CAHIERS DE
TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

IOLE DE FREITAS DRUCK

Un modèle de filtres pour l'analyse réelle synthétique

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 34, nº 2 (1993), p. 83-120

<http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1993__34_2_83_0>

CAHIERS DE TOPOLOGIE
ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE
CATÉGORIQUES

VOL. XXXIV-2 (1993)

UN MODELE DE FILTRES POUR L'ANALYSE REELLE SYNTHETIQUE

par IOLE DE FREITAS DRUCK

Résumé. Dans cet article on fait la construction d'un modèle pour l'ARS - le topos de Grothendieck $\tilde{\Phi}$, appelé le *topos des filtres*. La description de $\tilde{\Phi}$ est faite d'une façon plus élémentaire que celle de la plupart des modèles de la GDS développés dans la littérature [4], [13], [15], [10]. Pour définir $\tilde{\Phi}$ il n'est pas nécessaire d'employer ni la théorie des Anneaux C^∞, ni les idéaux de fonctions C^∞, ni les algèbres de Weil. Cette simplification est possible grâce à l'absence d'infinitésimaux nilpotents dans l'ARS. Le modèle $\tilde{\Phi}$ est construit directement à partir de sous-espaces X des espaces euclidiens $\mathbf{R}^n$ et des filtres d'ensembles localement fermés sur X. L'article poursuit avec la vérification de la validité, dans le topos $\tilde{\Phi}$, de quelques axiomes algébriques de l'ARS, de l'axiome de Fermat, des axiomes d'intégration, du théorème de la fonction inverse, et de l'existence d'infinitésimaux inversibles et de nombres naturels infiniment grands. Finalement deux autres propriétés valables dans $\tilde{\Phi}$ sont détaillées. On montre que tout énoncé σ de l'arithmétique est vrai dans le modèle des filtres si et seulement si σ est vrai dans le modèle $\mathbf{N}$. D'autre part, deux notions de représentation interne à $\tilde{\Phi}$ pour les fonctions $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sont données et on montre que toute fonction $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admet une représentante interne dans le modèle qui est même universelle dans un sens qu'on précise dans l'article.

Introduction.

La théorie axiomatique qu'on appelle ici Analyse Réelle Synthétique (ARS) est une variante de l'Analyse Infinitésimale Lisse (AIL) décrite dans Moerdijk-Reyes [15]. L'ARS est obtenue en remplaçant l'axiome de Kock-Lawvere par celui de Fermat à l'intérieur de l'AIL. Il est connu que la logique sous-jacente de cette dernière théorie (et donc de la première théorie aussi) est la logique des topoi,

* Ce travail a été réalisé avec l'aide financière des Institutions Publiques Brésiliennes suivantes: Universidade de São Paulo, Conselho Nacional de Pesquisas et Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

c'est-à-dire, les deux théories sont non-classiques. À la manière de la Géométrie Différentielle Synthétique (GDS), l'aspect synthétique vient du fait que plusieurs démarches de l'analyse, notamment la notion de limite avec les techniques $\varepsilon-\delta$, sont algébrisées dans ce contexte et donc sont beaucoup plus faciles à manipuler. Mais, au contraire de la GDS, des notions géométriques telles que, par example, les champs de vecteurs ou les formes différentielles, n'ont pas, dans l'ARS, un développement plus simple ou naturel. Cela est dû au fait que ni les infinitésimaux nilpotents ni l'axiome de Kock-Lawvere ne sont disponibles dans la théorie. Cependant l'ARS dispose des infinitésimaux inversibles et de l'axiome de Fermat:

$$\text{“}\forall f \in R^R \exists! g \in R^{R\times R} \forall x \in R \forall y \in R(f(x) - f(y) = (x - y)g(x,y))\text{”}$$

qui nous permet de définir, pour chaque $f \in R^R$ sa dérivée, en utilisant l'identité:

$$\text{“}\forall x \in R(f'(x) = g(x,x))\text{”}.$$

L'ARS est une théorie adéquate pour le développement de l'analyse des fonctions C^∞. L'existence d'infinitésimaux inversibles rend cette théorie un peu plus proche de l'Analyse non Standard (AnS) que de la GDS, mais les deux premières restent quand même des théories beaucoup éloignées: l'ARS est une théorie intuitioniste et l'AnS est une théorie classique.

Cet article est une partie de ma thèse de Ph.D., présentée à l'Université de Montréal en âout 1986 et sous la direction de recherche du professeur Dr. Gonzalo E. Reyes. Je voudrais remercier le professeur Reyes de m'avoir suggéré les idées de base pour la construction du modèle $\tilde{\Phi}$ ainsi que par la façon dont il a suivi, de près, le développement de mon travail de thèse.

Le plan de cet article est le suivant:

§ 1 - Le topos $\tilde{\Phi}$
- A - Description du site Φ
- B - Description du topos $\tilde{\Phi}$ comme modèle de l'ARS.

§ 2 - Vérification de quelques axiomes de l'ARS dans $\tilde{\Phi}$
- A - Des axiomes algébriques
- B - L'axiome de Fermat
- C - Les axiomes d'intégration
- D - Le théorème de la fonction inverse
- E - L'existence d'infinitésimaux inversibles ou l'existence de nombres naturels infiniment grands.

§ 3 - D'autres propriétés valables dans $\tilde{\Phi}$
- A - Coïncidence de la théorie de N avec la théorie de $\mathbf{N}$
- B - Représentation des fonctions $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ quelconques dans $\tilde{\Phi}$

§ 1 - Le topos $\tilde{\Phi}$

$\tilde{\Phi}$ est le topos des faisceaux sur le *site des filtres* Φ.

A - Description du site Φ

Pour un $X \subset \mathbf{R}^n$ localement fermé, soit $P_{\ell f}(X)$ l'ensemble des parties localement fermées de X (cf [3]).

1.1. Définition: Un sous-ensenble $\Phi \subset P_{\ell f}(X)$ sera dit un *filtre d'ensembles localement fermés sur* X ou un *ℓf-filtre sur* X ou simplement un *filtre sur* X si Φ satisfait les trois propriétés suivantes:

(i) $X \in \Phi$;

(ii) $\forall F_1, F_2 \in \Phi(F_1 \cap F_2 \in \Phi)$;

(iii) $\forall F_1 \in P_{\ell f}(X)\ \forall F_2 \in \Phi(F_2 \subset F_1 \Rightarrow F_1 \in \Phi)$. (Voir la notion de z-filtres dans [6]).

2.2. Définition (de la *catégorie des filtres* Φ).

(a) Les *objets* de Φ sont les paires (X, Φ), où $X \subset \mathbf{R}^n (n \in \mathbf{N})$ est un sous-espace localement fermé et Φ est un filtre d'ensembles localement fermés sur X.

(b) Les morphismes de Φ sont les classes d'équivalence $[f]_\Phi : (X, \Phi) \longrightarrow (Y, \Psi)$ pour les fonctions C^∞ $f : dom f \subset X \to Y$ telles que:

  (i) $dom f \in \Phi$,

  (ii) $\forall G \in \Psi(f^{-1}(G) \in \Phi)$,

  (iii) pour $g : dom g \subset X \to Y$, $g \in C^\infty$, $dom g \in \Phi$ et $\forall G \in \Psi(g^{-1}(G) \in \Phi)$ on a que $[f]_\Phi = [g]_\Phi$ (ou que $f \sim_\Phi g$ et dans ce cas on dit que *f est équivalente à g modulo Φ*) ssi $\forall i = 1, \ldots, m\ (\{x \in X \mid f_i(x) = g_i(x)\} \in \Phi)$, où $Y \subset \mathbf{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ et $g = (g_1, \ldots, g_m)$.

(c) La composition de deux flèches $(X, \Phi) \xrightarrow{[f]_\Phi} (Y, \Psi)$ et $(Y, \Psi) \xrightarrow{[h]_\Psi} (Z, \chi)$ est donnée par la classe d'équivalence de la fonction composée $[h o f]_\Phi$ avec, comme domaine, $f^{-1}(dom\ h) \in \Phi$. Évidemment l'identité $(X, \Phi) \xrightarrow{id_{(X,\Phi)}} (X, \Phi)$ est représentée par la fonction identité sur $X : id_{(X,\Phi)} = [id_X]_\Phi$.

Observation: Dorénavant, pour simplifier la notation, on n'indiquera plus le filtre comme indice des morphismes, sauf quand il y aura une confusion possible. Il sera donc convenu que pour un morphisme $[f] : (X, \Phi) \longrightarrow (Y, \Psi)$, le crochet représente une classe d'équivalence modulo Φ. On aura tendance même à ne plus écrire le crochet, par la suite.

Les deux propositions suivantes sont de vérification facile:

1.3 - Proposition: *Φ possède toutes les limites finies.*

Démonstration:

(a) $(X,\Phi) \times (Y,\Psi) = (X \times Y, (\Phi \times \Psi))$ où $(\Phi \times \Psi) = \{H \in P_{\ell f}(X \times Y) \mid \exists F \in \Phi, \exists G \in \Psi$ tels que $H \supset F \times G\}$ et les morphismes projections sont déterminés par les fonctions première et deuxième projections entre les ensembles sous-jacents: $X \times Y \xrightarrow{\pi_1} X$ et $X \times Y \xrightarrow{\pi_2} Y$.

(b) Le produit fibré de deux morphismes: $(X,\Phi) \xrightarrow{[f]} (Z,\chi)$ et $(Y,\Psi) \xrightarrow{[g]} (Z,\chi)$ est donné par $(X,\Phi)\times_{(Z,\chi)}(Y,\Psi) = (X \times_Z Y,\ \Phi \times_Z \Psi)$ avec les morphismes projections déterminés aussi par les fonctions projections, où $X \times_Z Y = \{(x,y) \in dom\, f \times dom\, g \mid f(x) = g(y)\}$ et $\Phi \times_Z \Psi = (\Phi \times \Psi)\,|_{X \times_Z Y}$, où, pour un filtre Φ sur un ensemble localement fermé X et pour un sous-ensemble localement fermé $U \subset X$, le filtre $\Phi\,|_U$ est le suivant: $\Phi\,|_U = \{F \cap U \mid F \in \Phi\}$. ■

1.4. Proposition: *Soit $\mathbf{M}^\infty$ la catégorie des variétés différentiables C^∞ ayant une base dénombrable d'ouverts. Soit ι le foncteur $\iota : \mathbf{M}^\infty \longrightarrow \Phi$ tel que:*

(a) $\forall M \in ob(\mathbf{M}^\infty)$, $\iota(M) = (M, \{M\})$ ($M \subset \mathbf{R}^n$ pour un certain n),

(b) $\forall f \in \mathbf{M}^\infty(M,N)$, $\iota(f) = [f]_{\{M\}} \in \Phi((M,\{M\}),(N,\{N\}))$;

alors ι est un foncteur plein et fidèle qui préserve les produits fibrés transversaux. ■

La topologie de Grothendieck qui donne la structure de site à Φ est engendrée par les *projections* et par les *recrouvements ouverts finis* des espaces Euclidiens $\mathbf{R}^n$. Précisément on a la définition suivante pour le système de recouvrements τ qui est une base pour la topologie en question.

1.5 - Définition: Les éléments de τ sont (à isomorphisme près sur les objets source et but) les familles de flèches d'un des deux types suivants, pour un objet (X,Φ) quelconque:

(i) $\mathbf{F} = \{\pi_1 \circ [f_i] \mid (U_i, (\Phi \times \Psi)\,|_{U_i}) \xrightarrow{[f_i]} (X \times Y, (\Phi \times \Psi)) \xrightarrow{[\pi_1]} (X,\Phi);\ i = 1,\ldots,r\}$ où

- r est un nombre naturel,
- $Y \neq \emptyset$ et $\Psi \neq P_{\ell f}(Y)$,
- $\forall i = 1,\ldots,r$, $U_i \subset X \times Y$ est un ouvert relatif,
- $\exists H \in (\Phi \times \Psi)$ tel que $\bigcup_{i=1}^r U_i \supset H$,
- $\forall i = 1,\ldots,r$, $f_i : U_i \to X \times Y$ sont les inclusions.

Dans ce cas on dit que **F** est une *famille couvrante* pour (X, Φ) et on écrit $\mathbf{F} \in \tau(X, \Phi)$.

(ii) Si $X = \emptyset$ ou $\Phi = P_\ell(X)$ alors $\emptyset \in \tau(X, \Phi)$ et on dit que la *famille vide couvre les objets triviaux.*

Observations:

- En prenant $(Y, \Phi) = \mathbf{1} = (\{*\}, \{\{*\}\})$ (où $*$ est un point d'un espace $\mathbf{R}^n$) dans (i) on obtient les familles nommées *recouvrements ouverts finis* de (X, Φ).
- En prenant $r = 1$ et $U_1 = X \times Y$ dans (i), on obtient les familles (d'un seul élément) nommées *projections* (sur (X, Φ)).
- On remarque que les recouvrements ouverts finis avec les projections engendrent la même topologie τ de Grothendieck sur $\mathbf{\Phi}$.

1.6 Proposition. *Le système de familles couvrantes τ satisfait le deux propriétés suivantes:*

(i) Les identités sont dans τ.

(ii) τ est stable pour les produits fibrés.

Démonstration:

(i) Évident.

(ii) Les produits fibrés pour les familles de τ peuvent toujours se décomposer de la manière suivante:

$$\begin{tikzcd}
(V_i, (\chi \times \Psi) \mid_{V_i}) \arrow[r, "{[\overline{f}_i]}"] \arrow[d, "{[g \times id_Y \mid V_i]}"] & (Z \times Y, (\chi \times \Psi)) \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "{[g \times id_Y]}"] & (Z, \chi) \arrow[d, "{[g]}"] \\
(Ui, (\Phi \times \Psi) \mid_{Ui} \arrow[r, "{[f_i]}"] & (X \times Y, (\Phi \times \Psi)) \arrow[r, "\pi_1"] & (X, \Phi)
\end{tikzcd}$$

où $V_i = (g \times id_Y)^{-1}(U_i) \subset Z \times Y$ sont des ouverts relatifs, $\overline{f}_i$ est l'inclusion de V_i dans $Z \times Y$ et où les deux carrés, en plus du rectangle, sont des produits fibrés dans $\mathbf{\Phi}$, comme il est facile de vérifier. Il n'est pas difficile de voir que

$$\{\pi_1 \circ f_i\}_{i=1}^r \in \tau(X, \Phi) \Rightarrow \{\pi_1 \circ \overline{f}_i\}_{i=1}^r \in \tau(Z, \chi) \qquad \blacksquare$$

1.7. Proposition: *La topologie de Grothendieck engendrée par τ est sous-canonique, c'est-à-dire, tout pré-faisceau représentable est un faisceau.*

Démonstration: Il est connu (voir p.ex. Makkai-Reyes [12]) que pour montrer qu'un foncteur est un faisceau sur un site il suffit de montrer qu'il satisfait la propriété des faisceaux pour une base de la topologie qui soit stable pour les produits fibrés. Donc on peut employer seulement les familles de τ pour démontrer la proposition.

Il faut montrer que, pour tout objet (Z,χ) de $\mathbf{\Phi}$, le foncteur $\mathbf{\Phi}(\cdot,(Z,\chi))$ est un faisceau. Cela veut dire que, pour toute famille couvrante

$$\mathbf{F} = \{(U_i,(\Phi \times \Psi)\,|_{U_i}) \xrightarrow{[f_i]} (X \times Y,(\Phi \times \Psi)) \xrightarrow{\pi_1} (X,\Phi)\}_{i=1}^{r}$$

et pour toute famille compatible $\{[a_i] \in \mathbf{\Phi}((U_i,(\Phi \in \Psi)\,|_{U_i}),(Z,\chi))\}_{i=1}^{r}$ "cette famille se recolle uniquement dans un élément $[a]$ de $\mathbf{\Phi}((X,\Phi),(Z,\chi))$". Précisément cela signifie qu'il existe un unique morphisme $[a] \in \mathbf{\Phi}((X,\Phi),(Z,\chi))$ tel qu'on ait les diagrammes suivants commutatifs:

$$\begin{tikzcd}
(U_{ij},\Phi_{ij}) \arrow[r, "{[g_{ij}]}"] \arrow[d, "{[\overline{g}_{ij}]}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(p.f.)}"] & (U_j \times Y,(\Phi \times \Psi)\,|_{U_j} \times \Psi) \arrow[r, "\pi_{12}"] \arrow[d, "{[f_j \times id_Y]}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(p.f.)}"] & (U_j,(\Phi \times \Psi)\,|_{U_j}) \arrow[d, "{[f_j]}"] \arrow[ddd, bend left=60, "{[a_j]}"] \\
(U_i \times Y,(\Phi \times \Psi)\,|_{U_i} \times \Psi) \arrow[r, "{[\overline{f}_i \cdot id_Y]}"] \arrow[d, "\pi_{12}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(p.f.)}"] & (X \times Y \times Y,\Phi \times \Psi \times \Psi) \arrow[r, "\pi_{12}"] \arrow[d, "\pi_{13}"] \arrow[dr, phantom, "\text{(p.f.)}"] & (X \times Y,(\Phi \times \Psi)) \arrow[d, "\pi_1"] \\
(U_i,(\Phi \times \Psi)\,|_{U_i}) \arrow[r, "{[f_i]}"] \arrow[drr, "{[a_i]}"'] & (X \times Y,(\Phi \times \Psi)) \arrow[r, "\pi_1"] & (X,\Phi) \arrow[d, dashed, "{\exists ! [a]}"] \\
 & & (Z,\chi)
\end{tikzcd}$$

où f_i, $f_j \times id_Y$ et g_{ij} $(i = 1,\ldots,r, j = 1,\ldots,r)$ sont des inclusions,

$$\begin{aligned} \overline{f}_i.id_Y : U_i \times Y &\longrightarrow X \times Y \times Y \\ (x,y_1,y_2) &\mapsto (x,y_2,y_1) \end{aligned}$$

$U_{ij} = U_j \times Y \cap (\overline{f}_i.id_Y)(U_i \times Y) = \{(x,y_1,y_2) \mid (x,y_1) \in U_j \quad \text{et} \quad (x,y_2) \in U_i\}$

$\Phi_{ij} = (\Phi \times \Psi \times \Psi)\,|_{U_{ij}}$

$\overline{g}_{ji} : U_{ij} \longrightarrow U_i \times Y$

$\qquad (x,y_1,y_2) \mapsto (x,y_2,y_1)$

Du fait que $\mathbf{F}$ soit une famille couvrante on a que:

(a) $\cup_{j=1}^{r} U_j \supset H \in (\Phi \times \Psi)$.

Soient $F \in \Phi$ et $G \in \Psi$ tels que $H \supset F \times G$. Alors, pour $j \in \{1,\ldots,r\}$ fixé,

$\bigcup_{i=1}^{r} U_{ij} \supset U_j \cap (F \times G) \times G \in ((\Phi \times \Psi) |_{U_j} \times \Psi)$, ce qui implique
(b) $\bigcup_{j=1}^{r} \bigcup_{i=1}^{r} U_{ij} \supset F \times G \times G \in (\Phi \times \Psi \times \Psi)$.

Si on appelle $F_{ij} = (\pi_{12} \circ \overline{g}_{ji})^{-1}(doma_i) \cap (\pi_{12} \circ g_{ij})^{-1}(doma_j) \in \Psi_{ij}$, la commutativité du diagramme périphérique veut dire que les fonctions $C^\infty a_i$: $doma_i \rightarrow Z, i = 1, \ldots, r$ satisfont: $\forall (x, y_1, y_2) \in F_{ij}$, $a_i(\pi_{12}(\overline{g}_{ji}(x, y_1, y_2))) = a_j(\pi_{12}(g_{ij}(x, y_1, y_2)))$, c'est-à-dire, $a_i(x, y_2) = a_j(x, y_1)$ pour $(x, y_1) \in doma_i$ et $(x, y_2) \in doma_j$. En particulier, $\forall (x, y) \in doma_i \cap doma_j$, $(a_i(x, y) = a_j(x, y))$. Ainsi, par un argument de partition de l'unité, il existe une unique fonction C^∞ b : $\bigcup_{j=1}^{r} doma_j \longrightarrow Z$ telle que $\forall j = 1, \ldots, r$ $b |_{doma_j} \equiv a_j$. On montre que b détermine un morphisme $[b] \in \Phi((X \times Y, (\Phi \times \Psi)), (Z, \chi))$: $\forall i = 1, \ldots, r$, a_i détermine un morphisme alors $doma_i \in (\Phi \times \Psi) |_{U_i}$ ce qui implique que $\exists F' \in \Phi, \exists G' \in \Psi$ tels que $doma_i \supset (F' \times G') \cap U_i$ d'où il suit, par (a), que $\bigcup_{i=1}^{r} doma_i \supset (F' \cap F) \times (G' \cap G) \in (\Phi \times \Psi)$. Donc dom $b \in (\Phi \times \Psi)$. Il n'est pas difficile de vérifier que la condition (ii) de la définition de morphisme est satisfaite pour b.

Ainsi on peut ajouter le morphisme $[b]$ au diagramme initial avec la propriété de commutativité suivante:

$$\forall j = 1, \ldots, r \quad [b \circ f_j] = [a_j].$$

Maintenant, par une chasse au dit diagramme qui s'impose toute seule, on obtient ensuite que

$$[b \circ \pi_{13} \circ \overline{f}_i \circ id_Y \circ \overline{g}_{ji}] = [b \circ \pi_{12} \circ f_j \times id_Y \circ g_{ij}]$$

ce qui implique

$$\forall i, j \in \{1, \ldots, r\} \; \forall (x, y_1, y_2) \in F_{ij} \quad (b(x, y_1) = b(x, y_2)).$$

On avait déjà dit que $F_{ij} \in (\Phi \times \Psi \times \Psi) |_{U_{ij}}$ ce qui implique que $\exists F_1 \in \Phi$, $\exists G_1, G_2 \in \Psi$ tels que

$$\bigcup_{j=1}^{r} \bigcup_{i=1}^{r} F_{ij} \supset F_1 \times G_1 \times G_2$$

(en employant (b)). Tout cela ensemble nous donne que
$\forall (x, y_1, y_2) \in F_1 \times G_1 \times G_2 \; \exists i, j \in \{1, \ldots, r\}((x, y_1, y_2) \in F_{ij}$ et $b(x, y_1) = b(x, y_2))$.

En se souvenant que $\Psi \neq P_{ef}(Y)$ comme condition sur les familles couvrantes, on fixe $y_o \in G_2 \in \Psi$ et on obtient que

$$\forall x \in F_1 \; \forall y \in g_1 \quad (b(x, y) = b(x, y_o)).$$

Cela, finalement, nous permet de définir l'unique morphisme [a] dont on affirme l'existence dans la proposition. Soit

$$\begin{aligned} a : F_1 &\longrightarrow Z \\ x &\mapsto b(x, y_o) \end{aligned}$$

On montre que a détermine un morphisme $[a] \in \Phi((X,\Psi),(Z,\chi))$. D'abord on a que $F_1 \in \Phi$ et $a \in C^\infty(F_1; Z)$. Soit $H \in \chi$, on avait déjà établi que $[b] \in \Phi((X \times Y, (\Phi \times \Psi)), (Z,\chi))$, donc $b^{-1}(H) \supset F_2 \times G_3$ pour un $F_2 \in \Phi$ et un $G_3 \in \Psi$. Mais $a^{-1}(H) = \{x \in X \mid b(x, y_o) \in H\}$, pour un $y_o \in G_2 \in \Psi$. On prend $y_o \in G_2 \cap G_3 \in \Psi$. Alors

$$\forall x \in F_1 \cap F_2 \qquad ((x, y_o) \in F_1 \cap F_2 \times G_2 \cap G_3 \subset F_2 \times F_3)$$

ce qui implique

$$\forall x \in F_1 \cap F_2 \qquad (b(x, y_o) \in H)$$

d'où

$$\forall x \in F_1 \cap F_2 \qquad (x \in a^{-1}(H)),$$

et comme $F_1 \cap F_2 \in \Phi$ alors $a^{-1}(H) \in \Phi$.

Il est maintenant clair que de $[b] = [a \circ \pi_1]$ découle que le morphisme $[a]$ ici défini, rend commutatifs les diagrammes correspondants.

L'unicité de $[a]$ provient de l'unicité de la propriété correspondante au niveau de la catégorie des ensembles avec fonctions C^∞ dans un diagramme analogue au premier pour les fonctions qui représentent les morphismes intervienant dans celui-là avec comme domaines, les ensembles maximaux de façon à ce que toutes les fonctions composées soient définies.

B - Description du topos $\tilde{\Phi}$ Comme Modèle de L'ARS

1.8 - Définition. Le *topos des filtres* $\tilde{\Phi}$ est le topos des faisceaux sur le site Φ tel qu'il a été décrit avant:

$$\tilde{\Phi} = Faisc(\Phi) \subset Ens^{\Phi^{op}}$$

Immédiatement la proposition (1.7) nous donne la

1.9 - Proposition. *Le foncteur de Yoneda $Y : \Phi \longrightarrow \tilde{\Phi}$ est plein, fidèle et préserve les limites de Φ.* ■

Des propositions 1.9 et 1.4 il découle aussi immédiatement le

1.10 - Corollaire. *$Y \circ \iota : \mathbf{M}^\infty \longrightarrow \tilde{\Phi}$ est plein, fidèle et préserve les produits fibrés transversaux.* ■

On donne ensuite une liste pour l'interprétation des constantes du langage de l'ARS dans $\tilde{\Phi}$. On montrera dans le §2 que, avec ces interprétations, $\tilde{\Phi}$ est un modèle de (quelques axiomes de) l'ARS. Le corollaire 1.10 dira alors que $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ est un modèle bien adapté (dans le sens de Dubuc [4]).

1.11 - Interprétation des types du Langage.

- 1 correspond à l'objet final de $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ qui est le foncteur représentable par $(\{*\},\{\{*\}\})$, l'objet final de $\mathbf{\Phi}$.
- R correspond à $R = \mathbf{\Phi}(\cdot,(\mathbf{R},\{\mathbf{R}\})) = \overline{\mathbf{R}}$.

Observation: Toute fonction C^∞ f telle que $domf \subset X$, $imf \subset \mathbf{R}$ et $domf \in \Phi$, détermine un élément $[f] \in R(X,\Phi)$ puisque $f^{-1}(\mathbf{R}) = domf \in \Phi$.

- N correspond à $N = \mathbf{\Phi}(\cdot,(\mathbf{N},\{\mathbf{N}\}) = \overline{\mathbf{N}}$.

Observation: $[f] \in N(X,\Phi) \Leftrightarrow f$ est une fonction partielle localement constante avec $domf \in \Phi$ et $imf \subset \mathbf{N}$.

- $[0,1]$ correspond à $\overline{[0,1]} = \mathbf{\Phi}(\cdot,([0,1],\{[0,1]\}))$.
- $(0,1)$ correspond à $\overline{(0,1)} = \mathbf{\Phi}(\cdot,((0,1),\{(0,1)\}))$.
- Ω correspond à l'objet classifiant de $\tilde{\mathbf{\Phi}}$, qui n'est pas représentable: $\Omega(X,\Phi) = \{$sous-faisceaux de $\mathbf{\Phi}(\cdot,(X,\Phi))\}$.
- $P(R)$ correspond à Ω^R, exponentielle dans $\tilde{\mathbf{\Phi}}$, donnée par $\Omega^R(X,\Phi) = \{$sous-faisceaux de $\mathbf{\Phi}(\cdot,(X\times\mathbf{R},(\Phi\times\{\mathbf{R}\})))\}$.
- $\mathcal{O}(R)$ correspond aux sous-faisceaux de $P(R)$ définis par la formule qui donne la topologie de l'ordre pour R.
- R^n correspond au foncteur $R^n = \mathbf{\Phi}(\cdot,(\mathbf{R}^n,\{\mathbf{R}^n\}))$ $(n \in \mathbf{N})$.
- R^R correspond au foncteur R^R qui n'est pas représentable $R^R(X,\Phi) = \mathbf{\Phi}((X\times\mathbf{R},(\Phi\times\{\mathbf{R}\})),(\mathbf{R},\{\mathbf{R}\}))$.

Observation: Autrement dit,

$$R^R(X,\Phi) = \{[f]_{(\Phi\times\{\mathbf{R}\})} \mid f \in C^\infty,\ f : A\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ A\subset X \text{ et } A\in\Phi\}$$

ce qui nous permet de considérer les fonctions réelles au stade (X,Φ) comme des classes d'équivalence (modulo $(\Phi\times\{\mathbf{R}\})$) des "vraies" fonctions réelles C^∞ avec paramètres dans un élément du filtre Φ. De plus, si $[a]_\Phi \in R(X,\Phi)$, alors $[a]_\Phi$ est une classe d'équivalence modulo Φ de la fonction C^∞ $a : A \to \mathbf{R}$ avec $A\in\Phi$ (un réel paramétrisé partiellement dans X par un élément de Φ). L'élément de $R(X,\Phi)$ qui interprète $[f]_{\Phi\times\{\mathbf{R}\}}([a]_\Phi)$ est $[f(a)]_\Phi$ où $f(a)$ est la fonction C^∞ définie par:

$$\begin{aligned} f(a) : \pi_1(domf)\cap doma &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto f(x,a(x)). \end{aligned}$$

- Puisque la structure de site sur $\mathbf{\Phi}$ est sous-canonique, tout objet $(X, \Phi) \in \mathbf{\Phi}$ peut être ajouté comme symbole de type X_Φ du langage - à être pensé comme les éléments de $\cap\Phi$. Évidemment X_Φ est interprété par $\overline{X}_\Phi = \mathbf{\Phi}(\cdot, (X, \Phi))$.

Observation: On fixe tout de suite trois exceptions de notations pour des types de ce genre. On va noter

- X au lieu de $X_{\{X\}}$ le type correspondant à l'objet $(X, \{X\})$ (sauf pour R et N);
- $R \setminus \mathbf{R}$ au lieu de $\mathbf{R}_K$, le type correspondant à l'objet $(\mathbf{R}, K)$ (K est le filtre des sous-ensembles localement fermés de $\mathbf{R}$ dont le complément est borné);
- $N \setminus \mathbf{N}$ au lieu de $\mathbf{N}_\mathcal{F}$, le type correspondant à l'objet $(\mathbf{N}, \mathcal{F})$ ($\mathcal{F}$ est le filtre de Fréchet).

1.12 - Interprétation des Constantes Individuelles.

- 0 est interprété par $0 \in R(1) = \mathbf{\Phi}((\{*\}, \{*\}), (\mathbf{R}, \{\mathbf{R}\})) \cong \mathbf{R}$ qui est la "fonction" $\{*\} \to \mathbf{R}$, $* \mapsto 0$, c'est-à-dire, 0 est interprété par le nombre réel 0. Pour un $(X, \Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$ quelconque, 0 au stade (X, Φ) est donné par la composition $(X, \Phi) \xrightarrow{[*]} 1 \xrightarrow{0} (\mathbf{R}, \{\mathbf{R}\})$ et il est clair que cela correspond à la fonction identiquement nulle $0 : X \to \mathbf{R}$.
- De la même façon, la constante 1 est interprétée à chaque stade $(X, \Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$ par la fonction constante $\equiv 1 \in \mathbf{R}, 1 : X \to \mathbf{R}$.
- $+$ et $\cdot$ sont interprétés point par point par l'addition et le produit usuels des nombres réels. C'est-à-dire, par exemple dans le cas de $+$: au stade (X, Φ), $+$ est interprété par l'élément de $R^{R \times R}(X, \Phi)$ donné par la classe d'équivalence modulo $(\Phi \times \{\mathbf{R}\} \times \{\mathbf{R}\})$ de la fonction

$$\begin{aligned} + : X \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} &\to \mathbf{R} \\ (x, t_1, t_2) &\mapsto t_1 + t_2. \end{aligned}$$

Ce qui donne, pour $a, b \in R(X, \Phi)$ représentants des classes d'équivalence modulo Φ,

$$\begin{aligned} a + b : dom a \cap dom b &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto a(x) + b(x) \end{aligned}$$

et de même pour le produit

$$\begin{aligned} a.b : dom a \cap dom b &\to R \\ x &\mapsto a(x).b(x) \end{aligned}$$

sont des réprésentants modulo Φ du "résultat" de ces opérations sur a et b au stade (X, Φ).

- pour donner l'interprétation des relations d'ordre on considère d'abord deux sous-types de R : R^+ et $R_{\geq 0}$. $R^+ = \{x \in R \mid 0 < x\}$ et $R_{\geq 0} = \{x \in R \mid 0 \leq x\}$. On voit facilement que R^+ correspond à $R^+ = \mathbf{\Phi}(\cdot, ((0,\infty), \{(0,\infty)\})) = \overline{\mathbf{R}}^+$ et
  $R_{\geq 0}$ correspond à $R_{\geq 0} = \mathbf{\Phi}(\cdot, ([0,\infty), \{[0,\infty)\}) = \overline{\mathbf{R}}_{\geq 0}$
  et $<, \leq \in \Omega^{R \times R}(1\ )$ correspond aux sous-foncteurs de $R \times R$ donnés par:
  $<= \{(x,y) \in R \times R \mid y - x \in R^+\}$,
  $\leq = \{(x,y) \in R \times R \mid y - x \in R_{\geq 0}\}$.

  Cela signifie qu'au stade $(X, \Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$ et pour $a, b \in R(X, \Phi)$, $(X,\Phi)|\!|\!- \ x < y[a,b]$ (qu'on écrira plutôt $(X,\Phi)|\!|\!- \ a < b$) si et seulement si $(b-a) \in R^+(X,\Phi) = \mathbf{\Phi}((X,\Phi),(R^+,\{R^+\}))$ si et seulement si $(b-a)^{-1}((0,\infty)) \in \Phi$, si et seulement si $\{x \in doma \cap domb \mid (b-a)(x) > 0\} \in \Phi$.

  De la même façon on $a : (X,\phi)|\!|\!- \ a \leq b$ si et seulement si
  $\{x \in doma \cap domb \mid (b-a)(x) \geq 0\} \in \Phi$.
- pour la relation $\in$ ($\in_T, T$ type quelconque) l'interprétation est donnée en employant les notions catégoriques correspondantes et en faisant retomber sur la "vraie" relation d'appartenance au niveau des ensembles. Ainsi, par exemple pour $\in_R$, si

  $(X,\Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$, $a \in \mathbf{R}(X,\Phi)$ et $U \in \Omega^{\mathbf{R}}(X,\Phi) = \{$sous-faisceaux de $\mathbf{\Phi}(\cdot,(X \times \mathbf{R},(\Phi \times \{\mathbf{R}\})))\}$, on a que $(X,\Phi)|\!|\!- \ a \in U$ si et seulement si $\overline{a} \in U(X,\Phi)$, où $\overline{a} : doma \to X \times \mathbf{R}$; $x \mapsto (x, a(x))$.

Observation: Chaque "vrai" sous-ensemble $U \subset \mathbf{R}^n$ détermine un faisceau $\overline{U} \in \Omega^R(\mathbf{1})$ tel que, pour $(X,\Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$
$\overline{U}(X,\Phi) = \{[f] \in \mathbf{\Phi}((X,\Phi),(\mathbf{R},\{\mathbf{R}\})) \mid \{x \in domf \mid f(x) \in U\} \in \Phi\}$.

§2 - Vérification de Quelques Axiomes de l'ARS dans $\tilde{\mathbf{\Phi}}$.

A - Des Axiomes Algébriques.

Le fait que $(R, +, \cdot, 0, 1)$ soit un *anneau commutatif avec unité* découle directement des mêmes propriétés pour $(\mathbf{R}, +, \cdot, 0, 1)$ en tant que structure algébrique ensembliste. On donne un exemple:

2.1 - $\tilde{\mathbf{\Phi}} \models \forall x \in R\ \forall y \in R\ \forall z \in R (x.(y+z) = x.y + x.z)$

Vérification: Il suffit de montrer que

$\forall a, b, c \in R(\mathbf{1}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{1}, (\mathbf{R}, \{\mathbf{R}\})) = C^{\infty}(\{*\}, \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$ il est vrai que

$\mathbf{1} \Vdash a.(b+c) = a.b + a.c$,

ce qui est équivalent à dire que

$\forall a, b, c \in \mathbf{R}(a.(b+c) = a.b + a.c)$

pour les opérations usuelles dans $\mathbf{R}$, où la distributivité est valide. ∎

On montre ensuite que R est un anneau *local*, dans le sens que

2.2 - $\tilde{\mathbf{\Phi}} \models \neg(0 = 1) \wedge \forall x \in R(\exists y \in R(x.y = 1) \wedge \exists y \in R((1-x).y = 1))$.

Vérification:

(a) $\mathbf{1} \Vdash \neg(0 = 1)$ parce que, si f est un morphisme, $(X, \Phi) \xrightarrow{f} \mathbf{1}$, tel que $(X, \Phi) \Vdash 0 = 1$, cela veut dire que

$\{x \in domf \mid 0(x) = 1(x)\} = \{x \in X \mid 0 = 1\} = \emptyset \in \Phi$.

Mais alors $\Phi = P_{\ell f}(X)$ et la famille vide couvre (X, Φ).

(b) Pour vérifier que

$\mathbf{1} \Vdash \forall x \in R(\exists y \in R(x.y = 1) \vee \exists y \in R((1-x).y = 1)$,

soient $(X, \Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$ et $a \in R(X, \Phi)$ quelconques, a représenté par la fonction C^{∞} $a : doma \subset X \to \mathbf{R}$ (avec $doma \in \Phi$).

On montre que

(i) $(X, \Phi) \Vdash \exists y \in R(a.y = 1) \vee \exists y \in R((1-a).y = 1)$. Soient $U, V \subset X$ les ouverts définis par:

$U = \{x \in X \mid a(x) \neq 0\} = a^{-1}(\mathbf{R}^*)$

$Y = \{x \in X \mid -\frac{1}{2} < a(x) < \frac{1}{2}\} = a^{-1}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Alors $U \cup V = X \in \Phi$ et donc $\{U \xrightarrow{incl.} X,\ V \xrightarrow{\text{incl}} X\}$ est une famille couvrante pour laquelle il est vrai que

$$(U, \Phi|_U) \Vdash a.b = 1 \quad \text{où} \quad \begin{aligned} b : U &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{a(x)} \end{aligned}$$

et

$$(V, \Phi|_V) \Vdash a.c = 1 \quad \text{où} \quad \begin{aligned} c : V &\to \mathbf{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{1 - a(x)} \end{aligned}$$

ce qui prouve (i).

Le prochain axiome considéré dit que R est un anneau local *ordonné*.

2.3 - $\tilde{\mathbf{\Phi}} \models 0 < 1 \wedge \forall x \in R\, \forall y \in R\, \forall z \in R\, [(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z) \wedge (x < y \rightarrow x + z < y + z)]$

Vérification: $\mathbf{1} \Vdash\ 0 < 1$ parce que $\forall (X, \Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$. $\{x \in X \mid 0 < 1\} = X \in \Phi$. D'autre part, $\forall (X, \Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$, si

$$F_1 = \{x \in X \mid a(x) < b(x)\} \in \Phi \quad \text{et} \quad F_2 = \{x \in X \mid b(x) < c(x)\} \in \Phi$$

$(F_1 \subset doma \cap domb \in \Phi$ et $F_2 \subset domb \cap domc \in \Phi)$, Φ étant un filtre, $F_1 \cap F_2 \in \Phi$ et $\forall x \in F_1 \cap F_2$ il est vrai que $a(x) < c(x)$ par la transitivité de l'ordre "$<$" dans $\mathbf{R}$, ce qui implique que $F_3 = \{x \in X \mid a(x) < c(x)\} \supset F_1 \cap F_2$, d'où $F_3 \in \Phi$.

De façon analogue on montre la compatibilité de l'ordre avec l'opération d'addition.

La dernière propriété algébrique qu'on va traiter ici est celle qui dit que le seul réel nilpotent dans $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ est le zéro:

2.4 - $\tilde{\mathbf{\Phi}} \models \forall x \in R (\exists n \in \mathbf{N}(x^n = 0) \rightarrow x = 0)$.

Vérification: $\mathbf{1} \Vdash\ \forall x \in R(\exists n \in \mathbf{N}(x^n = 0) \rightarrow x = 0)$ ssi $\forall (X, \Phi) \in ob(\mathbf{\Phi})$ et $\forall a \in R(X, \Phi)(a : doma \subset X \rightarrow R, C^\infty)$, si
(i) $(X, \Phi) \Vdash\ \exists n \in \mathbf{N}(a^n = 0)$ alors (ii) $(X, \Phi) \Vdash\ a = 0$.

Mais (i) est équivalent à: il existe une famille couvrante $\{(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}) \xrightarrow{\text{incl.}} (X \times Y, (\Phi \times \Psi) \xrightarrow{\pi_1} (X, \Phi)\}_{i=1}^r$ et $\forall i = 1, \ldots, r$ il existe $n_i \in N(U_i, (\phi \times \Psi) \mid_{U_i})$, c'est-à-dire, $domn_i \in (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}$ et $n_i : domn_i \subset U_i \longrightarrow \mathbf{N}$ sont des fonctions localement constantes, telles que $\forall i = 1, \ldots, r$,

$$(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}) \Vdash\ (a \circ \pi_1 \mid_{U_i})^{n_i} = 0,$$

ce qui veut dire que $\forall i = 1, \ldots, r$

$$F_i = \{(x, y) \in (doma \times Y) \cap domn_i \subset U_i \mid a(x)^{n_i(x,y)} = 0\} \in (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}.$$

Mais, pour tout $(x, y) \in F_i$, il est évident que $a(x) = 0$ $(n_i(x, y) \in \mathbf{N})$ et que, si $a(x) = 0$ et $(x, y) \in domn_i$, alors $(x, y) \in F_i$. On a montré ainsi que

$$F_i = \{(x, y) \in doma \times Y \mid a(x) = 0\} \cap domn_i.$$

Donc, dans le stade auxiliaire $(N_i(\Phi \times \Psi) \mid_{N_i})$ où $N_i = domn_i$ on a $(N_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{N_i}) \Vdash\ (a \circ \pi_1) \mid_{N_i} = 0$ puisque $F_i \subset N_i$ et $N_i \in (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}$ ce qui implique $F_i \in (\Phi \times \Psi) \mid_{N_i}$.

Encore une fois la fonctorialité du forcing pour le morphisme $[id_{N_i}]$: $(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}) \rightarrow (N_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{N_i})$ nous donne $(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}) \Vdash\ (a \circ \pi_1) \mid_{U_i} = 0$

ce qui est équivalent à $F_i' = \{(x,y) \in doma \times Y \cap U_i \mid a(x) = 0\} \in (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}$. Mais $F_i' = G_i \cap H_i$, où $G_i = \{(x,y) \in U_i \mid a(x) \geq 0\}$ et $H_i = \{(x,y) \in U_i \mid a(x) \leq 0\}$; $F_i' \in (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}$ si et seulement si $G_i, H_i \in (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}$. Donc $(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}) \Vdash (a \circ \pi_1 \mid_{U_i}) = 0$ si et seulement si $(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}) \Vdash (a \circ \pi_1 \mid_{U_i}) \leq 0 \wedge 0 \leq (a \circ \pi_1 \mid_{U_i})$. Mais alors le caractère local du forcing implique que $(X, \Phi) \Vdash a \leq 0 \wedge 0 \leq a$. ■

Observation:
$\tilde{\Phi} \models \forall x \in R(x = 0 \leftrightarrow x \leq 0 \wedge 0 \leq x)$.

B - L'Axiome de Fermat

Pour vérifier cet axiome on rappelle d'abord un résultat d'analyse classique, conséquence du théorème fondamental du calcul.

Lemme d'Hadamard (externe): *Pour tout ouvert $V \subset \mathbf{R}^n$, pour tout $U \subset \mathbf{R}$ intervalle ouvert et pour toute $f \in C^\infty(V \times U)$, il existe une unique fonction $g \in C^\infty(V \times U \times U)$ telle que $\forall t, t' \in U, \forall \overline{x} \in V$*

$$f(\overline{x}, t) - f(\overline{x}, t') = (t, t')g(\overline{x}, t, t').$$

Démonstration: $g(\overline{x}, t, t') = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(\overline{x}, t' + u(t - t'))du$. ■

2.5 - $\tilde{\Phi}$ *satisfait l'Axiome de Fermat, c'est-à-dire,*
$\tilde{\Phi} \models \forall f \in R^{[0,1]} \exists ! g \in R^{[0,1] \times [0,1]} \forall x \in [0,1] \forall y \in [0,1]\ (f(x) - f(y) = (x - y)g(x,y))$
ce qui est équivalent à: $\forall (X, \Phi) \in ob(\Phi), \forall f \in R^{[0,1]}(X, \Phi)$.
(*) $(X, \Phi) \Vdash \exists ! g \in R^{[0,1] \times [0,1]} \forall x \in [0,1] \forall y \in [0,1]\ (f(x) - f(y) = (x - y)g(x,y))$.

Vérification: Un élément $f \in R^{[0,1]}(X, \Phi)$ correspond à une fonction $C^\infty f : A \times [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ avec $A \in \Phi$. Cela veut dire qu'il existe un ouvert $U \supset [0,1]$ (U peut être un intervalle ouvert), qu'il existe $H \supset A$, $H \in \Phi$ (qu'on peut choisir ouvert) et qu'il existe une fonction $C^\infty F : H \times U \longrightarrow R$ telle que $F \mid_{A \times [0,1]} \equiv f$. Si $H \neq A$ on change la notation pour considérer $f \equiv F \mid_{H \times [0,1]}$, ce qui peut être fait sans aucune perte de généralité. Il est clair qu'on peut choisir F de façon telle que

$$\forall x \in H\ \forall n \in \mathbf{N}(\frac{\partial^n F}{\partial t^n}(x,0) = (\frac{\partial^n f}{\partial t^n})_+(x,0) \text{ et } \frac{\partial^n F}{\partial t^n}(x,1) = (\frac{\partial^n f}{\partial t^n})_-(x,1))$$

(où + et - signifient les dérivées à droite et à gauche respectivement).

Du Lemme d'Hadamard découle l'existence d'une unique fonction $G_F \in C^\infty(H, U \times U)$ telle que

$\forall x \in H,\ \forall t, t' \in U(F(x,t) - F(x,t') = (t - t')G_F(x,t,t'))$.

L'extension F de f n'est pas unique, mais on montre que pour un intervalle ouvert $U \supset [0,1]$ et deux fonctions $F, F' \in C^\infty(H \times U, \mathbf{R})$ telles que $F \mid_{H\times[0,1]} \equiv F' \mid_{H\times[0,1]} \equiv f$ alors $G_F \mid_{H\times[0,1]^2} \equiv G_{F'} \mid_{H\times[0,1]^2}$ et on appelle g cette unique fonction: $g \equiv G_F \mid_{H\times[0,1]^2}$.

En effet, il est clair que

$$\begin{aligned}&\forall x \in H,\ \forall t, t' \in [0,1]((t-t')G_F(x,t,t') = (t-t')G_{F'}(x,t,t'))\\ \Rightarrow &\forall x \in H,\ \forall t, t' \in [0,1](t \neq t' \Rightarrow G_F(x,t,t') = G_{F'}(x,t,t')).\end{aligned}$$

Mais G_F et $G_{F'}$ sont des fonctions continues, donc l'égalité des valeurs des fonctions passe à la limite et doit aussi valoir pour les paires $(t,t) \in [0,1]^2$, c'est-à-dire

$G_F \mid_{H\times[0,1]^2} \equiv G_{F'} \mid_{H\times[0,1]^2}$.

Donc la fonction g définie ci-dessus détermine un élément (appelé aussi g) de $R^{[0,1]\times[0,1]}(X,\Phi)$. Il nous reste à montrer que

$(X,\Phi) \Vdash \forall x \in [0,1]\ \forall y \in [0,1]\ (f(x) - f(y) = (x-y)g(x,y))$

$\Leftrightarrow$ (en employant des "éléments génériques" cf. [15]).

(**) $\quad (X,\Phi) \times (([0,1],\{[0,1]\}) \times ([0,1],\{[0,1]\}) \Vdash f(\pi_2) - f(\pi_3) = (\pi_2 - \pi_3)g(\pi_2,\pi_3)$

où $\pi_2, \pi_3 \in R((X,\Phi) \times ([0,1],\{[0,1]\}) \times ([0,1],\{[0,1]\}))$ sont la deuxième et la troisième projection respectivement.

Mais (**) $\Leftrightarrow$

$\{(x,t,t') \in H \times [0,1]^2 \mid f(x,t) - f(x,t') = (t-t')g(x,t,t')\} \in (\Phi \times \{[0,1]^2\})$.

Or, d'après la définition de g ce dernier ensemble est $H \times [0,1]^2$ qui appartient évidemment au filtre voulu.

L'unicité du morphisme g satisfaisant (**) découle de l'unicité de g simplement en tant que fonction sur $H \times [0,1]^2$ qui est un élément du filtre. ■

On a vérifié l'axiome de Fermat pour l'intervalle $[0,1]$. Ce n'est pas une restriction parce qu'on a aussi la proposition suivante:

2.6 - Proposition: *Synthétiquement on a que:* $\forall f \in R^R\ \exists!\ g \in R^{R\times R}\ \forall x \in R\ \forall y \in R\ (f(x) - f(y) = (x-y)g(x,y))$, *qui est l'axiome de Fermat pour* R.

Démonstration: Intuitivement, $\forall n \in N$ on peut contracter $f \mid_{[-n,n]}$ à une fonction de domaine $[0,1]$. Cela veut dire, précisément, qu'il existe une fonction

$$F : N \times R^R \longrightarrow R^{[0,1]}$$
$$(n, f) \mapsto f_n = [t \mapsto f(n(2t-1))]$$

ce qui est évident. Maintenant l'axiome de Fermat nous donne, pour chaque fonction f_n comme ci-haut, une unique fonction $g_n \in R^{[0,1]\times[0,1]}$ telle que $\forall (t,s) \in [0,1]\times[0,1]$ $(f_n(t) - f_n(s) = (t-s)g_n(t,s))$.

Aussi il est clair que

$$\forall f \in R^R\ \forall n \in N\ \forall x \in R(-n < x \wedge x < n \rightarrow f(x) = f_n(\frac{x+n}{2n}))$$

et l'unicité dans 2.5 nous donne par des calculs purement algébriques,

(i) $\forall f \in R^R \forall n \in V \forall m \in N(m > n \rightarrow \forall x \in R \forall y \in R(-n < x \wedge x < n \wedge -n < y \wedge y < n \rightarrow \frac{1}{2m}g_m(\frac{x+m}{2m}, \frac{y+m}{2m}) = \frac{1}{2n}g_n(\frac{x+n}{2n}, \frac{y+n}{2n}))$.

Or, puisque R est Archimédien pour n, c'est-à-dire, $\tilde{\Phi} \models \forall x \in R \exists n \in N$ $(x < n)$, on a aussi

(ii) $\forall (x,y) \in R \times R \exists n \in N(-n < x \wedge x < n \wedge -n < y \wedge y < n)$.

Tout cela nous permet de définir, pour $f \in R^R$ quelconque, la fonction g dont l'existence est affirmée dans la proposition,

$$\forall (x,y) \in R \times R\ (g(x,y) = \frac{1}{2n}g_n(\frac{x+n}{2n}, \frac{y+n}{2n}))$$

pour un n donné par (ii). Cela définit bien une fonction puisque la propriété (i) affirme que pour tout $(x,y) \in R \times R$ la valeur de g ne dépend pas du choix de $n \in N$. Aussi cette fonction g vérifie l'axiome de Fermat pour chaque $f \in R^{R\times R}$ fixée. En effet: soient $x, y \in R$ et $n \in N$ tels que $-n < x \wedge x < n \wedge -n < y \wedge y < n$. Alors

$$f(x) - f(y) = f_n(\frac{x+n}{2n}) - f_n(\frac{y+n}{2n}) = (\frac{x+n}{2n} - \frac{y+n}{2n})g_n(\frac{x+n}{2n}, \frac{y+n}{2n}) =$$
$$= (x-y)\frac{1}{2n}g_n(\frac{x+n}{2n}, \frac{y+n}{2n}) = (x-y)g(x,y)$$

et l'unicité de la fonction g découle de l'unicité pour la fonction g_n. ∎

On a vu que la grande utilité de l'axiome de Fermat est de fournir, pour toute fonction $f \in R^R$ sa dérivée $f' \in R^R$ donnée par: $\forall x \in R(f'(x) = g(x,x))$, où g est l'unique fonction dont l'existence est affirmée dans l'énoncé de la dernière proposition. On remarque ici que, dans la vérification de 2.5 pour une $f \in R^{[0,1]}(X, \Phi)$, c'est-à-dire, $f \in C^\infty(H \times [0,1])$ avec $H \in \Phi$, la représentante interne de $f' \in R^{[0,1]}(X, \Phi)$ est la classe d'équivalence déterminée par la fonction $\frac{\partial f}{\partial t} \in C^\infty(H \times [0,1])$, puisqu'on avait:

$$g(\overline{x}, t, t') = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial t}(\overline{x}, t' + u(t, t'))du$$

et pour $t = t'$, on obtient

$$g(\overline{x}, t, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(\overline{x}, t).$$

C - Les Axiomes D'Intégration

Les axiomes d'intégration, qui sont les suivants, affirment l'existence de primitives et la positivité de l'intégrale:

2.7 - $\tilde{\Phi} \models \forall f \in R^{[0,1]} \exists ! g \in R^{[0,1]}(g(0) = 0 \wedge \forall x \in [0,1](g'(x) = f(x)))$.

Ici on introduit la notation suivante. L'unique fonction g donnée par 2.7 sera écrite comme:

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Dans cette notation on a:

2.8 - $\tilde{\Phi} \models (\forall x \in [0,1](f(x) > 0)) \rightarrow (\int_0^1 f(t)dt > 0)$.

2.9 - $\tilde{\Phi} \models (\forall x \in [0,1] f(x) \geq 0)) \rightarrow (\int_0^1 f(t)dt \geq 0)$.

Au lieu de vérifier 2.7 on montre d'abord (en employant seulement la logique intuitionniste) que l'existence de primitives est équivalente à l'existence des intégrales définies dans l'ARS.

2.10 - Proposition: *Synthétiquement il y a équivalence entre (i) et (ii) ci-dessous:*

(i) $\forall f \in R^{[0,1]} \exists ! g \in R^{[0,1]}(g(0) = 0 \wedge \forall x \in [0,1](g'(x) = f(x)))$.

(ii) $\exists ! F \in R^{R^{[0,1]}} \forall r, s, \in R \, \forall f \in R^{[0,1]} \, \forall h \in R^{[0,1]}$
$(F(rf + sh) = rF(f) + sF(h) \wedge F(f') = f(1) = f(0))$

Notation: L'unique F dans (ii) sera écrite comme

$$F(f) = \int_0^1 f(t)dt.$$

Démonstration: [$\rightarrow$] On pose: $\forall f \in R^{[0,1]}(F(f) = g(1))$, où g est l'unique fonction donnée par 2.7 $g(x) = \int_0^x f(t)dt$. Puisque si $\overline{g}(x) = f(x) - f(0)$ alors $\overline{g}(0) = 0$ et que $\forall x \in [0,1]$ $(\overline{g}'(x) = f'(x))$, l'unicité en 2.7 dit que $F(f') = \overline{g}(1) = f(1) - f(0)$. La linéarité de l'opération F vient aussi de l'unicité dans 2.7 puisqu'il est facile de voir que

$$\int_0^x (rf + sh)(t)dt = r\int_0^x f(t)dt + s\int_0^x h(t)dt$$

ce qui, pour le cas particulier de $x = 1$, nous donne la linéarité voulue.

[$\leftarrow$] $\forall f \in R^{[0,1]}$, on pose $g_f \in R^{[0,1]}$ telle que $\forall x \in [0,1]$

$$g_f(x) = \int_0^x f(t)dt \overset{\text{déf}}{=} x\int_0^1 f(xt)dt = x.F(f(xt))$$

(où F est calculée sur la fonction dont la variable est t). Alors $g_f(0) = 0$.

Pour montrer que $\forall x \in [0,1](g_f'(x) = f(x))$ il faut employer la définition de la dérivée donnée par 2.5. D'abord on vérifie la propriété de "dérivation sous l'intégrale définie", dans le sens suivant:

Si $\forall x \in [0,1]$, $h(x) = \int_0^1 f(xt)dt$, alors

$$h'(x) = \frac{d}{dx}h(x) = \int_0^1 \frac{d}{dx}f(xt)dt = \int_0^1 tf'(xt)dt$$

(par les règles de dérivation). En effet:

$$\begin{aligned}
h(x) - h(y) &= \textstyle\int_0^1 f(xt)dt - \int_0^1 f(yt)dt && \text{(par définition)}\\
&= \textstyle\int_0^1 (f(xt) - f(yt))dt && \text{(par linéarité)}\\
&= \textstyle\int_0^1 (xt - yt)g_f(xt, yt)dt && \text{(par 2.5 } \exists! g_f t.q. f'(z) = g_f(z,z))\\
&= \textstyle(x - y)\int_0^1 tg_f(xt, yt))dt && \text{(par linéarité).}
\end{aligned}$$

Par unicité dans 2.5 la dérivée de h doit être

$$h'(x) = \int_0^1 tg_f(xt, xt)dt = \int_0^1 tf'(xt)dt.$$

Maintenant, $g_f(x) = x\int_0^1 f(xt)dt$, ce qui implique

$$\begin{aligned}
g_f'(x) &= \textstyle\frac{d}{dt}[x\int_0^1 f(xt)dt]\\
&= \textstyle\int_0^1 f(xt)dt + x\int_0^1 tf'(xt)dt && \text{(par les règles de dérivation)}\\
&= \textstyle\int_0^1 (f(xt) + xtf'(xt))dt && \text{(par linéarité)}\\
&= \textstyle\int_0^1 \frac{d}{dt}(t.f(xt))dt && \text{(par les règles de dérivation)}\\
&= [t.f(xt)]_{t=0}^{t=1} = f(x) && \text{(par la 2e propriété de } F). \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Comme dans le cas de l'axiome de Fermat (2.5) qui est aussi vrai dans la forme générale pour R (2.6), on a aussi l'existence d'intégrale indéfinie pour les fonctions $f \in R^R$:

2.11 - Proposition: *Synthétiquement l'énoncé suivant est vrai dans l'ARS:*

$$\forall f \in R^R \exists! g \in R^R (g(0) = 0 \wedge \forall x \in R(g'(x) = f(x))).$$

Démonstration: La preuve ici est complètement analogue à celle donnée dans la partie $[\leftarrow]$ de la proposition 2.6. Ayant l'axiome de Fermat pour R^R et ainsi la dérivée de toute fonction $f \in R^R$, pour une telle fonction f on peut considérer la fonction $g_f \in R^R$ telle que $\forall x \in R$

$$g_f(x) = x \int_0^1 f(xt)dt$$

et on montre, comme dans le cas de $R^{[0,1]}$, que g_f est l'unique fonction satisfaisant $g(0) = 0 \wedge \forall x \in R(g'(x) = f(x))$. ∎

On passe maintenant à la vérification dans $\tilde{\Phi}$ de l'existence des intégrales définies.

2.12 - $\tilde{\Phi} \models$ (ii) (où (ii) est l'énoncé dans 2.10 (ii))
On remarque que 2.12 + 2.10 $\Rightarrow \tilde{\Phi} \models$ (i) dans 2.10).

Vérification de 2.12:

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \Vdash\ & \exists! F \in R^{(R^{[0,1]})}\ \forall r \in R\ \forall s \in R\ \forall f \in R^{[0,1]}\ \forall h \in R^{[0,1]} \\ & (F(rf + sh) = rF(f) + sF(h) \wedge F(f') = f(1) - f(0)) \end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$ il existe $F \in R^{(R^{[0,1]})}(\mathbf{1})$ telle que

$\mathbf{1} \Vdash \forall r \in R\ \forall s \in R\ \forall f \in R^{[0,1]}\ \forall h \in R^{[0,1]}(F(rf,h) = rF(f) + sF(h) \wedge F(f') = f(1) - f(0))$
$\Leftrightarrow$ (*) $\forall (X, \Phi) \in ob(\Phi)$, $\forall r, s, \in R(X, \Phi)\ \forall f, h \in R^{[0,1]}(X, \Phi)$
$(X, \Phi) \Vdash F(rf + sh) = rF(f) + sF(h)$ et $(X, \Phi) \Vdash F(f') + f(1) - f(0)$.
Il nous faut définir une fonctionnelle F satisfaisant (*). Et puisque

$$R^{R^{[0,1]}}(\mathbf{1}) \cong \mathrm{Nat}(\mathbf{1}, R^{R^{[0,1]}}) \cong \mathrm{Nat}(R^{[0,1]}, R),$$

il nous faut définir, pour chaque stade (X, Φ) et de façon à obtenir une transformation naturelle, une "vraie" fonctionnelle, qu'on va appeler toujours F, qui associe, à chaque $f \in R^{[0,1]}(X, \Phi)$ un élément $F(g)$ de $R(X, \Phi)$. Pour $f \in C^\infty(H \times [0,1])$ avec $H \in \Phi$, on pose $F(f)(x) = \int_0^1 f(x,t)dt \in C^\infty(H)$, et donc $F(f)(x)$

détermine un élément de $R(X,\Phi)$ bien défini, ce que l'on vérifie maintenant: pour f,h morphismes tels que:

$$\begin{gathered} f \sim h(mod(\Phi \times \{0,1]\})) \Leftrightarrow domf, domh \in (\Phi \times \{[0,1]\}) \\ \text{et} \quad G = \{(x,t) \in domf \cap domh \mid f(x,t) = h(x,t)\} \in (\Phi \times \{[0,1]\}) \end{gathered}$$

ce qui implique que $\exists G_1 \in \Phi$ tel que $G = G_1 \times [0,1]$. Mais évidemment

$$\forall x \in G_1 \quad (\int_0^1 f(x,t)dt = \int_0^1 h(x,t)dt) \quad \text{d'où} \quad F(f) \sim F(h)(mod\Phi).$$

Il n'est pas difficile de voir que la fonctionnelle F ainsi définie détermine à chaque stade une transformation naturelle. De plus, il est évident que F est une fonctionnelle linéaire et satisfait le théorème fondamental du calcul à tout stade. L'unicité vient de l'unicité de l'intégrale définie usuelle. ■

Ensuite on vérifie 2.8 et 2.9:

Vérification de la Positivité de l'Intégrale

$$1 \Vdash \forall f \in R^{[0,1]}(\forall x \in [0,1](f(x) > 0) \to \int_0^1 f(x)dx > 0),$$

$$1 \Vdash \forall f \in R^{[0,1]}(\forall f \in R^{[0,1]}(\forall x \in [0,1](f(x) \geq 0) \to \int_0^1 f(x)dx \geq 0).$$

Ces deux relations de forcing se vérifient aisément. Elles découlent des faits suivants: pour $f \in R^{[0,1]}(X,\Phi)$, correspondant à une fonction $f \in C^\infty(H \times [0,1])$ pour $H \in \Phi$, il est clair que

$$\{(x,t) \in H \times [0,1] \mid f(x,t) > 0\} \in (\Phi \times \{[0,1]\}) \Rightarrow \{x \in H \mid \int_0^1 f(x,t)dt > 0\} \in \Phi$$

et

$$\{(x,t) \in H \times [0,1] \mid f(x,t) \geq 0\} \in (\Phi \times \{[0,1]\}) \Rightarrow \{x \in H \mid \int_0^1 f(x,t)dt \geq 0\} \in \Phi$$

puisque l'intégrale de Riemann usuelle sur $\mathbf{R}^n$ satisfait la positivité. ■

D - Le théorème de la fonction inverse

On montre maintenant un résultat assez surprenant: synthétiquement il est possible de déduire le théorème de la fonction inverse (T.F.Inv.) à partir de la positivité de l'intégrale (2.8 et 2.9) et du théorème de la valeur intermédiaire pour les fonctions croissantes (T.V.Int.C.). Voici les énoncés de ces théorèmes:

$$\begin{aligned}\text{(T.F.Inv.)}: &\forall f \in R^R[\forall x \in R(\exists a \in R(a.f'(x) = 1) \rightarrow \exists U \in O(R)\exists V \in O(R)\\ &(x \in U \wedge f(x) \in V \wedge (\forall t \in V \exists y \in U(f(y) = t))\wedge\\ &(\forall x \in U\ \forall x' \in U(f(x) = f(x') \rightarrow x = x'))].\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(T.V.Int.C.)}: &\forall f \in R^{[0,1]}((f(0).f(1) < 0 \wedge \forall x \in [0,1](0 < f'(x)) \rightarrow \exists y \in (0,1)\\ &(f(y) = 0)).\end{aligned}$$

2.13 - Proposition: *En supposant (T.V.Int.C.) on déduit les résultats suivants à l'intérieur de l'ARS.*

(i) Le lemme d'Hadamard (interne):
$\forall f \in R^R\ \forall x \in R\ \forall y \in R\ (f(y) - f(x) = (y - x) \int_0^1 f'(x + t(y - x))dt)$.

(ii) Toute $f \in R^R$ est bornée dans un intervalle fermé:
$\forall f \in R^R\ \forall a \in R\ \forall b \in R\ \exists c \in R^+\ \forall x \in R(a \leq x \wedge x \leq b \rightarrow -c \leq f(x) \wedge f(x) \leq c)$.

(iii) Toute fonction $f \in R^R$ est continue:
$\forall f \in R^R\ \forall V \in O(R)\ (f^{-1}(V) \in O(R))$.

(iv) Le T.V.Int.C. généralisé à R:
$\forall f \in R^R\ \forall a \in R\ \forall b \in R\{(a < b \wedge \forall x \in R(a \leq x \wedge x \leq b \rightarrow f'(x) > 0)) \rightarrow [f(a) < f(b) \wedge \forall t \in R(f(a) < t \wedge t < f(a) \rightarrow \exists y \in R(a < y \wedge y < b \wedge f(y) = t))]\}$.

(v) (T.V.Inv.)

Démonstration: *(i):* Soient $f \in R^R, x, y \in R$ et soit $g \in R^{[0,1]}$ définie par $g(t) = x + t(y - x)$. Par 2.12 et par les règles de dérivation on a

$$\begin{aligned}f(y) - f(x) = f(g(1) - g(0)) &= \int_0^1 [f(g(t))]'dt\\ &= (y - x)\int_0^1 f'(x + t(y - x))dt.\end{aligned}$$

(ii): On montre d'abord le cas où $a = 0$ et $b = 1$. Soit $f \in R^R$. Par 2.7, $\forall x \in [0,1](f(x) = \int_0^x f'(t)dt + f(0))$. Il est facile de voir que $\forall y \in R(1 + \frac{y^2}{4} \leq y)$ (parce que $(1 - \frac{y}{2})^2 \geq 0)$, ce qui implique que $\forall t \in [0,x](f'(t) \leq 1 + \frac{f'^2(t)}{4}$ et par positivité, linéarité de l'intégrale et additivité des bornes d'intégration (pour l'intégrale définie) on a:

$$\int_0^x f'(t)dt \leq \int_0^x (1 + \frac{f'^2(t)}{4})dt < \int_0^1 (1 + \frac{f'^2(t)}{4})dt = \bar{c} > 0.$$

Mais aussi $\forall y \in R\ (-1 - \frac{y^2}{4} \leq y)$ (parce que $(1 + \frac{y}{2})^2 \geq 0)$ et de façon analogue on a

$$-\bar{c} = -\int_0^1 (1 + \frac{f'^2(t)}{4})dt < \int_0^x f'(t)dt.$$

Tout cela ensemble nous donne:

$$\forall x \in [0,1](-\bar{c} + f(0) < f(x) < \bar{c} + f(0)).$$

Il suffit de prendre $c \in R^+$ tel que $c > \bar{c} + f(0)$ et $-c < -\bar{c} + f(0)$. Le cas général s'obtient à partir de ce dernier par "transposition" de l'intervalle $[0,1]$:

Soit $f \in R^R$ et $a, b \in R$. On passe à la fonction auxiliaire

$$g(x) = f(a + x(b-a)).$$

Alors $\exists c \in R$ tel que $\forall x \in [0,1](-c < g(x) < c)$. Mais, si $y \in [a,b]$ alors il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $y = a + x(b-a)$, d'où $\forall y \in [a,b] \exists x \in [0,1](f(y) = g(x))$, ce qui donne $\forall y \in [a,b](-c < f(y) < c)$.

(iii): Soient $f \in R^R$ continue et $x \in f^{-1}(V)$. Puisque la topologie sur R est celle déterminée par $<$, il existe $\varepsilon \in R^+$ tel que $(f(x) - \varepsilon,\ f(x) + \varepsilon) \subset V$. Par (i), $\forall t \in R$

$$(*) \qquad f(x+t) - f(x) = t \int_0^1 f'(x + tu)du$$

et pour le x fixé on peut considérer $g_x \in R^R$ définie par $g_x(t) = \int_0^1 f'(x + tu)du$ $(\forall t \in R)$. Par (ii) $\exists c_x \in R^+\ \forall t \in [-1,1]\ (-c_x < g_x(t) < c_x)$; avec (*) cela implique que

$$-c_x t \leq f(x+t) - f(x) \leq t c_x.$$

Soit $\delta_x \in R^+$ défini par $\delta_x = \frac{\varepsilon}{c_x}$. Alors évidemment $\forall y \in (x - \delta_x, x + \delta_x)$ $(f(y) \in (f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon \subset V)$, d'où $f^{-1}(V)$ est ouvert.

(iv): On obtient ce résultat du T.V.Int.C. (autour de zéro) aussi par "transposition", de façon analogue à celle employée dans la preuve de (ii).

(v): Soient $f \in R^R$ et $x \in R$ tels que $f'(x)$ soit inversible. Alors $f'(x) > 0 \vee f'(x) < 0$. Mais si $f'(x) > 0$ et f' est continue, alors il existe un intervalle ouvert I contenant x tel que $f'\ |_I > 0$. Soient $a, b \in R$ tels que $x \in (a,b)$ et $[a,b] \subset I$. $\forall y, z \in [a,b]$ (i) nous donne: $f(y) - f(z) = (y-z)\int_0^1 f'(y - t(y-z))dt$ et comme $\forall t \in [0,1](y - t(y-z) \in [a,b] \to \forall t \in [0,1]\ (f'(y - t(y-z)) > 0)$ la positivité de l'intégrale nous donne que $k(x,y) = \int_0^1 f'(y - t(y-z))dt > 0$, cela implique que $f(y) - f(z) = (y-z).k(x,y)$, avec $k(x,y) > 0$, d'où f est croissante dans $[a,b] : (\forall y, z \in [a,b](y < z \to f(y) < f(z))$ et f est injective dans $[a,b] : (\forall y', z' \in f([a,b])(y' = z' \wedge y' = f(y) \wedge z' = f(z) \to y = z)$.

Soient $U = (a,b) \in O(R)$ et $V = (f(a), f(b))$. Alors par définition, de $x \in U$ et f croissante il suit que $f(x) \in V$. L'injectivité étant déjà démontrée pour $f|_U$, il reste à vérifier la surjectivité. Soit $t \in V$, puisque $f(a) < f(b)$ et que $f'|_{[a,b]} > 0$, par (iv) il existe $y \in (a,b) = U$ tel que $f(y) = t$. ■

2.14 - $\tilde{\Phi} \models$ (T.V.Int.C.).

On remarque que 2.14 + 2.13 $\Rightarrow \tilde{\Phi} \models$ (T.F.Inv.).

Vérification de 2.14:

$1 \Vdash$ (T.V.Int.C.) ssi $\forall (X,\Phi) \in ob(\Phi) \forall f \in R^{[0,1]}(X,\Phi)$ représentée par la fonction $f \in C^\infty(H \times [0,1])$ avec $H \in \Phi$, et $\forall m \in \Phi((Y,\Psi),(X,\Phi))$ représenté par la fonction $m \in C^\infty(G,X)$ avec $G \in \Psi$, si

(*) $(Y,\Psi) \Vdash f \circ m(0).f \circ m(1) < 0$

et

(**) $(Y,\Psi) \Vdash \forall x \in [0,1](0 < f' \circ m(x))$,

alors

$(Y,\Psi) \Vdash \exists y \in (0,1)(f \circ m(y) = 0)$.

Mais (*) $\Leftrightarrow F_1 = \{y \in G \cap m^{-1}(H) \mid f(m(y),0).f(m(y),1) < 0\} \in \Psi$ et (**) $\Leftrightarrow$ (en raisonnant avec des éléments génériques) $(Y,\Psi) \times ([0,1],\{[0,1]\}) \Vdash 0 < f' \circ m \circ \pi_1(\pi_2)$ qui est équivalent à $H_1 = \{(y,t) \in (G \cap m^{-1}(H)) \times [0,1] \mid 0 < \frac{\partial f}{\partial t}(m(y),t)\} \in (\Psi \times [0,1]\})$. Mais $(\Psi \times \{[0,1]\}) = \{H \supset F \times [0,1] \mid F \in \Psi\} = \{F \times [0,1] \mid F \in \Psi\}$ ce qui implique $H_1 = F_2 \times [0,1]$ avec $F_2 \in \Psi$, d'où $\forall y \in F_1 \cap F_2 \in \Psi$ et $\forall t \in [0,1](f(m(y),0).f(m(y),1) < 0$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(m(y),t) > 0)$.

Cela veut dire que $\forall y \in F_1 \cap F_2 \; f(m(y),\cdot) : [0,1] \to \mathbf{R}$ est une fonction C^∞ strictement croissante et qui change de signe dans son domaine. Alors par le théorème de la valeur intermédiaire usuel $\forall y \in F_1 \cap F_2 \; \exists t_y \in (0,1)(f(m(y),t_y) = 0)$, ce qui définit une fonction $\alpha : F_1 \cap F_2 \to (0,1); y \mapsto t_y$, pour laquelle $f(m(y),\alpha(y))|_{F_1 \cap F_2} \equiv 0$. En utilisant le théorème de la fonction implicite usuel et une partition de l'unité, on montrera:

(i) $(F_1 \cap F_2, \{F_1 \cap F_2\}) \Vdash \exists y \in (0,1)(f \circ m(y) = 0)$;

puisque $F_1 \cap F_2 \in \Psi$ l'identité $id_{F_1 \cap F_2}$ détermine un morphisme $[id_{F_1 \cap F_2}] : (Y,\Psi) \to (F_1 \cap F_2, \{F_1 \cap F_2\})$. La fonctorialité du forcing pour ce morphisme donne ainsi que (i) implique

$(Y,\Psi) \Vdash \exists y \in (0,1)(f \circ m(y) = 0)$

comme voulu.

Soit $g : F_1 \cap F_2 \times [0,1] \to \mathbf{R}$ la fonction C^∞ définie par $g(y,t) = f(m(y),t)$. Pour cette fonction on a que $\forall y \in F_1 \cap F_2(\frac{\partial g}{\partial t}(y,\alpha(y)) > 0$ et $g(y,\alpha(y)) = 0)$. Par le théorème de la fonction implicite, $\forall y_o \in F_1 \cap F_2$ il existe un ouvert U_{y_o} de $\mathbf{R}^m$ (où $Y \subset \mathbf{R}^m$), $y_o \in U_{y_o}$, et il existe une fonction $C^\infty \alpha_{y_o} : U_{y_o} \to \mathbf{R}$ telle que $\alpha_{y_o}(y_o) = \alpha(y_o)$ et

(ii) $\forall y \in U_{y_o} \cap F_1 \cap F_2 \; (g(y, \alpha_{y_o}(y)) = 0)$.

Soit $U = \bigcup_{y_o \in F_1 \cap F_2} U_{y_o}$. Alors $F_1 \cap F_2 \subset U \subset \mathbf{R}^m$.

Soit $\{P_{y_o}\}_{y_o \in F_1 \cap F_2}$ une partition de l'unité subordonnée à $\{U_{y_o} \mid y_o \in F_1 \cap F_2\}$. Soit $\beta : U \to \mathbf{R}$ la fonction C^∞ définie par

$$\beta(y) = \sum_{y_o \in F_1 \cap F_2} \rho_{y_o}(y)\alpha_{y_o}(y).$$

D'après l'unicité dans le théorème de la fonction implicite, pour $y_o, y_1 \in F_1 \cap F_2$, si $y \in U_{y_o} \cap U_{y_1}$, alors $\alpha_{y_o}(y) = \alpha_{y_1}(y)$. Aussi

$$\forall y \in U \exists y_o \in F_1 \cap F_2 \quad (y \in U_{y_o} \text{ et } \beta(y) = \sum_{\rho_{y_i}(y) \neq 0} \rho_{y_i}(y)\alpha_{y_i}(y))$$

(pour un nombre fini de $y_i \in F_1 \cap F_2$, disons $i = 1, \ldots, r$). Mais alors

$$y \in \bigcap_{i=0}^{r} U_{y_i} \Rightarrow \forall i = 1, \ldots, r(\alpha_{y_i}(y) = \alpha_{y_0}(y))$$
$$\Rightarrow \beta(y) = \alpha_{y_o}(y) \sum_{i=1}^{r} \rho_{y_i}(y) = \alpha_{y_o}(y) \in (0, 1).$$

On a ainsi montré (iii):

(iii) $\forall y \in U \exists y_o \in F_1 \cap F_2 \quad (\beta(y) = \alpha_{y_o}(y))$.

Donc, la restriction $\beta\,|_{F_1 \cap F_2}$ représente un élément de $(\overline{0,1})(F_1 \cap F_2, \{F_1 \cap F_2\})$ pour lequel, d'après (ii) et (iii), il est vrai que

$$(F_1 \cap F_2, \{F_1 \cap F_2\}) \Vdash f \circ m(\beta\,|_{F_1 \cap F_2})$$

ce qui nous donne immédiatement (i). ■

E - Existence d'Éléments Infinitésimaux Inversibles et de Nombres Naturels Infiniment Grands

Ici on fait la vérification dans $\tilde{\Phi}$ *d'un des deux axiomes équivalents suivants:*

2.15 - (i) $\exists n \in N \forall m \in \mathrm{N} \;\; (m < n)$,

(ii) $\exists x \in R \exists y \in R(x.y = 1 \wedge \forall n \in \mathrm{N} \;\; (-\frac{1}{n+1} < x \wedge x < \frac{1}{n+1})$

où $\mathbf{N}$ *est le type qui représente l'intersection des "sous-ensembles" de* N *satisfaisant l'induction complète:*

$$\mathbf{N} = \{n \in N \mid \forall S \in P(N)(0 \in S \wedge \forall m \in N(m \in S \leftrightarrow m+1 \in S) \rightarrow m \in S\}.$$

Avant de passer à la vérification de 2.15 (i), on donne une caractérisation pour l'interprétation du type $\mathbf{N}$ dans $\tilde{\Phi}$.

2.16 - Lemme: $\mathbf{N}$ *est interprété dans* $\tilde{\Phi}$ *par le sous-faisceau* $\overline{\mathbf{N}}$ *de* N *tel que* $\forall(x,\Phi) \in ob(\Phi)$ $\overline{\mathbf{N}}(X,\Phi) = \{[f] \in \Phi((X,\Phi),(\mathbf{N},\{\mathbf{N}\})) \mid \exists F \in \Phi(f\mid_F$ *est bornée*$)\}$ *et* $\overline{\mathbf{N}}$ *agit sur les morphisme de la même façon que* N.

Démonstration: Par définition du type $\mathbf{N}$ et de son interprétation, si

$$\alpha_{\mathbf{N}}(n) = \forall S \in P(N)(0 \in S \wedge \forall m \in N\ (m \in S \rightarrow m+1 \in S) \rightarrow n \in S),$$

alors $\mathbf{N} = \{n \in N \mid \alpha_{\mathbf{N}}(n)\}$ et son inteprétation $\overline{\mathbf{N}}$ est donnée par:
pour un $(X,\Phi) \in ob(\Phi)$

$$\overline{\mathbf{N}}(X,\Phi) = \{n \in N(X,\Phi) \mid (X,\Phi) \Vdash \alpha_{\mathbf{N}}[n]\}.$$

Ponsons, pour l'instant,

$$B(X,\Phi) = \{n \in \mathbf{N}(X,\Phi) \mid \exists F \in \Phi(f\mid_F \text{ est bornée})\}.$$

On montre que:

(a) B, agissant sur les morphismes de la même façon que N, est un faisceau (donc, sous-faisceau de N),

(b) $\forall(X,\Phi) \in ob(\Phi)(\overline{\mathbf{N}}(X,\Phi) = B(X,\Phi))$, c'est-à-dire, pour $n \in C^\infty(domn,\mathbf{N})$, $domn \in \Phi$, $(X,\Phi) \Vdash \alpha_{\mathbf{N}}[n] \Leftrightarrow \exists F \in \Phi(n\mid_F$ est bornée).

(a): Soient $(X,\Phi) \in ob(\Phi), \{(U_i,(\Phi\times\Psi)\mid_{U_i} \xrightarrow{\text{incl.}} (X\times Y,(\Phi\times\Psi)) \xrightarrow{\pi_1} (X,\Phi)\}_{i=1}^r$ une famille couvrante du site Φ et $\{n_i \in B(U_i,(\Phi\times\Psi)\mid_{U_i})\}_{i=1}^r$ une famille compatible. Puisque N est un faisceau (en tant que foncteur représentable par $(\mathbf{N},\{\mathbf{N}\})$) il existe un unique $n \in N(X,\Phi)$ tel que $\forall i = 1,\dots,r$ $n\circ\pi_1\mid_{U_i}\sim n_i(mod(\Phi\times\Psi)\mid_{U_i}$. De plus, cette unique fonction n est obtenue (cf. la preuve de la proposition 1.7) d'une unique fonction $\overline{n} \in N(X\times Y,(\Phi\times\Psi))$ telle que $\overline{n} = n\circ\pi_1$ et $\exists F \in \Phi$, $\exists G \in \Psi$ pour lesquels $\forall y, y_o \in G\ \forall x \in X(\overline{n}(x,y) = \overline{n}(x,y_o))$.

Soient $(\forall i = 1,\dots,r)G_i \in (\Phi\times\Psi)\mid_{U_i}$ tels que $\{u \in U_i \mid n\circ\pi_1\mid_{U_i}(u) = n_i(u)\} \in G_i$ et $n_i\mid_{G_i}$ est bornée. Alors, $\forall i = 1,\dots,r$, il existe $F_i \in \Phi$ et $H_i \in \Psi$ tels que $G_i \supset (F_i\times H_i)\cap U_i$ et il est clair que, pour $F = \bigcap_{i=1}^r F_i \in \Phi$, $n\mid_F$ est bornée.

(b): Soit $n \in C^\infty(domn,\mathbf{N}), domn \in \Phi$.

[$\Rightarrow$] On suppose que $(X,\Phi)\Vdash \alpha_{\mathbf{N}}[n]$. Dans la partie (a) on a montré que $B \in P(\mathbf{N})(\mathbf{1})$. Donc en particulier pour $B\circ* \in P(N)(X,\Phi)$ où $\forall (Y,\Psi) \in ob(\mathbf{ob})$, $[f] \in B\circ*(Y,\Psi) \subset \Phi((Y,\Psi),(X\times\{\mathbf{N}\},(\Phi\times\{\mathbf{N}\}))) \Leftrightarrow \exists G \in \Psi\ (f_2\ |_G)$ est bornée).

Si on montre que

(i) $(X,\Phi)\Vdash\ 0 \in B\circ* \wedge \forall m \in N(m \in B\circ* \leftrightarrow m+1 \in B\circ*)$

alors on aura

$$(X,\Phi)\Vdash\ n \in B\circ* \Leftrightarrow (\overline{n} : X \to X\times \mathbf{N}) \in B\circ*(X,\Phi)$$
$$x \mapsto (x, n(x))$$

$\Leftrightarrow \exists F \in \Phi$ tel que $n\ |_F$ est bornée, comme il était souhaité.

Il suffit donc de vérifier (i).

Il est évident que $(X,\Phi)\Vdash\ 0 \in B\circ*$. On montre que

$$(X,\Phi)\times(\mathbf{N},\{\mathbf{N}\})\Vdash\ \pi_2 \in B\circ*\circ\pi_1 \Leftrightarrow (X,\Phi)\times(\mathbf{N},\{\mathbf{N}\})\Vdash\ \pi_2+1 \in B\circ*\circ\pi_1$$

ce qui revient à l'équivalence (cf. page 14, sur l'interprétation du $\in$):

$$(\overline{\pi_2} : X\times\mathbf{N} \to X\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}) \in \mathbf{B}\circ*\circ\pi_1(X\times\mathbf{N}(\Phi\times\{\mathbf{N}\})))$$
$$(x,n)\mapsto(x,n,n)$$
$$\Leftrightarrow (\overline{\pi_2+1} : X\times\mathbf{N} \to X\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}) \in B\circ*\circ\pi_1(X\times\mathbf{N},(\Phi\times\{\mathbf{N}\}))$$
$$(x,n)\mapsto(x,n,n+1)$$

qui se réduit à l'équivalence:

$$\exists F \in (\Phi\times\{\mathbf{N}\})(\pi_2\ |_F \text{ est bornée}) \Leftrightarrow \exists F \in (\Phi\times\{\mathbf{N}\})(\pi_2+1\ |_F \text{ est bornée})$$

et cette dernière équivalence est trivialement valide.

[$\Leftarrow$] On suppose que $\exists F \in \Phi$ tel que $n\ |_F$ est bornée. $n \in C^\infty(domn, N) \Rightarrow n$ est localement constante $\Rightarrow H = domn \supset \bigcup_{k\in\mathbf{N}} X_k$, union disjointe d'ouverts relatifs de X tels que $\forall k \in \mathbf{N}\ (n\ |_{X_k} \equiv k)$. Puisque $n\ |_F$ est bornée, il existe $k_1,\ldots,k_r \in \mathbf{N}$ qui sont les seuls indices pour lesquels $H\cap F\cap X_{k_i} \neq \emptyset\ (i=1,\ldots,r)$.

Posons, pour $i \in \{1,\ldots,r\}$, $U_i = X_{k_i}$.

Alors $\bigcup_{i=1}^r U_i \supset H\cap F \in \Phi$ (union disjointe) et ainsi la famille $\{(U_i,\Phi\ |_{U_i} \xrightarrow{\text{incl}} (X,\Phi)\}_{i=1}^r$ est une famille couvrante du site. Si on montre que $\forall i = 1,\ldots,r$ $(U_i,\Phi\ |_{U_i})\Vdash \alpha_{\mathbf{N}}[n\ |_{U_i}]$ alors le caractère local du forcing implique $(X,\Phi)\Vdash\ \alpha_{\mathbf{N}}[n]$ comme souhaité. A partir des faits suivants: $A_i = U_i\cap F\cap H \in \Phi\ |_{U_i}$ et que $n\ |_{A_i} \equiv k_i \in \mathbf{N}$, il est facile de montrer que

$$(A_i,\{A_i\})\Vdash\ \forall S \in P(N)\ (O \in S \wedge \forall m \in N\ (m \in S \to m+1 \in S) \to n\ |_{A_i} \in S).$$

Puisque id_{A_i} représente un morphisme $(U_i,\Phi\ |_{U_i}) \xrightarrow{[id_{A_i}]} (A_i,\{A_i\})$, il est aussi vrai que

$$(U_i,\Phi\ |_{U_i})\Vdash\ \forall S \in P(N)\ (0 \in S \wedge \forall m \in N\ (m \in S \to m+1 \in S) \to n\ |_{U_i} \in S).\ \blacksquare$$

On passe à la

Vérification de 2.15 - (i) (Existence de nombres naturels infiniment grands) Pour montrer que

$$\mathbf{1} \Vdash \exists n \in \mathbf{N}\ \forall m \in \mathbf{N}\ (m < n)$$

on prend, comme famille couvrante pour $\mathbf{1}$, la projection $\{\mathbf{1} \times (\mathbf{N}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{1}\}$, où $\mathcal{F}$ est le filtre de Fréchet sur $\mathbf{N}$. Puisque $\mathbf{N} \neq \emptyset$ et que $\mathcal{F} \neq \mathcal{P}(\mathbf{N})$, $\{\pi_1\}$ est une famille couvrante. On montre maintenant que

$$(\mathbf{N}, \mathcal{F}) \Vdash \forall m \in \mathbf{N}\ (m < \mathrm{id}_{\mathbf{N}}),$$

ce qui est équivalent à:

$$\forall (X, \Phi) \in ob(\mathbf{\Phi}), \forall f \in \mathbf{\Phi}((X, \Phi), (\mathbf{N}, \mathcal{F})), \forall m \in \overline{\mathbf{N}}(X, \Phi),\quad (X, \Phi) \Vdash m < \mathrm{id}_{\mathbf{N}} \circ f,$$

ou, de façon équivalente,

$$A = \{x \in X \mid m(x) < id_{\mathbf{N}} \circ f(x) = f(x)\} \in \Phi.$$

Mais, $m\,|_G$ est bornée pour un $G \in \Phi$, d'où

$$F = \{p \in \mathbf{N} \mid \forall q \in G(m(q) < p\} \in \mathcal{F}.$$

Puisque f est un morphisme dans $\mathbf{\Phi}$ on déduit que $f^{-1}(F) \in \Phi$. Il est clair que $A \supset G \cap f^{-1}(f) \in \Phi$. Donc $A \in \Phi$. ■

On fixe les notations suivantes pour les types introdüits ci-dessus:

$$N \backslash \mathbf{N} = \{n \in N \mid \forall m \in \mathbf{N}\ (m < n)\},$$
$$\mathbf{\Delta} = \{t \in R \mid \forall n \in \mathbf{N}(-\frac{1}{n+1} < t < \frac{1}{n+1})\},$$
$$\mathbf{I} = \{t \in \mathbf{\Delta} \mid \exists y \in R\ (x.y = 1)\}.$$

Dans cette notation, 2.15 (i) et (ii) disent que $N \backslash \mathbf{N}$ et $\mathbf{I}$ sont habités. Le type $N \backslash \mathbf{N}$ est interprété dans $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ par le faisceau représentable par $(\mathbf{N}, \mathcal{F}) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$.

Le type $\mathbf{\Delta}$ est interprété par le faisceau représentable par $(N, \Phi_{\mathbf{\Delta}}) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$, où $\Phi_{\mathbf{\Delta}}$ est le ℓf-filtre sur $\mathbf{R}$ engendré par l'ensemble $\{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbf{N}^*\}$.

§3 - D'Autres Propriétés Valables dans $\tilde{\mathbf{\Phi}}$

A - Coïncidence de la théorie de N avec la théorie de N

Soit $\mathcal{F}_N$ l'ensemble des formules de l'arithmétique, c'est-à-dire, $\alpha \in \mathcal{F}_N$ si ses variables sont toutes de type N et ses constantes sont des éléments de l'ensemble $\{0, 1, <, +, \cdot\}$.

3.1 - Théorème: *Soit $\sigma \in \mathcal{F}_N$ un énoncé. Alors*

$$\tilde{\Phi} \models \sigma \Leftrightarrow \mathbf{N} \models \sigma$$

où, à droite, le signe de validité est considéré dans le sens usuel de la théorie des modèles classique.

Pour la preuve de cette proposition on a besoin de deux lemmes.

3.2 - Lemme: *Pour toute formule $\alpha(x_1, \ldots, x_s) \in \mathcal{F}_N, \forall(X, \Phi) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$, $\forall n_i \in N(X, \Phi)$ $(i = 1, \ldots, s)$, l'ensemble*

$$V = \{x \in X \mid \alpha[n_1(x), \ldots, n_x(x)]\} = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\}$$

est un ouvert relatif de X.

Démonstration: Un élément $n_i \in N(x, \Phi)$ est représenté par une fonction C^∞ $n_i : U_i \to \mathbf{N}$ où $U_i \in \Phi$ peut être supposé ouvert dans X. D'où $\forall i = 1, \ldots, s$ les fonctions n_i sont localement constantes sur U_i et donc $U_i = \bigcup_{j \in \mathbf{N}} U_{ij}$ est l'union disjointe d'ouverts relatifs tels que $n_i \mid_{U_{ij}} \equiv j \in \mathbf{N}$. De plus on a, par définition

$$V \subset \bigcap_{i=1}^{s} U_i = \bigcup_{j \in \mathbf{N}^{\{1, \ldots, s\}}} (\bigcap_{i=1}^{s} U_{ij(i)}).$$

Donc, si $x \in V$ alors il existe une fonction $j : \{1, \ldots, s\} \to \mathbf{N}$ telle que $x \in \bigcap_{i=1}^{s} U_{ij(i)}$ qui est un ouvert relatif de X. Or $\forall i = 1, \ldots, s$, $n_i \mid_{U_{ij(i)}} \equiv j(i)$ donc $x \in V \Rightarrow U_{ij(i)} \subset V$. ∎

3.3 - Lemme: *Pour toute formule $\alpha(x_1, \ldots, x_s) \in \mathcal{F}_N$, $\forall(X, \Phi) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$, $\forall n_i \in N(X, \Phi)$ $(i = 1, \ldots, s)$ il y a équivalence entre* (i) *et* (ii) *ci-dessous:*

(i) $(X, \Phi) \Vdash \alpha[n_1, \ldots, n_s]$,

(ii) $\{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\} \in \Phi$.

Démonstration: La démonstration est faite en employant une induction sur la longueur des formules.

1. Si α est atomique, alors $\alpha \equiv \tau_1 = \tau_2$ ou $\alpha \equiv \tau_1 < \tau_2$ pour des termes τ_1 et τ_2 de type N. Dans ce cas (i) $\Leftrightarrow$ (ii) découle immédiatement de la validité de ces formules au stade (X, Φ).

2. *Si* $\alpha \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2$ et en supposant que pour α_1 et pour α_2 l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) est vraie, alors on montre facilement cette même équivalence pour α.

3. *Si* $\alpha \equiv \alpha_1 \vee \alpha_2$ et que $\forall (X', \Phi') \in \mathrm{ob}(\Phi)$, $\forall n_i' \in N(X', \Phi')$ $(i = 1, \ldots, s)$

$(X', \Phi') \Vdash \alpha_1[n_1', \ldots, n_s'] \Leftrightarrow \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_1[n_1'(x), \ldots, n_s'(x)]\} \in \Phi'$

et

$(X', \Phi') \Vdash \alpha_1[n_1', \ldots, n_s'] \Leftrightarrow \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_2[n_1'(x), \ldots, n_s'(x)]\} \in \Phi'$

on montre que (i) $\Leftrightarrow$ (ii) pour α.

(i) $\Rightarrow$ (ii): $(X, \Phi) \Vdash \alpha[n_1, \ldots, n_s] \Leftrightarrow$ il existe une famille couvrante

$\{(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i} \xrightarrow{\text{incl.}} (X \times Y, (\Phi \times \Psi)) \xrightarrow{\pi_1} (X, \Phi)\}_{i=1}^r$

telle que $\bigcup_{i=1}^r U_i \supset F' \times G'$, où $F' \in \Phi$, $G' \in \Psi$ et $\forall i = 1, \ldots, r$

$(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}) \Vdash \alpha_1[n_1 \circ \pi_1 \mid_{U_i}, \ldots, n_s \circ \pi_1 \mid_{U_i}]$

ou $(U_i, (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}) \Vdash \alpha_2[n_1 \circ \pi_1 \mid_{U_i}, \ldots, n_s \circ \pi_1 \mid_{U_1}]$.

Maintenant l'hypothèse d'induction nous donne: $\forall i = 1, \ldots, r$, si $V_i = \{(x, y) \in U_i \mid \mathbf{N} \models \alpha_1 \vee \alpha_2[n_1 \circ \pi_1 \mid_{U_i} (x, y), \ldots, n_s \circ \pi_1 \mid_{U_i} (x, y)]\}$, alors $V_i \in (\Phi \times \Psi) \mid_{U_i}$, ce qui implique que $\forall i = 1, \ldots, r$ $\exists F_i \in \Phi$, $\exists G_i \in \Psi$ tels que $V_i \supset (F_i \times G_i) \cap U_i$. Soient $F = F' \cap \bigcap_{i=1}^r domn_j \in \Phi$ et $G \in G' \cap \bigcap_{i=1}^r G_i \in \Phi$ $(G \neq \emptyset)$. On montre que $F \subset V = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_1 \vee \alpha_2[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\}$ et donc on aura $V \in \Phi$, ce qu'on voulait avoir. En effet, soit $y \in G \neq \emptyset$ fixé et soit $x \in F$ quelconque. Alors $(x, y) \in F \times G \subset F' \times G' \Rightarrow \exists i \in \{1, \ldots, r\}$ tel que $(x, y) \in U_i$. Mais aussi $(x, y) \in (\bigcap_{i=1}^r F_i) \times (\bigcap_{i=1}^r G_i)$ et donc $(x, y) \in V_i$.

Cela veut dire que $\mathbf{N} \models \alpha_1 \vee \alpha_2[n_1 \circ \pi_1(x, y), \ldots, n_s \circ \pi_1(x, y)]$, ce qui est équivalent à $\mathbf{N} \models \alpha_1 \vee \alpha_2[n_1(x), \ldots, n_s(x)]$.

On voit ainsi que $x \in F \Rightarrow x \in V$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): On suppose que $V = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_1 \vee \alpha_2[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\} \in \Phi$.

Soient $U_1 = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_1[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\}$

et $U_2 = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_2[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\}$.

D'après le lemme 3.2, U_1 et U_2 sont des ouverts relatifs de X et $U_1 \cup U_2 = V \in \Phi$. Donc la famille d'inclusions $\{(U_i, \Phi \mid_{U_i} \xrightarrow{\text{incl.}} (X, \Phi)\}_{i=1,2}$ est une famille couvrante du site pour laquelle, évidemment, il est vrai que $U_i \in \Phi_{U_i}$ $(i = 1, 2)$. Donc, par l'hypothèse d'induction si $i = 1, 2$, alors

$(U_i, \Phi \mid_{U_i}) \models \alpha_i[n_i \mid_{U_i}, \ldots, n_s \mid_{U_i}] \Rightarrow (X, \Phi) \models \alpha_1 \vee \alpha_2[n_1, \ldots, n_s]$.

4. *Si* $\alpha \equiv \exists v \in N$ $\alpha_1(x_1, \ldots, x_s, v)$ on raisonne de façon analogue à celle appliquée précédemment pour montrer l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Voici une esquisse de la preuve:

(i) ⇒ (ii): $(X, \Phi) \Vdash \alpha[n_1, \ldots, n_s] \Leftrightarrow$ il existe une famille couvrante

$$\{(U_i, (\Phi \times \Psi)\mid_{U_i}) \xrightarrow{\text{incl.}} (X \times Y, (\Phi \times \Psi)) \xrightarrow{\pi_1} (X, \Phi)\}_{i=1}^{r}$$

et $\forall i = 1, \ldots, r\ \exists m_i \in N(U_i, (\Phi \times \Psi)\mid_{U_i})$ tels que

$$(U_i, (\Phi \times \Psi)\mid_{U_i}) \Vdash \alpha_1[n_1 \circ \pi_1\mid_{U_i}, \ldots, n_s \circ \pi_1\mid_{U_i}, m_i].$$

Par l'hypothèse d'induction on a: $\forall i = 1, \ldots, r\quad V_i = \{(x, y) \in U_i \mid \mathbf{N} \models \alpha_1[n_1 \circ \pi_1\mid_{U_1}(x, y), \ldots, n_s \circ \pi_1\mid_{U_i}(x, y), m_i(x, y)]\} \in (\Phi \times \Psi)\mid_{U_i}$.

Utilisant la même notation que dans le cas précédent, on montre:

$$\exists F \subset F' \cap \bigcap_{i=1}^{r} F_i \cap \bigcap_{j=1}^{s} domn_j \cap \bigcap_{i=1}^{r} \pi_1(domm_i)$$

tel que $F \in \Phi$ et $F \subset \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \exists v \in N\ \alpha_1[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\}$.

(ii) ⇒ (i): On suppose que

(*) $\quad V = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \exists v \in N\ \alpha_1[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\} \in \Phi$.

Alors l'identité $[id_V]$ détermine un morphisme dans $\mathbf{\Phi}$: $(X, \Phi) \xrightarrow{id_V} (V, \Phi\mid_V)$. Donc, pour avoir le résultat souhaité, il suffit de montrer

(**) $\quad (V, \Phi\mid_V) \Vdash \exists v \in N\ \alpha_1[n_1\mid_V, \ldots, n_s\mid_V]$.

Pour cela on définit, à l'aide de la description de V donnée par (*) une fonction localement constante

$$m : V \cap \bigcap_{j=1}^{s} domn_i \to \mathbf{N}$$

telle que

(***) $W = \{x \in V \mid \mathbf{N} \models \alpha_1[n_1(x), \ldots, n_s(x), m(x)]\} \in \Phi\mid_V$.

Puisque $domm \in \Phi_V$, $m \in N(V, \Phi_V)$. De plus, (***) et l'hypothèse d'induction nous permettent de déduire (**).

Pour définir la fonction m on reprend la notation utilisée dans la démonstration du lemme 3.2, où on avait:

$$V \subset \bigcup_{j \in \mathbf{N}^{\{1,\ldots,s\}}} \left(\bigcap_{i=1}^{s} U_{ij(i)}\right).$$

Soit $P \subset \mathbf{N}^{\{1,\ldots,s\}}$ l'ensemble d'indices fonctionnels j pour lesquels $\bigcap_{i=1}^{s} U_{ij(i)} \neq \emptyset$. Donc,

$$\forall j \in P\ \exists n_j \in \mathbf{N}\ \forall x \in \bigcap_{i=1}^{s} U_{ij(i)}\ (\mathbf{N} \models \alpha_1[n_1(x), \ldots, n_s(x), n_j]),$$

puisque $(n_1(x), \ldots, n_s(x)) \mid_{\bigcap_{i=1}^{s} U_{ij(i)}} \equiv (j(1), \ldots, j(s))$.

Aussi, $V = \bigcup_{j \in P} (\bigcap_{i=1}^{s} U_{ij(i)} \cap V)$ et cette réunion d'ouverts relatifs est disjointe. Cela nous permet de définir la fonction m souhaitée par:

$$m \mid_{\bigcap_{i=1}^{s} U_{ij(i)} \cap V} \equiv n_j \quad (\forall j \in P).$$

Il est bien évident que pour cette fonction m, (***) est vrai.

5. *Si* $\alpha \equiv \forall v \in N\ \alpha_1(x_1, \ldots, x_s, v)$, la partie (i) $\Rightarrow$ (ii) du lemme découle facilement des définitions pertinentes. Montrons

(ii) $\Rightarrow$ *(i):* On suppose que

$$\begin{aligned} V &= \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \forall v \in N\ (\alpha_1[n_1(x), \ldots, n_s(x)])\} \\ &= \bigcap_{m \in \mathbf{N}} \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_1[n_1(x), \ldots, n_s(x), m]\} \in \Phi. \end{aligned}$$

Soient $(Y, \Psi) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi}), g \in \mathbf{\Phi}((Y, \Psi), (X, \Phi))$ et $b \in N(Y, \Psi)$ quelconques. Alors $g^{-1}(V) = \bigcap_{m \in \mathbf{N}} g^{-1}(\{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_1[n_1(x), \ldots, n_s(x), m]\}) \in \Psi$. Maintenant il est facile de voir que

$$g^{-1}(V) \subset \{y \in Y \mid \mathbf{N} \models \alpha_1[n_1 \circ g(y), \ldots, n_s \circ g(y), b(y)]\} = W.$$

Donc $W \in \Psi$ et par l'hypothèse d'induction

$(Y, \Psi) \Vdash \alpha_1[n_1 \circ g, \ldots, n_s \circ g, b]$.

Cela signifie que $(X, \Phi) \Vdash \forall v \in N(\alpha_1)[n_1, \ldots, n_s]$.

6. Finalement, on fait la preuve de (i) $\Leftrightarrow$ (ii) pour $\alpha \equiv \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$.

(i) $\Rightarrow$ *(ii):* On montre la contraposée de cette implication. Supposons que

$$V = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_1 \rightarrow \alpha_2[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\} \notin \Phi$$

et montrons que $(X, \Phi) \nVdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_2[n_1, \ldots, n_s]$.

Soient $V_i = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_i[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\}$ $(i = 1, 2)$ et $G = \bigcap_{j=1}^{s} dom n_j \in \Phi$. Alors, par définition, pour $i = 1, 2$, il est vrai que $V_i \subset G$ et $V = (G \backslash V_1) \cup V_2$.

Or, de $V \notin \Phi$ il s'ensuit que $V_2 \notin \Phi$, $\forall F \in \Phi\ (V_1 \cap F \neq \emptyset)$ et $(G \backslash V_2) \cap V_1 \neq \emptyset$. Et, de $V_2 \notin \Phi$ on déduit facilement que $\forall F \in \Phi$, $(G \backslash V_2) \cap F \neq \emptyset$. Donc le filtre Ψ généré par Φ et $(G \backslash V_2)$ est non trivial. Puisque $\Psi = (\Phi \cup \{G \backslash V_2\})$ est plus fin que Φ, la fonction identité id_X détermine un morphisme: $(X, \Psi) \xrightarrow{[\mathrm{id}_X]} (X, \Phi)$. Considérons maintenant le morphisme composé g suivant:

$$\begin{tikzcd} (V_1, \Psi \mid_{V_1}) \arrow[r, "{[\mathrm{incl.}]}"] \arrow[rr, bend right, "{[g]}"'] & (X, \Psi) \arrow[r, "{[\mathrm{id}_X]}"] & (X, \Phi). \end{tikzcd}$$

Par l'hypothèse d'induction

$$V \in \Psi\,|_{V_1} \Rightarrow (V_1, \Psi\,|_{V_1}) \Vdash \alpha_1[n_1\,|_{V_1}, \ldots, n_s\,|_{V_1}]$$

et $(G\backslash) \cap V_1 \in \Psi\,|_{V_1} \Rightarrow$ si $(V_1, \Psi\,|_{V_1}) \Vdash \alpha_2[n_1\,|_{V_1}, \ldots, n_s\,|_{V_1}]$ alors $\emptyset \in \Psi\,|_{V_1}$.

Mais $\emptyset \notin \Psi\,|_{V_1}$, puisqu'on avait déjà établi que $\forall F \in \Psi(V_1 \cap F \neq \emptyset)$, $(G\backslash V_2) \cap V_1 \neq \emptyset$ et que $\Psi \neq \mathcal{P}_{\ell f}(X)$. Donc $(V_1, \Psi\,|_{V_1}) \nVdash \alpha_2[n_1\,|_{V_1}, \ldots, n_s\,|_{V_1}]$. Tout cela nous donne:

$$(X, \Phi) \nVdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_2[n_1, \ldots, n_s]$$

comme souhaité.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)*: Supposons maintenant que

$V = \{x \in X \mid \mathbf{N} \models \alpha_1 \rightarrow \alpha_2[n_1(x), \ldots, n_s(x)]\} \in \Phi$.

Soient $(Y, \Phi) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$ et $g \in \mathbf{\Phi}((Y, \Psi), X, \Phi))$ tels que

$(Y, \Psi) \Vdash \alpha_1[n_1 \circ g, \ldots, n_s \circ g]$.

Par l'hypothèse d'induction,

$W_1 = \{y \in Y \mid \mathbf{N} \models \alpha_1[n_1 \circ g(y), \ldots, n_s \circ g(y)]\} \in \Psi$.

Il n'est pas difficile de montrer que

$W_2 = \{y \in Y \mid \mathbf{N} \models \alpha_2[n_1 \circ g(y), \ldots, n_s \circ g(y)]\} \supset W_1 \cap g^{-1}(V) \in \Psi$.

Donc l'hypothèse d'induction nous donne

$(Y, \Psi) \Vdash \alpha_2[n_1 \circ g, \ldots, n_s \circ g]$.

C'est-à-dire, on a montré que $(X, \Phi) \Vdash \alpha_1 \rightarrow \alpha_2[n_1, \ldots, n_s]$.

Observation: Le cas des formules du type $\alpha \equiv \neg\alpha_1$ et $\alpha \equiv \alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ se déduit des cas examinés, puisque $\neg\alpha_1 \equiv \alpha_1 \rightarrow \perp$ et $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2 \equiv \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \wedge \alpha_2 \rightarrow \alpha_1$. ■

Démonstration du Théorème 3.1

Soit $\sigma \in \mathcal{F}_N$ un énoncé.

$$\tilde{\mathbf{\Phi}} \models \sigma \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{1} \Vdash \sigma.$$

Par le lemme 3.3,

$$\mathbf{1} \Vdash \sigma \quad \Leftrightarrow \quad V = \{x \in \{*\} \mid \mathbf{N} \models \sigma\} \in \{\{*\}\}.$$

Ainsi, si $\mathbf{N} \models \sigma$, alors $V = \{*\}$ et $\mathbf{1} \Vdash \sigma$; si $\mathbf{N} \Vdash \sigma$, alors $V = \emptyset$ et $\mathbf{1} \nVdash \sigma$. ■

3.4. Corollaire: *$\tilde{\mathbf{\Phi}}$ satisfait l'arithmétique de Peano pour N.* ■

B - Répresentation des fonctions $\alpha : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ quelconques dans $\tilde{\mathbf{\Phi}}$.

Le modèle $\tilde{\Phi}$, qui est un "univers lisse", admet la possibilité de traitement des fonctions $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ arbitraires via deux notions de représentantes internes à $\tilde{\Phi}$ pour de telles fonctions. Cela nous permet, d'une certaine façon, d'élargir le champ d'action de l'ARS. On donne ici la motivation pour les deux définitions qui précisent ces notions de représentation interne, ainsi que l'énoncé des principales propriétés des représentantes internes. Pour les démonstrations de ces propriétés, on a besoin de développer des notions de convergence de suites de fonctions réelles C^∞ suivant les filtres sur $\mathbf{N}$. Cette théorie de convergence est l'objet de [5]. Toutes les propositions qui apparaissent ici sur les représentantes internes sont des corollaires des propositions analogues dans la dernière reférence.

On sait déjà que toute fonction $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ est aussi un élément de $R^R(\mathbf{1})$. C'est-à-dire, toute fonction $C^\infty \alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ correspond (biunivoquement) à une section globale de R^R dans le topos $\tilde{\Phi}$. Évidemment, si α n'est pas C^∞, elle ne détermine aucune fonction interne dans $\tilde{\Phi}$, pas même une fonction f au stade $(X, \Phi) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$.

Mais on veut que la représentante f de la fonction α au stade (X, Φ) soit, à chaque point t où cela a un sens, telle que $f(t)$ soit infiniment proche de $\alpha(t)$ - et pour signifier cela on écrit $f(t) \cong \alpha(t)$.

Précisément, si Δ est le type des éléments réels infiniment petits:

$$\Delta = \{t \in \mathbf{R} \mid \forall n \in \mathbf{N}(-\frac{1}{n+1} < t \wedge t < \frac{1}{n+1})\},$$

on dit, pour $t, t' \in \mathbf{R}(X, \Phi)$, que:

$$(X, \Phi) \Vdash t \cong t' \overset{\text{déf}}{\Leftrightarrow} t - t' \in \Delta(X, \Phi).$$

Ainsi, la propriété intuitive qu'une fonction $f \in R^R(X, \Phi)$ devrait avoir, pour être une représentante interne d'une fonction $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, est de satisfaire une des deux "relations de forcing" suivantes, qui, telles qu'écrites ci-dessous, n'ont évidemment pas de sens. Mais elles nous donnent les idées intuitives nous permettant de poursuivre. On voudrait alors donner un sens aux affirmations suivantes:

1. (X, Φ)"$\Vdash$ "$\forall t \in R_{acc}(f(t) \cong \alpha(t))$ et
2. (X, Φ)"$\Vdash$ " $\forall t \in \mathbf{R}(f(t) \cong \alpha(t))$

où $R_{acc} = \{t \in R \mid \exists n \in \mathbf{N}(-n < t \wedge t < n)\}$ est le type des réels accessibles et $\mathbf{R}$ est l'ensemble des "vrais" nombres réels.

Les deux définitions suivantes donnent un sens, respectivement, aux "relations de forcing" antérieures, précisant ainsi les idées exposées précédemment.

Soient $\alpha : \mathbf{R} - \mathbf{R}$ une fonction quelconque et $[f] \in R^R(X, \Phi)$ arbitraire.

3.5 - Définition: On dit que $[f]$ est une *représentante accessible* de α dans $\tilde{\Phi}$ (au stade (X, Φ)), ou que α est l'*ombre accessible* de $[f]$ (au stade (X, Φ)) et on écrit $\alpha = o_a(f)$, si et seulement si

$$\forall m \in \mathbf{N}^* \ \forall K \subset \mathbf{R} \text{ compact } \exists F_{m,K} \in \Phi \ \forall x \in F_{m,K} \ \forall t \in K(|f(x,t) - \alpha(t)| < \frac{1}{m}).$$

3.6 - Définition: On dit que $[f]$ est une *représentante ponctuelle* de α dans $\tilde{\Phi}$ (au stade (X, Φ)), ou que α est l'*ombre ponctuelle* de $[f]$ (au stade (X, Φ)) et on écrit $\alpha = o_p(f)$, si et seulement si

$$\forall m \in \mathbf{N}^* \ \forall t \in \mathbf{R} \ \exists F_{m,t} \in \Phi \forall x \in F_{m,t}(|f(x,t) - \alpha(t)| < \frac{1}{m}).$$

Quelques remarques au sujet de ces définitions s'imposent:

A: Il est clair que ces définitions sont indépendantes du choix du représentant pour $[f] \in R^R(X, \Phi)$. C'est-à-dire, si $[g] \in R^R(X, \Phi)$ satisfait $[g]_\Phi = [f]_\Phi$ alors:

$$\alpha = o(f) \Leftrightarrow \alpha = o(g)$$

(dans les deux sens fixés par les définitions ci-dessus).

B: Il est clair que, s'il existe une ombre α pour une $[f] \in R^R(X, \Phi)$, alors elle est unique, dans les deux sens donnés, et aussi que les représentantes pour une fonction $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée, s'il en existe, ne sont pas uniques. Aussi

$$\alpha = o_a(f) \Rightarrow \alpha = o_p(f).$$

La réciproque n'est pas vraie.

C: Lorsque nécessaire, on écrira $[\alpha = o(f)]_{(X,\Phi)}$ pour indiquer le stade où la propriété de la définition employée est valide.

D: Si $[\alpha = o(f)]_{(X,\Phi)}$ dans n'importe lequel des deux sens, pour un stade pointé, c'est-à-dire, pour Φ filtre principal non trivial, alors $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R})$ et α elle-même est alors sa propre représentante interne, la meilleure possible. Par conséquent, il n'y a pas d'intérêt pour l'étude des ombres à des stades pointés.

On donne ensuite les énoncés de quelques propriétés sur les ombres.

3.7 - Proposition: *Pour une fonction $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, il y a équivalence entre les énoncés suivants:*

(i) α *est une fonction de classe 1 de Baire.*
(ii) α *est une fonction* $\sum_2^0$ *Borel-mesurable.*
(iii) *Il existe une* $[f] \in R^R(\mathbf{N}, \mathcal{F})$ *telle que* $[\alpha = o_p(f)]_{(\mathbf{N},\mathcal{F})}$.
(iv) $\forall (X, \Phi) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$ *avec* Φ *satisfaisant* $\bigcap_{F \in \Phi} \overline{F} = \emptyset$, *il existe* $[g] \in R^R(X, \Phi)$ *telle que* $[\alpha = o_p(g)]_{(X,\Phi)}$.

Cette proposition et la remarque D ci-dessus nous disent que la notion d'ombre ponctuelle nous permet d'identifier d'une façon naturelle, par rapport à $\tilde{\mathbf{\Phi}}$, deux classes de fonctions parmi les fonctions $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$:

1. Les fonctions $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont C^∞, pour lesquelles il est vrai que $\forall (X, \Phi) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$ il existe $[g] \in R^R(X, \Phi)$ telle que $[\alpha = o_p(g)]_{(X,\Phi)}$.
2. Les fonctions $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ de classe 1 de Baire, pour lesquelles il est vrai que $\forall (X, \Phi) \in \mathrm{ob}(\mathbf{\Phi})$ sans points adhérents, il existe $[g] \in R^R(X, \Phi)$ telle que $[\alpha = o_p(g)]_{(X,\Phi)}$ ou, de façon équivalente, il existe $[g] \in R^R(\mathbf{N}, \mathcal{F})$ telle que $[\alpha = o_p(g)]_{(\mathbf{N},\mathcal{F})}$.

Le théorème suivant dit que toute fonction $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ admet une représentante ponctuelle dans $\tilde{\mathbf{\Phi}}$.

3.8 - Théorème: *Il existe une fonction* $f \in C^\infty(N \times R)$ *telle que pour toute* $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *il existe* $\Phi_\alpha \subset \mathcal{P}(\mathbf{N})$ *filtre tel que* $[\alpha = o_p(f)]_{(\mathbf{N},\Phi_\alpha)}$.

Ce résultat est en fait plus fort que ce qu'on espérait, puisqu'il affirme l'existence d'une *même* fonction $f \in C^\infty(\mathbf{N} \times \mathbf{R})$ représentant (modulo Φ_α) *toute* fonction $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Autrement dit, pour chaque $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, la fonction f considérée comme un élément $[f] \in R^R(\mathbf{N}, \Phi_\alpha)$ est telle que α est l'ombre ponctuelle de f (au stade $(\mathbf{N}, \Phi_\alpha)$).

La notion d'ombre ou de représentante ponctuelle dans $\tilde{\mathbf{\Phi}}$, ne nous permet cependant pas d'identifier les bonnes propriétés éventuelles d'une fonction $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, par rapport à la différentiabilité ou à l'intégrabilité (sauf dans le cas $\alpha \in C^\infty$). Pour avoir des représentantes internes qui préservent ces propriétés, il faut utiliser la représentation accessible. On a ainsi les propositions suivantes:

3.9 - Proposition: $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *est de classe* $C^m (m \in \mathbf{N})$ *de différentiabilité si et seulement si il existe* $[f] \in R^R(\mathbf{N}, \mathcal{F})$ *telle que* $[\alpha = o_a(f)]_{\mathbf{N},\mathcal{F})}$ *et* $\forall i = 0, \ldots, m$ *il existe une fonction* $\alpha_i : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *telle que* $[\alpha_i = o_a(f^{(i)})]_{(\mathbf{N},\mathcal{F})}$, *et dans ce cas il est vrai que* $\forall i = 1, \ldots, m$ $\alpha_i = \alpha_o^{(i)} = \alpha^{(i)}$.

3.10 - Proposition: *Pour une fonction* $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *s'il existe* $[f] \in R^R(\mathbf{N}, \mathcal{F})$ *telle que* $[\alpha = o_a(f)]_{(\mathbf{N},\mathcal{F})}$, *alors*

$$[\int_0^t f(r)dr = o(\int_0^t f(r)dr)]_{(\mathbf{N},\mathcal{F})}.$$

Les deux notions d'ombres introduites ici ne sont pas équivalentes. L'exemple suivant nous montre que

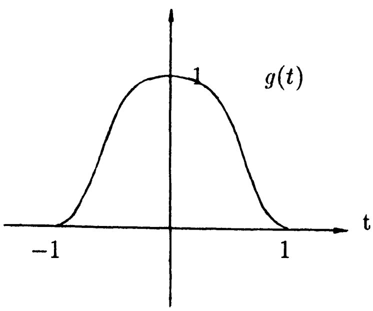
$$\alpha = o_p(f) \not\Rightarrow \alpha = o_a(f).$$

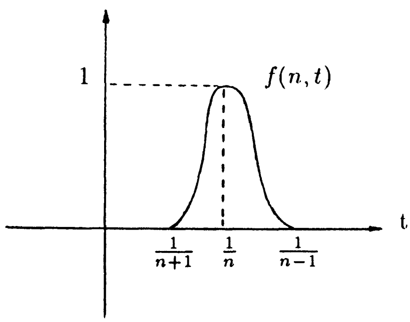
3.11 - Exemple: Soit $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
$t \mapsto 0$
et soit $f \in R^R(\mathbf{N}, \mathcal{F})$ correspondant à la fonction C^∞

$$f : \mathbf{N} \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$$
$$(n,t) \mapsto g(n(n+1)(t - \frac{1}{n}))$$

où

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |t| \geq 1 \\ \frac{1}{2} \exp\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{8(t-1)^2}\right) & \text{si } \frac{1}{2} \leq |t| \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{2}\exp\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{8t^2}\right) & \text{si } 0 < |t| \leq \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$





Alors $[\alpha = o_p(f)]_{(\mathbf{N},\mathcal{F})}$ mais $[\alpha \neq o_a(f)]_{(\mathbf{N},\mathcal{F})}$.

La relation précise entre ces deux notions d'ombres est donnée à travers une autre notion introduite par la

3.12 - Définition: Soient $(X, \Phi) \in \text{ob}(\mathbf{\Phi})$ et $f \in R^R(X, \Phi)$.

On dit que f est Δ-continue si

$$(X,\Phi)\Vdash \forall t \in R_{acc}\, \forall r \in \Delta(f(t+r)-f(t) \in \Delta),$$

ce qui nous permet d'énoncer le dernier résultat:

3.13 - Proposition: *Pour des fonction* $\alpha : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *et* $f \in R^R(X,\Phi)$, $(X,\Phi) \in$ ob($\mathbf{\Phi}$), *il y a équivalence entre (i) et (ii) ci-dessous.*

(i) $\alpha = o_a(f)$.

(ii) $\alpha = o_p(f)$, α *est continue et* f *est* Δ*-continue.*

Remarque: Tous les résultats du § 3-B s'étendent aux fonctions $\alpha : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ et à leurs représentantes internes $f \in R^{R^n}(X,\Phi)$ (avec des définitions analogues).

Bibliographie

[1] Boileau, A. - *Types versus Topos*, thèse de doctorat, Université de Montréal (1975).

[2] Boileau, A. et Joyal, A. - *La Logique des Topos*, Journ. Symb. Logic, vol. 46, n° 1 (1981).

[3] Bourbaki, N - *Topologie Générale*, 3e ed. Hermann, Paris (1961).

[4] Dubuc, E.J. - *Sur les modèles de la Géométrie Différentielle Synthétique*, Cahiers de Top. et Géom. Diff. 20 (1979).

[5] Druck, I.F. et Reyes, G.E. - *Sur la convergence de fonctions suivant des filtres, Categorical Algebra and its Applications.* Proceedings, Louvain-la-Neuve, 1987. Lecture Notes in Math., 1348, Springer (F.Borceux,Ed.)(1988).

[6] Gillman, L. et Jerison, M. - *Rings of Continuous Functions*, New York, Springer-Verlag (1976).

[7] Guillemin, V. et Pollack, A. - *Differential Topology*, Prentice-Hall (1974).

[8] Johnstone, P.T. - *Topos Theory*, London Math. Society Monographs, n° 10, Academic Press (1977).

[9] Kleene, S.C. - *Mathematical Logic*, Wiley and Sons Inc. (1967).

[10] Kock, A. - *Synthetic Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 51, Cambridge Univ. Press (1981).

[11] Mac Lane, S. - *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag (1971).

[12] Makkai, M. et Reyes G.E. - *First-Order Categorical Logic*, Lecture Notes in Math. 611, Springer-Verlag (1977).

[13] Moerdijk, I et Reyes, G.E. - *A smooth version of the Zariski topos*, Report 83-24, Univ. of Amsterdam (1983), Adv. Math., vol. 65, n° 3 (1987), 229-253.

[14] Moerdijk, I. et Reyes, G.E. - *Rings of Smooth Functions and their Localizations I*, Journal of Algebra 99, n° 2 (1986).
[15] Moerdijk, I. et Reyes, G.E. - *Models of Smooth Infinitesimal Analysis*, Springer-Verlag (1991).
[16] Reyes, G.E. - *Théorie des modèles et faisceaux*, Advances in Math. vol. 30, n° 2, pp.156-170 (1978).
[17] Reyes, G.E. (éditeur) - *Analyse C^∞, Géométrie Différentielle Synthétique*, Rapport de recherches du D.M.S. - 80-12, Univ. de Montréal (1980).
[18] Reyes, G.E. - *Analyse dans les topos lisses*, Cahiers de Top. et de Géom. Diff. XXII-2 (1981).
[19] Robinson, A. - *Non Standard Analysis*, North-Holland Publ. Co. (1966).

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
C.P. 20570
01498-970, SÃO PAULO, SP
BRASIL
FAX: (011) 814-4135
e-mail: iole@ime.usp.br