

# CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

A. C. EHRESMANN

J-P. VANBREMEERSCH

## **Outils mathématiques pour modéliser les systèmes complexes**

*Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques*, tome  
33, n° 3 (1992), p. 225-236

[http://www.numdam.org/item?id=CTGDC\\_1992\\_\\_33\\_3\\_225\\_0](http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_3_225_0)

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

## Outils mathématiques pour modéliser les systèmes complexes

A. C. Ehresmann et J-P. Vanbremeersch<sup>1</sup>

ABSTRACT : The authors have developped a model for complex evolutionary systems with memory, such as biological or neural systems, based on category theory, in particular fibrations, sketches and completions. It is exposed in a series of papers [5-8] intended in part for non-mathematicians. Here the mathematical basis is presented, in particular the construction of the global landscape, the introduction of “Semantics” through shape categories and the internalization of strategies. The concrete terminology comes from the application to neural systems.

Les “systèmes évolutifs avec mémoire” que nous avons étudiés dans une série d’articles (en particulier [5-8] auxquels nous renvoyons) représentent un modèle mathématique pour des systèmes naturels autonomes, avec une hiérarchie de composants et d’organes de régulation internes plus ou moins complexes, qui changent au cours du temps en préservant leur structure globale, et capables d’utiliser leurs expériences précédentes pour apprendre à s’adapter à leur environnement. Ce modèle est basé sur la théorie des catégories qui nous semble offrir de meilleurs outils que des théories plus “classiques” pour comprendre la complexité des systèmes biologiques ou sociologiques et pour expliquer l’émergence de processus cognitifs d’ordre supérieur.

Les articles antérieurs ont été rédigés pour des non-mathématiciens, avec de nombreux exemples, et des applications surtout aux systèmes neuronaux qui ont servi de prototype pour notre travail. Dans le “dictionnaire” ci-joint,

---

<sup>1</sup>Université de Picardie Jules Verne

nous n'avons pas la place de rappeler ces applications (qui font cependant tout l'intérêt de la théorie !) ; nous nous limitons à donner les principales définitions et théorèmes, de sorte à montrer quel rôle peuvent jouer dans ces problèmes "concrets" des notions telles que les fibrations, la construction du prototype d'une esquisse [4] ( pour la "complexification") ou d'une catégorie quotient (pour le "paysage global"), la "shape-category" (pour la formation d'une mémoire procédurale et sémantique).

## 1 Dictionnaire sur la complexité

**Système évolutif.** Il est modélisé par une fibration scindée  $K$  au-dessus d'un ordre total figurant la catégorie *Temps*. La fibre  $K_t$  au-dessus de "l'instant"  $t$  représente l'état du système en  $t$ , le foncteur de l'état en  $t$  vers l'état en  $t' > t$  est la transition de  $t$  à  $t'$ . Chaque fibre est munie d'un objet initial, noté  $0$ , préservé par les transitions. Si un objet  $B$  en  $t$  est appliqué sur le  $0$  par la transition de  $t$  vers  $t'$ , on dit qu'il a été "supprimé" en  $t'$ .

**Patterns.** Un diagramme  $\mathcal{B}$  de type  $I$  dans une catégorie  $K$  sera aussi appelé *pattern d'objets* liés dans  $K$ , et noté  $(B_i)_I$ , où  $B_i = \mathcal{B}(i)$  pour tout sommet  $i$  de  $I$  ; les liens du pattern sont les images des flèches de  $I$ . Si  $\mathcal{B}$  a une colimite, elle sera appelée le *recollement* du pattern. Par exemple dans un système neuronal, la formation d'une assemblée de neurones synchrones au sens de Hebb [9] sera modélisée par le recollement du pattern que forment ses neurones et les synapses entre eux (cf. [7-8]).

**Système hiérarchique.** C'est un système évolutif  $K$  dans lequel chaque catégorie  $K_t$  est hiérarchique au sens suivant : On a une partition de l'ensemble des objets en un nombre fini de "niveaux", notés  $0, 1, \dots$ , de sorte que tout objet  $B$  du niveau  $n + 1$  soit le recollement d'au moins un pattern d'objets liés du niveau  $n$ . Comme chaque objet  $B_i$  de ce pattern est lui-même colimite d'un pattern du niveau  $n - 1$ , etc ... on peut associer à  $B$  tout un arbre de patterns de niveaux décroissants jusqu'au niveau  $0$ , reliés "horizontalement" (i.e., à chaque niveau) par les liens des patterns unissant leurs sommets, ce qu'on exprime en disant que  $B$  est colimite  $p$ -itérée d'objets de niveau  $n - p$  pour tout  $p < n$ .

**Centre de régulation et la fibration des champs.** *Un centre de régulation* (modélisant un organe de contrôle et de commande) du système évolutif

$K$  sera représenté par la donnée d'une sous-fibration  $CR$  de  $K$  et d'un sous-ordre fini de *Temps* qui détermine l'échelle de temps de  $CR$ . Les objets de  $CR$  sont appelés agents.

Considérons l'état  $CR_t$  de  $CR$  en  $t$ . Si  $A$  en est un agent, le *champ* de  $A$  est la catégorie  $K_t \downarrow A$  des objets au-dessus de  $A$  dans  $K_t$ , dont un objet  $b : B \rightarrow A$  est appelé aspect de  $B$  pour  $A$ . Chaque flèche  $\alpha$  de  $A$  vers un autre agent  $A'$  dans  $CR$  détermine (par composition) le foncteur *communication*  $\alpha^\circ$  du champ de  $A$  vers le champ de  $A'$ . D'où une fibration au-dessus de  $CR_t$ , dite *fibration des champs en  $t$* .

**Paysage de  $CR$ .** Le paysage du centre de régulation  $CR$  en  $t$  est la catégorie colimite de cette fibration (considérée comme foncteur vers *Cat*) ; ses objets, appelés *perspectives*, sont des classes d'équivalence d'aspects  $b$  reliés par un zig-zag de communications entre agents. Ce paysage est muni d'un foncteur *distorsion* vers  $K_t$ . Les paysages de  $CR$  relatifs aux différents instants  $t$  forment un système évolutif sur *Temps*, muni d'un morphisme *distorsion* vers  $K$ .

Dans ([6], Appendice) nous avons montré que le paysage en  $t$  est solution du problème universel de construire une catégorie dans laquelle les agents ont la même fibration des champs que dans  $K_t$ . Et nous avons caractérisé les fibrations des champs parmi les fibrations scindées à l'aide de deux propriétés simples (intuitivement : les communications sont aussi larges que possible et chaque agent reconnaît le "soi" et le "non-soi")

## 2 Système évolutif avec mémoire ; Paysage global ([6])

**Système évolutif avec mémoire (SEM).** C'est un système évolutif hiérarchique  $K$  muni des données suivantes : - 1. *Un système de régulation* formé par une famille finie  $(CR_n)_n$  de centres de régulation, chacun ayant sa propre échelle de temps et des agents d'un certain niveau (deux d'entre eux peuvent être parallèles, i.e., avoir des agents de même niveau). - 2. Une sous-fibration formant un système hiérarchique *Mem*, appelé *Mémoire*, dont le nombre de niveaux augmente lorsque  $t$  croît. Chaque  $CR_n$  a un accès différentiel partiel à *Mem* dans son paysage, par l'intermédiaire des perspectives correspondant à des objets de *Mem*. - 3. L'ordre *Temps* est un sous-ordre de l'ordre sur les réels. Par suite l'échelle de temps de chaque  $CR_n$  est définie par une suite finie de réels  $t_1 < t_2 < \dots < t_k \dots$  ; le réel  $t_k - t_{k-1}$  est appelé *durée*

de la  $k$ -ième étape pour  $CR_n$ . - 4. A chaque  $CR_n$  est associé à chacune de ses étapes un réel  $d_n > 0$ , appelé son *décalage de propagation*, tel que  $5d_n$  soit inférieur à la durée des étapes de  $CR_n$ . On suppose que  $d_n$  augmente avec le niveau de  $CR_n$ .

**Empan de stabilité d'un composé.** Si  $B$  est un objet de niveau  $n + 1$ , on appelle *empan de  $n$ -stabilité* de  $B$  à l'instant  $t$  le plus grand réel  $\delta t$  tel qu'il existe un pattern  $\mathcal{B}$  de niveau  $n$  ayant  $B$  pour colimite en  $t$ , et tel que cette colimite soit préservée par le foncteur transition de  $t$  à  $t'$ , pour tout  $t'$  vérifiant  $t < t' < t + \delta t$ .

On définit de même l'empan de  $p$ -stabilité de  $B$  en  $t$ , pour tout entier  $p \leq n$  en considérant  $B$  comme colimite  $(n + 1 - p)$ -itérée de patterns de niveau  $p$ . Cet empan augmente avec le niveau de  $B$ . Il représente la durée pendant laquelle  $B$  maintient son identité complexe de niveau  $p$  (cf [5]).

**Paysage actuel de  $CR_n$ .** A un instant  $t$  on définit le présent actuel de  $CR_n$  comme étant le sous-ordre de *Temps* formé des  $\tau$  entre  $t - d_n$  et  $t$ . En associant à chacun de ces  $\tau$  le paysage de  $CR_n$  en  $\tau$ , on définit un foncteur du présent actuel vers *Cat*. Le paysage actuel de  $CR_n$  en  $t$  sera une catégorie colimite d'un sous-foncteur de ce foncteur. Il modélise la *mémoire de travail* de  $CR_n$ , formée des perspectives observables par les agents pendant leur présent actuel, avec leur ordre d'arrivée (cf. [7]). Si les agents de  $CR_n$  sont de niveau  $m$ , une perspective d'un objet  $B$  n'est observable dans le paysage actuel en  $t$  que si l'empan de  $(m - 1)$ -stabilité de  $B$  en  $t$  est supérieur à la durée de l'étape en cours ; les perspectives d'objets de niveau  $< m - 1$  ne sont pas observables.

**Paysage global.** A un instant  $t$ , on construit la catégorie  $Q$  des carrés commutatifs :

$$(f, a) : b \rightarrow b' \quad \text{i.e.} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & B' \\ b \downarrow & & \downarrow b' \\ A_n & \xrightarrow{a} & A_m \end{array}$$

où  $A_n$  et  $A_m$  sont des agents appartenant à  $CR_n$  et  $CR_m$  respectivement,  $b$  et  $b'$  des aspects dans les paysages actuels de  $CR_n$  et  $CR_m$  en  $t$ . Cette catégorie admet une sous-catégorie formée des carrés dégénérés  $(Id_B, \alpha) : b \rightarrow c$ , où  $\alpha : A_n \rightarrow A'_n$  est un morphisme d'un  $CR_n$ .

La catégorie  $PG_t$  quasi-quotient de  $Q$  par cette sous-catégorie (au sens de Ehresmann [4a], p. 220) est appelée le paysage global du système en  $t$ .

Ses objets s'identifient à des perspectives.

**Proposition 1** *Le paysage actuel  $P_n$  de chaque  $CR_n$  en  $t$  s'identifie à une sous-catégorie de  $PG_t$ , et  $PG_t$  est muni d'un foncteur distorsion vers le système recollant les foncteurs distorsion  $\delta$  des  $P_n$ . De plus  $PG_t$  est solution universelle du problème suivant : trouver une catégorie dans laquelle chaque  $CR_n$  a son paysage isomorphe à  $P_n$ .*

Ainsi le paysage global joue le même rôle pour tout le système de régulation que son paysage pour un centre de régulation particulier. Le défaut d'isomorphisme du foncteur distorsion globale  $\delta$  mesure la différence entre le système lui-même et ce qui en est connu et contrôlé par le système de régulation.

L'ensemble des flèches allant de  $P_n$  vers  $P_m$  dans  $PG_t$  représente les informations transmissibles de  $CR_n$  à  $CR_m$  en  $t$ .

### 3 Sémantique dans un SEM

Dans un SEM, chaque  $CR_n$  va progressivement "classifier" ses perspectives sur les items mémorisés de la manière suivante :

**Trace d'un pattern.** Soit  $\mathcal{B}$  un pattern  $(B_i)_I$  dans  $K_t$  où  $I$  est une catégorie (cette condition ne sert qu'à simplifier l'exposition) ; on lui associe la sous-catégorie  $T_n\mathcal{B}$  de la catégorie-comma  $\mathcal{B} \downarrow (CR_n \hookrightarrow K_t)$  ayant pour objets les différents aspects des  $B_i$  observables dans le paysage actuel  $P_n$  de  $CR_n$  en  $t$ . C'est une catégorie au-dessus de  $K_t$  relativement au foncteur  $\tau_n$  :

$$T_n\mathcal{B} \rightarrow CR_{n,t} \hookrightarrow K_t : (b : B_i \rightarrow A) \mapsto A.$$

Le pattern dans  $P_n$  déterminé par les perspectives de  $T_n\mathcal{B}$  est appelé *trace de  $\mathcal{B}$  pour  $CR_n$* .

On dit que deux patterns  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  ont la même  $CR_n$ -forme (ou "shape" en anglais, cf. [2] dont l'appendice nous a suggéré d'utiliser cette notion) si  $T_n\mathcal{B}$  et  $T_n\mathcal{B}'$  sont isomorphes en tant que catégories au-dessus de  $K_t$ . D'où une classification relative à  $CR_n$  des patterns observables dans son paysage, qui modélise par exemple la formation d'invariants perceptuels pour un système neuronal.

**CR<sub>n</sub>-Sens.** Au cours de l'apprentissage des CR<sub>n</sub> des niveaux supérieurs, cette classification pourra s'internaliser par formation de nouvelles limites comme suit :

Si  $\mathcal{B}$  est un pattern réduit à un seul objet  $B$ , on appelle *CR<sub>n</sub>-sens* de  $B$ , noté  $s_n B$ , une limite du foncteur  $\tau_n : T_n B \rightarrow K_t$ .

Les *CR<sub>n</sub>-sens* en  $t$  sont les objets d'une sous-catégorie de *Mem*, notée *CR<sub>n</sub>-sens*, isomorphe à une sous-catégorie de la shape-catégorie de Holsztynski pour  $CR_n \hookrightarrow K_t$  (cf. [2], p. 30). Par exemple, dans le système neuronal d'un animal supérieur, les sens relatifs à un *CR* d'ordre supérieur modélisent des concepts ; et le langage consistera à représenter chacun d'eux par un mot.

**Proposition 2** *s<sub>n</sub>B, s'il existe, a même CR<sub>n</sub>-forme que B. Et les perspectives de CR<sub>n</sub>-sens forment une sous-catégorie du paysage actuel P<sub>n</sub> de CR<sub>n</sub> en t, dans laquelle B admet une perspective de s<sub>n</sub>B pour réflexion.*

On définit de même le *CR<sub>n</sub>-sens* d'un pattern  $\mathcal{B}$  quelconque comme étant la limite  $s_n \mathcal{B}$  du foncteur analogue  $T_n \mathcal{B} \rightarrow K_t$ . Si  $s_n B_i$  existe pour chacun de ses objets  $B_i$ , on montre que  $s_n \mathcal{B}$  est la colimite dans *Mem* du pattern  $(s_n B_i)_{i \in I}$  dont les liens sont déduits de ceux entre les  $B_i$ . Par exemple un sens pour un *CR* moteur dans un système neuronal représentera une commande de mouvement, d'autant plus complexe que le niveau du *CR* est plus élevé.

## 4 Processus d'apprentissage relatif à un *CR* [6-8]

Dans un système naturel complexe auto-organisé (tel un système biologique ou neuronal), l'évolution au cours du temps est contrôlée et mémorisée conjointement par les différents centres de régulation sur leurs paysages respectifs, en tenant compte à chacune de leurs étapes des inputs externes, de l'état interne, et des expériences antérieures, le but étant d'arriver à la meilleure adaptation possible. Pour modéliser ce processus dans un *SEM*, nous utiliserons les notions suivantes.

**Stratégie.** Sur une catégorie  $K$  avec un 0 une *stratégie* est la donnée d'un ensemble de patterns  $C$  "à recoller", d'un ensemble de patterns  $L$  "à activer", d'objets supplémentaires "à ajouter", d'objets ou de flèches de  $K$  "à supprimer". Ceci se traduit par la donnée d'une esquisse mixte (au sens de [4b], p. 449)  $\Sigma$  sur une supercatégorie de  $K$ , ayant un cocône de base  $C$  pour

tout pattern  $C$  à recoller, un cône de base  $L$  pour tout pattern  $L$  à activer, un cocône à base vide et de sommet  $Z$  pour tout objet  $Z$  à supprimer.

**Complexification.** La complexification de  $K$  pour  $\Sigma$  sera le prototype de cette esquisse (au sens de [4b], p. 451), c'est-à-dire la solution du problème universel de plonger l'esquisse dans une catégorie avec objet initial  $0$  de sorte que tous les (co)cônes distingués deviennent (co)limites, les sommets des cocônes à base vide devenant  $0$ .

**Dynamique pour un CR.** Dans un *SEM*, chaque  $CR_n$  agit par l'intermédiaire de son paysage actuel, à chaque instant  $t_k$  de sa propre échelle de temps. Le système étant connu jusqu'en  $t_k$  cette action est modélisée par le choix d'une stratégie  $\Sigma_n$  sur le paysage actuel  $P_n$  de  $CR_n$  en  $t_k$  et par la construction de la complexification correspondante, appelée *paysage anticipé* pour  $t_{k+1}$  (fin de l'étape). Dans un système neuronal, les patterns à recoller pourront représenter les informations transmises par des récepteurs et leur recollement sert à les mémoriser, ou à les rappeler s'il existe déjà dans *Mem*; les patterns à activer correspondent à des commandes d'effecteurs sous forme de patterns dans  $CR_n$ -sens, les items à supprimer seront inhibés.

La stratégie  $\Sigma_n$  ne sera répercutée au système que par l'intermédiaire du foncteur distorsion, de sorte que le paysage  $P'_n$  de  $CR_n$  en  $t_{k+1}$  peut être différent du paysage anticipé  $P_n^*$ . D'après la propriété universelle de la complexification on a un foncteur comparaison de  $P_n^*$  vers  $P'_n$  (cf. [6]), dont le défaut d'isomorphisme mesure l'erreur d'évaluation de  $CR_n$ , et qui sera mémorisé comme résultat de  $\Sigma_n$  à l'étape suivante.

**Mémorisation d'une stratégie.** Etant donnée une stratégie  $\Sigma$  sur  $P_n$ , soit  $S$  le pattern recollant les différents patterns distingués par  $\Sigma$ . - 1. La situation sous-jacente à  $\Sigma$  sera mémorisée par le  $CR_n$ -sens  $S'$  du pattern image de  $S$  par la distorsion  $\delta$ ; - 2. La stratégie sera mémorisée par le  $CR_n$ -sens  $\Sigma'$  du pattern dans  $K_t$  construit comme suit : on recolle à  $S$  un cône-colimite de  $\delta C$  dans *Mem* pour tout pattern  $C$  à recoller, un cône-limite de base  $T_n \delta L$  et de sommet  $s_n L$  (cf. §3) pour tout pattern  $L$  à activer, un isomorphisme de  $Z$  vers  $0$  pour tout objet  $Z$  à supprimer. On a une flèche de  $S'$  vers  $\Sigma'$  dans *Mem*.

Au cours du temps, l'ensemble des stratégies mémorisées engendre un sous-système évolutif de *Mem*, qu'on appelle *Strat*, et qui modélise la mémoire procédurale du *SEM*.

**Evaluation et choix des stratégies.** On suppose que chaque  $CR_n$  est muni



d'un *agent évaluateur*  $\Omega_n$  dont le champ dans  $P_n$  est muni d'une fonction force vers  $\mathbf{R}$ . Chaque stratégie  $\Sigma'$  mémorisée dans *Strat* sera munie d'une flèche vers  $\Omega_n$ . Si le résultat est atteint à la fin de l'étape (i.e., le foncteur comparaison est un isomorphisme), la force de la flèche  $S' \rightarrow \Sigma'$  dans le champ de  $\Omega_n$  est augmentée, sinon cette force est diminuée. (Nous n'avons pas la place de préciser ici la manière dont les forces sont calculées, ceci dépendant des applications; parfois les forces ne prennent que deux valeurs, modélisant un + et un -.)

## 5 Comportement d'un système complexe

Ici nous indiquons de manière intuitive (cf. [6-8] pour plus de détails) comment la dynamique globale d'un *SEM* est régie par une "dialectique" entre ses différents  $CR_n$ , qui explique l'émergence de phénomènes complexes et dont les principales caractéristiques sont les suivantes.

**Compétition entre CR.** Supposons le *SEM* construit jusqu'à l'instant  $t$ . En  $t$  les stratégies  $\Sigma_n$  choisies par chaque  $CR_n$  sur son paysage actuel à l'instant  $t_k$  de sa propre échelle de temps précédant  $t$  peuvent être considérées comme des stratégies sur le paysage global  $PG_t$  en  $t$  (celui-ci "contenant" les divers  $P_n$ ). Si toutes ces stratégies sont compatibles, elles sont répercutées par le foncteur distorsion en une stratégie globale sur  $K_t$ , et le nouvel état du système sera obtenu par complexification relativement à celle-ci. Mais chaque  $\Sigma_n$  étant choisi en tenant compte seulement de  $P_n$  ces stratégies peuvent être incompatibles, par exemple si l'une exige qu'un certain pattern de  $K_t$  soit supprimé et une autre qu'il soit recollé. Dans ce cas, certaines des stratégies doivent être modifiées.

**Fractures.** Pour  $CR_n$ , si sa stratégie  $\Sigma_n$  ne peut pas être réalisée, l'étape en cours est interrompue et on dit qu'il y a fracture. Il faut alors débiter une nouvelle étape et choisir sur le nouveau présent actuel de  $CR_n$  une stratégie qui soit cohérente avec la  $CR_n$ -trace de la stratégie effective du système.

Les fractures jouent un rôle essentiel dans la recherche de nouvelles stratégies et donc dans la formation de processus cognitifs d'ordre supérieur pour des systèmes complexes, en particulier pour les systèmes neuronaux (cf. plus loin).

**Interaction entre stratégies.** Le choix des stratégies par l'intermédiaire des paysages des différents  $CR_n$  procure une certaine souplesse au système,

car il bénéficie d'un double aléatoire : -1. Plusieurs stratégies pour  $CR_n$  peuvent avoir la même répercussion au système, car des patterns différents du paysage ont le même  $CR_n$ -sens ou conduisent à un même recollement (i.e. colimite) dans *Mem.* - 2. Inversement, un pattern du système ne sera activé ou recollé que si ses traces pour plusieurs  $CR_n$  le sont conjointement. Un pattern  $C$  du paysage de  $CR_n$  y étant la trace de divers patterns du système, il pourra intervenir dans des stratégies globales différentes selon les traces choisies par l'intermédiaire des autres  $CR$ . Ainsi une stratégie de niveau supérieur peut s'adapter à des situations analogues, mais où certaines "variables" sont changées, ce qui donne un modèle mathématique de la notion de "cadre" proposée par Minsky [10].

**Intrication des échelles de temps.** La différence des durées des étapes pour des  $CR_n$  de niveaux différents joue un rôle important dans l'évolution du *SEM*. Ainsi pendant une seule étape d'un  $CR_m$  de niveau élevé, s'écoulent plusieurs étapes d'un  $CR_n$  de niveau inférieur. Les changements causés par celui-ci au système ne sont observables par  $CR_m$  qu'après coup (son délai de propagation étant long), mais leur accumulation risque d'y créer ultérieurement une fracture. Dans ce cas, la nouvelle stratégie choisie par  $CR_m$  peut rétroagir sur  $CR_n$  en lui imposant une nouvelle stratégie après fracture.

Ainsi il s'instaure une sorte de *dialectique* entre  $CR$  hétérogènes de par leurs échelles de temps et leurs niveaux de complexité : la dynamique globale dépend surtout à court terme des  $CR_n$  des niveaux inférieurs, mais elle est modulée à long terme par les stratégies des niveaux supérieurs dont les fractures se répercutent aux niveaux inférieurs en leur imposant de nouvelles stratégies. Cette dialectique explique aussi comment un système complexe peut avoir un comportement imprévisible à long terme, même s'il est entièrement déterminé localement (au niveau de chaque  $CR$ ).

Dans les applications où le paysage d'un  $CR_m$  de niveau élevé est "pondéré" de sorte que son évolution soit décrite à l'aide de la variation de certains paramètres numériques, celui-ci aura le comportement d'un système dynamique classique pendant chacune de ses étapes, mais les étapes sont interrompues (fracture) par l'apparition d'une singularité obligeant à un changement de paramètre. Ceci montre que les *SEM* répondent au problème soulevé par Rosen [11] d'approcher un système complexe "locally and temporarily" par des systèmes simples (à savoir, les paysages des  $CR_m$  pendant une de

leurs étapes), avec changement d'approximation "when the discrepancy becomes intolerable". De plus, comme dans l'approche géométrico-topologique de Thom [12], on peut dire que la morphologie est décrite par les "catastrophes" (fractures); toutefois ceci ne s'applique qu'à la description au niveau du paysage d'un  $CR_m$  et, par suite de l'intrication des niveaux, n'entraîne pas l'existence d'universaux morphologiques globaux.

**Contraintes structurales temporelles.** On associe à  $CR_n$  à l'instant  $t$  les trois nombres suivants :

- la durée moyenne  $c_n(t)$  des étapes pour  $CR_n$  précédant  $t$  ;
- le délai de propagation  $d_n(t)$  pour l'étape en cours ;
- la moyenne  $\delta_n(t)$  des emfans de  $(m - 1)$ -stabilité en  $t$  des objets dont les perspectives interviennent dans le paysage actuel en  $t$  (où  $m$  est le niveau des agents de  $CR_n$ ).

Pour que l'étape puisse se dérouler, il faut que *ces nombres vérifient les inégalités suivantes* :

$$d_n(t) \ll c_n(t) \ll \delta_n(t),$$

où  $\ll$  signifie "d'un ordre de grandeur plus petit", et ce pour tout  $t$ , sauf sur un ensemble de mesure nulle, pendant la durée du SEM.

Le *vieillessement* du SEM est caractérisé par le fait que, pour certains  $CR_n$ , les rapports  $\delta_n(t)/d_n(t)$  et  $\delta_n(t)/c_n(t)$  diminuent pour presque tout  $t$  à partir d'un certain  $t_n$ . Pour maintenir les contraintes temporelles précédentes, les différents  $CR$  doivent alors allonger la durée  $c_n(t)$  de leurs étapes, d'où une "cascade" de désynchronisations successives pour les  $CR$ . Ce modèle, appliqué au SEM associé à un organisme, unifie les différentes théories du vieillissement connues (Ces résultats sont exposés dans un article "*Memory Evolutive Systems : an Application to an Aging Theory*", à paraître ; cf aussi [5] et [7]).

**Rétro-spection et pro-spective.** Le paysage actuel de  $CR_n$  a été formé à partir des paysages instantanés durant son présent actuel, en n'en retenant que les aspects observables pendant tout ce présent. On dit que  $CR_n$  a la *propriété de rétro-spection* si, au moment d'une fracture, le paysage actuel  $P_n$  de l'étape en cours peut être rétroactivement étendu en une catégorie  $\widehat{P}_n$  dans laquelle sont rendues observables des perspectives qui ne figuraient pas dans  $P_n$  bien qu'appartenant aux paysages instantanés ayant servi à le construire. Ce processus permet de rechercher la cause de la fracture en remontant du résultat obtenu  $\Sigma'$  aux situations  $S'$  qui ont pu le produire à l'aide

des flèches  $S' \rightarrow \Sigma'$  (cf. §4) observables dans  $\hat{P}_n$ . Le développement d'un tel processus pourrait caractériser le phénomène de conscience dans un système neuronal, selon des idées de Changeux [1] et de Edelman [3] ; biologiquement, il résulterait de l'activation de certaines boucles par un renforcement de l'attention, donnant accès à des items de niveaux inférieurs initialement "cachés" (cf. [8]).

Un tel  $CR_n$  de niveau supérieur peut avoir, de plus, la *propriété de pro-spective* qui lui permet de planifier dans son présent actuel le choix de stratégie pour plusieurs étapes successives, avec prévision des risques de fractures, en utilisant encore les stratégies mémorisées avec leurs résultats. Ce processus nécessite qu'il y ait formation de concepts et de stratégies de plus en plus complexes représentables par une simple unité dans  $CR_n$ -Sens (comme dans le cas du langage).

## Références

- [1] J.-P. Changeux, *L'homme neuronal*, Fayard, Paris 1983.
- [2] Cordier & Porter, *Shape Theory*, Wiley 1989.
- [3] G. M. Edelman, *The remembered Present*, Basic Books, 1989.
- [4] C. Ehresmann, *Oeuvres complètes et commentées* : a) III ;b) IV. Amiens 1983.
- [5] Ehresmann & Vanbremeersch, *Hierarchical evolutive systems: a mathematical model for complex systems*, Bull. Math. Biology, 49 N°1 (1987), 13-50.
- [6] Ehresmann & Vanbremeersch, *Modèle d'interaction dynamique entre un système complexe et des agents*, Revue Intern. Systémique 3 (1989), 315-341.
- [7] Ehresmann & Vanbremeersch, *Un modèle pour des systèmes évolutifs avec mémoire, basé sur la Théorie des Catégories*, Revue Intern. Systémique 5 N°1 (1991), 5-25.

- [8] Ehresmann & Vanbremeersch, *How do heterogeneous levels with hierarchical modulation interact on a system's learning process ?*, Proc. Intern. Symposium on Systems Research, Baden-Baden 1991 (and Baden-Baden 1992, to appear).
- [9] D. O. Hebb, *The organization of behavior*, Wiley 1949.
- [10] M. Minsky, *The Society of Mind*, Simon & Schuster, 1986.
- [11] R. Rosen, *Organisms as causal systems which are not mechanisms . . .* ; In : *Theoretical Biology and Complexity*, Academic Press, New York 1985.
- [12] R. Thom, *Modèles mathématiques de la morphogénèse*, Union Gén. d'Édition, Collection 10/18, Paris 1974.

**Faculté de mathématiques et d'informatique**  
**33 rue Saint-Leu**  
**80039 Amiens Cedex, France**