$$

Dans ce cas elles auront la même répartition de leurs nombres de chaîne.

Cette relation est une relation d'équivalence entre les chaînes non orientées par la caractéristique.

**Corollaire 7** *Deux chaînes de schémas plats  $S_{1i}$  et  $S_{2j}$ , orientées par la caractéristique et  $R_{enl}$ -équivalentes, seront  $R_E$ -équivalentes en tant que chaînes non orientées par la caractéristique.*

Ceci se déduit immédiatement du théorème 6 énoncé plus haut, en tant que l'existence de la bijection  $g$  est assurée par la définition de  $R_{enl}$  et le jeu des changements de signe au travers des changements d'orientation.

**Théorème 8** *Deux chaînes de présentation  $S_{1i}$  et  $S_{2j}$  non orientées par la caractéristique et  $R_E$ -équivalentes, seront  $R_{enl}$ -équivalentes en tant que chaînes orientées par la caractéristique pour chaque couple de coloriage respectifs mis en correspondance par  $g$ .*

Nous pouvons en effet retrouver les  $C_n^2$  nombres d'enlacements des composants pris deux par deux. Afin d'exprimer ce résultat nous utiliserons l'indexation des nombres de chaîne que nous avons présenté plus haut, il est facile de calculer le nombre d'enlacement :

$$enl(X, Y) = \frac{1}{4}(E_\emptyset - E_{\{X\}} - E_{\{Y\}} + E_{\{X, Y\}})$$

montrant par conséquent que la répartition des nombres de chaîne restituée bien la répartition des nombres d'enlacement.

Nous appellerons donc l'état de l'enlacement aussi bien la répartition des nombres d'enlacement que la répartition des nombres de chaîne.

### 2.5.3 De la variation de la coupure toujours

D'après les résultats précédents, les répartitions des coupures de deux schémas plats  $S_1$  et  $S_2$  de deux chaînes  $R_E$ -équivalentes sont mutuellement translatés.

**Proposition 9** *Deux chaînes non orientées par les caractéristiques dans les présentations respectives  $S_1$  et  $S_2$  seront  $R_E$ -équivalentes si et seulement s'il existe une bijection  $g$  entre leurs coloriage telle que pour toute orientation  $i$  des ronds de  $S_1$  et par conséquent  $g(i)$  de  $S_2$  :*  
 $k_{iS_2} - k_{g(i)S_2} = \lambda_{S_1S_2}$ , où  $\lambda_{S_1S_2}$  est une constante indépendante de  $i$ .

Ceci se déduit de la définition de  $R_E$ , de l'expression de la coupure et de notre corollaire 5. Sachant que  $k_{iS_1} = K_{S_1} - E_i$  et que  $K_{S_1}$  est indépendant de l'orientation  $i$ , le nombre :

$$k_{iS_1} - k_{g(i)S_1} = K_{S_1} - K_{S_2} = \lambda_{S_1S_2}$$

est bien constant lorsque  $i$  varie.

## 3 Arithmétique des processus du nœud

### 3.1 Une théorie des Enlacements

Dans cette théorie  $T_0$  des Enlacements, l'ensemble des mouvements laisse invariant l'état de l'enlacement.

Nous nous déplaçons ici dans l'ensemble  $\mathcal{P}$  des présentations de chaînes et de nœuds non colorées quant aux composants, dont nous choisissons un coloriage quelconque lorsque les calculs l'exigent, et nous tenons compte de l'ensemble des coloriages, pour la bonne définition des nombres d'enlacements. Nous disposons de l'ensemble  $E_0$  des mouvements élémentaires qui se répartissent selon un ensemble  $T_{E_0}$  de types :

$$T_{E_0} = \{B_1, B_1^*, M_2, T_3, G, H, H^*\}$$

Précisons les types de transformations qui respectent l'état de l'enlacement au sein d'une chaîne, c'est-à-dire qui préservent la relation  $R_E$ .

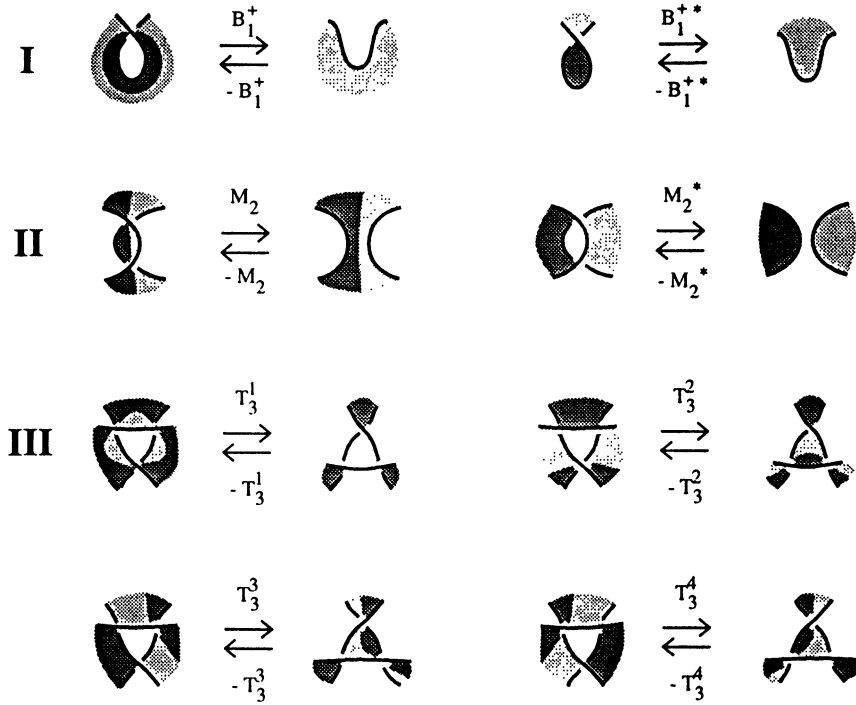


FIG. 16

### 3.1.1 Définitions des types de mouvements de cette théorie

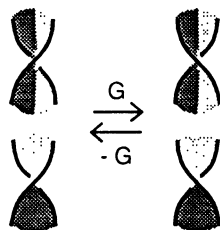
Nous disposons des *mouvements de Reidemeister* pour changer les présentations par des *boucles*, des *mailles* et des *triskels* (Voir fig. 16). L'*homotopie régulière* défait les nœuds propres et certaines chaînes, celles qui présentent des croisements propres, en agissant à la hauteur de chaque croisement propre par l'inversion du dessus-dessous (Voir fig. 17) : Nous appellerons ces homotopies régulières des *mouvements gordiens propres*. Les *mouvements gordiens impropres (alternés)* défait certaines chaînes, celles qui "font du nœud impropre", (ce qui va être expliqué par la théorie que nous développons ici) en agissant à la hauteur d'un couple de croisements impropres qui doivent mettre à contribution les deux mêmes ronds, être de même torsion et de caractéristiques opposées. Cette dernière distinction se caractérise par la présence d'une coupure pour l'un et l'absence de coupure pour l'autre des croisements





un croisement propre      un croisement propre

FIG. 17



Deux croisements impropres de deux mêmes ronds

FIG. 18

impropres pour un coloriage quelconque. Cet ensemble  $\mathcal{T}_{E_0}$  des types de transformations définit la topologie des nœuds et des chaînes à *gordiens d'ambiance* près, soit la théorie des Enlacements. Une série de mouvement gordien  $\mathcal{G}$  est une transformation du schéma plat  $S$  en la présentation  $S'$ ,

$$\mathcal{G} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \text{ tel que } \mathcal{G}(S) = S'$$

définie par une série de mouvements  $X_i$ ,  $(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$  avec  $X_i \in E_0$ .

Ainsi :  $\mathcal{G}(S) = X_n(\dots X_i(\dots X_2(X_1(S))))$  où la barre portée sur la lettre désignant ce changement de présentation est là pour rappeler combien ces mouvements font dériver la coupure isolée dans nos dessins, jusqu'à la faire disparaître par instant. Nous parlerons à cette occasion du *mouvement de la coupure*. Nous définissons alors, grâce à ces changements de présentations, une *relation*  $R_0(S_1, S_2)$ , sur l'ensemble des schémas plats de nœuds ou de chaînes.

$$\text{Soit : } R_0(S_1, S_2) \iff \exists \mathcal{G} (\mathcal{G}(S_1) = S_2)$$

Cette relation est une relation d'équivalence. Nous la noterons parfois  $S_1 \approx_0 S_2$ .

Nous appellerons *Enlacements* les classes d'équivalence définies par cette relation.

La théorie  $T_0$  des Enlacements est bien la théorie de ces classes d'équivalence et il est aisé de montrer, par un calcul sur les caractéristiques

téristiques des croisements pour une orientation quelconque, lorsqu'il s'agit de croisements impropres, que ces mouvements respectent les nombres d'enlacements, et par conséquent la relation  $R_E$ .

**Proposition 10** *Pour deux présentations de chaînes ou de nœuds  $S_1$  et  $S_2$  :*

$$R_0(S_1, S_2) \implies R_E(S_1, S_2)$$

Les mouvements de Reidemeister ne changent pas la somme des caractéristiques des croisements impropres. Seul le mouvement  $B_1$  supprime ou ajoute un croisement, mais il est propre. Les homotopies agissent uniquement sur les croisements propres, les nombres d'enlacements y sont donc indifférents.

Les gordiens agissent exclusivement sur les croisements impropres, ils sont construits de telle manière qu'ils ne changent pas le nombre d'enlacement d'un couple de composants. Ces mouvements inversent la torsion et la caractéristique de deux croisements auxquels participent deux mêmes ronds, de même torsion et de caractéristiques opposés. Leur action sur les caractéristiques ne fait, par conséquent, pas varier la somme globale d'enlacements, le nombre de chaîne, car un signe  $+1$  se transforme en  $-1$ , et un  $-1$  en  $+1$ .

### 3.1.2 Les gordiens de torsion différente

Le *mouvement gordien non alterné (impropre)* agit à la hauteur d'un couple de croisements impropres qui doivent mettre à contribution les deux mêmes ronds et être de torsions opposées et de caractéristiques opposées. Cette dernière distinction se caractérise par le fait que les croisements choisis de torsions différentes sont de même type relativement à la coupure. Soit qu'elle soit présente dans les deux croisements, soit qu'elle soit absente. Nous les indexerons par leur torsion  $t$  (Figure 19).

**Proposition 11** *Un mouvement gordien non alterné est un composé de  $E_0$ .*

Dans le cas d'un couple de croisements auquel deux mêmes ronds participent, nous pouvons toujours provoquer une maille d'entre ces deux ronds, par le mouvement  $M_2$ . Ceci produit deux nouveaux croisements opposés l'un par rapport à l'autre (Figure 20).

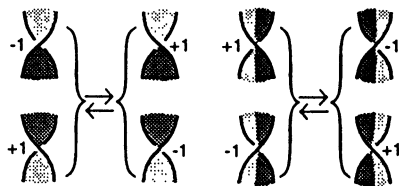


FIG. 19

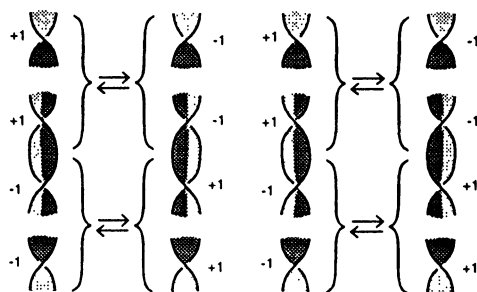


FIG. 20

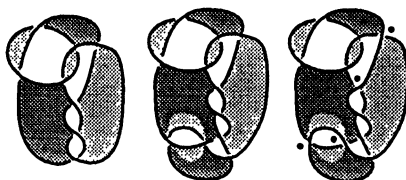


FIG. 21

Mais il est nécessaire ici de produire des croisements de type différent relativement à la coupure donnée, ce qu'il est toujours possible de réaliser en choisissant convenablement les arcs qui produisent une nouvelle maille et en ajoutant une boucle, éventuellement<sup>6</sup> (Voir fig. 21).

Si nos croisements de départ ont bien des nombres de torsion inverses, ils peuvent s'apparier avec les nouveaux croisements. Dans ce cas nous pouvons pratiquer deux gordiens alternés précédemment définis. Il suffit ensuite de réduire la maille par mouvement  $M_2$  pour obtenir le résultat escompté.

### 3.1.3 Les différents Enlacements

**Théorème 12** *Si deux chaînes  $S_1$  et  $S_2$  sont  $R_E$ -équivalentes, alors elles sont  $R_0$ -équivalentes :  $R_E(S_1, S_2) \Rightarrow R_0(S_1, S_2)$*

**Démonstration** Définissons un mode de composition, noté #, entre chaînes de telle manière que leurs nombres d'enlacement ou leurs nombres de chaîne s'additionnent. Ce mode de composition consiste à mettre en continuité les surfaces d'empan par autant de plongements de rubans bilatères qu'il y a de composants de chaînes. Ces rubans doivent respecter les bijections  $f$  et  $g$  de nos relations  $R_{ent}$  et  $R_E$  et le coloriage de chacune des surfaces composées.

Il peut être nécessaire de provoquer des torsions sur ces rubans afin de convenir à cette dernière condition. Cette composition met, du même fait, en continuité les composants respectifs de chaque chaîne, en respectant leur orientation choisie. L'emploi des rubans bilatères nous assure que nous ne créons pas d'enlacements, car leur bord est parcouru dans les deux sens. Par conséquent, là où leur bord entre, il ressort. Utilisons ce mode de composition à partir de deux chaînes  $S_1$  et  $S_2$ ,  $R_E$ -équivalentes, dont nous choisissons un exemple pour aider à la lecture.

Appelons  $S_2^{-1}$  la présentation obtenue en inversant tous les croisements de  $S_2$  (Voir fig. 22 et 23).

Et nous fabriquons le composé :  $S_1 \# S_2^{-1} \# S_2$  comme  $(S_1 \# S_2^{-1}) \# S_2$  ou comme  $S_1 \# (S_2^{-1} \# S_2)$ .

Ce composé diffère de  $S_1$  par la chaînoùd  $S_2^{-1} \# S_2$ , et de  $S_2$  par la chaînoùd  $S_1 \# S_2^{-1}$ .

---

<sup>6</sup>Dans nos figures, nous indiquons d'un point les croisements où nous intervenons par des mouvements.



FIG. 22

FIG. 23

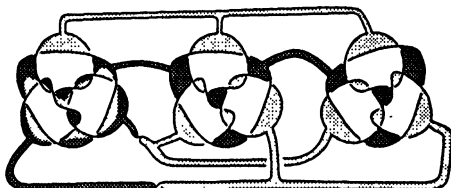


FIG. 24

Ces deux composés sont bien des chaînœuds, du fait que leur nombre d'enlacement est nul pour toute orientation. En effet, la composition par  $\#$  additionne les nombres d'enlacement pour chaque orientation respective, et  $S_1$  et  $S_2$  ont même répartition des nombres d'enlacement, ceux-ci étant simultanément opposés aux nombres d'enlacement de  $S_2^{-1}$  par construction de celle-ci. Il reste à montrer :

**Lemme 13** *Une chaînœud est toujours réductible par une série de mouvements de la théorie  $T_0$  à une chaîne triviale, faite de ronds dispersés.*

Nous le démontrons, en faisant la remarque selon laquelle, dans une chaînœud, nous pouvons toujours empiler les ronds en agissant par des gordiens alternés et des gordiens non alternés à la hauteur des croisements impropres.

Il suffit de constater dans une chaînœud où le nombre  $E_i$  est toujours nul, par définition, que ses croisements impropres peuvent être appariés, par couple d'éléments, soit de même torsion et de coloriage différent, soit de torsion opposée et de même coloriage. Ils présentent donc une symétrie entre eux, sans reste puisqu'il n'y a pas d'enlacement. Vérifions ce fait dans l'exemple choisi en réduisant à une chaîne triviale la chaînœud  $S_1 \# S_2^{-1}$  (Voir fig. 25).

Réduisons à une chaîne triviale la chaînœud  $S_2^1 \# S_2$  (Voir fig. 26).

Agissant ainsi lorsque les ronds sont empilés, nous pouvons par des mouvements de Reidemeister disperser les ronds qui peuvent encore

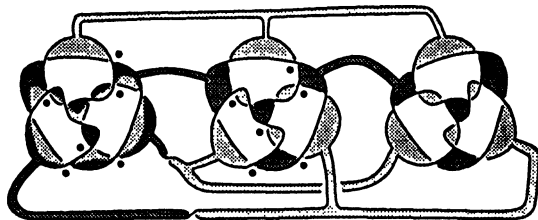


FIG. 25

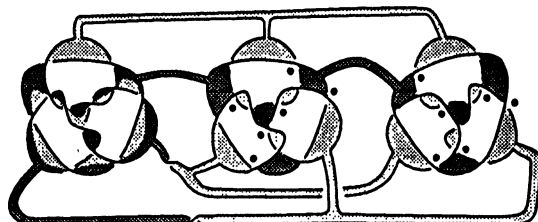


FIG. 26

former des nœuds propres, s'il y a lieu. Dans ce cas, il restera à défaire les nœuds propres par homotopies pour démontrer notre lemme. Grâce à l'homotopie, nous disposons déjà du résultat suivant :

**Lemme 14** *Les nœuds propres forment une seule classe pour la relation  $R_0$ .*

Tout nœud propre peut être réduit à un empilement de boucles. Ce maillage est équivalent, par des mouvements de Reidemeister, au nœud propre trivial constitué par un plongement simple du cercle dans l'espace. Ceci achève notre démonstration. En effet :

$$S_1 \# (S_2^{-1} \# S_2) \approx_0 S_1$$

$$D(S_1 \# S_2^{-1}) \# S_2 \approx_0 S_2$$

Du fait de l'équivalence entre les relation  $R_E$  et  $R_0$ , cette théorie rassemble bien les états d'enlacement  $R_E$ -équivalents dans des classes d'équivalences stables pour  $R_0$ .

### 3.2 Nouages

Nous allons maintenant, par rapport à cette théorie des Enlacements, proposer un autre calcul de l'enlacement permettant d'interpréter géométriquement le nombre  $K'_S$  (voir 2.3).

### 3.2.1 Chiffrage des mouvements

Reprenons l'ensemble  $E_0$  des mouvements de différents types :

$$T_{E_0} = \{B_1, B_1^*, M_2, T_3, G, H, H^*\}$$

en une énumération que nous disposons selon le tableau 1.

Nous définissons une application  $\varphi$  de cet ensemble dans l'ensemble numérique  $\{-1, 0, +1\}$ , soit :  $\varphi : E_0 \rightarrow \{-1, 0, +1\}$ .

Cette application attribue à chaque mouvement une valeur numérique, en fonction du nombre de torsion des croisements mis à contribution. Ce chiffrage élémentaire se trouve dans le tableau 2 qui accompagne le précédent.

Etant donné un changement de présentation  $\mathcal{S}$ , nous pourrions définir l'ensemble  $\sigma$  des *chiffres de la série* :  $\sigma = \{b, b^*, t, g, h, h^*\}$ , de telle manière que chacun d'eux soit la somme des valeurs des mouvements de chaque type considéré dans  $T_{E_0}$ .

Aux mouvements  $M_2$  correspondent un chiffre nul. Ainsi :

$$\begin{aligned} b &= \sum_{X_i \in B_1} \varphi(X_i) & b^* &= \sum_{X_i \in B_1^*} \varphi(X_i) & t &= \sum_{X_i \in T_3} \varphi(X_i) \\ g &= \sum_{X_i \in G} \varphi(X_i) & h &= \sum_{X_i \in H} \varphi(X_i) & h^* &= \sum_{X_i \in H^*} \varphi(X_i) \end{aligned}$$

Nous disposons ainsi d'une application  $\Phi$  qui fait correspondre à chaque changement de présentation  $\mathcal{S}$  un ensemble  $\sigma$  de chiffres :  $\Phi(\mathcal{S}) = \sigma$ .

### 3.2.2 Le nombre de nouage

Etant donnés deux présentations  $S_1$  et  $S_2$  de nœud ou de chaîne, équivalentes par la relation  $R_0$ , l'une est la transformée de l'autre par un changement de présentation  $\mathcal{S}$  :  $S_1 = \mathcal{S}(S_2)$

Nous pouvons décrire la moyenne des nombres de coupure  $K(S_1)$  de l'une comme étant la moyenne des nombres de coupure  $K(S_2)$  de l'autre, augmentée du *nombre de nouage*  $N_\sigma$  du changement de présentation :  $K(\mathcal{S}(S_2)) = K(S_2) + N_\sigma$

**Dualité** Nous appellerons *dualité* l'inversion de la qualité des pleins et des vides pour une présentation donnée. Nous appellerons *présentation duale* d'une présentation donnée celle obtenue par le retournement d'un quelconque des arcs périphériques autour de la figure. Nous appellerons *surface d'empan duale* d'une présentation la surface d'empan de la présentation duale. Ainsi nous décrivons de la même manière la

VAPPEREAU -ORIENTATION DANS LES CHAINES ET LES NOEUDS...

$B_1^+ \rightleftharpoons -B_1^-$	$M_1^+ \rightleftharpoons -M_1^-$	$T_3^+ \rightleftharpoons -T_3^-$	$T_3^+ \rightleftharpoons -T_3^-$		
$B_1^- \rightleftharpoons -B_1^+$	$M_1^- \rightleftharpoons -M_1^+$	$T_3^- \rightleftharpoons -T_3^+$	$T_3^- \rightleftharpoons -T_3^+$		
$B_1^+ \rightleftharpoons -B_1^-$	$M_2^+ \rightleftharpoons -M_2^-$	$T_3^+ \rightleftharpoons -T_3^-$	$T_3^+ \rightleftharpoons -T_3^-$		
$B_1^- \rightleftharpoons -B_1^+$	$M_2^- \rightleftharpoons -M_2^+$	$T_3^- \rightleftharpoons -T_3^+$	$T_3^- \rightleftharpoons -T_3^+$		
$B_1^+ \rightleftharpoons -B_1^-$	$M_2^+ \rightleftharpoons -M_2^-$	$T_3^+ \rightleftharpoons -T_3^-$	$T_3^+ \rightleftharpoons -T_3^-$		
$B_1^- \rightleftharpoons -B_1^+$	$M_2^- \rightleftharpoons -M_2^+$	$T_3^- \rightleftharpoons -T_3^+$	$T_3^- \rightleftharpoons -T_3^+$		
$B_1^+ \rightleftharpoons -B_1^-$	$M_2^+ \rightleftharpoons -M_2^-$	$T_3^+ \rightleftharpoons -T_3^-$	$T_3^+ \rightleftharpoons -T_3^-$		
$B_1^- \rightleftharpoons -B_1^+$	$M_2^- \rightleftharpoons -M_2^+$	$T_3^- \rightleftharpoons -T_3^+$	$T_3^- \rightleftharpoons -T_3^+$		
<p>I</p>	<p>II</p>	<p>III</p>	<p>III</p>		
				<p><math>H^+ \rightleftharpoons -H^-</math> croisement propre</p>	<p><math>H^+ \rightleftharpoons -H^-</math> croisement propre</p>
				<p>V</p>	
				<p><math>G^+ \rightleftharpoons -G^-</math></p>	<p>croisements impropres des deux mêmes nœuds</p>
				<p>IV</p>	

TABLEAU 1  $E_0$



$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
				$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$
				croisement propre	croisement propre
				-1	-1
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
					V
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
				$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$
				croisements impropres	croisements impropres
				des deux mêmes ronds	des deux mêmes ronds
				-1	-1
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\circ \uparrow \downarrow \circ$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$	$\mp \uparrow \downarrow \mp$		
I	II	III		IV	

TABLEAU 2  $\phi : E_0 \rightarrow \{-1,0,+1\}$

moyenne des nombres de coupure duale  $K^*(S_1)$  de l'une en fonction de la moyenne des nombres de coupure duale  $K^*(S_2)$  de l'autre, et du nombre de nouage dual  $N_\sigma^*$  du changement de présentation qui les fait se correspondre :  $K^*(\mathcal{S}(S_2)) = K^*(S_2) + N_\sigma^*$

**Proposition 15** *Etant donnés deux présentations  $S_1$  et  $S_2$  de nœud ou de chaîne, dont l'une est la transformée de l'autre par le changement de présentation  $\mathcal{S}$  de chiffrage  $\sigma$ , le nombre de nouage  $N_\sigma$  et son dual  $N_\sigma^*$  s'écrivent :*

$$N_\sigma = b + t + 2(h + g) \text{ et } N_\sigma^* = -b^* - t - 2(h^* + g).$$

Cette proposition se démontre pour chaque cas élémentaire, à partir de la définition de  $K_S$ , soit de son expression en termes de nombres de croisement de chaque type, de l'effet des mouvements élémentaires sur les types de croisements et compte tenu du chiffrage de ces mêmes mouvements. Ainsi :

$$K(\mathcal{S}(S_2)) = K(S_2) + b + t + 2(h + g)$$

$$K^*(\mathcal{S}(S_2)) = K^*(S_2) - b^* - t - 2(h^* + g)$$

Compte tenu que les moyennes des nombres de coupure  $K$  et  $K^*$  duaux l'une de l'autre d'une même présentation sont bien définies, les nombres de nouage de deux changements de présentations différents entre les deux mêmes présentations données, sont égaux termes à termes.

**Corollaire 16** *Soient deux présentations  $S_1, S_2$  liées par deux changements de présentations  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}'$ , de chiffrages respectifs  $\sigma$  et  $\sigma'$ , alors leurs nombres de nouage respectifs sont égaux :*

$$N_\sigma = N_{\sigma'} \text{ et } N_\sigma^* = N_{\sigma'}^*$$

Nous concluons de ce chiffrage une considération très générale qui dit qu'une présentation  $S_1$  d'un Enlacement représente une série  $\mathcal{S}$  de mouvement pour une autre présentation  $S_2$  du même Enlacement. Formulation que nous résumons dans l'expression :

$$\frac{S_1}{\mathcal{S}} \longrightarrow S_2$$

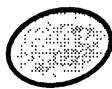


FIG. 27

### 3.3 Théorie des Non-Nœuds de un à trois ronds

Nous appelons *présentation en non-nœud* la présentation d'un nœud ou une chaîne alternée dont la surface d'empan minimale est bicolorable, c'est-à-dire qui ne nécessite pas de coupure. Ces présentations en non-nœuds sont toujours alternés par définition. Nous pouvons parler d'une théorie des Non-Nœuds à l'occasion de la théorie des Enlacements dans les cas constitués de un, deux ou trois ronds. Sous cette condition pour  $r \leq 3$ , chaque présentation de nœud et de chaîne alternée et non alternée détermine un Enlacement que nous appelons maintenant un *Non-Nœud*.

**Proposition 17** *Pour  $r \leq 3$ , chaque classe, constituant ce que nous avons appelé un enlacement, est un Non-Nœud et possède une présentation en non-nœud standard.*

Ce fait est démontré par l'étude formelle des répartitions d'enlacements et du mouvement des signes négatifs qui marquent le changement d'orientation des ronds aussi bien que l'inversion des croisements dans le formalisme que nous avons introduit dans l'étude des relations  $R_{enl}$  et  $R_E$  (2.6). C'est ainsi que nous distinguerons deux chaînes olympiques nécessairement inverses l'une de l'autre. Pour chaque état d'enlacement nous savons construire au moins un exemplaire d'une présentation en non-nœud lui correspondant. Cet exemplaire offre dans chaque cas un nombre minimum de croisements et il est purement impropre. Nous appelons cette présentation en non-nœud représentant une classe donnée, le non-nœud contenu  $S_0$  dans une quelconque présentation appartenant à cette classe.

#### 3.3.1 Construction des non-nœuds de un à trois ronds contenus dans un nœud ou une chaîne

**Un** – Commençons par les nœuds constitués d'un seul rond. Il n'y a qu'un seul non-nœud, c'est le *nœud trivial* (Voir fig. 27). **Deux** – Dans le cas des chaînes faites de deux ronds, à part la *chaîne triviale* (Voir



FIG. 28

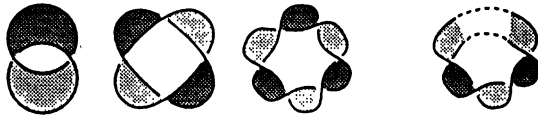


FIG. 29

fig. 28). Les non-nœuds sont constitués par la série des *non-nœuds toriques* de torsion positive (Voir fig. 29).

**Trois** – Dans le cas des chaînes faites de trois ronds, à part la chaîne triviale et les enlacements précédents accompagnés d'un rond libre, les non-nœuds sont constitués par les *chaînettes* alternées de torsion positive faites de trois ronds (Voir fig. 30). et par les deux séries des *chaînes olympiques* inverses l'une de l'autre, dont nous donnons les premiers exemplaires :

Ces deux séries différentes se résument dans les figures indexées par trois nombres entiers. Nous avons fixé ici la présentation standard représentant chaque non-nœud de notre théorie sous l'aspect d'une présentation en non-nœud. Nous obtenons bien tous les types modulo  $R_0$  et  $R_E$ .

### 3.3.2 Un autre calcul de l'enlacement

Pour une présentation donnée,  $r \leq 3$ , nous construisons l'état d'enlacement qui en fait partie sous l'aspect de son non-nœud standard. A la répartition de ces enlacements correspond une répartition des nombres de chaîne qui nous permet de désigner ce non-nœud standard. Nous



avec  $m \geq 1$  et  $n \geq 1$

FIG. 30

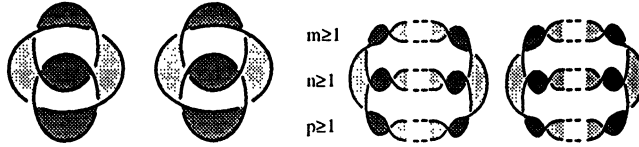


FIG. 31

FIG. 32

savons dès lors trouver le non-nœud contenu  $S_0$  dans un nœud ou une chaîne.

La moyenne des nombres de coupure  $K_0$  de la présentation standard du non-nœud contenu  $S_0$  représentant la classe d'équivalence de la présentation donnée fournit un nouveau calcul de l'enlacement contenu dans le nœud ou la chaîne, considéré indépendamment du coloriage.

**Proposition 18** *Pour les non-nœuds standards, la moyenne des nombres de la coupure calculée dans le dual  $K^*(S_0) = K_0^*$  est l'opposée de la moyenne des nombres de la coupure  $K_0$  soit :  $K_0^* = -K_0$*

**Démonstration** Dans les non-nœuds standards, la vrille propre est nulle,  $\eta = 0$ , car il n'y a pas de croisement propre. Ainsi d'après notre théorème principal :

$$c_0 - 2K_0 = 0 \text{ et } c_0^* - 2K_0^* = 0$$

Or  $c_0 = -c_0^*$  du fait de l'inversion des torsions dans la dualité, d'où notre proposition.

Mais ce changement de signe n'a aucun effet sur la définition du nombre d'enlacement indépendant du coloriage ainsi calculé. Nous adoptons, par construction, le nombre correspondant aux présentations données ci-dessus. Seules les séries olympiques présentent des nombres positifs et négatifs d'enlacement pour ce nouveau comptage et la détermination du nombre d'enlacement indépendant du coloriage y est plus délicat : il nécessite de détailler la répartition des nombres de chaînes.

### 3.3.3 Interprétation de $K_S$

Nous parlerons du nombre de nouage  $N_S$  et du nombre de nouage dual  $N_S^*$  d'une présentation  $S$  d'un nœud ou d'une chaîne, pour  $r \leq 3$ , comme les nombres de nouage duaux l'un de l'autre d'un quelconque

changement de présentation qui transforme le non-nœud  $S_0$  contenu dans ce nœud ou cette chaîne en cette présentation  $S$  :

$$N_S = K_S - K_0 \quad \text{et} \quad N_S^* = K_S^* - K_0^*$$

Nous pouvons ainsi interpréter la moyenne des nombres de la coupure d'une présentation et son nombre dual, par les formules :

$$\begin{aligned} K_S &= b + 2h + t + 2g + K_0 \\ K_S^* &= -b^* - 2h^* - t - 2g + K_0^* \end{aligned}$$

où  $\sigma = \{b, b^*, t, g, h, h^*\}$  est le chifrage d'un quelconque changement de présentation qui transforme  $S_0$  en  $S$ .

### 3.3.4 Partie nouage, partie Lacan et partie enlacement

Si nous revenons maintenant aux figures 7 à 13, et aux définitions du 2.4, dans une présentation quelconque d'un nœud ou d'une chaîne orientée par un coloriage, nous pouvons associer aux parties où passe la coupure le nombre de la coupure  $k_{iS}$ , et aux parties où ne passe pas la coupure le nombre de la coupure dans le dual  $k_{iS}^*$ .

Nous connaissons par le corollaire 5 (2.4) l'expression de ces nombres qui rend compte du mouvement de la coupure au travers des différents coloriages d'une même présentation :

$$k_{iS} = K_S - E_i \quad \text{et} \quad k_{iS}^* = K_S^* - E_i.$$

Or nous venons d'exprimer  $K_S$  et  $K_S^*$  en fonction des nombres de nouage, duaux l'un de l'autre, et du nombre d'enlacement indépendant du coloriage :

$$K_S = N_S + K_0 \quad \text{et} \quad K_S^* = N_S^* + K_0^*$$

Ainsi les deux parties peuvent être exprimées en fonction des nombres de nouage et du nombre d'enlacement  $K_0$  que nous avons adopté :

$$k_{iS} = N_S + K_0 - E_i \quad \text{et} \quad k_{iS}^* = N_S^* + K_0^* - E_i$$

Mais, ce qui est vérifié par le nombre de la coupure d'une présentation quelconque, l'est aussi dans un non-nœud standard, soit, si à l'occasion de différents coloriages  $i$ , nous appelons  $k_{i0}$  et  $k_{i0}^*$  les nombres de la coupure et de la coupure duale de ces non-nœuds :

$$k_{i0} = K_0 - E_i \quad \text{et} \quad k_{i0}^* = K_0^* - E_i.$$

Ceci nous donne par conséquent l'expression des parties respectives de notre dessin en fonction des nouages et de coupures éventuelles du non-nœud contenu :

$$k_{iS} = N_S + k_{i0} \quad \text{et} \quad k_{iS}^* = N_S^* + k_{i0}^*.$$

Comme nous avons choisi les non-nœuds de telle manière qu'ils aient une présentation sans coupure, il existe bien un coloriage  $i = 0$  pour lequel  $k_{i0} = k_{00} = 0$ , et par conséquent<sup>7</sup>:  $k_{00}^* = -c_0$ .

Par conséquent, nous sommes assurés qu'il existe un coloriage  $i = 0$ , tel que, pour une présentation quelconque, à sa partie où passe la coupure soit associé :  $k_{0S} = N_S$ .

Nous l'appellerons la *partie nouage* de la présentation donnée, c'est sa partie coupure dans le coloriage  $i = 0$ .

La partie où ne passe pas la coupure, correspondante à la partie nouage, vaut :

$$k_{0S}^* = N_S^* - c_0$$

Nous appellerons *partie non-nouage* de la présentation donnée, la partie où ne passe pas la coupure dans le coloriage  $i = 0$ , nous lui associons le nombre de croisement  $-k_{0S}^*$ .

La partie non-nouage contient donc une partie correspondant au nombre de nouage dual  $-N_S^*$  que nous appelons la *partie Lacan*, en référence à ce que nous appelons nœuds de Lacan (Fig. 6), et une partie correspondant au nombre de croisement  $c_0$  du non-nœud contenu dans la chaîne que nous appellerons *partie enlacement*.

Dans les cas alternés, le nouage non nul révèle le nœud que nous voulons encore préciser par la suite, en tant qu'il nous assure de l'effectuation de mouvements gordiens et d'homotopies. Nous résumons ce fait dans la formule qui dit que le nœud est un accomplissement de coupure dans nos dessins, qui sont à lire dans la mesure où nous retrouvons la trace particulièrement isolable dans les cas alternés du nouage et du non-nœud contenu lorsque  $r \leq 3$ . Nous généraliserons par la suite ces résultats à la théorie des Enlacements de quatre ronds et plus.

---

<sup>7</sup>Ceci réclame une remarque simple, le dual d'un non nœud est dit un *pur nœud*, si nous entendons par là un nœud ou une chaîne tel que la coupure passe par tous les croisements.

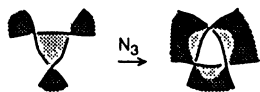


FIG. 33



FIG. 34

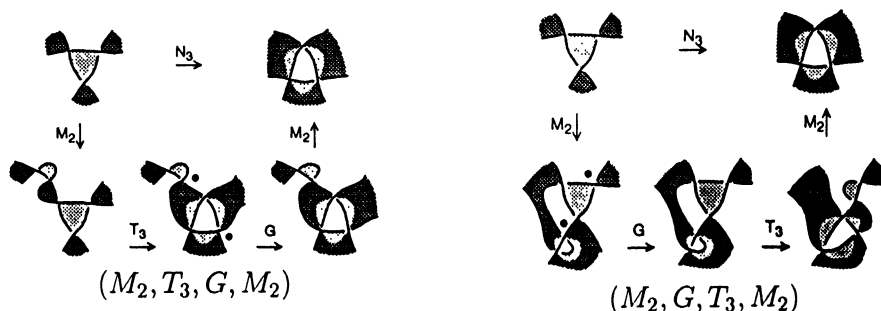


FIG. 35

### 3.4 Calcul en théorie des Nœuds

En définissant un nouveau mouvement, nous l'appellerons le *mouvement Nœud*, nous pouvons formuler une *théorie des Nœuds*  $\overline{T}_C$ . Celle-ci se réfère à une autre théorie des enlacements où le mouvement nœud a été substitué aux gordiens et aux homotopies, nous appellerons cette nouvelle théorie, la *théorie des chaînes intrinsèques*  $T_{00}$ .

#### 3.4.1 Le mouvement Nœud

Commençons par définir ce nouveau mouvement  $N_3$  qui s'effectue sur les triskels alternés (Voir fig. 33). Ce mouvement équivaut à ajouter une chaînœud borroméenne à un triskel alterné.

Cette présentation du mouvement Nœud justifie que nous l'appelions aussi *mouvement chaînœud borroméenne* ou *mouvement borroméen* ; le rôle qu'il va jouer en théorie des Nœuds établit la fonction de structure qui est accordée dans le champ freudien par Lacan à la chaînœud borroméenne.

Ce mouvement Nœud est un composé de mouvements élémentaires dans notre précédente théorie des Enlacements. La série qui le représente contient toujours un mouvement  $T_3$  et un gordien, parmi des mailles.

Nous allons chiffrer ces nouveaux mouvements de telle manière que



leur nombre,  $n$ , puisse être exprimé dans le nombre de nouage par la formule  $3n = 2g + t$ .

Il faut remarquer que si un mouvement Nœud se substitue à un gordien spécifique, comme dans la figure 35, nous parlerons à cette occasion de *gordien proche*, accompagné d'un mouvement  $T_3$ . N'importe quel gordien n'est pas nécessairement susceptible d'être rendu par un seul mouvement Nœud, mais il est certainement rendu par plusieurs comme nous allons le montrer maintenant.

### 3.4.2 La théorie des nœuds, extrinsèque à la théorie des chaînes intrinsèques

Afin d'écrire une théorie  $\overline{T}_C$  des Nœuds et de construire le nombre de nœud, pour un nœud ou une chaîne quelconque, nous procéderons au dénouage de cet objet dans une théorie  $T_{00}$  des chaînes intrinsèques, où les mouvements Nœuds positifs remplacent les mouvements gordiens et les homotopies de la théorie des Enlacements précédente, et où nous maintenons le recours aux mouvements de Reidemeister. Appelons  $E_{00}$  l'ensemble de ces mouvements, et notons  $\mathcal{S}$  une série de tels mouvements. Nous définissons alors, grâce à ces changements de présentations, une relation  $R_N(S_1, S_2)$ , sur l'ensemble des présentations de nœuds ou de chaînes.

Soit :

$$R_N(S_1, S_2) \Leftrightarrow \exists \mathcal{S} (\mathcal{S}(S_1) = S_2).$$

Cette relation est une relation d'équivalence. Nous la noterons parfois  $S_1 \approx_N S_2$ .

Nous appellerons *Chaînes intrinsèques* les classes d'équivalence définies par cette relation. Il est aisé de montrer par un calcul sur les caractéristiques d'une orientation quelconque, lorsqu'il s'agit de croisements impropres, que ces mouvements respectent la répartition des nombres de chaînes, et par conséquent la relation  $R_E$  :

**Proposition 19** *Pour deux présentations de chaînes ou de nœuds  $S_1$  et  $S_2$  :*

$$R_N(S_1, S_2) \Rightarrow R_E(S_1, S_2)$$

**Théorème 20** *Si deux chaînes  $S_1$  et  $S_2$  sont  $R_E$ -équivalentes, alors elles sont  $R_N$ -équivalentes :*

$$R_E(S_1, S_2) \Rightarrow R_N(S_1, S_2).$$

Nous savons déjà, à propos de la relation  $R_0$  en place de  $R_N$ , pour l'avoir rencontrée avec l'usage de la composition  $\#$  dans notre théorie des Enlacements que la démonstration de ce théorème nécessite de démontrer deux lemmes que nous regroupons ici en un théorème.

### **Théorème 21**

*Une chaînœud (respectivement un nœud propre) est toujours réductible par une série de mouvements de la théorie  $T_{00}$  des chaînes intrinsèques à une chaîne triviale (respectivement un rond trivial).*

Donnons une démonstration de ce théorème dont il est remarquable qu'il suffise qu'il porte sur les chaînœuds et les nœuds propres. Grâce aux mouvements  $M_2$ ,  $T_3$  et  $N_3$ , nous pouvons extraire un quelconque rond d'une chaînœud. Le mouvement  $N_3$  permet de passer les obstacles représentés par les triskels alternés. En effectuant ces mêmes types de mouvements, nous pouvons extraire un par un chacun des ronds d'une chaînœud, puisqu'elle ne contient pas d'enlacement. Le théorème est démontré du fait qu'aux mailles et aux triskels non alternés s'appliquent des mouvements  $M_2$  et  $T_3$ , et qu'à l'occasion des triskels alternés nous pouvons recourir au mouvement  $N_3$ . Il n'y a pas de maille alternée sans une autre maille alternée de torsion inverse qui la compense, et nous ne rencontrons pas d'autres cas de figures.

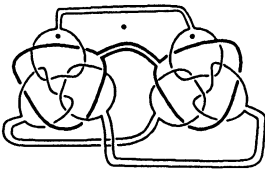
Montrons cela en reprenant la partie du montage  $S_2^{-1}\#S_2$  déjà rencontrée (3.1.3) (Voir fig. 36).

Dans cette théorie des chaînes, chiffrons l'ensemble de nos mouvements nœuds disposés dans le tableau 3. Ce chiffrage élémentaire se trouve résumé dans le tableau 4. Etant donné un changement de présentation  $\mathcal{S}$  défini par la série  $(X_1, \dots, X_n)$ , avec  $X_i$  appartenant à l'ensemble de nos mouvements  $E_{00}$ , nous pouvons définir l'ensemble  $\sigma$  des chiffres de la série  $\sigma = \{b, b^*, t, n\}$ . Il est alors facile de calculer la proposition suivante :

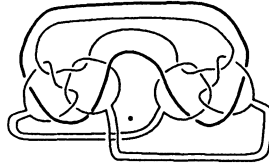
**Proposition 22** *Si deux chaînes  $S_1$  et  $S_2$  sont liées par la série des mouvements  $S$  de chiffre  $\sigma$  telles que :  $\mathcal{S}(S_1) = S_2$ , alors les moyennes des nombres de coupure de ces deux chaînes vérifient :*

$$K(S_2) = b + t + 3n + K(S_1) \quad \text{et} \quad K^*(S_2) = -b^* - t - 3n + K^*(S_1)$$

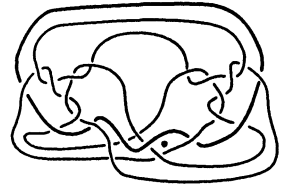
**Définition 4** *Nous appellerons nombres de nouage duaux l'un de l'autre les deux expressions :*  $N_\sigma = b + t + 3n$  *et*  $N_\sigma^* = -b^* - t - 3n$ .



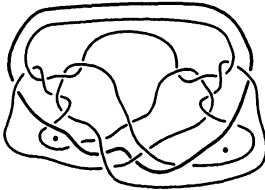
Nous dé faisons succes-  
sivement deux mailles  
dans le haut du dessin.



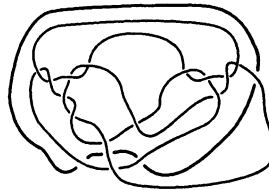
Nous effectuons un mou-  
vement  $T_3$ ,



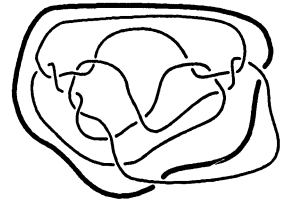
et nous nous apprêtons  
à effectuer un mouvement  
 $N_3$ .



Le mouvement  $N_3$  étant  
effectué vers le bas, nous  
alons défaire deux nou-  
velles mailles.

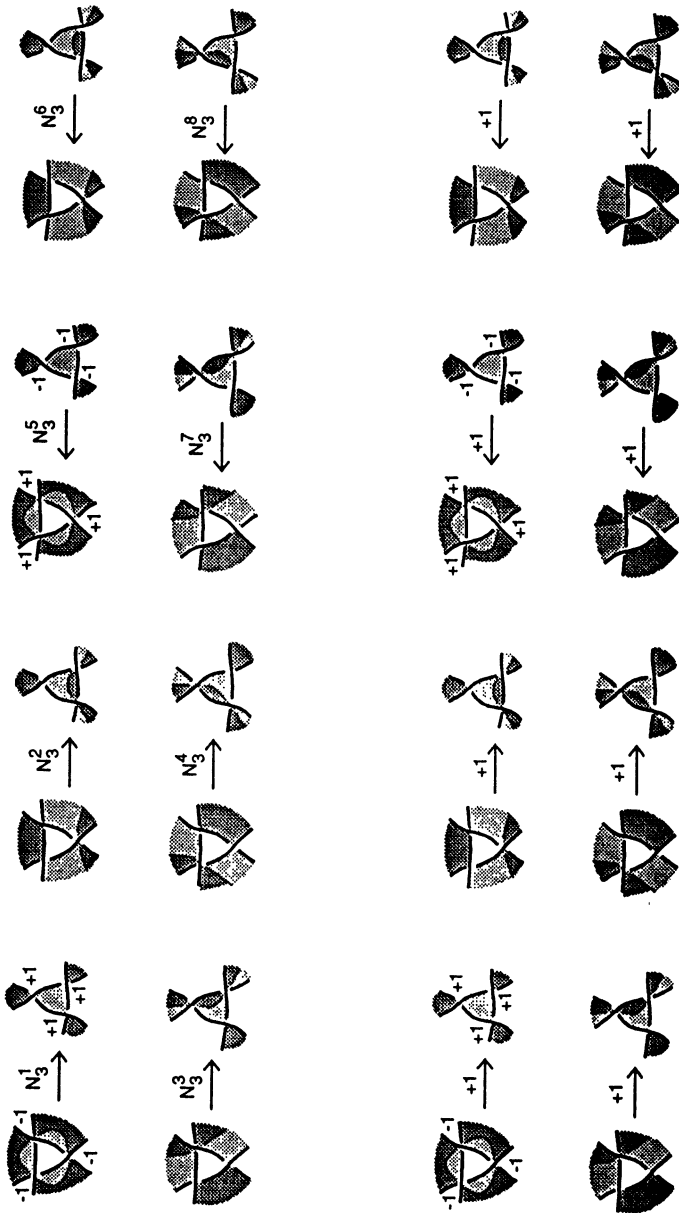


En effectuant un  $T_3$  et  
en supprimant une maille  
il ne restera plus qu'à  
défaire une maille,



pour pouvoir dessiner  
le rond en graisse plus  
épaisse.

FIG. 36



IV

IV

TABLEAUX 3  $\mathcal{N}$  ET TABLEAU 4  $\phi : \mathcal{N} \rightarrow \{+1\}$

Notre théorie  $\overline{T}_C$  des Nœuds est alors extrinsèque à cette théorie  $T_{00}$  des chaînes intrinsèques :  $\overline{T}_C$  est la *théorie  $T_C$  classique des Nœuds et des chaînes* (mouvements de Reidemeister) où nous définissons par un calcul un nouvel invariant grâce à ce rapprochement avec la théorie  $T_{00}$  des Chaînes intrinsèques.

Le calcul consiste à dénouer les présentations de manière intrinsèque à la théorie  $T_{00}$  des Chaînes afin d'obtenir une analyse de leur nombre de nouage, dont nous ne retenons que le nombre de mouvements nœud noté  $n$ , pour chaque série de mouvement.

### 3.4.3 Le nombre de nœud

Nous commençons par déterminer, dans un nœud ou une chaîne quelconque  $S$ , la répartition des nombres de chaîne  $E_i$  grâce aux nombres d'enlacement aisés à calculer par les coloriages. Les nœuds propres ont un nombre de chaîne nul, le non-nœud  $S_0$  qu'ils contiennent est trivial. Dans le cas des chaînes de deux et trois ronds, ceci nous permet de déterminer quel est le non-nœud  $S_0$  contenu dans la chaîne. Dans le cas des chaînes de quatre ronds et plus, la répartition des nombres de chaîne  $E_i$  nous permet de déterminer la présentation minimale alternée  $S_0$  contenue dans la chaîne. Cette présentation minimale alternée peut être un non-nœud, ou bien une chaîne présentant une coupure. Cette coupure fait la différence de traitement à partir de quatre ronds. Le nombre de nœud sera déterminé par rapport au cas exemplaire choisi comme représentant l'état d'enlacement.

$$\begin{array}{c} \underline{S} \\ \S \end{array} \longrightarrow S_0$$

La présentation  $S$  représente différentes séries de mouvements  $\S$  pour la présentation  $S_0$ , dont les nombres de nouage duaux sont exprimés dans cette nouvelle théorie des chaînes intrinsèques par :

$$N_S = b_S + t_S + 3n_S \quad \text{et} \quad N_S^* = -b_S^* - t_S - 3n_S,$$

pour une quelconque de ses séries représenté par  $S$  pour  $S_0$ .

**Définition 5** *Nous appellerons le nombre de nœud d'une présentation donnée le nombre a minimum des nombres de mouvements nœuds obtenu pour toutes les séries  $\S$  qui mènent de la répartition  $S_0$  des*

enlacements contenues dans cette présentation, à cette présentation  $S$  elle-même :

$$a = \min_S n_S$$

tel que :  $\mathcal{B}(S_0) = S$ , avec  $N_S = b_S + t_S + 3n_S$  et  $N_S^* = -b_S^* - t_S^* - 3n_S$ .

Le lecteur peut vérifier que ce nombre est invariant pour les isotopies d'ambiance, puisqu'il ne dépend ni des mouvements  $B_1$  et  $T_3$  et qu'il est indifférent aux mouvements  $M_2$ .

Ainsi, le fait que  $S$  représente un mouvement  $\mathcal{B}$  pour  $S_0$  produit le nombre de nœud  $a$ . Nous rendons cela par l'expression :

$$\frac{S}{\mathcal{B}} \longrightarrow \frac{S_0}{a}$$

### 3.4.4 La théorie du Nœud

Si nous nous référons à une théorie des Chaînes qui consiste à effectuer des mouvements nœuds positifs, chiffrés dans le tableau 4, et leurs inverses, chiffrés négativement, nous pouvons calculer des nombres de nœud relatifs, mais la condition qui impose de choisir la série dont le nombre de nœud est minimum, produit un quotient brutal modulo deux de ce nombre de nœud.

Le nombre de nœud se réduit à 0 ou 1.

Dans la théorie du Nœud qui s'y rapporte, il n'y a, dans un nœud propre ou une chaîne quelconque, qu'un nœud ou pas de nœud. Dans cette théorie il n'y a qu'un nœud.

## 3.5 Décomposition de $T_3$

Pour conclure, nous renouons avec la théorie classique des nœuds en apportant une précision dans l'analyse du troisième mouvement de Reidemeister (Voir fig. 37).

En effet, celui-ci se décompose en une série contenant un mouvement gordien proche de la théorie des enlacements et un mouvement chaîné borroméenne, dans la théorie des chaînes présentée plus haut.

Nous proposons ce résultat à la réflexion mathématicienne, en regard du traitement qu'elle développe déjà du mouvement  $T_3$  en terme de solutions des équations de YANG-BAXTER [5].

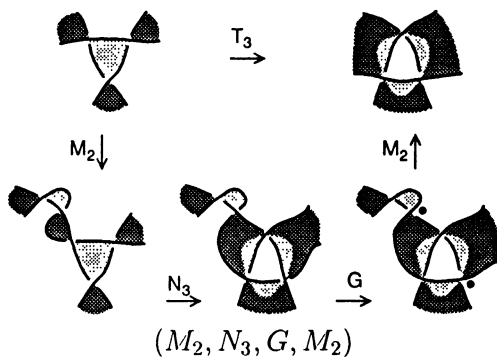


FIG. 37

## Références

- [1] Gramain André. *Topologie des surfaces*. PUF, Paris, 1971.
- [2] Vappereau J. M. *Etoffe (les surfaces topologiques intrinsèques), fascicule de résultats No 2*. TEE, Paris, 1988.
- [3] Reidemeister K. *Knotentheorie*. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932.
- [4] Fox R.H. *Topologie des surfaces*. Proc. Top. Inst., 1962.
- [5] Kauffman L.H. *Abstract tensors and the Yang-Baxter Equation, in Knots, Topology and Quantum Field Theories*. Lussana Worls Scientific Pub., Florence, 1989.

Topologie En Extension  
 5, rue de l'Abbé Carton  
 75014 - Paris

## INDEX DES TERMES

- Accomplissement de coupure, 3.3.4.  
 Bilatère (orientable), 1.2.  
 Boucle, 3.1.1.  
 Caractéristique  $\gamma_i$ , signe de croisement (crossing sign), 2.1.  
 Chaîne, 1.  
 Chaîne à coupures constantes, 2.4.2.  
 Chaînette, 3.3.  
 Chaîne intrinsèque, 3.4.2.  
 Chaînœud (linknods), 2.4.2.  
 Chaîne olympique, 3.1.  
 Chaîne triviale, 3.3.1.  
 Chiffre de la série  $\sigma$ , 3.2.1.  
 Croisement impropre, 2.1.  
 Croisement propre, 2.1.  
 Dualité, 3.2.2.  
 Enlacement, 3.1.1.  
 Etat de l'enlacement, 2.5.2.  
 Gordien d'ambiance, 3.1.1.  
 Gordien proche, 3.1.1.  
 Homotopie régulière (mouvement gordien propre), 3.1.1.  
 Maille, 3.1.1.  
 Moyenne des nombres de la coupure  $K_S$ , 2.3.  
 Mouvement de la coupure, 3.1.1.  
 Mouvement Gordien impropre (alterné), 3.1.1.  
 Mouvement Gordien non-alterné (impropre), 3.1.2.  
 Mouvement de Reidemeister, 3.1.1.  
 Mouvement Nœud (chaînœud borroméenne, borroméen), 3.4.2.  
 Nœud, 1.  
 Nœud trivial, 3.3.1.  
 Nœud propre, 2.1.  
 Nœud impropre, 2.4.2.  
 Nombre de croisement  $c_S$ , 2.1.  
 Nombre de chaîne  $E_i$ , 2.1.  
 Nombre de la coupure  $k_{iS}$ , 2.4.  
 Nombre d'enlacement  $enl$  (linking number), 2.1.  
 Nombre de nœud  $a$ , 3.4.3.  
 Nombre de nouage  $N_\sigma$ , 3.2.2.  
 Non-nœud, 3.3.  
 Non-nœud contenu  $S_0$ , 3.3.  
 Non-nœud torique, 3.3.1.  
 Parité de la coupure, 1.3.  
 Partie Lacan, 3.3.4.  
 Partie non-nouage, 3.3.4.  
 Partie nouage, 3.3.4.  
 Plein, 1.1.  
 Présentation (diagram), 1.  
 Présentation duale, 3.2.2.  
 Présentation en non-nœud, 3.3.  
 Présentation standard d'un non-nœud, 3.3.1.  
 $R_0$ -équivalence, 3.1.1.  
 $R_{enl}$ -équivalence, 2.5.1.  
 $R_E$ -équivalence, 2.5.2.  
 $R_N$ -équivalence, 3.4.2.  
 Répartition des nombres d'enlacement, 2.5.1.  
 Répartition des nombres de chaîne, 2.5.2.  
 Schéma plat,  $S$ , 1.  
 Surface d'empan, 1.1.  
 Surface d'empan duale, 3.2.2.  
 Théorie classique des noeuds et des chaînes TC, 3.4.2.  
 Théorie des Enlacements  $T_0$ , 3.1.  
 Théorie des Chaînes intrinsèques  $T_{00}$ , 3.4.  
 Théorie des Nœuds  $\overline{T}_C$ , 3.4.  
 Théorie des non-noeuds, 3.3.  
 Torsion (signe d'incidence), 2.1.  
 Triskel, 3.1.1.  
 Unilatère (non orientable), 1.2.  
 Valence, 1.2.  
 Variation de la coupure, 2.2.  
 Vide, 1.1.  
 Vrille (writhe)  $vi$ , 2.1.  
 Vrille propre  $\eta$ , 2.3.