

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

ANDRÉ GRAMAIN

Le théorème de Van Kampen

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 33, n° 3 (1992), p. 237-251

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_237_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Le Théorème de van Kampen

André Gramain¹

ABSTRACT : Van Kampen's theorem gives a procedure to compute the fundamental group of a topological space constructed through pasting together several spaces. The initial motivation was the computation of the group of the complex projective plane curve. We give here some details of Van Kampen's original work before briefly going through the history of the subject, and we conclude with covering spaces.

On désigne habituellement sous le nom de théorème de VAN KAMPEN l'énoncé suivant :

Théorème 1 *Soit Y un espace topologique, réunion de deux parties ouvertes U_1 et U_2 . On pose $U_0 = U_1 \cap U_2$; on suppose U_0, U_1, U_2 connexes par arcs, et on désigne par a un point de Y . Le groupe de Poincaré $\pi_1(Y, a)$ est isomorphe à la somme des groupes $\pi_1(U_1, a)$ et $\pi_1(U_2, a)$ amalgamée par le groupe $\pi_1(U_0, a)$.*

En d'autres termes, si l'on note φ_i et ψ_i les homomorphismes déduits des injections canoniques, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(U_1, a) & \\ \phi_1 \nearrow & & \searrow \psi_1 \\ \pi_1(U_0, a) & & \pi_1(Y, a) \\ \phi_2 \searrow & & \nearrow \psi_2 \\ & \pi_1(U_2, a) & \end{array}$$

est cocartésien. Cela signifie que $\pi_1(Y, a)$ est solution d'un problème universel. Pour tout groupe Π , étant donnés des homomorphismes μ_1 et μ_2 de

¹Université de Tours, "gramain@frutrs51.bitnet"



FIGURES 1 ET 2

$\pi_1(U_1, a)$ et $\pi_1(U_2, a)$ respectivement dans Π , tels que $\mu_1 \circ \varphi_1 = \mu_2 \circ \varphi_2$, il existe un unique homomorphisme μ de $\pi_1(Y, a)$ dans Π tel que $\mu_1 = \mu \circ \psi_1$ et $\mu_2 = \mu \circ \psi_2$.

Cet énoncé a été démontré en 1931 par H. SEIFERT [8], [9, §52], non pour des ouverts U_1 et U_2 , mais pour des sous-complexes d'un complexe simplicial Y . En 1933, E. VAN KAMPEN retrouve cet énoncé comme cas particulier d'une situation plus compliquée, issue d'un problème de géométrie algébrique [11]. Avant d'aborder la question de géométrie qui est à l'origine du travail de VAN KAMPEN, quelques remarques s'imposent.

a) Si U_0 n'est pas connexe, on peut décrire $\pi_1(Y, a)$ en ajoutant des générateurs correspondant à chacune des composantes connexes par arcs de U_0 qui ne contiennent pas a (FIG. 1).

b) Si, au lieu de les supposer ouverts, on suppose que U_1 et U_2 sont fermés dans Y , l'énoncé n'est plus valable en général (FIG. 7). Néanmoins, sous certaines hypothèses, comme celles de Seifert par exemple, le théorème est valable. Il permet de calculer le groupe de Poincaré d'un polyèdre ou d'un CW-complexe en calculant celui de son 2-squelette par attachement des 1-cellules, puis des 2-cellules.

c) On peut décrire un cercle comme réunion de deux demi-cercles (FIG. 1), mais il est plus simple de le considérer comme quotient d'un segment par identification des deux extrémités (FIG. 2). C'est justement à ce genre de recollements que s'est intéressé VAN KAMPEN.

1 Complémentaire d'une courbe algébrique plane

Soit Γ une courbe algébrique plane de degré n dans le plan projectif complexe $P = \mathbf{P}_2(\mathbf{C})$. Une droite complexe D en position générale rencontre

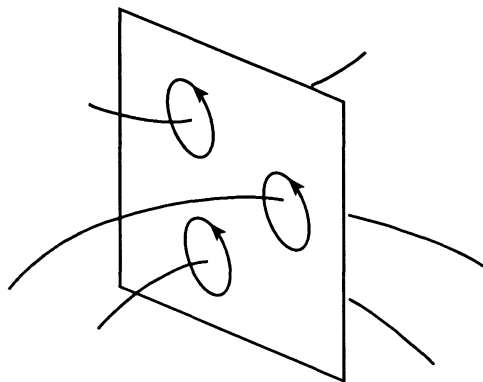


FIGURE 3

Γ en n points. PICARD et LEFSCHETZ ont remarqué que des petits cercles dans D , entourant chacun de ces points d'intersection, convenablement reliés à un point-base $*$, forment un ensemble générateur du groupe de Poincaré $\pi_1(P - \Gamma, *)$. L'idée de ZARISKI, pour déterminer les relateurs, est de balayer le plan P par une droite complexe D issue d'un point A pris hors de Γ . Les relations apparaissent lorsque la droite D a un contact avec la courbe, ou franchit une singularité. C'est à la demande de ZARISKI que VAN KAMPEN a établi le théorème de topologie approprié, et l'a appliqué à cette situation. ZARISKI devait ensuite donner le calcul des relations associées à une singularité en fonction de la forme de celle-ci. Nous exposerons le vrai théorème de VAN KAMPEN pour les recollements au n°2, et nous raconterons la suite de l'histoire dans les n°s suivants. Mais nous allons d'abord expliquer comment on calcule le groupe d'une courbe algébrique [10].

Soient α une droite complexe dans P , et A un point pris hors de α et de Γ . On note D_1, \dots, D_m les droites issues de A qui sont tangentes à Γ , ou qui contiennent une singularité. On suppose que chaque droite D_j contient au plus un contact ou une singularité, et qu'elle rencontre la droite α en un point A_j n'appartenant pas à Γ . On choisit un point B de α , distinct des A_j et n'appartenant pas à Γ . On choisit des arcs a_j plongés dans α , reliant B aux points A_j . On pose $a'_j = a_j - \{A_j, B\}$, et on suppose les arcs a'_j disjoints.

Soit T l'espace obtenu en fendant la droite α le long des arcs a_j . On obtient T en dédoublant tous les points de a'_j en deux points adhérents chacun

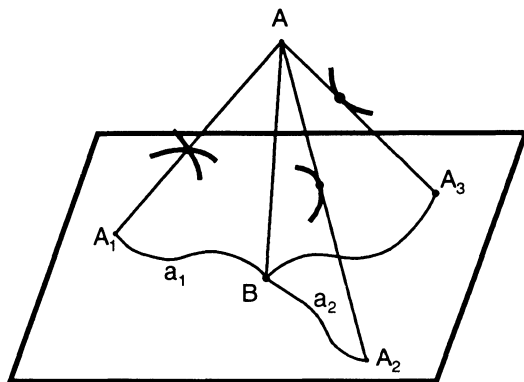


FIGURE 4

à l'une des composantes connexes locales de $\alpha - a'_j$, et en éclatant le point B en m points (FIG. 5). L'espace T est homéomorphe à un disque fermé, et on a une application canonique g de T sur α . L'application g se prolonge en une application de $R = T \times \mathbf{C}$ dans P qui envoie $\{x\} \times \mathbf{C}$ sur la droite $Ag(x)$ privée de A . Soit T' le disque T privé des images réciproques des points B et A_j , $1 \leq j \leq m$; posons $R' = T' \times \mathbf{C}$ et $S' = R' - f^{-1}(\Gamma)$. Chaque droite issue de A , autre que les droites AA_j , rencontre Γ en n points exactement. La première projection de S' sur T' est une fibration localement triviale, donc triviale. L'espace S' est homéomorphe à $T' \times C_n$, où C_n est égal à \mathbf{C} privé de n points. Si l'on choisit un point-base $* = (x, y)$ dans S' , le groupe $\pi_1(S', *)$ est un groupe libre dont les générateurs g_1, \dots, g_n sont les générateurs de $\pi_1(\{x\} \times C_n, *)$.

On obtient l'espace $P - \Gamma$ à partir de S' par des opérations de recollement. D'après le théorème 2, le groupe $\pi_1(P - \Gamma)$ est isomorphe au groupe quotient du produit libre $F * \pi_1(S', *)$, où F est un groupe libre, par le plus petit sous-groupe distingué contenant les relateurs qui apparaissent lors de ces recollements.

a) Le recollement le long de a'_j de deux exemplaires de $a'_j \times C_n$ introduit un nouveau générateur h_j correspondant à un lacet entourant la droite AA_j , et n relations

$$g_i = h_j \Phi_{i,j}(g_1, \dots, g_n) h_j^{-1},$$

où $\Phi_{i,j}$ décrit la transformation que subit le lacet g_i entourant, dans la droite

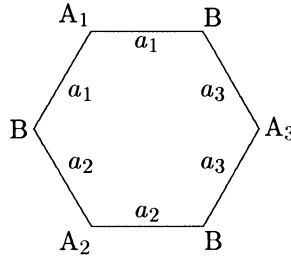


FIGURE 5

AM , un point d'intersection de cette droite avec Γ , lorsque le point M parcourt le lacet de classe h_j autour de AA_j . L'espace obtenu après ces recollements est homéomorphe à P privé de Γ et des droites AB et AA_j , $j = 1, \dots, m$.

b) Lorsqu'on adjoint les droites AA_j privées du point A et de leurs point d'intersection avec Γ , on identifie les éléments h_j à l'élément neutre.

c) Enfin, lorsqu'on adjoint la droite AB , privée de ses points d'intersection avec Γ , on introduit une relation

$$g_1 \dots g_n = 1,$$

si les générateurs $g_1 \dots, g_n$ ont été bien choisis. Cette relation correspond à l'adjonction d'un point à l'infini dans C_n .

2 Recollement d'espaces topologiques

Soit C un espace topologique connexe par arcs. Soient B_0 et B_1 deux parties fermées de C , disjointes, connexes par arcs, et homéomorphes entre elles. On se donne un espace topologique B et deux homéomorphismes h_0, h_1 de B sur B_0 et B_1 respectivement. On note A l'espace topologique quotient de C par la relation d'équivalence qui identifie en un point les deux points $h_0(x)$ et $h_1(x)$, pour tout $x \in B$. On note f l'application canonique de C sur son quotient A . On choisit un point-base b dans B ; on pose $b_0 = h_0(b)$, $b_1 = h_1(b)$, $a = f(h_0(b))$. On choisit la classe β d'un chemin reliant b_0 à b_1

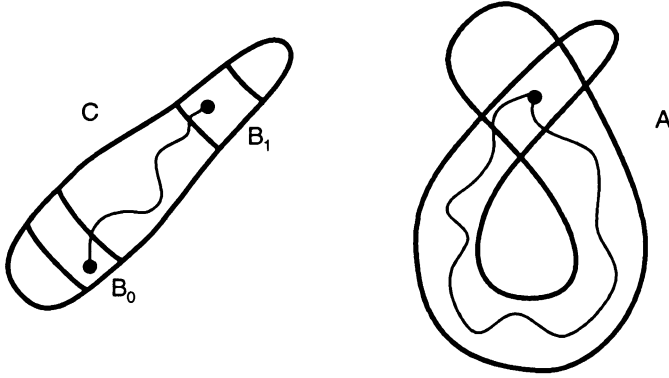


FIGURE 6

dans C . On note ϑ_0 l'homomorphisme de $\pi_1(B, b)$ dans $\pi_1(C, b_0)$ déduit de l'application h_0 , et ϑ_1 l'homomorphisme de $\pi_1(B, b)$ dans $\pi_1(C, b_1)$ défini par

$$\vartheta_1(v) = \beta^{-1} h_{1*}(v) \beta, \quad \text{pour } v \in \pi_1(B, b).$$

Soit $F(\ell)$ le groupe libre à un générateur ℓ . On note μ l'unique homomorphisme du produit libre $F(\ell) * \pi_1(C, b_0)$ dans $\pi_1(A, a)$ qui induit sur $\pi_1(C, b_0)$ l'homomorphisme $\pi_1(f, b_0)$, et tel que $\mu(\ell) = f_*(\beta)$.

Proposition 1 *Sous certaines hypothèses topologiques, l'homomorphisme μ est surjectif, et son noyau est le plus petit sous-groupe distingué contenant les éléments*

$$\vartheta_0(v) \ell \vartheta_1(v)^{-1} \ell^{-1},$$

où v parcourt $\pi_1(B, b)$.

Les hypothèses que fait VAN KAMPEN sont les suivantes. On suppose que B_0 et B_1 possèdent des voisinages ouverts disjoints M_0 et M_1 et que :

(a) tout voisinage V d'un point x de B_i dans M_i contient un voisinage V' de x tel que les applications de $\pi_k(V', x)$ dans $\pi_k(V, x)$, pour $k = 0, 1, 2$, soient constantes ;

(b) tout voisinage W d'un point x de B dans B contient un voisinage W' de x tel que les applications de $\pi_k(W', x)$ dans $\pi_k(W, x)$, pour $k = 0, 1$, soient constantes.

La démonstration de la proposition consiste à subdiviser et déformer les chemins pour démontrer la surjectivité de l'application μ , et à opérer de même sur les homotopies pour trouver les générateurs du noyau.

C'est bien cette proposition qui a été appliquée au n°1 avec $C = S'$. En réalité, le théorème démontré par VAN KAMPEN est plus général. On ne suppose pas que C est connexe. On suppose que $(B_\ell)_{\ell \in L}$ est une famille finie de parties fermées de C , disjointes, et connexes par arcs, et que l'on a, pour tout $\ell \in L$, un homéomorphisme de B sur B_ℓ . L'espace A est l'espace quotient de C obtenu en identifiant en un point chaque famille de points $(h_\ell(x))_{\ell \in L}$, pour $x \in B$. On note $(C_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes par arcs de C . Pour tout $\ell \in L$, on note $\eta(\ell)$ l'élément i de I tel que $B_\ell \subset C_i$. On suppose l'application η surjective, on choisit une section $\sigma : I \rightarrow L$ de η , et on pose $T = \sigma(I)$, $\tau = \sigma \circ \eta$. Pour tout $\ell \in L$, on choisit la classe β_ℓ d'un chemin reliant b_ℓ à $b_{\tau(\ell)}$ dans $C_{\eta(\ell)}$; lorsque ℓ appartient à T , on prend la classe du chemin constant. On définit les homomorphismes ϑ_ℓ de $\pi_1(B, b)$ dans $\pi_1(C, b_{\tau(\ell)})$ comme plus haut. On choisit enfin un élément ℓ_0 de L .

Théorème 2 *L'unique homomorphisme μ du groupe*

$$F(L - T) * \left(\bigstar_{i \in I} \pi_1(C_i, b_{\sigma(i)}) \right)$$

dans $\pi_1(A, a)$ qui induit $\pi_1(f, b_{\sigma(i)})$ sur $\pi_1(C_i, b_{\sigma(i)})$, et tel que $\mu(\ell) = f_(\beta_\ell)$, pour tout $\ell \in L - T$, est surjectif. Son noyau est le plus petit sous-groupe distingué contenant les éléments*

$$\begin{aligned} \vartheta_{\ell_0}(v) \vartheta_\ell(v)^{-1} & \quad \text{pour } v \in \pi_1(B, b), \ell \in T, \\ \vartheta_{\ell_0}(v) \ell \vartheta_\ell(v)^{-1} \ell^{-1} & \quad \text{pour } v \in \pi_1(B, b), \ell \in L - T. \end{aligned}$$

Les hypothèses sont analogues à celles de la proposition 1. Signalons que VAN KAMPEN prend des espaces métriques et autorise l'ensemble L à être infini dénombrable. Par ailleurs, le théorème 2 est valable sous des hypothèses un peu différentes et plus maniables que les conditions (a) et (b). Disons qu'un espace topologique X est un *bon espace* s'il est localement connexe par arcs et si tout point x de X possède un voisinage V tel que l'application canonique de $\pi_1(V, x)$ dans $\pi_1(X, x)$ soit constante. Si l'on désigne par $\varpi(X)$ le groupoïde de Poincaré de X (groupoïde des classes d'homotopie de chemins), la catégorie des revêtements d'un bon espace X

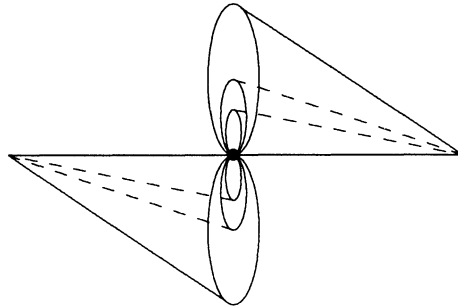


FIGURE 7

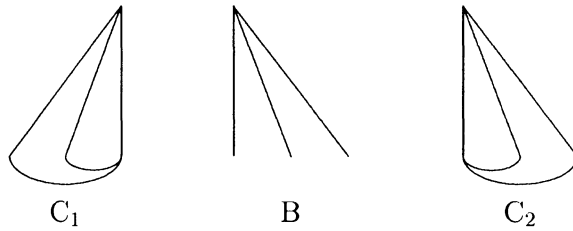


FIGURE 8

est équivalente à la catégorie des $\varpi(X)$ -ensembles. Le théorème 2 est valable si les hypothèses suivantes sont satisfaites :

- (a') l'espace A est connexe et bon ;
- (b') l'espace B est connexe et localement connexe par arcs ;
- (c') l'espace C est bon.

Des exemples où l'une de ces conditions n'est pas vérifiée sont donnés par les figures 7, 8 et 9. Les dessins des figures 7 et 9 représentent des espaces en tôle, l'exemple de la figure 8 est en fil de fer. Dans les trois exemples intervient un espace topologique plan, réunion d'une suite infinie de cercles passant par un même point, dont les diamètres tendent vers 0 ...

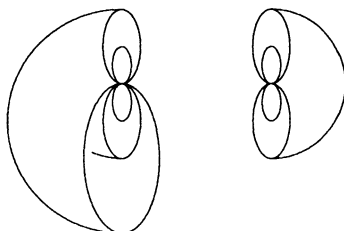
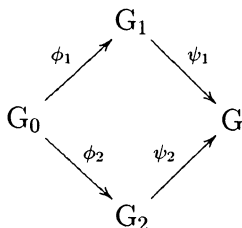


FIGURE 9

3 Développements

L'article [11] de VAN KAMPEN se termine ainsi : *“the path is shown to a more general theorem, of which however the general formulation would be more confusing than helpful”*. Cette mise en garde semble avoir été respectée pendant une longue période, mais la curiosité des mathématiciens a fini par l'emporter sur la complexité des énoncés.

En 1957, P. OLUM remarque que le théorème 1 est équivalent à une suite exacte de Mayer-Vietoris, en dimension 1, pour la cohomologie à valeurs dans un groupe non abélien [7]. En effet, le fait que le diagramme



soit universel (ou cocartésien) signifie exactement que, pour tout groupe Π ,

le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{Hom}(G_1, \Pi) & \\
 \phi_1^* \nearrow & & \searrow \psi_1^* \\
 \text{Hom}(G_0, \Pi) & & \text{Hom}(G, \Pi) \\
 \phi_2^* \searrow & & \nearrow \psi_2^* \\
 & \text{Hom}(G_2, \Pi) &
 \end{array}$$

est exact. P. OLUM définit le groupe de cohomologie non-abélienne $H^1(X, \Pi)$, démontre qu'il est isomorphe à $\text{Hom}(\pi_1(X), \Pi)$, et démontre l'exactitude du diagramme ci-dessus pour les groupes de cohomologie par subdivision et déformation de simplexes.

En 1959, R. CROWELL généralise le théorème 1 à un recouvrement ouvert $(U_i)_{i \in I}$ de Y , où I est un ensemble quelconque, sous l'hypothèse que les intersections $U_i \cap U_j$ soient connexes par arcs et contiennent toutes un même point-base [4]. Dans [12], A. WEINZWEIG étudie le cas d'un recouvrement ouvert quelconque, ce qui le conduit à une suite exacte

$$1 \longrightarrow F \xrightarrow{\iota} \pi_1(Y) \xrightarrow{\tau} H \longrightarrow 1$$

où F est le sous-groupe distingué de $\pi_1(Y)$ engendré par les images des groupes fondamentaux des composantes connexes par arcs de toutes les intersections finies d'ensembles U_i , et H le groupe fondamental d'un complexe un peu plus subtil que le nerf du recouvrement. La définition des flèches ι et τ utilise des point-bases dans chaque composante connexe par arcs des intersections finies d'ensembles U_i et des chemins les reliant. L'exploitation de la suite exacte n'est pas évidente.

En 1966, R. BROWN aborde élégamment la question des point-bases en considérant les groupoïdes de Poincaré [2]. Si X est un espace topologique, on note $\varpi(X)$ le groupoïde de Poincaré de X , groupoïde des classes d'homotopie de chemins dans X . Si A est une partie de X , on note $\varpi(X, A)$ le sous-groupoïde plein de $\varpi(X)$ dont l'ensemble des sommets est A . Soit Y un espace topologique connexe par arcs, réunion de deux parties ouvertes U_1 et U_2 , et soit $U_0 = U_1 \cap U_2$. On ne suppose plus que les U_i sont connexes par arcs. On choisit un ensemble A ayant un point au moins dans chaque composante connexe par arcs de U_0 . On pose $A_1 = A \cap U_1$, $A_2 = A \cap U_2$, $A_0 = A_1 \cap A_2$.

On démontre alors que le diagramme suivant est cocartésien.

$$\begin{array}{ccc}
 & \varpi(U_1, A_1) & \\
 \phi_1 \nearrow & & \searrow \psi_1 \\
 \varpi(U_0, A) & & \varpi(Y, A_0) \\
 \phi_2 \searrow & & \nearrow \psi_2 \\
 & \varpi(U_2, A_2) &
 \end{array}$$

Le foncteur Φ_1 est composée de l'injection de $\varpi(U_0, A)$ dans $\varpi(U_1, A)$ et d'une rétraction de $\varpi(U_1, A)$ sur $\varpi(U_1, A_1)$ définie par le choix, pour tout $a \in A - A_2$ d'une flèche d'extrémité a , issue d'un point de A_0 , dans $\varpi(U_1, A)$. Les foncteurs Φ_2 , Ψ_1 et Ψ_2 sont construits de façon analogue.

On sait donc calculer le groupe fondamental de Y si l'on sait calculer le groupe en un sommet d'une somme amalgamée de groupoïdes. R. BROWN donne une construction explicite, inspirée de [6], du groupoïde somme amalgamée, et un calcul du groupe en un sommet qui lui permettent de retrouver le théorème 1 en supposant seulement U_1 connexe. Il indique aussi comment retrouver le théorème 2.

Signalons en outre des travaux plus récents sur les groupes d'homotopie supérieurs dans le cadre de catégories de diagrammes d'espaces [3].

4 Revêtements

Soient X et Y des espaces topologiques et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Notons p_1 et p_2 les projections du carré fibré $X \times_Y X$ sur X , Φ_1 et Φ_2 les foncteurs $\varpi(p_1)$ et $\varpi(p_2)$ de $\varpi(X \times_Y X)$ dans $\varpi(X)$. Soit \mathcal{G} le groupoïde somme amalgamée de deux exemplaires de $\varpi(X)$ par Φ_1 et Φ_2 , et soient Ψ_1, Ψ_2 les deux foncteurs canoniques de $\varpi(X)$ dans \mathcal{G} . On appelle parfois \mathcal{G} le coégalisateur ou le conoyau du couple (Φ_1, Φ_2) . Comme les applications $f \circ p_1$ et $f \circ p_2$ sont égales, il existe un unique foncteur $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \varpi(Y)$ tel que $\mu \circ \Psi_i = \varpi(f)$ pour $i = 1, 2$. Les questions qui se posent sont les suivantes :

- (Q1) A quelles conditions le foncteur μ est-il un isomorphisme ?
- (Q2) Donner une description de \mathcal{G} .

(Q3) Etant donnée une description de \mathcal{G} , donner une description du groupe en un sommet de \mathcal{G} .

Si $(U_i)_{i \in I}$ est une famille d'ensembles dont les intérieurs recouvrent Y , si X est l'espace topologique somme de la famille (U_i) et f l'application canonique, résoudre ces questions revient à démontrer la généralisation naturelle du théorème 1. Quand au théorème 2, il correspond tout simplement à $X = C$, $Y = A$.

La question (Q2) a déjà été évoquée (n°3). La réponse est donnée dans [6], th.3. L'ensemble des sommets de \mathcal{G} est $f(X)$. Une flèche reliant deux sommets a et b de \mathcal{G} est définie par un mot $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$, où α_k est une flèche de $\varpi(X)$ reliant un point x_k à un point z_k de X , de sorte que l'on ait $f(x_1) = a$, $f(z_k) = f(x_{k+1})$, $f(z_n) = b$. Un mot obtenu à partir de w par des calculs sur les α_k dans $\varpi(X)$ définit la même flèche de \mathcal{G} que w .

La question (Q1) a une première réponse simple donnée par la proposition suivante qui couvre le théorème 1.

Proposition 2 *Si tout point de Y possède un voisinage sur lequel il existe une section continue de l'application f , le foncteur μ est un isomorphisme.*

La démonstration classique de [4] s'adapte immédiatement. On décompose les chemins et les homotopies dans Y en petits chemins et petites homotopies qui se relèvent à X .

Sans entrer dans les détails, indiquons une autre méthode permettant de répondre à la question (Q1) sous d'autres hypothèses [1]. Sous des hypothèses convenables sur les espaces, les questions de groupe fondamental sont équivalentes des questions de revêtements. La surjectivité et l'injectivité de μ se traduisent par la descente des revêtements et des morphismes de revêtements de X à Y ; c'est la méthode utilisée par GROTHENDIECK en géométrie algébrique [5]. Supposons par exemple que l'application f soit fermée, séparée et surjective, à fibres finies, que la diagonale Δ_X soit ouverte dans $X \times_Y X$ et que l'espace $X \times_Y X - \Delta_X$ soit localement connexe par arcs. La catégorie des revêtements de Y est alors équivalente à la catégorie des revêtements de X munis d'une 'donnée de descente'. Si l'on suppose que X et Y sont de bons espaces, le foncteur μ est un isomorphisme. Ce résultat couvre le théorème 2 avec les hypothèses (a'), (b'), (c'). Il y a d'autres hypothèse sur f , assez voisines des précédentes, qui permettent d'affirmer que μ est un isomorphisme. C'est le cas notamment si X est l'espace somme d'une

famille localement finie (A_i) de parties fermées de Y , qui sont de bons espaces, qui recouvrent Y , et dont les intersections deux à deux sont localement connexes par arcs.

La complexité de la question (Q3) est à la mesure de la complexité de la géométrie combinatoire de l'application f . Cette géométrie se lit dans les puissances fibrées de X sur Y . Pour le calcul du groupe fondamental, la seule considération de $X \times_Y X$ et de $X \times_Y X \times_Y X$ suffit (dans [12], il était inutile de faire intervenir toutes les intersections finies). Supposons l'espace Y connexe par arcs, et soit a un point de Y . Le groupe $\pi_1(Y, a)$ est isomorphe à un quotient du produit libre des groupes fondamentaux $\pi_1(X_i, x_i)$ des composantes connexes de X , et d'un groupe libre $F(J)$, où J est l'ensemble des composantes connexes de $X \times_Y X$. Pour déterminer les relations, il est nécessaire de choisir des points-bases dans chaque composante connexe de X , $X \times_Y X$ et $X \times_Y X \times_Y X$, et de choisir des chemins joignant les projections de ces points ainsi que leurs images dans Y [1]. Trois familles de relations apparaissent.

(R1) Les générateurs superflus de $F(J)$. Ainsi le groupe fondamental du cercle est un groupe libre à un seul générateur (FIG. 1).

(R2) Les relations intervenant dans le théorème 2, ou dans la définition de la somme amalgamée, qui expriment que, si Z_j est une composante connexe de $X \times_Y X$, les homomorphismes de $\pi_1(Z_j, z_j)$ dans $\pi_1(X)$ déduits de p_1 et p_2 , sont égalisés par $\pi_1(f)$, à une conjugaison près.

(R3) Des relations d'un troisième type sont associées à chaque composante de $X \times_Y X \times_Y X$. Ces relations apparaissent dans [12]. Dans la démonstration esquissée au n°1, si l'on fait simultanément les recollements a) et b), les relations (R3) sont les relations $h_j = 1$.

L'exemple de la figure 10, donné par A. DOUADY, montre deux espaces topologiques Y et Y' , chacun réunion de trois sous-espaces fermés dont les groupes fondamentaux sont libres à deux générateurs, et dont les intersections deux à deux sont contractiles. Néanmoins, le groupe $\pi_1(Y)$ est libre de rang 5 tandis que Y' est une surface compacte de genre 3.

Signalons à titre d'exemple un corollaire du théorème général de VAN KAMPEN autre que recollement ou recouvrement. Soit $p : X \rightarrow Y$ un revêtement connexe, de degré 2, de base connexe. Le groupe $\pi_1(Y, p(a))$ est une extension de $\mathbf{Z}/2$ par $\pi_1(X, a)$, et il peut être utile de savoir de quelle extension il s'agit. On suppose que X et Y sont de bons espaces. On note s l'involution de X , γ la classe d'un chemin reliant a à $s(a)$, σ l'homomorphisme

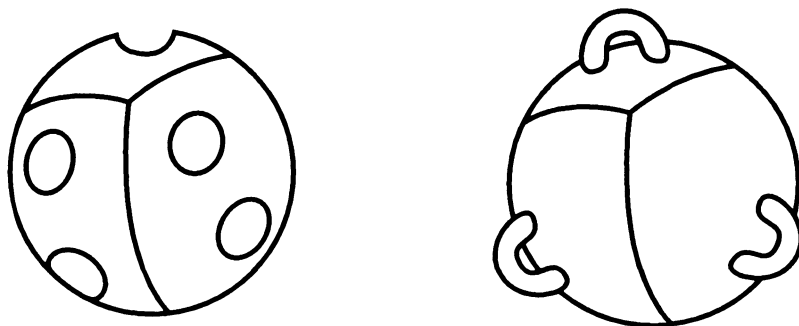


FIGURE 10

$v \mapsto \gamma^{-1} s_*(v) \gamma$ de $\pi_1(X, a)$ dans lui-même, λ l'élément de $\pi_1(x, a)$ composé de γ et $s_*(\gamma)$ et $F(\ell)$ un groupe libre de générateur ℓ .

Proposition 3 *L'homomorphisme $\mu : F(\ell) * \pi_1(X, a) \rightarrow \pi_1(Y, p(a))$ dont la restriction à $\pi_1(X, a)$ est $\pi_1(p, a)$, et tel que $\mu(\ell) = p_*(\gamma)$, est surjectif. Son noyau est le plus petit sous-groupe distingué contenant $\lambda \ell^{-2}$ ainsi que les éléments $\ell \sigma(v) \ell^{-1} v^{-1}$ pour tout $v \in \pi_1(X, a)$.*

BIBLIOGRAPHIE

1. N. BOURBAKI, communication personnelle.
2. R. BROWN, Groupoids and the van Kampen Theorem, *Proc. London Math. Soc.* (3) **17** (1967), 385-401
3. R. BROWN and J.L.LODAY, Van Kampen theorems for diagrams of spaces, *Topology* **26** (1987), 311-335
4. R. CROWELL, On the van Kampen theorem, *Pacific J. Math.* **9** (1959), 43-50
5. A. GROTHENDIECK, Revêtement étale et groupe fondamental, Séminaire de Géométrie algébrique, *Lecture Notes in Math.* 224, Springer (1971).
6. P.J. HIGGINS, Presentation of groupoids with applications to groups, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **60** (1964), 7-20
7. P. OLUM, Non-abelian cohomology and van Kampen's theorem, *Ann. of Math.* **68** (1958), 658-668

8. H. SEIFERT, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, *Ber. Sächs. Akad. Wiss.* **83** (1931), 26-66.
9. H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Lehrbuch der Topologie*, english translation Acad. Press (1980).
10. E. VAN KAMPEN, On the fundamental group of an algebraic curve, *Amer. J. of Math.* **55** (1933), 255-260.
11. E. VAN KAMPEN, On the connection between the fundamental groups of some related spaces, *Amer. J. of Math.* **55** (1933), 261-267.
12. A.I. WEINZWEIG, The fundamental group of the union of spaces, *Pacific J. Math.* **11** (1961), 763-776

Université de Tours
Faculté des Sciences
Parc de Grandmont
Tours 37200
"gramain@frutrs51.bitnet"