

CAHIERS DE TOPOLOGIE ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE CATÉGORIQUES

YVES DIERS

Catégories multialgébriques galoisiennes

Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques, tome 33, n° 1 (1992), p. 55-69

http://www.numdam.org/item?id=CTGDC_1992__33_1_55_0

© Andrée C. Ehresmann et les auteurs, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégoriques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CATEGORIES MULTIALGÈBRIQUES GALOISIENNES

by Yves DIERS

ABSTRACT. An axiomatic description of categories analogous to the category of separable algebraic field extensions of a field, is given, which entails the construction of the closure object, the fundamental functor, the fundamental group and the one-to-one Galois correspondance.

Introduction. Dans un article intitulé “Abstract Galois Theory” [1], M. Barr montre comment la plupart des propriétés de la catégorie des extensions algébriques de degré fini d’un corps commutatif k sont conséquences d’un petit nombre de propriétés, et présente une théorie de Galois “abstraite” déduite de la théorie de Galois “axiomatique” de A. Grothendieck [9]. Cette théorie de Galois établit, par exemple, une dualité entre la catégorie des corps commutatifs extensions algébriques séparables de degré fini d’un corps commutatif k et la catégorie des G -espaces homogènes finis continus pour un groupe profini G . Cette présentation axiomatique de la théorie de Galois ainsi que celle de A. Grothendieck présentent un défaut. Elles ne permettent pas la construction de l’objet “clôture séparable” puisque celle-ci n’est pas de degré fini. Il en résulte que le foncteur fondamental n’est pas représentable et nécessite une construction élaborée, et que le groupe fondamental n’apparaît pas simplement comme groupe de Galois de l’objet clôture séparable mais de façon plus laborieuse comme limite projective de groupes de Galois.

Sous le nom de : Catégories multialgébriques galoisiennes, nous donnons une description axiomatique des catégories analogues aux catégories d’extensions algébriques séparables d’un corps commutatif, qui permet la construction de l’objet “clôture” de laquelle se déduisent facilement le foncteur fondamental, le groupe fondamental et la théorie de Galois.

Les catégories multialgébriques galoisiennes sont définies à partir des catégories multialgébriques pré-galoisiennes introduites dans [7]. Ce sont les catégories multialgébriques pré-galoisiennes équilibrées i.e. telles que tout morphisme à la fois monomorphique et épimorphique est isomorphique, et dont les égalisateurs sont couniversallement connexes. Cette dernière propriété signifie que l'image directe le long d'un morphisme, du diagramme égalisateur d'un couple de morphismes parallèles, est un cône projectif connexe. La catégorie $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$ ayant pour objets les corps commutatifs extensions algébriques séparables d'un corps commutatif k , et ayant pour morphismes les homomorphismes de corps laissant le corps k fixe, est multialgébrique galoisienne. Si $P(X)$ est un polynôme séparable à coefficients dans k , la catégorie $\mathbf{Ext}(P(X)/k)$ ayant pour objets les corps commutatifs extensions de k obtenues en adjoignant à k des zéros de $P(X)$, et ayant pour morphismes les homomorphismes de corps laissant le corps k fixe, est multialgébrique galoisienne. Si N est une extension normale séparable de k , la catégorie $\mathbf{Ext}(N/k)$ des corps intermédiaires entre k et N , est multialgébrique galoisienne. Etant donné un groupe G , la catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$ ayant pour objets les G -algèbres de Boole élémentaires, c'est-à-dire les algèbres de Boole non nulles sur lesquelles agit le groupe G de façon compatible avec la structure d'algèbre de Boole et de telle façon que l'orbite de chaque élément non nul soit un recouvrement fini de l'unité, et ayant pour morphismes, les homomorphismes d'algèbres de Boole préservant l'action de G , est une catégorie multialgébrique galoisienne. Etant donné un groupe topologique G , la catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElemCont}$ des G -algèbres de Boole élémentaires continues, c'est-à-dire des G -algèbres de Boole élémentaires telles que le sous-groupe stabilisateur de chaque élément soit ouvert dans G , est multialgébrique galoisienne. Si \mathbf{A} est une catégorie multialgébrique galoisienne et \mathbf{L} est une comonade universelle [7] sur \mathbf{A} , alors la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ des \mathbf{L} -coalgèbres est multialgébrique galoisienne. Si N est un objet normal [7] d'une catégorie multialgébrique galoisienne \mathbf{A} , la catégorie $\mathbf{A} // N$ des objets de \mathbf{A} faiblement au-dessus de N , est multialgébrique galoisienne. Tout produit fini de catégories multialgébriques galoisiennes est multialgébrique galoisienne.

On utilise les résultats de l'étude des catégories multialgébriques pré-galoisiennes [7] pour prouver que toute catégorie multialgébrique galoisienne \mathbf{A} possède un objet faiblement final unique à isomorphisme près, noté $L_{\mathbf{A}}$, appelé objet fondamental de \mathbf{A} , et qui est précisément l'objet "clôture". C'est la clôture séparable de k dans la catégorie $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$. Dans la catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$ (resp. $G\text{-}\mathbf{BoolElemCont}$), l'objet fondamental est la G -algèbre de Boole élémentaire (resp. continue) constituée des parties

de G dont le stabilisateur dans $P(G)$ est un sous-groupe (resp. ouvert) d'index fini de G . Le groupe $G_{\mathbf{A}}$ des automorphismes de $L_{\mathbf{A}}$ est un groupe profini : c'est le groupe fondamental de \mathbf{A} . Dans la catégorie $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$, c'est le groupe de Galois de la clôture séparable de k . Dans la catégorie $G\text{-BoolElem}$ (resp. $G\text{-BoolElemCont}$), c'est la complétion profinie \hat{G} du groupe (resp. topologique) G . Le foncteur $\text{Hom}_{\mathbf{A}}(-, L_{\mathbf{A}}) : \mathbf{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ est le foncteur fondamental de \mathbf{A} . Nous prouvons qu'il se relève en une équivalence de catégories $H_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \rightarrow G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSep}$ à valeurs dans la catégorie des $G_{\mathbf{A}}$ -espaces homogènes séparés c'est-à-dire des ensembles sur lesquels le groupe $G_{\mathbf{A}}$ agit transitivement de telle façon que le stabilisateur de chaque élément soit fermé. Il en résulte une dualité entre :

- (0) la catégorie \mathbf{A} et la catégorie $G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSep}$,
- (1) l'ensemble ordonné des objets de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés de $G_{\mathbf{A}}$,
- (2) l'ensemble ordonné des objets normaux de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés normaux de $G_{\mathbf{A}}$,
- (3) la catégorie \mathbf{A}_0 des objets de présentation finie de \mathbf{A} et la catégorie $G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSepFin}$ des $G_{\mathbf{A}}$ -espaces homogènes séparés finis,
- (4) l'ensemble ordonné des objets de présentation finie de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes ouverts de $G_{\mathbf{A}}$.

Chacune de ces dualités est une "théorie de Galois". En particulier la dualité (3) est la théorie de Galois "abstraite" décrite par M. Barr [1].

On obtient finalement un théorème de structure en prouvant que les catégories multialgébriques galoisiennes sont précisément les catégories équivalentes aux catégories $G\text{-BoolElemCont}$ de G -algèbres de Boole élémentaires continues pour un groupe profini G .

1. Cônes projectifs couniversallement connexes.

1.0. Image directe.

Soit \mathbf{A} une catégorie à sommes amalgamées. Si $(f : A \rightarrow A', m : A \rightarrow M)$ est un couple de morphismes de \mathbf{A} ayant pour somme amalgamée le couple $(n : A' \rightarrow N, g : M \rightarrow N)$, le morphisme n est appelé *image directe* de m par f . Le couple (N, n) est en fait la valeur, pour l'objet (M, m) , du foncteur $f^* : A/\mathbf{A} \rightarrow A'/\mathbf{A}$ adjoint à gauche au foncteur $f_* : A'/\mathbf{A} \rightarrow A/\mathbf{A}$ composition par f . Un cône projectif Γ de \mathbf{A} de sommet A s'identifie à un diagramme de A/\mathbf{A} . L'image de ce diagramme par le foncteur f^* s'identifie à un cône projectif de \mathbf{A} de sommet A' , appelé *image directe* de Γ par

f . Mais cette notion d'image directe n'est pas définie dans une catégorie localement multiprésentable qui ne possède pas de sommes amalgamées. On est amené à étendre cette notion en substituant aux sommes amalgamées les multisommes amalgamées i.e. les multicolimites de couples de morphismes de même source [3, définition 1.5.1.]

1.1. Spectre de l'image directe.

Soit \mathbf{A} une catégorie à multisommes amalgamées et soit $f : A \rightarrow A'$ un morphisme de \mathbf{A} . Choisissons, pour chaque morphisme $m : A \rightarrow M$, une multisomme amalgamée $(n_j : A' \rightarrow N_j, f_j : M \rightarrow N_j)_{j \in J}$ du couple $(f : A \rightarrow A', m : A \rightarrow M)$. De la définition de la multisomme amalgamée, il résulte que la famille de morphismes $(f_j : (M, m) \rightarrow f_*(N_j, n_j))_{j \in J}$ est une famille universelle de morphismes de l'objet (M, m) vers le foncteur $f_* : A'/\mathbf{A} \rightarrow A/\mathbf{A}$. Le foncteur f_* possède donc un multiadjoint à gauche [3, définition 3.3.0.]. Le spectre relatif à f_* est le foncteur $Spec_{f_*} : (A/\mathbf{A})^{op} \rightarrow \mathbb{E}ns$ qui associe l'ensemble J à l'objet (M, m) , et associe à un morphisme $g : (M', m') \rightarrow (M, m)$, l'application $Spec_{f_*}(g) : Spec_{f_*}(M, m) \rightarrow Spec_{f_*}(M', m')$ qui, à l'élément j , assigne l'unique élément j' tel qu'il existe un morphisme $g_j : N_{j'} \rightarrow N_j$ vérifiant $f_j g = g_j f'_{j'}$ et $g_j n_{j'} = n_j$. Le foncteur $Spec_{f_*}$ est noté $Spec_f$ et est appelé le spectre de l'image directe par f .

1.2. Cône projectif image directe.

Considérons un diagramme $(M_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de \mathbf{A} et un cône projectif $(m_i : A \rightarrow M_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de \mathbf{A} de sommet A et base $(M_i)_{i \in \mathbb{I}}$. Un cône s'identifie au foncteur $M : \mathbb{I} \rightarrow A/\mathbf{A}$ défini par $M(i) = (M_i, m_i)$ et $M(u) = M_u$, c'est-à-dire au diagramme $(M_i, m_i)_{i \in \mathbb{I}}$ de A/\mathbf{A} . Pour chaque objet i de \mathbb{I} , soit $(n_{ij} : A' \rightarrow N_{ij}, f_{ij} : M_i \rightarrow N_{ij})_{j \in Spec_f(M_i, m_i)}$ une multisomme amalgamée du couple $(f : A \rightarrow A', m_i : A \rightarrow M_i)$. Pour chaque morphisme $u : i' \rightarrow i$ de \mathbb{I} et chaque élément j de $Spec_f(M_i, m_i)$, il existe un unique morphisme $N_{uj} : N_{i'j'} \rightarrow N_{ij}$ vérifiant $j' = Spec_f(M_u)(j)$, $N_{uj} f_{i'j'} = f_{ij} M_u$ et $N_{uj} n_{i'j'} = n_{ij}$. Notons \mathbb{J} la catégorie de représentation du foncteur $Spec_f M^{op} : \mathbb{I}^{op} \rightarrow \mathbb{E}ns$ c'est-à-dire la catégorie comma $(Spec_f M^{op}, 1_{\mathbb{E}ns})$. Soit $N : \mathbb{J} \rightarrow \mathbf{A}$ le diagramme de \mathbf{A} défini par $N(i, j) = N_{ij}$ et, pour $u : (i', j') \rightarrow (i, j)$, par $N(u) = N_{uj}$. Le cône projectif $(n_{ij} : A' \rightarrow N_{ij})_{(i, j) \in \mathbb{I}}$ de sommet A' et de base $(N_{ij})_{(i, j) \in \mathbb{I}}$ s'appelle le cône projectif image directe du cône $(m_i : A \rightarrow M_i)_{i \in \mathbb{I}}$ par le morphisme f .

1.3. Cônes projectifs couniversallement connexes.

1.3.0. Cônes connexes.

Suivant [11, page 86], une catégorie \mathbf{I} est dite connexe si elle n'est pas vide et, pour tout couple d'objets (i, j) de \mathbf{I} , il existe une suite finie de morphismes de la forme $i \longrightarrow i_1 \longleftarrow i_2 \longrightarrow \cdots \longleftarrow i_{n-1} \longrightarrow j$. Un diagramme $(M_i)_{i \in \mathbf{I}}$ de \mathbf{A} est dit connexe si sa catégorie d'indexation \mathbf{I} est connexe. Un cône projectif $(m_i : A \rightarrow M_i)_{i \in \mathbf{I}}$ de sommet A et base $(M_i)_{i \in \mathbf{I}}$ est dit connexe si \mathbf{I} est connexe. Par exemple, un couple de morphismes parallèles $(u, v) : B \rightrightarrows C$ de \mathbf{A} définit un diagramme connexe de \mathbf{A} indexé par la catégorie \mathbf{I} ayant deux objets i_0, i_1 et deux morphismes non unités $u_1, u_2 : i_0 \rightrightarrows i_1$. L'égalisateur $m : A \rightarrow B$ de (u, v) définit un cône projectif connexe $(m : A \rightarrow B, um : A \rightarrow C)$ de sommet A et base (u, v) appelé cône égalisateur de (u, v) .

1.3.1. Définition. Un cône projectif $(m_i : A \rightarrow M_i)_{i \in \mathbf{I}}$ est couniversallement connexe si son image directe par chaque morphisme $f : A \rightarrow A'$ est connexe. Un égalisateur est couniversallement connexe si le cône égalisateur associé l'est.

1.3.2. Proposition. Un cône projectif $(m_i : A \rightarrow M_i)_{i \in \mathbf{I}}$ est couniversallement connexe si et seulement si pour tout morphisme $f : A \rightarrow A'$, la colimite du diagramme $(Spec_f(M_i, m_i))_{i \in \mathbf{I}}$ est l'ensemble singleton.

Preuve. Le cône projectif $(m_i : A \rightarrow M_i)_{i \in \mathbf{I}}$ s'identifie à un foncteur $M : \mathbf{I} \rightarrow \mathbf{A}/\mathbf{A}$ et son image directe par un morphisme $f : A \rightarrow A'$ est un cône projectif ayant pour base un diagramme indexé par la catégorie de représentation du foncteur $Spec_f M^{op} : \mathbf{I}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ (cf. 1.2.). Or il est immédiat à partir de la construction des colimites dans \mathbf{Ens} , que cette catégorie de représentation est connexe si et seulement si la colimite du diagramme $(Spec_f(M_i, m_i))_{i \in \mathbf{I}}$ est l'ensemble singleton.

2. Catégories multialgébriques galoisiennes.

Suivant [12, 5.3.3.], une catégorie est dite équilibrée si ses morphismes à la fois monomorphiques et épimorphiques sont isomorphiques.

2.0. Définition. Une catégorie est *multialgébrique galoisienne* si elle est une catégorie multialgébrique prégaloisienne équilibrée dont les égalisateurs sont couniversallement connexes.

2.1. Exemples.

2.1.0. La catégorie $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$ des corps commutatifs extensions algébriques séparables d'un corps commutatif k .

C'est une catégorie multialgébrique prégaloisienne [7, exemple 5.3.]. Soit $f : K \rightarrow M$ un épimorphisme de $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$. C'est un épimorphisme dans chacune des catégories $\mathbf{ExtAlg}(k)$, $\mathbf{Ext}(k)$, \mathbf{Kc} puisque $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$ est une sous-catégorie coréflexive de $\mathbf{ExtAlg}(k)$, que $\mathbf{ExtAlg}(k)$ est une sous-catégorie coréflexive de $\mathbf{Ext}(k)$ [7, 2.2.0. et 2.2.1.] et que $\mathbf{Ext}(k) = k/\mathbf{Kc}$. C'est aussi un épimorphisme dans la catégorie \mathbf{AncReg} des anneaux commutatifs réguliers car tout anneau commutatif régulier est sous-anneau d'un produit de corps commutatifs. Soit $g : K \rightarrow N$ un morphisme de $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$. L'image directe d'un morphisme $f : K \rightarrow N$ quelconque de $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$ par g dans la catégorie des anneaux commutatifs, est le morphisme $N \otimes_K f : N \otimes_K K = N \rightarrow N \otimes_K M$. Montrons que $N \otimes_K M$ est un anneau régulier. Supposons d'abord que $f : K \rightarrow M$ soit une extension simple de K i.e. soit de la forme $f : K \rightarrow K[X]/P$ où P est un polynôme irréductible séparable de $K[X]$. Ce polynôme P se factorise dans $N[X]$ sous la forme $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ où P_1, \dots, P_n sont des polynômes irréductibles séparables distincts de $N[X]$. Alors $N \otimes_K M \simeq N[X]/P \simeq N[X]/P_1 \times \cdots \times N[X]/P_n$ est une k -algèbre algébrique régulière séparable. Ce résultat s'étend à tous les morphismes f puisqu'ils sont colimites filtrantes d'extensions simples. Il en résulte d'abord que le couple conoyau de f se calcule de la même façon dans les deux catégories \mathbf{AncReg} et \mathbf{Anc} , et par suite, si f est épimorphique dans $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$ alors f est épimorphique dans \mathbf{Anc} , et du fait que les corps sont des anneaux dominants, il suit que f est isomorphique. La catégorie $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$ est donc équilibrée. Il en résulte ensuite que la multisomme amalgamée du couple $(g : K \rightarrow N, f : K \rightarrow M)$ a pour sommets les localisations de $N \otimes_K M$ et que le foncteur $\mathit{Spec}_g : (K/\mathbf{ExtAlgSep}(k))^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ associé à (M, f) , le spectre de l'anneau $N \otimes_K M$. Puisque le foncteur $N \otimes_K (-) : \mathbf{Mod}(K) \rightarrow \mathbf{Mod}(K)$ préserve les égalisateurs et que le foncteur spectre premier $\mathbf{AncReg}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ préserve les coégalisateurs, il s'en suit que le foncteur Spec_g préserve les coégalisateurs. Par suite, si $f : K \rightarrow M$ est égalisateur de $(m, n) : M \rightrightarrows P$ dans $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$, alors $f : (K, 1_K) \rightarrow (M, f)$ est égalisateur de $(m, n) : (M, f) \rightrightarrows (P, mf)$ dans $K/\mathbf{ExtAlgSep}(k)$ et par conséquent $\mathit{Spec}_g(f)$ est coégalisateur de $(\mathit{Spec}_g(m), \mathit{Spec}_g(n))$. Or le but de $\mathit{Spec}_g(f)$ est un ensemble singleton. Donc l'égalisateur de (m, n) est couniversellement connexe (proposition 1.3.2.). La catégorie $\mathbf{ExtAlgSep}(k)$ est donc multialgébrique galoisienne.

2.1.1. La catégorie $G\text{-BoolElem}$ des G -algèbres de Boole élémentaires.

Etant donné un groupe G , une G -algèbre de Boole est une algèbre de Boole munie d'une action de G compatible avec la structure d'algèbre de Boole et un G -homomorphisme de G -algèbres de Boole est un homomorphisme d'algèbres de Boole qui préserve l'action de G . Ils constituent la catégorie \mathbf{Bool}^G qui n'est rien d'autre que la catégorie des foncteurs de la catégorie canoniquement associée à G , dans la catégorie \mathbf{Bool} des algèbres de Boole. Une G -algèbre de Boole B est dite *élémentaire* si elle n'est pas nulle et si l'orbite de chaque élément non nul est un recouvrement fini de l'unité, c'est-à-dire si, pour tout élément non nul b de B , l'ensemble $Gb = \{\sigma b : \sigma \in G\}$ est fini et a pour borne supérieure l'élément unité 1 de B . La catégorie $G\text{-BoolElem}$ est la sous-catégorie pleine de la catégorie \mathbf{Bool}^G ayant pour objets les G -algèbres de Boole élémentaires. Cette sous-catégorie est fermée dans \mathbf{Bool}^G pour les sous-objets, les objets quotients non nuls, les colimites filtrantes et contient l'objet initial $\{0, 1\}$. Tout morphisme $f : B \rightarrow C$ de $G\text{-BoolElem}$ est monomorphique puisque, si b est un élément non nul de B , Gb est un recouvrement de l'unité de B , donc $Gf(b)$ est un recouvrement de l'unité de C , et par suite $f(b)$ est non nul. Il s'en suit que l'ensemble des G -algèbres de Boole élémentaires quotients d'une G -algèbre de Boole B , constitue une famille universelle de morphismes de l'objet B de \mathbf{Bool}^G vers la sous-catégorie $G\text{-BoolElem}$ [3, définition 3.1.0.] et, par conséquent, que $G\text{-BoolElem}$ est une sous-catégorie multiréflexive de \mathbf{Bool}^G [3, définition 3.3.1.]. Puisque la catégorie \mathbf{Bool}^G est localement de présentation finie, la catégorie $G\text{-BoolElem}$ est localement multiprésentable [6, proposition 2.3.] et par suite multialgébrique [7,1].

L'ensemble $P(G)$ des parties de G est une algèbre de Boole sur laquelle agit le groupe G par $\sigma X = \{\sigma x : x \in X\}$ de telle façon que l'orbite de chaque élément non nul soit un recouvrement de l'unité. Notons $P_0(G)$ le sous-ensemble de $P(G)$ constitué des parties de G dont l'orbite est finie. C'est une G -algèbre de Boole élémentaire. C'est un objet faiblement final de $G\text{-BoolElem}$ puisque toute G -algèbre de Boole élémentaire B possède un ultrafiltre Φ et que l'on définit un morphisme $f_\Phi : B \rightarrow P_0(G)$ en posant $f_\Phi(b) = \{\sigma \in G : \sigma^{-1}b \in \Phi\}$.

Les objets de présentation finie de $G\text{-BoolElem}$ sont les G -algèbres de Boole élémentaires finies. Une telle G -algèbre de Boole B possède au moins un atome b dont l'orbite $\{b = \sigma_1 b, \sigma_2 b, \dots, \sigma_n b\}$ constituée de n atomes est un recouvrement de l'unité. Alors tout élément de B est union d'éléments de l'orbite de b , donc b engendre la G -algèbre de Boole B . Notons H le groupe stabilisateur de b . Pour tout morphisme $f : B \rightarrow P_0(G)$ de $G\text{-BoolElem}$,

l'élément $f(b)$ est une partie de G de stabilisateur H donc est une réunion de classes d'équivalence à droite de G modulo H . Le sous-groupe H de G étant d'index fini, les éléments de la forme $f(b)$ sont nécessairement en nombre fini et par suite, les morphismes f sont en nombre fini. Il s'en suit que les objets de $G\text{-BoolElem}$ sont de puissance finie.

Soit B une G -algèbre de Boole telle que l'orbite de chaque élément soit finie. L'ensemble des G -algèbres de Boole élémentaires quotients de B est l'ensemble des quotients de B par les idéaux stables (par G) propres maximaux de B . Or tout idéal stable I de B est engendré par des éléments invariants (par G) puisque chaque élément a de I appartient à l'idéal engendré par l'élément $\bigvee Ga$ appartenant à I et invariant par G . Donc le treillis des idéaux stables de B est isomorphe au treillis des idéaux de l'algèbre de Boole $J(B)$ constituée des éléments invariants de B . L'ensemble des idéaux stables propres maximaux de B est donc isomorphe à l'ensemble des idéaux maximaux de $J(B)$. La famille universelle de morphismes de l'objet B de \mathbf{Bool}^G vers la sous-catégorie $G\text{-BoolElem}$ peut alors être notée $(q_I : B \rightarrow B/I)_{I \in \text{Spec}_{\max} J(B)}$ où $q_I : B \rightarrow B/I$ dénote la G -algèbre de Boole quotient de B par l'idéal de B engendré par l'idéal I de $J(B)$. Si B est non nulle, $J(B)$ l'est aussi et $\text{Spec}_{\max} J(B)$ est non vide, c'est-à-dire que B possède au moins une G -algèbre de Boole élémentaire quotient. Si b est un élément non nul de B , le complémentaire de l'élément invariant $\bigvee Gb$ engendre un idéal stable propre de B noté K et la G -algèbre quotient non nulle $q_K : B \rightarrow B/K$ possède au moins une G -algèbre de Boole élémentaire quotient $q : B/K \rightarrow B/I$ où $I \in \text{Spec}_{\max} J(B)$. La relation $q_I(b) = qq_K(b) = 1$ implique $q_I(b) \neq 0$. Il en résulte que le morphisme $(q_I) : B \rightarrow \prod_{I \in \text{Spec}_{\max} J(B)} B/I$ est monomorphique.

Soit $f : B \rightarrow B'$ un morphisme de $G\text{-BoolElem}$. Pour tout morphisme $m : B \rightarrow M$ de $G\text{-BoolElem}$, notons $(n : B' \rightarrow N, g : M \rightarrow N)$ la somme amalgamée de (f, m) dans la catégorie \mathbf{Bool}^G . Il est immédiat que N est une G -algèbre de Boole telle que l'orbite de chaque élément soit finie. Le morphisme n est monomorphique car les monomorphismes sont couniversels dans \mathbf{Bool} donc dans \mathbf{Bool}^G . Il s'en suit que N est non nulle donc possède au moins une G -algèbre de Boole élémentaire quotient. Cela prouve que la propriété d'amalgamation est satisfaite dans $G\text{-BoolElem}$. La catégorie $G\text{-BoolElem}$ est donc multialgébrique prégaloisienne [7, définition 5.0.]. La multisomme amalgamée du couple (f, m) est la famille de couples $(q_I n : B' \rightarrow N/I, q_I g : M \rightarrow N/I)_{I \in \text{Spec}_{\max} J(N)}$. Le foncteur $\text{Spec}_f : (B/G\text{-BoolElem})^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Ens}$, spectre de l'image directe de f (1.1.), associe donc à l'objet (m, M) l'ensemble $\text{Spec}_{\max} J(N)$. Ce foncteur préserve les

coégalisateurs car les égalisateurs sont couniversels dans \mathbf{Bool} donc dans \mathbf{Bool}^G , le foncteur qui associe $J(N)$ à N préserve les égalisateurs, et le foncteur $Spec_{max} : \mathbf{Bool}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ préserve les coégalisateurs. Il s'en suit que si $m : B \rightarrow M$ est égalisateur de $(p, q) : M \rightrightarrows P$ dans $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$, alors $m : (B, 1_B) \rightarrow (M, m)$ est égalisateur de $(p, q) : (M, m) \rightrightarrows (P, pm)$ dans $B/G\text{-}\mathbf{BoolElem}$ et, par conséquent, $Spec_f(m)$ est coégalisateur de $(Spec_f(p), Spec_f(q))$. Le but de $Spec_f(m)$ étant un ensemble singleton, l'égalisateur de (p, q) est couniversellement connexe (proposition 1.3.2.).

Soit $f : B \rightarrow C$ un épimorphisme de la catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$. Montrons que c'est un épimorphisme dans la catégorie \mathbf{Bool}^G . Soient $m, n : C \rightrightarrows D$ deux morphismes de \mathbf{Bool}^G vérifiant $mf = nf$. Notons D_0 la sous- G -algèbre de Boole constituée des éléments de D dont l'orbite est finie. Les deux morphismes m et n ont leurs images dans D_0 et induisent donc deux morphismes $m_0, n_0 : C \rightrightarrows D_0$ vérifiant $m_0f = n_0f$. On a vu précédemment que l'objet D_0 est sous-objet d'un produit d'objets de $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$. La relation $m_0f = n_0f$ jointe au fait que f est épimorphique dans $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$ implique alors l'égalité $m_0 = n_0$ donc l'égalité $m = n$. Il s'en suit que f est à la fois monomorphique et épimorphique dans la catégorie \mathbf{Bool}^G . Or la catégorie \mathbf{Bool}^G est équilibrée puisque la catégorie \mathbf{Bool} l'est. Le morphisme f est donc isomorphique. La catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$ est donc équilibrée et par suite, elle est multialgébrique galoisienne.

2.2. Proposition. *Si \mathbf{A} est une catégorie multialgébrique galoisienne et \mathbf{L} est une comonade universelle sur \mathbf{A} [7, définition 2.0.], la catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ des \mathbf{L} -coalgèbres est multialgébrique galoisienne.*

Preuve. La catégorie $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ est multialgébrique prégaloisienne [7, proposition 5.2.]. Elle est équilibrée puisque la catégorie \mathbf{A} l'est et que le foncteur oubli de structure $U^{\mathbf{L}} : \mathbf{A}^{\mathbf{L}} \rightarrow \mathbf{A}$ préserve les épimorphismes et reflète les isomorphismes. De l'universalité de \mathbf{L} , il découle que le foncteur $L : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}$ préserve les égalisateurs et par suite que le foncteur $U^{\mathbf{L}}$ les préserve aussi. Les égalisateurs sont couniversellement connexes dans $\mathbf{A}^{\mathbf{L}}$ puisqu'ils le sont dans \mathbf{A} et que le foncteur $U^{\mathbf{L}}$ les préserve ainsi qu'il préserve les multi-sommes amalgamées [7, preuve de la proposition 2.1.].

2.3. Exemple.

La catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElemCont}$ des G -algèbres de Boole élémentaires continues pour un groupe topologique G .

Etant donné un groupe topologique G , une G -algèbre de Boole élémentaire est dite *continue* si le stabilisateur de chacun de ses éléments est un sous-groupe ouvert de G . La catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElemCont}$ est la sous-catégorie

pleine de \mathbf{Bool}^G ayant pour objets les G -algèbres de Boole élémentaires continues. Pour chaque objet B de $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$, notons LB la sous- G -algèbre de Boole élémentaire continue constituée des éléments de B dont le stabilisateur est un sous-groupe ouvert de G . Chaque morphisme $f : B \rightarrow C$ de $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$ induit un morphisme $Lf : LB \rightarrow LC$. On définit ainsi un endofoncteur idempotent L de $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$. L'inclusion de LB dans B définit une transformation naturelle $\varepsilon : L \rightarrow 1_{G\text{-}\mathbf{BoolElem}}$ qui munit L d'une structure de comonade idempotente universelle \mathbf{L} sur $G\text{-}\mathbf{BoolElem}$. La catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElem}^{\mathbf{L}}$ est équivalente à la catégorie $G\text{-}\mathbf{BoolElemCont}$. C'est une catégorie multialgébrique galoisienne.

2.4. Proposition. *Si \mathbf{A} est une catégorie multialgébrique galoisienne et N est un objet normal de \mathbf{A} , la catégorie \mathbf{A}/N des objets de \mathbf{A} faiblement au-dessus de N , est multialgébrique galoisienne.*

Preuve. La catégorie \mathbf{A}/N est une sous-catégorie pleine coréflexive de \mathbf{A} [7, preuve de la proposition 7.3.] équivalente à la catégorie des coalgèbres pour une comonade universelle sur \mathbf{A} .

2.5. Exemple.

Si N est un corps commutatif extension algébrique séparable normale d'un corps commutatif k , la catégorie $\mathbf{ExtAlgSep}(k)/N$ est la catégorie $\mathbf{Ext}(N/k)$ des corps commutatifs extensions intermédiaires entre k et N . Si $P(X)$ est un polynôme séparable de $k[X]$, le corps de décomposition de $P(X)$ est une extension algébrique séparable normale N de k et la catégorie $\mathbf{ExtAlgSep}(k)/N$ est la catégorie $\mathbf{Ext}(P(X)/k)$ [7, 2.2.2.].

2.6. Proposition. *Tout produit fini de catégories multialgébriques galoisiennes est une catégorie multialgébrique galoisienne.*

Preuve. Immédiate à partir de [7, proposition 5.4.]

3. Théorie de Galois des catégories multialgébriques galoisiennes.

3.0. Théorème. *Le foncteur fondamental $\mathbf{Hom}_{\mathbf{A}}(-, L_{\mathbf{A}}) : \mathbf{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ d'une catégorie multialgébrique galoisienne \mathbf{A} se relève en une équivalence de catégorie $H_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \rightarrow G_{\mathbf{A}}\text{-}\mathbf{EspHomSep}$ induisant une dualité entre :*

- (0) la catégorie \mathbf{A} et la catégorie $G_{\mathbf{A}}\text{-}\mathbf{EspHomSep}$ des $G_{\mathbf{A}}$ -espaces homogènes séparés,
- (1) l'ensemble ordonné des objets de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés de $G_{\mathbf{A}}$,

- (2) l'ensemble ordonné des objets normaux de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés normaux de $G_{\mathbf{A}}$,
- (3) la catégorie \mathbf{A}_0 des objets de présentation finie de \mathbf{A} et la catégorie $G_{\mathbf{A}}$ -
 $\mathbf{EspHomSepFin}$ des $G_{\mathbf{A}}$ -espaces homogènes séparés finis,
- (4) l'ensemble ordonné des objets de présentation finie de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes ouverts de $G_{\mathbf{A}}$.

Preuve. D'après le théorème 6.0. de [7], le foncteur fondamental $Hom_{\mathbf{A}}(-, L_{\mathbf{A}}) : \mathbf{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$ se relève en un foncteur $H_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \rightarrow G_{\mathbf{A}}$ - $\mathbf{EspHomSep}$ qui possède pour adjoint à gauche le foncteur $F_{\mathbf{A}}$ défini par $F_{\mathbf{A}}(G_{\mathbf{A}}/H) = Fix(H)$. Considérons un morphisme $u : A \rightarrow L_{\mathbf{A}}$. L'image de u par le foncteur $F_{\mathbf{A}}H_{\mathbf{A}}$ est le morphisme $f_u : Fix(G_u) \rightarrow L_{\mathbf{A}}$ fixé par le groupe de Galois G_u de u . Le morphisme u se factorise par f_u en un morphisme $v : A \rightarrow Fix(G_u)$. Montrons que v est épimorphique. Puisque tout objet de \mathbf{A} est sous-objet de $L_{\mathbf{A}}$, il suffit de montrer que deux morphismes $m, n : Fix(G_u) \rightarrow L_{\mathbf{A}}$ égalisés par le morphisme v sont nécessairement égaux. Il existe deux automorphismes μ, ν de $L_{\mathbf{A}}$ vérifiant $m = \mu f_u$ et $n = \nu f_u$. Les égalités $\mu^{-1}\nu u = \mu^{-1}\nu f_u v = \mu^{-1}n v = \mu^{-1}m v = f_u v = u$ impliquent $\mu^{-1}\nu \in G_u$, donc $\mu^{-1}\nu f_u = f_u$ et $n = \nu f_u = \mu f_u = m$. Le morphisme v est donc épimorphique et par suite isomorphique. Il en résulte que le foncteur $F_{\mathbf{A}}H_{\mathbf{A}}$ est isomorphe à l'identité de \mathbf{A}^{op} et par conséquent que le foncteur $H_{\mathbf{A}}$ est pleinement fidèle.

Montrons que le foncteur $H_{\mathbf{A}}$ préserve les coégalisateurs. Pour chaque morphisme $m : A \rightarrow M$, la multisomme amalgamée du couple $(u : A \rightarrow L_{\mathbf{A}}, m : A \rightarrow M)$ est la famille de couples $(1_{L_{\mathbf{A}}} : L_{\mathbf{A}} \rightarrow L_{\mathbf{A}}, r : M \rightarrow L_{\mathbf{A}})$ où r parcourt l'ensemble $\{r : rm = u\} = Hom_{\mathbf{A}}(m, L_{\mathbf{A}})^{-1}(u)$. Le foncteur $Spec_u : (A/\mathbf{A})^{op} \rightarrow \mathbf{Ens}$, spectre de l'image directe par u , associe donc, à l'objet (M, m) , l'ensemble $Hom_{\mathbf{A}}(m, L_{\mathbf{A}})^{-1}(u)$, et à un morphisme $f : (M, m) \rightarrow (M', m')$, l'application induite par l'application $Hom_{\mathbf{A}}(f, L_{\mathbf{A}})$. L'hypothèse de couniversalité de la connexité des égalisateurs implique, que si $m : A \rightarrow M$ est égalisateur du couple de morphismes $(n, p) : M \rightrightarrows N$, l'application induite

$$Hom_{\mathbf{A}}(m, L_{\mathbf{A}}) : Hom_{\mathbf{A}}(m, L_{\mathbf{A}})^{-1}(u) \rightarrow Hom_{\mathbf{A}}(1_{\mathbf{A}}, L_{\mathbf{A}})^{-1}(u) = \{u\}$$

est coégalisatrice du couple d'applications induites

$$(Hom_{\mathbf{A}}(n, L_{\mathbf{A}}), Hom_{\mathbf{A}}(p, L_{\mathbf{A}})) : Hom_{\mathbf{A}}(nm, L_{\mathbf{A}})^{-1}(u) \rightrightarrows Hom_{\mathbf{A}}(m, L_{\mathbf{A}})^{-1}(u).$$

Ceci étant vrai pour tout morphisme u , il en résulte que l'application $Hom_{\mathbf{A}}(m, L_{\mathbf{A}})$ est coégalisatrice du couple d'applications $(Hom_{\mathbf{A}}(n, L_{\mathbf{A}}), Hom_{\mathbf{A}}(p, L_{\mathbf{A}}))$. Le foncteur fondamental préserve donc les coégalisateurs. Puisque le foncteur oubli de structure $G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSep} \rightarrow \mathbf{Ens}$ reflète les coégalisateurs, il s'en suit que le foncteur $H_{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^{op} \rightarrow G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSep}$ préserve les coégalisateurs.

Montrons que le foncteur $H_{\mathbf{A}}$ est essentiellement surjectif. Les objets de $G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSep}$ étant isomorphes à des objets de la forme $G_{\mathbf{A}}/H$ où H est un sous-groupe fermé de $G_{\mathbf{A}}$, il suffit de montrer que, pour tout sous-groupe fermé de H de $G_{\mathbf{A}}$, l'objet $H_{\mathbf{A}}(Fix(H))$ est isomorphe à $G_{\mathbf{A}}/H$, ce qui équivaut à montrer l'égalité $G_{f_H} = H$. On a $H \subset G_{f_H}$. Soit $\sigma \in G_{\mathbf{A}} \setminus H$. Il existe un objet de présentation finie A et un morphisme $u : A \rightarrow L_{\mathbf{A}}$ tel que l'ouvert σG_u ne rencontre pas H . L'ensemble de morphismes $Hu = \{\tau u : \tau \in H\}$ est fini. Notons $k : K \rightarrow A$ l'égalisateur simultané des morphismes de Hu . Puisque le foncteur $H_{\mathbf{A}}$ préserve les coégalisateurs, il préserve le coégalisateur simultané de l'ensemble fini des morphismes de Hu . Il s'en suit que l'application $Hom_{\mathbf{A}}(k, L_{\mathbf{A}})$ est coégalisatrice simultanée de l'ensemble des applications $Hom_{\mathbf{A}}(\tau u, L_{\mathbf{A}})$ où $\tau \in H$; c'est-à-dire que $Hom_{\mathbf{A}}(k, L_{\mathbf{A}})$ est quotient de l'ensemble $Hom_{\mathbf{A}}(A, L_{\mathbf{A}})$ par la relation d'équivalence suivante $v \sim w$ si et seulement si $\exists \tau \in H, \tau v = w$. Or dans cette équivalence, on a $\sigma u \not\sim u$, sinon il existerait $\tau \in H$ vérifiant $\sigma u = \tau u$, donc $u = \sigma^{-1}\tau u$ et $\sigma^{-1}\tau \in G_u$ donc $\tau \in \sigma G_u$, ce qui contredirait le fait que H ne rencontre pas σG_u . Donc $\sigma u k \neq uk$. Puisque le morphisme $uk : K \rightarrow L_{\mathbf{A}}$ se factorise par le morphisme $f_H : Fix(H) \rightarrow L_{\mathbf{A}}$, il s'en suit $\sigma f_H \neq f_H$ et donc $\sigma \notin G_{f_H}$. Les deux sous-groupes H et G_{f_H} sont donc égaux. Il en résulte que le foncteur $H_{\mathbf{A}}$ est essentiellement surjectif et par suite qu'il est une équivalence de catégories. D'après le théorème 6.0. [7] cette équivalence induit une dualité entre l'ensemble ordonné des objets de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés de $G_{\mathbf{A}}$. Elle induit une dualité entre l'ensemble ordonné des objets normaux de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes fermés normaux de $G_{\mathbf{A}}$ d'après la proposition 7.2. [7]. Le foncteur $H_{\mathbf{A}}$ induit aussi une dualité entre la catégorie \mathbf{A}_0 des objets de présentation finie de \mathbf{A} et la catégorie des objets de coprésentation finie de $G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSep}$ qui est précisément la catégorie $G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSepFin}$ des $G_{\mathbf{A}}$ -espaces homogènes séparés finis. Celle-ci induit une dualité entre l'ensemble ordonné des objets de présentation finie de \mathbf{A} et l'ensemble ordonné des sous-groupes ouverts de $G_{\mathbf{A}}$.

3.1. Différentes "Théories de Galois".

Chacune des dualités énoncées dans le théorème 3.0. est une "théorie des Galois". La dualité (4) est la théorie de Galois "classique". La dualité (1) en est le prolongement aux extensions de degré infini. La dualité (3) est la théorie de Galois "absraite" décrite par M. Barr [1]. La dualité (0) en est le prolongement aux extensions de degré infini.

3.2. Théorie de Galois des extensions de corps.

Pour obtenir la théorie de Galois des extensions de corps, on considère la catégorie multialgébrique galoisienne $\mathbb{E}xtAlgSep(k)$ dont l'ensemble des objets est l'ensemble de extensions algébriques séparables de k , l'ensemble des objets de présentation finie est l'ensemble des extensions algébriques séparables de degré fini de k , l'objet fondamental est la clôture séparable \bar{k} de k , et le groupe fondamental est le groupe de Galois $G_{\bar{k}/k}$ de \bar{k} sur k .

3.3. Théorie de Galois des G -algèbres de Boole élémentaires.

L'objet fondamental de la catégorie $G\text{-BoolElem}$ est la G -algèbre de Boole $P_0(G)$ constituée des parties de G dont l'orbite dans $P(G)$ est finie (2.1.1.). Etudions le groupe fondamental de $G\text{-BoolElem}$. A chaque élément σ de G , on peut associer un automorphisme $\alpha(\sigma)$ de $P_0(G)$ en posant $\alpha(\sigma)(X) = X\sigma^{-1} = \{x\sigma^{-1} : x \in X\}$, ce qui définit un homomorphisme de groupes $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(P_0(G))$. Montrons que l'image de α est dense dans $\text{Aut}(P_0(G))$. Soit B une G -algèbre de Boole finie. Elle possède au moins un atome b . L'orbite de b est l'ensemble $\{b = \sigma_1 b, \dots, \sigma_n b\}$ constitué de n atomes formant un recouvrement de l'unité. Alors tout élément de B est union d'éléments de la trajectoire de b , donc b engendre la G -algèbre de Boole B . Considérons un morphisme $f : B \rightarrow P_0(G)$. L'ensemble $\{f(b) = \sigma_1 f(b), \sigma_2 f(b), \dots, \sigma_n f(b)\}$ est un G -espace homogène constituant une partition de G . Il est nécessairement identique au G -espace des classes d'équivalence à gauche de G modulo un sous-groupe. L'un de ses éléments est donc un sous-groupe de G . En changeant le choix de l'atome b , on peut supposer que l'élément $f(b)$ est un sous-groupe de G . Pour tout autre morphisme $g : B \rightarrow P_0(G)$, l'un des éléments $\sigma_p g(b)$ est, de la même façon, un sous-groupe de G . Si on note $St(a)$ le sous-groupe stabilisateur d'un élément a d'une G -algèbre de Boole, les relations $\sigma_p g(b) = St(\sigma_p g(b)) = \sigma_p St(g(b))\sigma_p^{-1} = \sigma_p St(b)\sigma_p^{-1} = \sigma_p St(f(b))\sigma_p^{-1} = \sigma_p f(b)\sigma_p^{-1}$ impliquent $g(b) = f(b)\sigma_p^{-1} = \alpha(\sigma_p)(f(b))$. Puisque l'élément b engendre B , il s'en suit l'égalité $g = \alpha(\sigma_p)f$. Tout ouvert de base $H_{f,g}$ du groupe $\text{Aut}(P_0(G))$ [7, proposition 3.0.] contient donc au moins un élément de la forme $\alpha(\sigma)$ avec $\sigma \in G$. En d'autres termes, l'homomorphisme de groupes $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(P_0(G))$ a une image dense. Le groupe $\text{Aut}(P_0(G))$ étant profini [7,

proposition 4.3.], l'homomorphisme α se factorise de façon unique sous la forme $\alpha = \gamma\beta$ où $\beta : G \rightarrow \hat{G}$ désigne l'homomorphisme canonique de G dans sa complétion profinie et où $\gamma : \hat{G} \rightarrow \text{Aut}(P_0(G))$ est un homomorphisme continu de groupes. L'image de γ est dense donc γ est surjectif. Le groupe $\text{Aut}(P_0(G))$ est donc isomorphe au groupe quotient de \hat{G} par un sous-groupe normal fermé K . Montrons que $K = \{1\}$. Considérons un sous-groupe normal d'index fini H de G . L'ensemble $P_S(H)$ des parties de G stables par H est une sous- G -algèbre de Boole élémentaire finie de $P_0(G)$. Notons G_H le groupe de Galois du morphisme inclusion $P_S(H) \rightarrow P_0(S)$. Il est immédiat qu'un automorphisme de $P_0(G)$ de la forme $\alpha(\sigma)$ avec $\sigma \in G$, laisse fixe $P_S(H)$ si et seulement si $\sigma \in H$. En d'autres termes, on a $G_H \cap \alpha(G) = H$. Il s'en suit que le sous-groupe ouvert $\gamma^{-1}(G_H)$ de \hat{G} est tel que $\beta^{-1}(\gamma^{-1}(G_H)) = H$ donc que c'est le sous-groupe ouvert de base \hat{G} canoniquement associé à H . La relation $\gamma(K) = \{1\} \subset G_H$ implique $K \subset \gamma^{-1}(G_H)$. Ceci étant satisfait pour tous les sous-groupes de base $\gamma^{-1}(G_H)$ de \hat{G} , il en résulte que $K = \{1\}$. Le groupe fondamental de $G\text{-BoolElem}$ est donc isomorphe au groupe \hat{G} complétion profinie de G . La catégorie $G\text{-BoolElem}$ est alors équivalente à la duale de la catégorie $\hat{G}\text{-EspHomSep}$ des \hat{G} -espaces homogènes séparés.

3.4. Théorie de Galois des G -algèbres de Boole élémentaires continues.

A partir de 2.3. et 3.3., il est immédiat que l'objet fondamental de la catégorie $G\text{-BoolElemCont}$ est la G -algèbre de Boole constituée des parties de G dont le stabilisateur dans $P(G)$ est un sous-groupe ouvert d'index fini de G , et que le groupe fondamental de cette catégorie est la complétion profinie du groupe topologique G . La catégorie $G\text{-BoolElemCont}$ est donc équivalente à la duale de la catégorie $\hat{G}\text{-EspHomSep}$. Dans le cas où le groupe topologique G est profini, il coïncide avec sa complétion profinie et alors la catégorie $G\text{-BoolElemCont}$ est équivalente à la duale de la catégorie $G\text{-EspHomSep}$.

4. Structure des catégories multialgébriques galoisiennes.

4.0. Théorème. *Les catégories multialgébriques galoisiennes sont précisément les catégories équivalentes aux catégories $G\text{-BoolElemCont}$ des G -algèbres de Boole élémentaires continues pour un groupe profini G .*

Preuve. Si G est un groupe profini, la catégorie des G -algèbres de Boole élémentaires continues est multialgébrique galoisienne (exemple 2.3.). Soit

\mathbf{A} une catégorie multialgébrique galoisienne. Le groupe fondamental $G_{\mathbf{A}}$ de \mathbf{A} est profini. La catégorie \mathbf{A} est équivalente à la duale de la catégorie $G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSep}$ des $G_{\mathbf{A}}$ -espaces homogènes séparés (théorème 3.0.). La catégorie $G_{\mathbf{A}}\text{-BoolElemCont}$ des $G_{\mathbf{A}}$ -algèbres de Boole élémentaires continues est aussi équivalente à la duale de la catégorie $G_{\mathbf{A}}\text{-EspHomSep}$ (3.4.). Il s'en suit que les deux catégories \mathbf{A} et $G_{\mathbf{A}}\text{-BoolElemCont}$ sont équivalentes.

REFERENCES

- [1] M. Barr, *Abstract Galois Theory*, J. Pure Appl. Algebra **19**, (1980), 21-42.
- [2] M. Barr, *Abstract Galois Theory II*, J. Pure Appl. Algebra **25** (1982), 227 -247.
- [3] Y. Diers, *Familles universelles de morphismes*, Ann. Sco. Sc. Bruxelles **tome 93, III** (1979), 175-195.
- [4] Y. Diers, *Catégories multialgébriques*, Arch. Math. **34** (1980), 193-209.
- [5] Y. Diers, *Catégories localement multiprésentables*, Arch. Math. **34** (1980), 344-356.
- [6] Y. Diers, *Quelques constructions de catégories localement multiprésentables*, Ann. Sc. Math. Québec **IV, n°2**, (1980), 79-101.
- [7] Y. Diers, *Catégories multialgébriques prégaloisiennes*, Cahiers de Topologie et géométrie différentielles catégoriques.
- [8] P. Gabriel et F. Ulmer, *Local präsentierbare Kategorien*, Lecture Notes in Mathematics 221, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
- [9] A. Grothendieck, *Revêtements étales et groupe fondamental*, S.G.A. 1, Lecture Notes in Mathematics 224, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
- [10] P.T. Johnstone, *Topos Theory*, Academic Press, London/New York/San Francisco, 1977.
- [11] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
- [12] H. Schubert, *Categories*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1972.

Université de Valenciennes
 Département de Mathématique
 B.P. 311
 F-59304 VALENCIENNES CEDEX
 FRANCE